Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Ανοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζακης

Ομάδα ασκήσεων No 1

Πρόβλημα 1. Έστω $w_1, \ldots, w_n > 0$. Στο γραμμικό χώρο $\mathbb{C}^n$ ορίζουμε τη νόρμα του στοιχείου $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ να είναι

$$\|z\|_w = \sum_{j=1}^{n} w_j |z_j|.$$

Δείξτε ότι η $\|\cdot\|_w$ ικανοποιεί τα αξιώματα της νόρμας. Ποιο από τα αξιώματα της νόρμας αποτυγχάνει αν επιτρέψουμε σε κάποιο w_j να μηδενιστεί;

Πρόβλημα 2. Για τις νόρμες

$$\|z\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |z_j| \quad \text{και} \quad \|z\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

στο γραμμικό χώρο $\mathbb{C}^n$ (όπου ακολουθούμε πάντα το συμβολισμό $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$) δείξτε τις ανισότητες

$$\|z\|_\infty \le \|z\|_1 \le n\|z\|_\infty.$$

Πρόβλημα 3. Ορίζουμε V να είναι το σύνολο όλων των *άπειρων ακολουθιών* μιγαδικών αριθμών $z = (z_1, z_2, \ldots)$. Είναι πολύ εύκολο να δείτε ότι αν ορίσουμε πρόσθεση και πολλαπλασιασμό με μιγαδικό αριθμό κατά τον προφανή τρόπο

$$z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots), \lambda \cdot z = (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots)$$

τότε το σύνολο V είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$.

Ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες (που μπορεί να είναι και $+\infty$):

$$\|z\|_\infty = \max_{j=1,2,\ldots} |z_j| \quad \text{και} \quad \|z\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |z_j|.$$

Ορίζουμε έπειτα

$$\ell^\infty = \{z \in V : \|z\|_\infty < \infty\} \quad \text{και} \quad \ell^1 = \{z \in V : \|z\|_1 < \infty\}.$$

Δείξτε ότι τα ℓ^∞ και ℓ^1 είναι γραμμικοί υπόχωροι του V και ότι η $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στο ℓ^∞ και η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα στο ℓ^1.

Πρόβλημα 4. Υποθέστε γνωστό ότι αν $f(z)$ και $g(z)$ είναι πολυώνυμα και $g(z)$ δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο τότε υπάρχουν πολυωνυμα $q(z)$ και $r(z)$ τέτοια ώστε

$$f(z) = g(z)q(z) + r(z),$$

και είτε $r(z) \equiv 0$ είτε $\deg r < \deg g$. (Διαίρεση πολυωνύμων: το $q(z)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης f διά g και το $r(z)$ είναι το υπόλοιπο.)

Αποδείξτε ότι ένα πολυώνυμο $f(z)$ βαθμού n δε μπορεί να έχει πάνω από n ρίζες.

Αν z_0 είναι ρίζα του $f(z)$ πάρτε $g(z) = z - z_0$ και τα πολυώνυμα $q(z), r(z)$ όπως παραπάνω. Τι μπορείτε να πείτε για το $r(z)$ και τι για το βαθμό του $g(z)$;

Πρόβλημα 5. Ορίζουμε το σύνολο V να αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα βαθμού $\le n$ τα οποία μηδενίζονται στο 1. Δείξτε ότι είναι γραμμικός χώρος και ότι η διάστασή του είναι n. Ποια είναι η διάσταση αν τα στοιχεία του V είναι όλα τα πολυώνυμα βαθμου $\le n$ που μηδενίζονται στο 1 και στο i;

Βρείτε μια βάση του V που να απαρτίζεται από n πολυώνυμα. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Πρόβλημα 4.