Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 1 – 22-9-2016. παραδοτέες 29-9-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω $X = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ και Σ η σ-άλγεβρα που παράγουν τα υποσύνολα του X:

$$\{0, 1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \ldots.$$

Περιγράψτε τις μετρήσιμες συναρτήσεις $X \to \mathbb{R}$ ως προς τη Σ.

Πρόβλημα 2. Έστω Σ εκείνα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που είναι αριθμήσιμα ή τα συμπληρώματα τους είναι αριθμήσιμα. Δείξτε ότι το Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο $\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 3. Αν Σ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο σύνολο X και $f : Y \to X$ είναι μια οποιαδήποτε συνάρτηση, δείξτε ότι το σύνολο $\left\{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\right\}$ είναι μια σ-άλγεβρα πάνω στο Y.

Πρόβλημα 4. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες (ως προς κάποια σ-άλγεβρα Σ του X) δείξτε ότι τα σύνολα

$$\{x \in X : f(x) < g(x)\}, \quad \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

είναι μετρήσιμα υποσύνολα του X.

Πρόβλημα 5. Το σύνολο $\mathbb{R}^2$ μπορεί να γίνει μετρικός χώρος είτε με την Ευκλείδια μετρική

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

είτε με την ℓ^1 μετρική

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Δείξτε ότι μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^2$ συγκλίνει σε ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$ ως προς την Ευκλείδια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς το ίδιο σημείο ως προς την ℓ^1 μετρική.

Πρόβλημα 6. Σε ένα μετρικό χώρο X *ανοιχτό κάλυμμα ενός συνόλου* A είναι μια οικογένεια G_i, $i \in I$, από ανοιχτά σύνολα τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i$. (Εδώ I είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο *δεικτών* του οποίου τα στοιχεία έχουν ως μοναδικό τους ρόλο το να ονοματίζουν τα διάφορα ανοιχτά σύνολα G_i.)

Ένα σύνολο $K \subseteq X$ λέγεται *συμπαγές* αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του K έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (οποτεδήποτε δηλαδή καλύψουμε το K με κάποια ανοιχτά σύνολα τότε υπάρχουν πεπερασμένα στο πλήθος από αυτά που αρκούν για την κάλυψη).

(α) Δείξτε ότι κάθε συμπαγές σύνολο είναι κλειστό (δηλ. το συμπλήρωμα του είναι ανοιχτό).

(β) Δείξτε επίσης ότι αν ένα υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου είναι κλειστό τότε είναι και συμπαγές.

Πρόβλημα 7. (α) Δείξτε ότι αν K είναι συμπαγές σε ένα μετρικό χώρο X τότε κάθε ακολουθία στο K έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με το όριό της μέσα στο K.

(β) Δείξτε επίσης ότι αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση που είναι συνεχής παντού στο K τότε υπάρχει σημείο στο K όπου «πιάνεται» το μέγιστο της f.

Πρόβλημα 8. (α) Ας είναι $A_1, A_2, A_3, \ldots$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X, που είναι όλα τα στοιχεία της σ-άλγεβρας Σ. Ορίζουμε για κάθε $x \in X$ το στοιχείο της Σ

$$C_x = \bigcap_{x \in A_i} A_i.$$

Δείξτε ότι αν δύο σύνολα C_x και C_y τέμνονται τότε είναι ίσα.

(β) Δείξτε, χρησιμοποιώντας το (α), ότι αν μια σ-άλγεβρα είναι άπειρη τότε δε μπορεί να είναι αριθμήσιμη. (Παρατηρείστε ότι αν τα A_i είναι όλα τα στοιχεία της Σ τότε κάθε μετρήσιμο σύνολο «φτιάχνεται» ως ένωση από κάποια C_x.)