Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5 – 20-10-2016. Παραδοτέες 27-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $0 \le p, q, r \le \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ δείξτε την ανισότητα
$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q,$$
για $f, g \ge 0$,

Πρόβλημα 2. Ας είναι $w_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$, και $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Αποδείξτε την ανισότητα
$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n w_n\right|^2 \le \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 w_n \cdot \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 w_n.$$

Πρόβλημα 3. Αν $1 \le p_1 < p < p_2 \le \infty$ δείξτε $L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Μπορείτε να βρείτε ένα άνω φράγμα για τη νόρμα $\|f\|_p$ μέσω των νορμών $\|f\|_{p_1}$ και $\|f\|_{p_2}$;

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι $\sup_{\|f\|_p=1} \int fg = \|g\|_q$, όπου οι p, q είναι συζυγείς εκθέτες και $f, g \ge 0$. (Ισχύει και για μιγαδικές g, όπου τώρα το supremum το παίρνουμε πάνω από όλες τις μιγαδικές f με $\|f\|_p = 1$.)

Πρόβλημα 5. Οι *κλιμακωτές* συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων πεπερασμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι προσεγγίζουν τις $C_c(\mathbb{R})$ συναρτήσεις.

Πρόβλημα 6. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε $F(k) = F_f(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}$, για $k \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{|k|\to\infty} F_f(k) = 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 5 και αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για κλιμακωτές συναρτήσεις.

Πρόβλημα 7. Σε ένα χώρο Hilbert H λέμε ότι η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς (weakly) στο x αν για κάθε y ισχύει $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Γράφουμε τότε $x_n \xrightarrow{w} x$.

Δείξτε ότι $x_n \to x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$ αλλά ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει αν ο χώρος H είναι απειροδιάστατος.

Πρόβλημα 8. Αν x_n, x στοιχεία ενός χώρου Hilbert και $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$ δείξτε ότι $x_n \to x$.

Πρόβλημα 9. Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ είναι ένας $m \times n$ μιγαδικός πίνακας συμβολίζουμε με A^* το συζυγή του ανάστροφου πίνακα $A^*_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$ (ο A^* λέγεται adjoint του A). Εύκολα βλέπει κανείς ότι ισχύει $(AB)^* = B^*A^*$. Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$ στο $\mathbb{C}^n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων (τα x, y θεωρούνται διανύσματα στήλες, $n \times 1$) ως
$$\langle x, y\rangle = y^* x.$$
Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (δηλ. $\langle Ax, x\rangle > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) και self-adjoint (δηλ. $A^* = A$) δείξτε ότι
$$(x, y) := \langle Ax, y\rangle \tag{1}$$
είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$ έχει τη μορφή που περιγράφεται στην (1) του Προβλήματος 9.