Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 4 – 13-10-2016. Παραδοτέες 20-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω $\epsilon > 0$. Κατασκευάστε ανοιχτό σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε διάστημα I να ισχύει $m(E \cap I) > 0$ και επίσης να ισχύει $m(E) \le \epsilon$.

Λύση: Ας είναι r_n μια αρίθμηση των ρητών και I_n ένα ανοιχτό διάστημα που περιέχει το ρητό r_n και έχει μήκος $\epsilon 2^{-n}$. Παίρνουμε $E = \cup_n I_n$ και παρατηρούμε ότι $m(E) \le \sum_n m(I_n) \le \epsilon$.

Πρόβλημα 2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) \ge (1-\epsilon)m(I)$,

Υπόδειξη: Πάρτε ανοιχτό $G \supseteq E$ με $m(G \setminus E)$ πολύ μικρό. Θυμηθείτε ότι τα ανοιχτά σύνολα στο $\mathbb{R}$ είναι ενώσεις ακολουθίας ανοιχτών διαστημάτων, ξένων ανά δύο.

Λύση: Ας είναι $G \supseteq E$ ανοιχτό με

$$m(E) \ge (1-\epsilon)m(G) \tag{1}$$

και ας είναι $G = \cup_n I_n$ το G γραμμένο ως μια ξένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Τότε $m(E) = \sum_n m(E \cap I_n)$ και αν υποθέσουμε, αντίθετα με αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε, ότι $m(E \cap I_n) < (1-\epsilon)m(I_n)$, τότε έχουμε $m(E) < \sum_n (1-\epsilon)m(I_n) = (1-\epsilon)\sum_n m(I_n) = (1-\epsilon)m(G)$ που έρχεται σε αντίφαση με την (1).

Πρόβλημα 3. Αν $f_n \to f$, $g_n \to g$, $g \in L^1(\mu)$, $\int g_n \to \int g$ και $|f_n| \le g_n$ σ.π. δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ και $\int f_n \to \int f$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για μια γενίκευση του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τη μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση που φράσσει την ακολουθία με πολλές, φτάνει αυτές να συγκλίνουν κατάλληλα. Αποδείξτε το με παρόμοιο τρόπο, π.χ. εφαρμόζοντας το Λήμμα του Fatou στις συναρτήσεις $g_n + g - |f_n - f|$.

Λύση: Έχουμε $|f_n| \le g_n, |f_n| \to |f|, g_n \to g$ άρα $|f| \le g$ και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $g + g_n - |f_n - f| \ge 0$. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Fatou στη συνάρτηση αυτή έχουμε

$$\begin{aligned} \int \liminf g + g_n - |f - f_n| &\le \liminf \int g + g_n - |f - f_n|, \quad \text{άρα} \\ \int 2g - \limsup |f - f_n| &\le 2\int g - \limsup \int |f - f_n|, \quad \text{και} \\ \int 2g &\le \int 2g - \limsup \int |f - f_n|, \end{aligned}$$

οπότε έχουμε $\limsup \int |f - f_n| \le 0$, άρα ισούται με 0.

Πρόβλημα 4. Αν $0 \le h_n \to h$ σ.π. και $\int h_n \to \int h$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο A ισχύει

$$\int_A h_n \to \int_A h.$$

Λύση: Έχουμε $h_n \mathbf{1}_A \to h \mathbf{1}_A$ σ.π. Εφαρμόζουμε το γενικευμένο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Προβλήματος 3 με $h_n \mathbf{1}_A$ στη θέση της f_n, $h\mathbf{1}_A$ στη θέση της f και h_n στη θέση της g_n.

Πρόβλημα 5. Έστω $f, f_n \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ σ.π., και $\int |f_n| \to \int |f|$. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

Λύση: Εφαρμόστε το Πρόβλημα 3 με $|f_n - f|$ στη θέση της f_n και $|f_n| + |f|$ στη θέση της g_n.

Πρόβλημα 6. Δώστε παράδειγμα $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει $\int |f_n - f| \to 0$ και να μην ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κανένα $x \in [0,1]$. Δώστε παράδειγμα και για το αντίστροφο, να έχουμε δηλ. $f_n \to f$ σ.π. και να μην έχουμε $\int |f_n - f| \to 0$.

Λύση: Έστω $f \equiv 0$. Χωρίστε το $[0,1]$ σε 10 ίσα διαστήματα και πάρτε ως πρώτες 10 συναρτήσεις τις χαρακτηριστικές αυτών των διαστημάτων. Έπειτα χωρίστε το $[0,1]$ σε 100 ίσα διαστήματα και πάρτε ως τις επόμενες 100 συναρτήσεις τις χαρακτηριστικές αυτών των διαστημάτων, κ.ο.κ. Έτσι κάθε σημείο x θα δει άπειρες φορές ως τιμή του και το 0 και το 1, άρα το όριο δεν υπάρχε.

Για το ανάποδο πάρτε πάλι $f \equiv 0$ και $f_n(x) = \mathbf{1}\left(\frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}\right) \cdot n(n+1)$. Τα ολοκληρώματα των f_n είναι όλα ίσα με 1 και σε κάθε σημείο x βλέπουμε τελικά ως τιμές το 0 μόνο.

Πρόβλημα 7. Σε ένα χώρο μέτρου X έχουμε συναρτήσεις $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ (με πεπερασμένες τιμές παντού) και $\int |f_n - f| \to 0$. Δείξτε ότι για καθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \to 0$. Δείξτε το ίδιο υποθέτοντας ότι $f_n \to f$ σ.π. και ότι $\mu(X) < \infty$.

Λύση: Έχουμε $\mu\{|f_n - f| \ge \epsilon\} \le \epsilon^{-1} \int |f_n - f| \to 0$ (από την ανισότητα του Markov).

Έστω τώρα $\mu(X) < \infty$ και $f_n \to f$ σ.π. Γράφουμε $A_n(\epsilon) = \{|f_n - f| \ge \epsilon\}$. Αν δεν ισχύει το επιθυμητό θα υπάρχει ένα $\delta > 0$ και άπειρα στο πλήθος n τέτοια ώστε $\mu(A_n(\epsilon)) \ge \delta$. Πετάμε τα υπόλοιπα n και περιοριζόμαστε σε αυτή την υπακολουθία. Έστω

$$A = \limsup A_n(\epsilon) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \ge n} A_k$$

το σύνολο των x που ανήκουν σε άπειρα από τα $A_n(\epsilon)$. Από την σ.π. σύγκλιση έπεται ότι $\mu(A) = 0$, όμως

$$\mu(A) = \lim_n \mu(\bigcup_{k \ge n} A_k(\epsilon)) \ge \lim_n \mu(A_n(\epsilon)) \ge \delta,$$

άτοπο. (Το ότι $\mu(X) < \infty$ χρησιμοποιήθηκε στο ότι η φθίνουσα τομή που ορίζει το A έχει μέτρο το όριο των μέτρων.)

Η υπόθεση $\mu(X) < \infty$ είναι απαραίτητη για να ισχύει το δεύτερο. Πάρτε για παράδειγμα $X = \mathbb{R}$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n(x) = \mathbf{1}(n \le x \le n+1)$.

Πρόβλημα 8. Για τους χώρους $L^p(\mathbb{R})$ (με το μέτρο Lebesgue) για $1 \le p \le \infty$ δείξτε ότι κανείς δεν περιέχει κάποιον άλλο από αυτούς. Ποια είναι η αντίστοιχη πρόταση για τους χώρους $L^p([0,1])$;

Λύση: Ας είναι $1 \le \alpha < \beta \le \infty$, Πρέπει να δείξουμε ότι δεν ισχύει $L^\alpha(\mathbb{R}) \subseteq L^\beta(\mathbb{R})$ αλλά ούτε και $L^\beta(\mathbb{R}) \subseteq L^\alpha(\mathbb{R})$.

Ας πάρουμε πρώτα την περίπτωση $\beta < \infty$ και ας είναι $\alpha < \gamma < \beta$.

Η συνάρτηση $\mathbf{1}(0 < x < 1)\, x^{1/\gamma}$ ανήκει στο L^α αλλά όχι στο L^β.

Η συνάρτηση $\mathbf{1}(1 < x)\, x^{-1/\gamma}$ ανήκει στο L^β αλλά όχι στο L^α.

Αν τώρα $\beta = \infty$ η συνάρτηση $\mathbf{1}(0 < x < 1)\, x^{1/\gamma}$ ανήκει στο L^α αλλά όχι στο L^∞ και η συνάρτηση $\mathbf{1}(1 < x)\, x^{-1/\gamma}$ ανήκει στο L^∞ αλλά όχι στο L^α.

Αντίθετα ισχύει $L^\beta([0,1]) \subseteq L^\alpha([0,1])$ (Πρόβλημα 8 του Φυλλαδίου No 2).

Πρόβλημα 9. Αν (X, μ) είναι ένας χώρος πιθανότητας (μ θετικό μέτρο, $\mu(X) = 1$) και $0 < r < s \le \infty$ δείξτε την ανισότητα $\|f\|_r \le \|f\|_s$. Δείξτε επίσης ότι $\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Λύση: Η ανισότητα $\|f\|_r \le \|f\|_\infty$ για $1 \le r < \infty$ είναι τετριμμένη.

Αν $s < \infty$ και $1 < p = \frac{r}{s}, q$ είναι συζυγείς εκθέτες τότε, εφαρμόζοντας της ανισότητα Hölder με τους εκθέτες αυτούς, παίρνουμε

$$\int |f|^r = \int |f|^r \cdot 1 \le \left(\int |f|^{r \frac{s}{r}}\right)^{\frac{r}{s}} \cdot \mu(X)^{1/q} = \|f\|_s^r.$$

Για τη σύγκλιση $\|f\|_p \to \|f\|_\infty$ για $p \to \infty$, ισχύει προφανώς $\|f\|_p \le \|f\|_\infty$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ και p αρκετά μεγάλο ισχύει $\|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \epsilon$. Έχουμε

$$\|f\|_p \ge \left(\int\limits_{\{|f| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\}} |f|^p \right)^{1/p} \ge \mu\{|f| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\}^{1/p} (\|f\|_\infty - \epsilon).$$

Όμως $\mu\{|f| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\} > 0$ για κάθε $\epsilon > 0$ (αλλιώς το $\mathrm{esssup} f$ θα ήταν μικρότερο από το $\|f\|_\infty$) οπότε $\mu\{|f| \ge \|f\|_\infty - \epsilon\}^{1/p} \to 1$ για $p \to \infty$ και άρα

$$\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p \ge \|f\|_\infty - \epsilon$$

για κάθε $\epsilon > 0$ οπότε $\liminf_{p\to\infty} \|f\|_p = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Πρόβλημα 10. Ας είναι (X, Σ_1, μ) και (Y, Σ_2, ν) δύο χώροι μέτρου και $f : X \to Y$. Λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη αν $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ για κάθε $A \in \Sigma_2$. Η μετρήσιμη συνάρτηση f λέμε ότι *διατηρεί τα μέτρα* αν για κάθε $A \in \Sigma_2$ έχουμε $\mu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$.

Αν $X = Y = [0, 1)$ με το μέτρο Lebesgue δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \{2x\}$ διατηρεί τα μέτρα. Εδώ $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0, 1)$ είναι το κλασματικό μέρος του a. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ένα προς ένα και ότι δεν ισχύει $m(f(A)) = m(A)$ για κάθε μετρήσιμο A.

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι $m(\lambda E) = |\lambda| m(E)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε Lebesgue μετρήσιμο E, όπου $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$.

Λύση: Ας είναι $E \subseteq Y$ Lebesgue μετρήσιμο σύνολο και $A = f^{-1}(E) \subseteq X$. Οι προεικόνες του $y \in Y$ είναι τα δύο σημεία $\frac{y}{2}$ και $\frac{y}{2} + \frac{1}{2}$, άρα $A = \frac{1}{2}E \cup (\frac{1}{2}E + \frac{1}{2})$ (ξένη ένωση). Άρα $m(A) = \frac{1}{2}m(E) + \frac{1}{2}m(E) = m(E)$.
