Έκδοση 1.1 (21 Οκτ. 2010)

Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue. Εγχειρίδιο Χρήσης.

Μιχάλης Κολουντζάκης

Τμ. Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης, Λεωφόρος Κνωσού, 714 09 Ηράκλειο, kolount AT gmail.com

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Στο κείμενο αυτό περιλαμβάνονται μερικές βασικές γνώσεις για το μέτρο και το ολοκλήρωμα Lebesgue.

Γράφτηκε ώστε να συμπεριλάβει τις γνώσεις που απαιτούνται για να μπορέσουν οι φοιτητές που παίρνουν το μάθημα "Αρμονική Ανάλυση" (Παν. Κρήτης, Φθινόπωρο 2010-11) να παρακολουθήσουν ένα μάθημα που ακολουθεί μια φυσιολογική πορεία.

Η υπόθεση ότι οι φοιτητές δεν έχουν μάθει τα του ολοκληρώματος Lebesgue επιβάλλει όλες οι αποδείξεις να γίνονται με χρήση του ολοκληρώματος Riemann και μόνο.

Οι στρεβλώσεις που προκαλεί στο μάθημα αυτό μια τέτοια προσέγγιση είναι πολλές. Πολλά θεωρήματα της Αρμονικής Ανάλυσης δε μπορούν να αποδειχθούν στη φυσιολογική τους γενικότητα, ή, και αν μπορούν, η απόδειξη είναι αναγκαστικά πολύ δυσκολότερη απ΄ ό,τι αν κανείς γνωρίζει το ολοκλήρωμα Lebesgue. Μια πολύ έντονη τέτοια περίπτωση είναι όταν πάει κανείς να αποδείξει τις διάφορες ιδιότητες της συνέλιξης δύο ολοκληρωσίμων συναρτήσεων.

Είναι λοιπόν προτιμότερο, νομίζω, οι φοιτητές να αποκτήσουν πρώτα τις γνώσεις που απαιτούνται για να κάνουν χρήση του ολοκληρώματος Lebesgue, ακόμη και αν, λόγω της έλλειψης χρόνου, δε δουν τις αποδείξεις των βασικών θεωρημάτων ή ακόμη και αν αγνοούν βασικές έννοιες όπως η έννοια της μετρησιμότητας συνόλων και συναρτήσεων.

1 Μέτρο Lebesgue στο $\mathbb{R}$

Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ το μέτρο (Lebesgue) του E, που το συμβολίζουμε με $m(E)$ ή με $|E|$ είναι μια γενίκευση της έννοιας του μήκους. Αν $E = (a, b)$ είναι διάστημα τότε φυσικά το μήκος του είναι ίσο με $b - a$. Εύκολα μπορεί κανείς να ορίσει το μήκος μιας πεπερασμένης ή ακόμη και αριθμήσιμης ένωσης διαστημάτων

$$m(\bigcup_n (a_n, b_n)) = \sum_n (b_n - a_n),$$

αν φυσικά τα διαστήματα είναι ανά δύο ξένα. Υπάρχουν όμως πολύ πιο περίπλοκα σύνολα από αυτά. Ο γενικός ορισμός του μέτρου ενός συνόλου δίδεται έμμεσα. Παίρνουμε όλες τις καλύψεις του συνόλου E με αριθμήσιμες οικογένειες από διαστήματα I_n: $E \subseteq \cup_n (a_n, b_n)$ και παίρνουμε το infimum των ποσοτήτων

$$\sum_n (b_n - a_n).$$

(Προκύπτει εύκολα ότι με τον ορισμό αυτό δεν αλλάζει το μέτρο των διαστημάτων.)

> Για λόγους που δε θέλουμε να περιγράψουμε σε αυτό το κείμενο προκύπτει ότι δε μπορεί κανείς να ορίσει το μέτρο σε όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και ταυτόχρονα να περιμένει να είναι χρήσιμο. Για να αποκτήσει το μέτρο Lebesgue τις καλές του ιδιότητες (περιγράφονται παρακάτω) είναι απαραίτητο

να περιορίσουμε τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία έχουν μέτρο. Την οικογένεια αυτή των συνόλων για των οποίων το μέτρο μπορούμε να μιλάμε την αποκαλούμε "τα μετρήσιμα σύνολα του $\mathbb{R}$" και δεν πρόκειται να την περιγράψουμε σε οποιαδήποτε λεπτομέρεια εκτός από το να πούμε ότι (α) όλα τα σύνολα τα οποία θα συναντήσουμε θα είναι μετρήσιμα και (β) ότι χρειάζεται αρκετή δουλειά (και το λεγόμενο "αξίωμα της επιλογής") για να δείξει κανείς ότι υπάρχουν μη μετρήσιμα σύνολα.

Από δω και πέρα θα μιλάμε μόνο για μετρήσιμα σύνολα χωρίς να το λέμε κάθε φορά.

Θεώρημα 1.1 *(Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue)*

1. $0 \le m(A) \le \infty$ *για καθε* $A \subseteq \mathbb{R}$.
2. *Όλα τα διαστήματα* (a, b) *(ανεξαρτήτως αν τα άκρα τους είναι μέσα) έχουν μέτρο* $b - a$.
3. *(Μονοτονία) Αν* $A \subseteq B$ *τότε* $m(A) \le m(B)$.
4. *(Προσθετικότητα) Αν* $E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ *είναι ανά δύο ξένα τότε*
$$m(\cup_n E_n) = \sum_n m(E_n).$$
5. *(Υποπροσθετικότητα) Αν* $E_1, E_2, \ldots \subseteq \mathbb{R}$ *(δεν ζητάμε να είναι ανά δύο ξένα) τότε*
$$m(\cup_n E_n) \le \sum_n m(E_n).$$
6. *(Αύξουσα ένωση συνόλων) Αν* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *τότε* $m(\cup_n E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.
7. *(Φθίνουσα τομή συνόλων) Αν* $E_n \supseteq E_{n+1}$ *και για κάποιο* n_0 *ισχύει* $m(E_{n_0}) < \infty$ *τότε* $m(\cup_n E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$.
8. *(Προσέγγιση από πάνω με ανοιχτά σύνολα) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$ *και* $\epsilon > 0$ *τότε υπάρχει ανοιχτό σύνολο* $G \supseteq E$ *τέτοιο ώστε* $m(G \setminus E) \le \epsilon$.
9. *(Προσέγγιση από μέσα με κλειστά) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$ *και* $\epsilon > 0$ *τότε υπάρχει κλειστό σύνολο* $F \subseteq E$ *τέτοιο ώστε* $m(E \setminus F) \le \epsilon$.
10. *(Αναλλοίωτο ως προς τις μεταφορές) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ *και*
$$E + t = \{x + t : \ x \in E\}$$
είναι η "μεταφορά του E *κατά* t*" τότε* $m(E + t) = m(E)$.
11. *(Ομοιοθεσία) Αν* $E \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *και*
$$\lambda E = \{\lambda x : \ x \in E\}$$
τότε $m(\lambda E) = |\lambda| m(E)$.

✏ **1.1** *Αποδείξτε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο* $E = \{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$ *έχει* $m(E) = 0$.

💡 *Έστω* $\epsilon > 0$ *και θεωρείστε την κάλυψη του* E *από τα ανοιχτά διαστήματα* $(x_n - \epsilon 2^{-n}, x_n + \epsilon 2^{-n})$.

✏ **1.2** *Δείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων του* $[0, 1]$ *έχει μέτρο 1.*

💡 *Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο.*

Σχεδόν παντού:
Λέμε ότι μια πρόταση που εξαρτάται από το x ισχύει "σχεδόν για κάθε x" αν ισχύει για όλα τα x εκτός από ένα σύνολο εξαιρέσεων με μέτρο 0. Με άλλα λόγια υπάρχει ένα σύνολο E με $m(E) = 0$ τέτοιο ώστε η πρότασή μας ισχύει αν $x \notin E$. Αν το x εννοείται τότε λέμε "σχεδόν παντού".

Για παράδειγμα, "η συνάρτηση χ_Q είναι σχεδόν παντού ίση με το 0" (αφού $m(\mathbb{Q}) = 0$).

✏ **1.3** *Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο Cantor έχει μέτρο 0. Το σύνολο αυτό C κατασκευάζεται ως μια φθίνουσα τομή κλειστών υποσυνόλων του $[0, 1]$*

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Ισχύει κατ' αρχήν $E_0 = [0, 1]$ και το κάθε E_n φτιάχνεται από το E_{n-1} ως εξής: το E_{n-1} είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων. Για να πάρουμε από το E_{n-1} το E_n απλά αφαιρούμε από το κάθε ένα από τα διαστήματά του το μεσαίο ένα τρίτο (χωρίς τα άκρα του). Για παράδειγμα $E_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Προκύπτει ότι το σύνολο C είναι μη κενό, συμπαγές και μάλιστα υπεραριθμήσιμο (δε μπορούμε δηλ. να γράψουμε όλα τα στοιχεία του ως μια ακολουθία).

Δείξτε ότι $m(C) = 0$.

💡 *Για κάθε n το σύνολο E_n είναι μια κάλυψη του C με διαστήματα. Ποιο το μέτρο του E_n;*

✏ **1.4** *Αποδείξτε ότι στο Θεώρημα 1.1.7 δε μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση ότι κάποιο από τα E_n έχει πεπερασμένο μέτρο.*

💡 *Πάρτε την περιπτωση $E_n = (n, +\infty)$.*

✏ **1.5** *Λέμε ότι ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}$ είναι τύπου G_δ αν είναι αριθμήσιμη τομή ανοιχτών, αν υπάρχουν δηλ. ανοιχτά σύνολα $G_n \subseteq \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $S = \cap_n G_n$. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ δείξτε ότι υπάρχει G_δ σύνολο $S \supseteq E$ τέτοιο ώστε $m(S \setminus E) = 0$.*

💡 *Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 1.1.8.*

2 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Το μεγάλο μειονέκτημα του ολοκληρώματος Riemann είναι ότι είναι πολύ ευαίσθητο σε μικρές αλλαγές στη συνάρτηση. Πράγματι, το ολοκλήρωμα Riemann ορίζεται ως το όριο των λεγόμενων Riemann αθροισμάτων τα οποία χρησιμοποιούν τις τιμές της υπό ολοκλήρωση συνάρτησης σε σημεία του διαστήματος. Μπορούμε εύκολα λοιπόν να "καταστρέψουμε" αυτά τα Riemann αθροίσματα πειράζοντας τη συνάρτηση στα κατάλληλα σημεία, πράγμα που σίγουρα δε θα έπρεπε να έχει επίπτωση στο εμβαδό του αθροίσματος κάτω από το γράφημα της συνάρτησης. Αυτός είναι και ο λόγος που συναρτήσεις που είναι πολύ εύκολο να οριστούν δεν έχουν ολοκλήρωμα Riemann. Το πιο απλό ίσως παράδειγμα είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση των ρητών (όπως και αυτή των αρρήτων) της οποίας όλα τα κάτω Riemann αθροίσματα είναι 0 και όλα τα άνω Riemann αθροίσματα είναι 1 (στο διάστημα $[0, 1]$ για παράδειγμα), και άρα δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Ιδού άλλη μία ένδειξη του πόσο πιο εύχρηστο είναι το ολοκλήρωμα Lebesgue σε σχέση με τις τιμές της συνάρτησης σε μεμονωμένα σημεία. Θα επιτρέπουμε από δω και πέρα στις συναρτήσεις να παίρνουν και τις τιμές $+\infty$ ή $-\infty$ και αυτό δε θα μας εμποδίσει, ως επί το πλείστον, να βρίσκουμε το ολοκλήρωμά τους. Ας είναι λοιπόν

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

οι επεκτεταμένοι πραγματικοί αριθμοί και ας είναι $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ μια συνάρτηση.

Χρειάζεται κι εδώ η ίδια προειδοποίηση όπως και για τα μετρήσιμα σύνολα. Δεν είναι δυνατό να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue κάθε συνάρτησης, ούτε καν κάθε μη αρνητικής συνάρτησης. Οι συναρτήσεις των οποίων το ολοκλήρωμα ορίζουμε είναι οι λεγόμενες "μετρήσιμες" συναρτήσεις. Και εδώ θα επιλέξουμε να μην πούμε σχεδόν τίποτε άλλο γι' αυτές εκτός από το ότι (α) όσες συναρτήσεις θα συναντήσουμε θα είναι μετρήσιμες, (β) δεν είναι εύκολο να κατασκευαστεί μη μετρήσιμη συνάρτηση και (γ) αν δεν υπήρχαν μη μετρήσιμα σύνολα δε θα υπήρχαν ούτε μη μετρήσιμες συναρτήσεις. Όπως και με τα σύνολα έτσι και με τις συναρτήσεις, από δω και πέρα όλες οι συναρτήσεις για τις οποίες μιλάμε θα είναι μετρήσιμες είτε το λέμε αυτό είτε όχι.

Ας ξεκινήσουμε με μια πολύ απλή περίπτωση: $f(x) = \chi_E(x)$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου E (είναι 0 έξω από το E, 1 μέσα σε αυτό). Δεν έχουμε καμιά επιλογή για το πόσο πρέπει να είναι το ολοκλήρωμα της f, αν φυσικά θέλουμε να ορίσουμε μια ποσότητα που να μην αντιφάσκει με όσα ήδη ξέρουμε για το ολοκλήρωμα Riemann:

$$\int f = m(E).$$

Αν επίσης θέλουμε το ολοκλήρωμα να είναι γραμμικό, να ισχύει δηλ.

$$\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g \text{ συναρτήσεις}$$

τότε ξέρουμε αμέσως πως να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue για πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων:

$$\int \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{E_j} = \sum_{j=1}^{N} c_j m(E_j), \tag{2.1}$$

όπου $c_j \in \overline{\mathbb{R}}$ και $E_j \subseteq \mathbb{R}$.

Ο ορισμός της (2.1) δεν είναι πλήρης αν δεν αποδείξει κανείς ότι η ποσότητα που ορίσαμε ως ολοκλήρωμα της f δεν αλλάζει αν γράψουμε την f με διαφορετικό τρόπο ως πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό χαρακτηριστικών συναρτήσεων. Η απόδειξη αυτή δεν είναι δύσκολη.

Πρέπει φυσικά να είμαστε λίγο προσεκτικοί με την προσθαφαίρεση αριθμών του $\overline{\mathbb{R}}$ και να θυμόμαστε ότι δεν προσθέτουμε ποτέ το $+\infty$ με το $-\infty$. Μια άλλη διαφορά με την ανάλυση όπως την ξέραμε ως τώρα είναι ότι στον παραπάνω τύπο ένα γινόμενο του τύπου $0 \cdot \infty$ είναι πάντα ίσο με 0.

2.1 *Μια συνάρτηση που είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων ονομάζεται "απλή" συνάρτηση. Δείξτε ότι μια συνάρτηση είναι απλή αν και μόνο αν το σύνολο των τιμών που παίρνει είναι πεπερασμένο.*

Χρησιμοποιείστε τα σύνολα $E_v = \{x : f(x) = v\}$ όπου v μια τιμή που παίρνει η συνάρτηση.

2.2 *Δείξτε ότι $\int \chi_{\mathbb{Q}} = 0$.*

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue για μια οποιαδήποτε μη αρνητική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ γίνεται χρησιμοποιώντας όλες τις μη αρνητικές απλές συναρτήσεις που είναι κάτω από την f:

$$\int f = \sup \left\{ \int g : \ 0 \le g \le f \text{ και } g \text{ απλή} \right\}. \tag{2.2}$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν μιας $f \ge 0$ πάντα υπάρχει αλλά μπορεί να είναι και ∞.

2.3 *Αν $0 \le f \le g$ τότε $0 \le \int f \le \int g$*

Τέλος, αν $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση μπορούμε να γράψουμε την f ως διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων

$$f = f^+ - f^-$$

όπου $f^+ = \max\{0, f\}$ και $f^- = -\min\{0, f\}$. (Παρατηρείστε ότι ισχύει $|f| = f^+ + f^-$.) Η γραμμικότητα μας επιβάλλει να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας τέτοιας f ως

$$\int f = \int f^+ - \int f^-,$$

και πάλι βέβαια με την προϋπόθεση ότι δεν έχουμε την απροσδιόριστη μορφή $\infty - \infty$ (σε αυτή και μόνο την περίπτωση δεν ορίζεται το ολοκλήρωμα).

Αν τώρα η f είναι μιγαδική συνάρτηση, $f = u + iv$, όπου u, v είναι πραγματικές συναρτήσεις, ορίζουμε το ολοκλήρωμα της f (και πάλι λόγω της επιθυμητής γραμμικότητας) να είναι $\int f = \int u + i \int v$.

Μέχρι τώρα έχουμε ορίσει μόνο το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε όλη την πραγματική ευθεία. Πώς μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης πάνω σε ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$; Πολύ απλά

$$\int_A f = \int \chi_A \cdot f$$

με την προϋπόθεση φυσικά ότι το δεξί μέλος ορίζεται.

Αξίζει εδώ να αναφέρουμε ότι η κατάσταση με το ολοκλήρωμα Riemann είναι πολύ διαφορετική: μια συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων όπου είναι ασυνεχής έχει μέτρο 0.

2.4 *Αν $f \ge 0$ στο A και $\int_A f = 0$ δείξτε ότι $f = 0$ σχεδόν παντού στο A.*

Αν $n = 1, 2, \ldots$ μπορεί το μέτρο του συνόλου όπου $f > 1/n$ να είναι θετικό; Παρατηρείστε ότι $\{f > 0\} = \cup_n \{f > 1/n\}$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 1.1.6.

2.5 *Αν $A \subseteq B$ και $f : B \to [0, +\infty]$ τότε $\int_A f \le \int_B f$.*

Ολοκληρωσιμότητα. $L^1(A)$.

Μια συνάρτηση λέγεται "ολοκληρώσιμη" στο $A \subseteq \mathbb{R}$ αν $\int_A |f| < \infty$, πράγματα που είναι ισοδύναμο με το να ισχύει

$$\int_A f^+ < \infty, \quad \int_A f^- < \infty.$$

Για μιγαδικές συναρτήσεις έχουμε τον ίδιο ορισμό ολοκληρωσιμότητας (να είναι δηλ. $\int_A |f| < \infty$).

Γράφουμε $L^1(A)$ για το χώρο όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμες στο A.

2.6 *Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m(A) < \infty$.*

2.7 *Αν $f : A \to [0, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού στο A. Με άλλα λόγια $m\{x \in A : f(x) = \infty\} = 0$.*

Συγκρίνετε την f με την απλή συνάρτηση g που είναι 0 εκεί όπου η f είναι πεπερασμένη και ∞ όπου και η f. Ποιο το $\int g$ και ποια η σχέση του με το $\int f$;

2.8 *(Ανισότητα Markov) Αν $0 \le f \in L^1(A)$ και $\lambda > 0$ τότε $m\{x \in A : f(x) \ge \lambda\} \le \int_A f / \lambda$.*

Αν $E = \{x \in A : f(x) \ge \lambda\}$ τότε $\int_A f \ge \int_E f \ge \int_E \lambda$.

Υπολογισμοί. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση (σε φραγμένο διάστημα) τότε το ολοκλήρωμα Riemann της f είναι ίδιο με το ολοκλήρωμα Lebesgue. Έτσι μπορούμε να χρησιμοποιούμε όλες τις τεχνικές υπολογισμού που έχουμε μάθει για το ολοκλήρωμα Riemann για να υπολογίζουμε ολοκληρώματα Lebesgue συνεχών συναρτήσεων. Επίσης συχνά χρησιμοποιούμε το, συνηθισμένο από το ολοκλήρωμα Riemann, συμβολισμό $\int_a^n f(x)\,dx$ ή $\int_a^b f$ αντί για τον $\int_{[a,b]} f$.

Επίσης ισχύει ο γνωστός μας τύπος για την αλλαγή μεταβλητής. Αν $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και αύξουσα τότε

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_c^d f(y)\,dy \tag{2.3}$$

όπου $c = \phi(a)$, $d = \phi(b)$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι πολύ εύχρηστο κυρίως λόγω των ολοκληρωμάτων σύγκλισης, τα οποία μας λένε ουσιαστικά για το πότε μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά δύο οριακών διαδικασιών.

Θεώρημα 2.1 *(Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Αν $f_n : A \to [0, +\infty]$ είναι μια ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων που είναι μονότονη (ως προς n)*

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x), \quad (x \in A),$$

και $f(x) = \lim_n f_n(x) \in [0 + \infty]$ τότε

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f.$$

✏ **2.9** *Αν $f : [0, 1] \to [0, +\infty]$ δείξτε ότι $\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 f(x)\, dx$.*

💡 *Γράψτε $f_n = \chi_{[1/n,1]} f$ και χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 2.1.*

Χρησιμοποιείστε το αυτό για να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $\int_0^1 x^\alpha\, dx$ για όλες τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. Για ποιες τιμές του α είναι η x^α στο $L^1([0, 1])$; Για ποιες τιμές στο $L^1([1, \infty])$;

✏ **2.10** *Αν $f_n : A \to [0, +\infty]$ και $f = \sum_n f_n$ (παρατηρείστε ότι το όριο πάντα υπάρχει στο $[0, +\infty]$) τότε αν*

$$\sum_n \int_A f_n < \infty$$

έπεται ότι η f είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη.

💡 *Ποιο το ολοκλήρωμα της f; Χρησιμοποιείστε και το Πρόβλημα 2.7.*

✏ **2.11** *Ας είναι $x_n \in [0, 1/2]$ και $0 \le \ell_n \le 1/2$ τέτοια ώστε $\sum_n \ell_n < \infty$. Δείξτε ότι η σειρά*

$$\sum_n \chi_{[x_n, x_n+\ell_n]}(x)$$

συγκλίνει (σε πεπερασμένο αριθμό) σχεδόν για όλα τα $x \in [0, 1]$.

Τι συμπεραίνετε για την ποσότητα $N(x)$ = σε πόσα από τα διαστήματα $[x_n, x_n + \ell_n]$ ανήκει ο αριθμός $x \in [0, 1]$;

💡 *Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.10.*

Το σημαντικότερο ίσως οριακό θεώρημα για το μέτρο Lebesgue είναι το επόμενο. Λέμε ότι οι f_n "κυριαρχούνται" από την g.

Θεώρημα 2.2 *(Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης) Έστω $f_n, g \in L^1(A)$ τέτοιες ώστε $|f_n(x)| \le |g(x)|$ σχεδόν παντού στο A. Έστω επίσης ότι υπάρχει το όριο $f(x) = \lim_n f_n(x)$ σχεδόν για κάθε $x \in A$. Τότε*

$$\lim_n \int_A f_n = \int_A f.$$

✏ **2.12** *Υπό τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 2.2 δείξτε ότι ισχύει και $\int_A |f_n - f| \to 0$.*

💡 *$|f_n - f| \le 2|g|$.*

✏ **2.13** *Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : [0, 1] \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά με $\int_0^1 f_n \to +\infty$.*

💡 *Δε θα πρέπει φυσικά να ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2 για να τα καταφέρετε.*

✏ **2.14** *(Συνέχεια του αορίστου ολοκληρώματος) Αν* $f \in L^1([a,b])$ *και* $x_0 \in (a,b)$ *τότε η συνάρτηση* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *(που ονομάζεται αόριστο ολοκλήρωμα της* f*) είναι συνεχής στο* x_0.

💡 *Αν* $h_n \to 0$ *δείξτε ότι η ποσότητα* $F(x_0+h_n) - F(x_0)$ *τείνει στο 0 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2 για τις συναρτήσεις* $f_n = f \cdot \chi_{[a,x_0+h_n]}$ *οι οποίες κυριαρχούνται από την* f.

✏ **2.15** *Αν* $f \in L^1(A)$ *και ορίσουμε*

$$g_n(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{αν } |f(x)| \geq n \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

δείξτε ότι $\int_A g_n \to 0$.

✏ **2.16** *Αν* $f \in L^1(A)$ *και* $A_n \subseteq A$ *είναι τέτοια ώστε* $m(A_n) \to 0$ *δείξτε ότι* $\int_{A_n} f \to 0$.

💡 *Γράψτε την* f *σα άθροισμα των συναρτήσεων* $f_1 = f \cdot \chi_{\{|f|>M\}}$ *και* $f_2 = f \cdot \chi_{\{|f|\leq M\}}$, *όπου* $M > 0$ *είναι μια παράμετρος που επιλέγεται αρκετά μεγάλη. Δείξτε πρώτα το ζητούμενο για τη φραγμένη συνάρτηση* f_2 *και χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.15 για την* f_1.

Με το ολοκλήρωμα Lebesgue απλουστεύονται πολύ τα κριτήρια που μας επιτρέπουν να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης σε ένα διπλό (επαναλαμβανόμενο) ολοκλήρωμα. Δε χρειάζεται προς το παρόν να αναφερθούμε σε ολοκλήρωμα Lebesgue συναρτήσεων που ορίζονται στο $\mathbb{R}^2$.

Θεώρημα 2.3 *(Fubini) Αν* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ *και ισχύει*

$$\int\int |f(x,y)|\,dx\,dy < \infty \tag{2.4}$$

τότε ισχύει

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(x,y)\,dy\,dx. \tag{2.5}$$

Αν $f : \mathbb{R}^2 \to [0,+\infty]$ *τότε η (2.5) ισχύει χωρίς καμία προϋπόθεση (αλλά μπορούν φυσικά και τα δύο μέλη της να είναι* $+\infty$*).*

Τα ολοκληρώματα (2.4) και (2.5) που εμφανίζονται στο Θεώρημα 2.3 είναι επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα της (2.4) είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $F(y) = \int f(x,y)\,dx$ ως προς y.

✏ **2.17** *Αν* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *τότε η συνέλιξή τους ορίζεται ως η συνάρτηση*

$$f * g(x) = \int f(y)g(x-y)\,dy. \tag{2.6}$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $f * g$ *είναι καλώς ορισμένη σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$, *ότι δηλ. σχεδόν για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *η συνάρτηση του* y *που ολοκληρώνουμε, η* $f(y)g(x-y)$, *είναι ολοκληρώσιμη, ισχύει δηλ.* $\int |f(y)g(x-y)|\,dy < \infty$. *Για τα υπόλοιπα* x *ορίζουμε* $f * g(x) = 0$.

💡 *Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 2.3 για μη αρνητικές συναρτήσεις και δείξτε ότι* $\int\int |f(y)g(x-y)|\,dy\,dx < \infty$. *Έπειτα χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.7 για να δείξετε το ζητούμενο.*

✏ **2.18** *Αν* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *δείξτε ότι* $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ *και μάλιστα*

$$\int |f * g| \leq \int |f| \cdot \int |g|. \tag{2.7}$$

✏ **2.19** *Αν* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *και* $|g| \leq M$ *τότε η* $f * g$ *ορίζεται για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *από την (2.6), είναι φραγμένη και μάλιστα* $|f * g| \leq M \int |f|$.

✏ **2.20** *Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις* $f * g$ *και* $g * f$ *είναι σχεδόν παντού ίσες αν* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$.

💡 *Χρησιμοποιείστε τον τύπο (2.3) για μια κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής και το Θεώρημα 2.3.*

3 Οι χώροι $L^p(A)$

Μέχρι στιγμής έχουμε δει τον χώρο $L^1(A)$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ έχει $m(A) > 0$, που απαρτίζεται από όλες τις συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{C}$ που είναι ολοκληρώσιμες, ισχύει δηλ. για αυτές $\int_A |f| < \infty$. Αν τώρα $p \in [1, \infty)$ ορίζουμε το χώρο $L^p(A)$ να απαρτίζεται από όλες τις συναρτήσεις $f : A \to \mathbb{C}$ για τις οποίες $\int_A |f|^p < \infty$. Η L^p νόρμα της $f \in L^p(A)$ είναι η ποσότητα

$$\|f\|_p = \left(\int_A |f|^p \right)^{1/p},$$

για την οποία εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$, για $\lambda \in \mathbb{C}$. Θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τη ποσότητα

$$d(f, g) = \|f - g\|_p$$

για να ορίσουμε μια έννοια απόστασης (μετρική) ανάμεσα στις συναρτήσεις του $L^p(A)$. Απαραίτητο λοιπόν είναι να ισχύει η "τριγωνική ανισότητα"

$$d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g), \quad \text{για κάθε } f, g, h \in L^p(A).$$

Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.1 *(Ανισότητα Minkowski) Αν $1 \le p < \infty$ και $f, g \in L^p(A)$ τότε ισχύει*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Ο κύριος λόγος για τον οποίο δεν εξετάζουμε (συνήθως) τις τιμές $p < 1$ είναι ότι για αυτές δεν ισχύει η ανισότητα του Minkowski.

Τέλος, για να μπορεί να παίξει η ποσότητα $\|f - g\|_p$ το ρόλο της απόστασης ανάμεσα στις $f, g \in L^p(A)$ πρέπει οπωσδήποτε να ισχύει και η συνεπαγωγή

$$\|f - g\|_p = 0 \Rightarrow f = g.$$

Όμως αυτό δε μπορεί να ισχύσει μια και μπορούμε να παραλλάξουμε μια τυχούσα συνάρτηση $f \in L^p(A)$ σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, π.χ. μπορούμε να αλλάξουμε τη συνάρτηση σε ένα σημείο, χωρίς να αλλάξουμε καθόλου όλες τι ολοκληρωτικές ποσότητες που εξαρτώνται από την f. Πιο συγκεκριμένα, αν $\widetilde{f}$ είναι ίδια με την f εκτός από ένα σημείο τότε οι δύο συναρτήσεις δεν είναι ίδιες, αφού οι τιμές τους διαφέρουν σε κάποια x, αλλά $\int_A |f - g|^p = 0$.

Η μόνη μας διέξοδος εδώ είναι να αγνοήσουμε τις επουσιώδεις διαφορές ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις, θεωρούμε δηλ. δύο συναρτήσεις f και g ίδιες αν διαφέρουν οι τιμές τους μόνο σε ένα σύνολο από x που έχουν μέτρο 0.

Αν θα θέλαμε να είμαστε λίγο πιο αυστηροί θα ορίζαμε μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε συναρτήσεις, όπου δύο συναρτήσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν υπάρχει σύνολο E, με $m(E) = 0$, τ.ώ. για $x \notin E$ έχουμε $f(x) = g(x)$. Τα στοιχεία του χώρου $L^p(A)$ είναι κλάσεις ισοδυναμίας αυτής της σχέσης ισοδυναμίας που μόλις ορίσαμε.

✏ **3.1** *Αποδείξτε ότι η σχέση που μόλις ορίσαμε είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας ανάμεσα σε συναρτήσεις.*

✏ **3.2** *Αποδείξτε ότι αυτή μας η σύμβαση είναι αρκετή: αν f και g διαφέρουν στις τιμές τους για $x \in E$, με $m(E) > 0$, τότε $\|f - g\|_p > 0$, για κάθε $p \in [1, \infty)$.*

Εξετάστε τα σύνολα $E_n = \{x : |f(x) - g(x)| > 1/n\}$ και δείξτε ότι κάποιο από αυτά πρέπει να έχει θετικό μέτρο.

Πρέπει εδώ να αναφέρουμε ότι το Θεώρημα 3.1 είναι συνέπεια της πολύ σημαντικής ανισότητας του Hölder.

Θεώρημα 3.2 *(Ανισότητα Hölder) Αν $1 < p, q < \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (τέτοιοι αριθμοί p και q ονομάζονται "συζυγείς εκθέτες") τότε, αν $f \in L^p(A)$ και $f \in L^q(A)$, ισχύει*

$$\left| \int_A f\overline{g} \right| \le \|f\|_p \|g\|_q. \tag{3.1}$$

Ειδική περίπτωση ($p = q = 2$) της ανισότητας Hölder είναι η πάρα πολύ σημαντική ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Θεώρημα 3.3 *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αν $f, g \in L^2(A)$ τότε $\left|\int_A f\overline{g}\right| \le \|f\|_2 \|g\|_2$.*

Για να ορίσουμε και τον χώρο $L^\infty(A)$ χρειαζόμαστε την έννοια του ουσιώδους supremum μιας συνάρτησης, το οποίο είναι, κατά κάποιο τρόπο, το supremum της συνάρτησης που όμως δεν επηρεάζεται από επουσιώδεις αλλαγές στη συνάρτηση. Για να ορίσουμε λοιπόν το $\text{ess sup}\, f$, όπου f μια συνάρτηση ορισμένη στο A, ορίζουμε κατ' αρχήν το σύνολο

$$U_f = \{M \in \mathbb{R} : m\{x \in A : \ f(x) > M\} = 0\}.$$

Αυτό είναι το σύνολο όλων του ουσιωδών άνω φραγμάτων της f, των αριθμών δηλ. M που η f τους ξεπερνά μόνο σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της που έχει μέτρο 0. Τέλος ορίζουμε

$$\text{ess sup}\, f = \inf U_f$$

να είναι το "ελάχιστο" τέτοιο άνω φράγμα.

Ο χώρος $L^\infty(A)$ (με $m(A) > 0$) είναι ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : A \to \mathbb{C}$ για τις οποίες $\text{ess sup}\, |f| < \infty$. Ορίζουμε τέλος την sup-νόρμα ή άπειρο-νόρμα της f

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\, |f|.$$

Όπως και στους άλλους χωρους $L^p(A)$ κι εδώ δεν ξεχωρίζουμε μεταξύ τους δύο συναρτήσεις που διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο σημείων του A που έχει μέτρο 0.

3.3 *Αν $f, g : A \to \mathbb{C}$ διαφέρουν μόνο σε ένα σύνολο $E \subseteq A$ με $m(E) = 0$ δείξτε ότι $\text{ess sup}\, f = \text{ess sup}\, g$, και συνεπώς η άπειρο-νόρμα των συναρτήσεων στο $L^\infty(A)$ είναι καλώς ορισμένη ακόμη κι αν γνωρίζουμε τη συνάρτηση μόνο σχεδόν παντού.*

3.4 *Αν τα $p = 1$ και $q = \infty$ θεωρηθούν συζυγείς εκθέτες δείξτε ότι η ανισότητα Hölder ισχύει όπως είναι γραμμένη στο Θεώρημα 3.2.*

Δείξτε επίσης ότι η τριγωνική ανισότητα (Θεώρημα 3.1) ισχύει και για $p = \infty$.

3.5 *Αν $0 < m(A) < \infty$ και $1 \le p_1 < p_2 \le \infty$ δείξτε ότι $L^{p_2}(A) \subseteq L^{p_1}(A)$. Δείξτε επίσης ότι $\|f\|_{p_1} \le \|f\|_{p_2}$ αν επιπλέον $m(A) = 1$.*

$\int_A |f|^{p_1} = \int_A |f|^{p_1} \cdot 1$. *Εφαρμόστε την ανισότητα Hölder με εκθέτες p_2/p_1 και το συζυγή του.*

3.6 *Αν $f \in L^p(A)$, με $1 \le p < \infty$, δείξτε ότι για $\lambda > 0$ ισχύει*

$$m\{x \in A : |f(x)| \ge \lambda\} \le \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}.$$

$\int_A |f|^p \ge \int_{\{|f| \ge \lambda\}} |f|^p \ge \int_{\{|f| \ge \lambda\}} \lambda^p.$

Γιατί έχουμε επιλέξει αυτή την ονομασία για το χώρο L^∞, ένα όνομα του ίδιου τύπου με τους χώρους L^p, με $p < \infty$, που όμως είναι χώροι που ορίζονται εντελώς διαφορετικά, με ένα ολοκλήρωμα δηλαδή; Οι χώροι L^p είναι όντως σε πολλά πράγματα αρκετά διαφορετικοί από τον L^∞ και ακόμη κι όταν συμπεριφέρονται παρόμοια η απόδειξη γι' αυτό είναι διαφορετική στην περίπτωση του πεπερασμένου p απ' ό,τι στην περίπτωση του L^∞. Αυτό είναι φυσιολογικό μια και ορίζονται πολύ διαφορετικά. Η απάντηση στο ερώτημα της ονομασίας έγκειται στο Πρόβλημα 3.5 και στο Πρόβλημα 3.7 που ακολουθεί.

3.7 *Αν* $m(A) = 1$ *και* $f \in L^\infty(A)$ *δείξτε ότι* $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Έστω $\epsilon > 0$ *και* $E = \{x \in A : |f(x)| \ge (1-\epsilon)\|f\|_\infty\}$. *Τότε* $m(E) > 0$ *(αλλιώς το* $\operatorname{ess\,sup}|f|$ *θα ήταν μικρότερο) και* $\|f\|_p \ge (\int_E |f|^p)^{1/p}$.

Από την ανισότητα Minkowski προκύπτει ότι οι χώροι $L^p(A)$ είναι διανυσματικοί χώροι και οι αντίστοιχες νόρμες τούς καθιστούν παράλληλα και μετρικούς χώρους. Είναι πολύ σημαντικό ότι αυτοί είναι πλήρεις χώροι (χώροι Banach). Ότι και να είναι το σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο A που έχει συμπαγή φορέα (υπάρχει δηλ. πεπερασμένος αριθμός $R > 0$ τέτοιος ώστε η f μηδενίζεται εκτός του διαστήματος $(-R, R)$) τότε $f \in L^p(A)$ για κάθε $p \in [1, +\infty]$. Το ακόλουθο θεώρημα πυκνότητας είναι πάρα πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές.

Θεώρημα 3.4 *(Πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων) Αν* $A \subseteq \mathbb{R}$ *με* $0 < m(A)$ *τότε οι χώροι* $L^p(A)$ *είναι πλήρεις μετρικοί χώροι για* $1 \le p \le \infty$.

Για $1 \le p < \infty$ *ο γραμμικός υπόχωρος των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα είναι πυκνός στο χώρο* $L^p(A)$. *Δηλαδή, για κάθε* $f \in L^p(A)$ *και για κάθε* $\epsilon > 0$ *υπάρχει συνεχής* $g : A \to \mathbb{C}$ *με φραγμένο φορέα τ.ώ.*

$$\|f - g\|_p \le \epsilon.$$

3.8 *Αποδείξτε ότι ο γραμμικός χώρος των κατά τμήματα σταθερών συναρτήσεων (συναρτήσεων που είναι δηλ. πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων φραγμένων διαστημάτων) είναι πυκνός στον χώρο* $L^p(\mathbb{R})$ *για* $1 \le p < \infty$.

Χρησιμοποιείστε την πυκνότητα των συνεχών συναρτήσεων με φραγμένο φορέα (Θεώρημα 3.4) καθώς και το ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε φραγμένο κλειστό διάστημα είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

3.9 *Δείξτε ότι αν* $1 \le p < \infty$ *και* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *τότε*

$$\|f(\cdot) - f(\cdot - h)\|_p \to 0 \text{ για } h \to 0.$$

Δείξτε το πρώτα αν f *είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένο φορέα και έπειτα χρησιμοποιείστε το Θεώρημα 3.4.*

3.10 *(Λήμμα Riemann-Lebesgue) Αν* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *ορίζουμε τη συνάρτηση (μετασχηματισμός Fourier της* f*)*

$$\widehat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-i\xi x}\, dx. \tag{3.2}$$

Παρατηρείστε ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει επειδή $f \in L^1(\mathbb{R})$ *και μάλιστα* $\left\|\widehat{f}\right\|_\infty \le \|f\|_1$. *Δείξτε ότι* $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Δείξτε το πρώτα με απ' ευθείας υπολογισμό στην περίπτωση που $f = \chi_{[a,b]}$, *για* $-\infty < a < b < \infty$. *Χρησιμοποιείστε το γεγονός ότι ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική πράξη για να το αποδείξετε για κατά τμήματα σταθερές συναρτήσεις με φραγμένο φορέα. Έπειτα χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 3.8.*

3.11 *Αν* $f \in L^1(\mathbb{R})$ *δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της* f *(ορίστηκε στο Πρόβλημα 3.10) είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.*

$\left|\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)\right| \le \int |f(x)|\left|e^{-i(\xi+h)x}-e^{-i\xi x}\right| dx = \int |f(x)|\left|e^{-ihx}-1\right| dx$. *Για $h \to 0$ ο 2ος παράγοντας στο ολοκλήρωμα συγκλίνει στο 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης 2.2 για να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα πάει στο 0. Η ομοιομορφία ως προς $\xi \in \mathbb{R}$ προκύπτει απ΄ το ότι το φράγμα (που πάει στο 0) δεν εξαρτάται από το ξ.*