Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Μέτρου

Μιχάλης Κολουντζάκης – Φθινοπωρινό εξάμηνο 2000-2001

ΤΡΙΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. Έστω $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\int \phi = 1$, και $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi(x/\epsilon)$, για $\epsilon > 0$. Δείξτε ότι, για $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\|f * \phi_\epsilon - f\|_1 \to 0,$$

όταν $\epsilon \to 0$.

2. Δίδονται φραγμένα ανοιχτά $\Omega_1 \subset \Omega_2$, και σταθερά $r > 0$, τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(\Omega_2^c, \overline{\Omega_1}) \ge r$.
(α) Κατασκευάστε $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε $f = 1$ στο Ω_1 και $f = 0$ στο Ω_2^c.
(β) Δείξτε ότι για κάθε τέτοια f ισχύει

$$\||\nabla f|\|_\infty \ge \frac{C}{r},$$

για κάποια θετική σταθερά C. (Με $|v|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδια νόρμα του διανύσματος v.)

3. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ με $\|f\|_1 < 1$. Ορίζουμε $f_n = f * \cdots * f$, (n φορές - αν $n = 0$ τότε $f_0 = 0$). Δείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n\ge 0} f_n$ συγκλίνει στο $L^1(\mathbb{R}^n)$.

4. Έστω μ_n και μ μέτρα Borel στο $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η ακολουθία μ_n συγκλίνει ασθενώς στο μ αν για κάθε συνεχή f με συμπαγή φορέα ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu.$$

Κατασκευάστε μια ακολουθία ιδιαζόντων ως προς το μέτρο Lebesgue μέτρων που συγκλίνουν ασθενώς στο μέτρο Lebesgue.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες.

Δεν επιτρέπεται η χρήση σημειώσεων ή βιβλίων.

Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 21 Ιανουαρίου 2001