Θεωρια Αριθμων – Προβληματα

Μιχάλης Κολουντζάκης

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Βούτες
700 13 Ηράκλειο

6 Απριλίου 2015

Πολλές από τις παρακάτω ασκήσεις είναι από το βιβλίο του K. Rosen, Elementary Number Theory and Its Applications.

Οι ακέραιοι που εμφανίζονται είναι κατά κανόνα θετικοί ακόμη κι αν δεν το προσδιορίζουμε.

Το γράμμα p συμβολίζει πρώτο αριθμό.

Στοιχειώδη και επαγωγή

1. Αν λύσουμε την $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ ως προς το n του δεξιού μέλους παίρνουμε

$$n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{2} - \frac{1}{2}$$

και αν αθροίσουμε αυτή για $n = 1, \ldots, N$ παίρνουμε (εκμεταλλευόμενοι τον τηλεσκοπικό χαρακτήρα του δεξιού μέλους) τον τύπο

$$\sum_{n=1}^{N} n = N(N+1)/2.$$

Χρησιμοποιείστε αυτόν τον τελευταίο τύπο και την ταυτότητα

$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

ώστε με παρόμοιο τρόπο να βρείτε τον τύπο για το άθροισμα $1^2 + 2^2 + \cdots + N^2$. Αφού βρείτε τύπο για το άθροισμα των τετραγώνων ακολουθείστε την ίδια μέθοδο για να βρείτε το άθροισμα των κύβων $1^3 + 2^3 + \cdots + N^3$ αρχίζοντας από την ταυτότητα

$$(n+1)^4 - n^4 = 4\,n^3 + 6\,n^2 + 4\,n + 1$$

και λύνοντας ως προς το n^3 του δεξιού μέλους.

Αφού βρείτε τις ταυτότητες για τα δύο παραπάνω αθροίσματα αποδείξτε τις με επαγωγή.

2. Χρησιμοποιείστε την ταυτότητα $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ για να βρείτε ένα τύπο για το άθροισμα $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$.

3. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $n < 2^n$ για $n \ge 1$.

4. Αποδείξτε με επαγωγή ότι $\sum_{n=1}^{N} n \cdot n! = (N+1)! - 1$.

5. Αποδείξτε με επαγωγή ότι κάθε ακέραιος > 11 μπορεί να γραφεί ως ακέραιος γραμμικός συνδυασμός του 4 και του 5 με μη αρνητικούς συντελεστές.

6. Αν $H_n = \sum_{j=1}^{n} 1/j$ δείξτε με επαγωγή ότι

$$H_{2^n} \ge 1 + \frac{n}{2}.$$

7. Δείξτε με επαγωγή ότι $2^n > n^2$ για $n > 4$.

Διαιρετότητα

8. Αν $a \mid b$ και $k \geq 1$ δείξτε $a^k \mid b^k$.

9. Δείξτε ότι n άρτιος αν και μόνο αν $n = 2\lfloor n/2 \rfloor$.

10. Πόσοι ακέραιοι ≤ 1000 δε διαιρούνται ούτε από το 3 ούτε από το 5.

11. Δείξτε $3 \mid n^3 - n$.

12. Δείξτε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού είναι της μορφής $8n + 1$.

13. Το γινόμενο δύο ακεραίων της μορφής $6n + 5$ είναι της μορφής $6n + 1$.

14. Δείξτε ότι $5 \mid n^5 - n$.

15. Δείξτε ότι $9 \mid n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$.

16. Η ακολουθία Fibonacci ορίζεται ως εξής:

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \text{για } n \geq 3.$$

Δείξτε με επαγωγή ότι:
(α) $2 \mid f_n \iff 3 \mid n$.
(β) $3 \mid f_n \iff 4 \mid n$.
(γ) $4 \mid f_n \iff 6 \mid n$.

17. Δείξτε ότι $\left\lfloor (2 + \sqrt{3})^n \right\rfloor$ είναι περιττός.

Δείξτε πρώτα χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα $(a + b)^N = \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} a^j b^{N-j}$ ότι

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

είναι ακέραιος και μάλιστα άρτιος. Έπειτα παρατηρείστε ότι $-1 < (2 - \sqrt{3})^n < 0$.

Συστήματα αρίθμησης

18. Γράψτε τον αριθμό $(1999)_{10}$ στο επταδικό σύστημα (σύστημα αναπαράστασης των αριθμών με βάση το 7). Γράψτε τον αριθμό $(6105)_7$ από το επταδικό σύστημα στο δεκαδικό. Γράψτε τον αριθμό $(1984)_{10}$ στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

19. Αν δίπλα σε μια ζυγαριά έχουμε τα βάρη 1γρ, 2γρ, 4γρ, έως 128γρ (δυνάμεις του 2) τότε μπορούμε να ισορροπήσουμε στη ζυγαριά μας κάθε ακέραιο (σε γραμμάρια) βάρος μικρότερο του 256, χρησιμοποιοώντας τα βάρη μας το πολύ μια φορά το καθένα.

20. Ας πούμε ότι για να πολλαπλασιάσετε (με το χέρι, με τη συνηθισμένη μέθοδο) δύο 10ψήφιους αριθμούς σας παίρνει 2 λεπτά. Πόσο χρόνο υπολογίζετε να σας πάρει να πολλαπλασιάσετε δύο 100ψήφιους αριθμούς; Ίδιο ερώτημα για την πρόσθεση δύο αριθμών.

Πρώτοι αριθμοί

21. Δείξτε ότι αν ο n είναι σύνθετος αριθμός τότε έχει κάποιο πρώτο διαιρέτη $p \leq \sqrt{n}$. Πώς επηρεάζει αυτό τη διαδικασία με την οποία αποφασίζουμε αν ένας αριθμός n είναι πρώτος ή όχι, κατά την οποία αρχίζουμε από το 2 και ανεβαίνουμε ελέγχοντας αν κάθε ακέραιος που συναντάμε διαιρεί τον n;

22. Ελέγξτε αν οι αριθμοί 101, 103, 107, 111, 113, 121 είναι πρώτοι.

23. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο "κόσκινο του Ερατοσθένη" για να βρείτε όλους τους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.

24. Ας είναι $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4, \ldots$ οι πρώτοι αριθμοί σε αύξουσα σειρά. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του Ευκλείδη (για το το ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι) δείξτε ότι

$$p_n \le 2^{2^{n-1}},$$

χρησιμοποιώντας επαγωγή.

25. Έστω n σύνθετος και υποθέστε ότι ο μικρότερος πρώτος παράγοντας p του n είναι $> n^{1/3}$. Δείξτε τότε ότι ο n είναι γινόμενο δύο πρώτων (όχι αναγκαστικά διαφορετικών μεταξύ τους).

26. Αν $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, με $a_j \in \mathbb{Z}$, είναι ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές δείξτε ότι η f δε μπορεί να παίρνει μόνο πρώτες τιμές. Υπάρχει δηλ. $k \in \mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $f(k)$ να είναι σύνθετος.

Δείξτε ότι αν $f(\nu) = p$ πρώτος τότε το p διαιρεί όλες τις τιμές $f(\nu + rp)$, $r \in \mathbb{Z}$. Εδώ θα χρειαστείτε το διωνυμικό θεώρημα ή τη μέθοδο της επαγωγής. Μπορείτε επίσης να θεωρήσετε γνωστό ότι κάθε πολυώνυμο βαθμού n έχει το πολύ n ρίζες.

27. Βρείτε τους μικρότερους 5 διαδοχικούς σύνθετους ακεραίους. Βρείτε 10^6 διαδοχικούς ακεραίους που να είναι σύνθετοι.

Ο αριθμός $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 2$ και οι επόμενοι 8 αριθμοί είναι όλοι σύνθετοι.

Μέγιστος κοινός διαιρέτης

28. Αν $a, b > 0$ είναι μεταξύ τους πρώτοι βρείτε τον $(a^2 + b^2, a + b)$.

29. Αν a άρτιος και b περιττός δείξτε $(a, b) = (a/2, b)$. Αν και οι δύο είναι άρτιοι δείξτε $(a, b) = 2(a/2, b/2)$.

30. Αν $(a, b) = 1$ και $c \mid a + b$ δείξτε $(c, a) = (c, b) = 1$.

31. Αν $1 \le i < j \le n$ δείξτε ότι $(n!i + 1, n!j + 1) = 1$.

Γράψτε $k = j - i$ και απαλείψτε το j χρησιμοποιώντας $j = i + k$.

32. Χρησιμοποιείστε τον αλγόριθμο του Ευκλείδη για να υπολογίσετε τους μέγιστους κοινούς διαιρέτες:

$$(45, 75), (20785, 44350).$$

Για κάθε ζεύγος γράψτε το μέγιστο κοινό διαιρέτη ως ένα ακέραιο γραμμικό συνδυασμό των δύο αριθμών. Βρείτε όλους τους τρόπους με τους οποίους μπορεί να γίνει αυτό.

Βρείτε επίσης το μέγιστο κοινό διαιρέτη

$$(70, 98, 105).$$

Θεμελιώδες θεώρημα (μοναδική ανάλυση σε γινόμενο πρώτων)

33. Αν a είναι ρίζα του πολυωνύμου

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_1 x + c_0,$$

όπου $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{Z}$, δείξτε ότι αν το a δεν είναι ακέραιος τότε είναι άρρητος.

Δείξτε ότι οι αριθμοί $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[10]{17}$ είναι άρρητοι.

Υποθέστε όχι και γράψτε $a = \frac{k}{l}$ με $(k, l) = 1$ και $l > 1$. Ας είναι p κάποιος πρώτος διαιρέτης του l.

34. Βρείτε την ανάλυση του 4849845 σε γινόμενο πρώτων.

35. Βρείτε όλους τους πρώτους που διαιρούν το 10!. Ομοίως για τον αριθμό $\binom{30}{10}$.

36. Περιγράψτε όλους τους θετικούς ακεραίους που έχουν ακριβώς 3 διαιρέτες (συμπεριλαμβανομένου του 1 και τους εαυτού τους). Ομοίως για ακριβώς 4 διαιρέτες. Ομοίως για ακριβώς 5 διαιρέτες.

37. Δείξτε ότι κάθε θετικός ακέραιος γράφεται σα γινόμενο ενός τέλειου τετραγώνου και ενός αριθμού ελεύθερου τετραγώνων (αυτοί είναι οι ακέραιοι που δε διαιρούνται από το p^2 για κανένα πρώτο p).

38. Δείξτε ότι η δύναμη με την οποία ο πρώτος p εμφανίζεται στο $n!$ είναι το άθροισμα

$$\lfloor n/p \rfloor + \left\lfloor n/p^2 \right\rfloor + \left\lfloor n/p^3 \right\rfloor + \cdots .$$

Παρατηρείστε ότι το άθροισμα αυτό έχει πεπερασμένους το πλήθος μη μηδενικούς όρους αφού για αρκετά μεγάλο j θα έχουμε $n/p^j < 1$.

Βρείτε την ανάλυση του 20! σε γινόμενο πρώτων.

Πόσα μηδενικά υπάρχουν στο τέλος του αριθμού 1000!; Πόσα αν τον ίδιο αριθμό τον γράψουμε στο 8-αδικό σύστημα;

39. Τα *περιοδικά τζιτζίκια* (δείτε και εδώ) είναι ένα έντομο που από τη στιγμή που θα εναποτεθεί ως αυγό στο χώμα περνούν 17 χρόνια ακριβώς μέχρι τότε που το έντομο αυτό θα βγεί έξω θα ζευγαρώσει, θα εναποθέσει τα αυγά του στο χώμα και θα πεθάνει. Υπάρχει ένα παρόμοιο είδος με κύκλο ζωής 13 χρόνια. Αν και τα δύο αυτά είδη εμφανίστηκαν το 1900 ταυτόχρονα, ποια χρονιά θα εμφανιστούν ξανά και τα δύο για πρώτη φορά από τότε;

40. Ποια ζεύγη ακεραίων a, b έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη $(a, b) = 18$ και ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο $[a, b] = 240$;

41. Δείξτε $c \mid ab \Longrightarrow c \mid (a, c)(b, c)$.

42. Δείξτε $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

43. Δείξτε $\log_2 3 \notin \mathbb{Q}$.

44. Δείξτε ότι ο αριθμός

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

δεν είναι ποτέ ακέραιος αν $n \geq 2$.

45. Δείξτε $(a, b) = (a + b, [a, b])$.

46. Πόσα ζεύγη θετικών ακεραίων a, b υπάρχουν με $[a, b] = n$. Η απάντηση εξαρτάται από την ανάλυση του n σε πρώτους παράγοντες.

47. Δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $6k + 5$.

Δείξτε πρώτα ότι όλοι οι πρώτοι είναι της μορφής $6k + 1$ ή $6k + 5$. Υποθέστε ότι υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος πρώτοι της μορφής $6k + 5$, οι $p_1, p_2, \ldots, p_r$, και εξετάστε τον αριθμό $n = 6p_1p_2 \cdots p_r - 1$.

48. Αν πάρουμε ένα σύνολο από $n + 1$ διαφορετικούς ακεραίους από 1 έως $2n$ δείξτε ότι υπάρχει κάποιος στο σύνολο που διαιρεί κάποιον άλλο αριθμό του συνόλου.

Διοφαντικές εξισώσεις

49. Βρείτε όλες τις λύσεις των διοφαντικών εξισώσεων:

1. $2x + 5y = 11$

2. $17x + 13y = 100$

3. $60x + 18y = 97$

50. Βρείτε όλες τις λύσεις του συστήματος διοφαντικών εξισώσεων

$$x + y + z = 100, \quad x + 8y + 50z = 156.$$

51. Λύστε τη διοφαντική εξίσωση

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{14}.$$

Γράψτε την παραπάνω εξίσωση στη μορφή $(x-a)(y-b) = c$ για κάποιους ακεραίους a, b, c.

Ισοτιμίες

52. Αν οι αριθμοί $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι όλοι διαφορετικοί mod$m$ και $(a, m) = 1$ δείξτε ότι και οι αριθμοί $an_1, an_2, \ldots, an_k$ είναι όλοι διαφορετικοί mod$m$. Το ίδιο συμβαίνει αν στους αριθμούς προστεθεί μια οποιαδήποτε σταθερά b.

53. Αν $a \equiv b \bmod m_1$, $a \equiv b \bmod m_2$, …, $a \equiv b \bmod m_k$ τότε

$$a \equiv b \bmod [m_1, m_2, \ldots, m_k].$$

$m_1 \mid (a - b)$ κλπ.

54. $a^2 \equiv 0$ ή $1 \bmod 4$ για κάθε a.
$a^2 \bmod 8 \in \{0, 1, 4\}$.

55. Αν $n = 1! + 2! + 3! + \cdots + 100!$ υπολογίστε τα υπόλοιπα

$$n \bmod 2, \quad n \bmod 7, \quad n \bmod 12, \quad n \bmod 25.$$

56. Αν $n \mid m$ και $a \equiv b \bmod m$ τότε $a \equiv b \bmod n$.

57. Αν $a \equiv b \bmod c$ τότε $(a, c) = (b, c)$.

58. Ποια ψηφία εμφανίζονται ως το ψηφίο των μονάδων στη δεκαδική μορφή μιας 4ης δύναμης ακεραίου;

59. Δείξτε ότι αν $a^2 \equiv b^2 \bmod p$ (όπου p πρώτος) τότε $a \equiv b \bmod p$ ή $a \equiv -b \bmod p$. Δείξτε ότι η συνεπαγωγή αυτή δεν ισχύει αναγκαστικά αν το p δεν είναι πρώτος.

60. Δείξτε με επαγωγή ότι $4^n \equiv 3n + 1 \bmod 9$. Ομοίως ότι $5^n \equiv 4n + 1 \bmod 16$.

61. Αν $n \equiv 3 \bmod 4$ τότε ο n δε μπορεί να γραφεί σα άθροισμα τετραγώνων ακεραίων.

62. Αν p πρώτος βρείτε όλες τις λύσεις της ισοτιμίας $x^2 \equiv x \bmod p$. Ομοίως για την ισοτιμία $x^2 \equiv x \bmod p^k$.

63. Βρείτε το υπόλοιπο $2^{200} \bmod 47$.

64. Ας είναι $m > 0$ και $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο τέτοιο ώστε $f(n) \equiv n \bmod m$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Έπεται από αυτό ότι

$$a_0 \equiv a_1 \equiv \cdots a_n \equiv 0 \bmod m?$$

Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.

65. Για ποια c με $0 \leq c < 30$ έχει λύση η διοφαντική εξίσωση $12x \equiv c \bmod 30$; Στις περιπτώσεις που υπάρχει λύση πόσες λύσεις υπάρχουν που είναι διαφορετικές $\bmod 30$;

66. Βρείτε το πολλαπλασιαστικό αντίστροφο του 13 $\bmod 2$, $\bmod 3$, $\bmod 5$ και $\bmod 11$.

67. Αν p πρώτος, πόσες και ποιες λύσεις (διαφορετικές $\bmod p^k$) έχει η εξίσωση $x^2 \equiv 1 \bmod p^k$;

Ξεχωρίστε τις περιπτώσεις $p > 2$ και $p = 2$.

Πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις

68. Δείξτε $\lim_{n\to\infty} \phi(n) \to +\infty$.

69. Αν $p_1, p_2, \ldots, p_k$ οι διαφορετικοί πρώτοι που εμφανίζονται στον n δείξτε ότι

$$\phi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)\cdots(1 - 1/p_k).$$

70. Για $n > 2$ το $\phi(n)$ είναι άρτιο.

71. Αν $d \mid n$ δείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς $\phi(n/d)$ ακέραιοι k ανάμεσα στους $1, 2, \ldots, n$ που έχουν $(n, k) = d$.

Δείξτε $\displaystyle\sum_{d|n} \phi(n/d) = n$.

72. Για ποια n ισχύει $\phi(3n) = 3\phi(n)$;

73. Για ποια n ισχύει $4 \mid \phi(n)$;

74. Για ποια n ισχύει $n \mid \phi(n)$;

75. Αν p πρώτος δείξτε ότι

$$(p-1)\phi(n) = \phi(np) \Longleftrightarrow p \nmid n.$$

76. Δείξτε ότι για n αρκετά μεγάλο ισχύει $\phi(n) \geq \sqrt{n}$.

77. Έστω $f : \{1, 2, \ldots\} \to \mathbb{C}$ μια αριθμητική συνάρτηση με συνελικτικό αντίστροφο τη συνάρτηση g. Δείξτε ότι αν και η συνάρτηση h είναι συνελικτικό αντίστροφο της f τότε $g = h$.

78. Η συνάρτηση g είναι συνελικτικό αντίστροφο της f αν $f * g = e$, όπου

$$e(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

Πρέπει δηλ. να ισχύει

$$e(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d),$$

για κάθε $n \geq 1$. Εξηγείστε γιατί πάντα υπάρχει μια τέτοια g (όλες μας οι συναρτήσεις έχουν τιμή 1 στο 1).

Δείξτε πως από την τελευταία εξίσωση μπορείτε να ορίσετε το $g(n)$ αν γνωρίζετε τις τιμές της g για όλους τους μικρότερους αριθμούς.

79. Αν $\sigma(n)$ είναι το άθροισμα των διαιρετών του n δείξτε ότι

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και το γεγονός ότι η $\sigma(n)$ είναι πολλαπλασιαστική συνάρτηση υπολογίστε το $\sigma(200)$.

Αν $\sigma_k(n)$ είναι το άθροισμα των k δυνάμεων των διαιρετών του n

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

βρείτε ένα τύπο για το $\sigma_k(p^a)$.

80. Αν $\tau(n)$ είναι το πλήθος των διαιρετών του n δείξτε ότι για κάθε $k > 0$ υπάρχουν άπειρα n τέτοια ώστε $\tau(n) = k$.

Αντίθετα, δείξτε ότι για κάθε $k > 0$ δεν υπάρχουν ποτέ άπειρα n τέτοια ώστε $\sigma(n) = k$.

81. Δειξτε ότι αν δύο αριθμοί έχουν το ίδιο γινόμενο διαιρετών τότε είναι ίσοι.

82. n είναι σύνθετος αν και μόνο αν $\sigma(n) > n + \sqrt{n}$.

83. Δείξτε ότι το πλήθος των ζευγών αριθμών με μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με το n ισούται με $\tau(n^2)$.

84. Δείξτε ότι για κάθε n ισχύει

$$\mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0.$$

85. Δείξτε ότι για κάθε $k > 0$ υπάρχουν k διαδοχικοί αριθμοί όπου η συνάρτηση $\mu(\cdot)$ ισούται με 0.