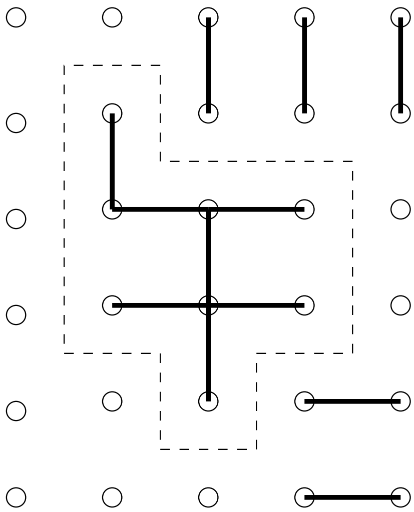
Διακριτή Πιθανότητα



Μιχάλης Κολουντζάκης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Λεωφ. Κνωσού
71409 Ηράκλειο

e-mail: `kolount@gmail.com`

30 Νοεμβρίου 2006

Περιεχόμενα

Συμβολισμοί

Σύνολα

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ είναι οι φυσικοί αριθμοί.
- $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ είναι οι φυσικοί αριθμοί επαυξημένοι με το σύμβολο του απείρου. Το να γράψουμε π.χ. $\sum_{i=1}^{m} a_i$, όπου $m \in \overline{\mathbb{N}}$, είναι σα να μιλάμε για ένα άθροισμα με m όρους, όταν το m είναι πεπερασμένο, ή για την άπειρη σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, όταν $m = \infty$.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ είναι οι ακέραιοι αριθμοί.
- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ είναι οι ρητοί αριθμοί.
- $\mathbb{R}$ είναι οι πραγματικοί αριθμοί.
- $\mathbb{C} = \{x + iy : \ x, y \in \mathbb{R}\}$, όπου $i^2 = -1$, είναι οι μιγαδικοί αριθμοί.
- $|A|$ συμβολίζει τον πληθάριθμο ενός συνόλου A, δηλ. το πλήθος των στοιχείων του A αν αυτό είναι πεπερασμένο σύνολο, αλλιώς το ∞.
- $[n]$ παριστάνει το σύνολο $\{1, \ldots, n\}$ (πεπερασμένο n)
- $A \times B$ παριστάνει το καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων A και B (με αυτή τη σειρά), δηλ. το σύνολο όλων των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με $x \in A$, $y \in B$.
- B^A παριστάνει το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το σύνολο A στο σύνολο B.

Συναρτήσεις

- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$, αν $n \geq 1$. Ορίζουμε επίσης $0! = 1$.
- Διωνυμικός συντελεστής: $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)}{k!}$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής "x ανά k" $k = 0, 1, 2, \ldots$. Δείτε το Θεώρημα 3.3.2. Το x δεν είναι απαραίτητα φυσικός αριθμός αλλά πραγματικός ή ακόμη και μιγαδικός. Ως συνάρτηση του x, με σταθερό το k, η ποσότητα $\binom{x}{k}$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k.
- Πολυωνυμικός συντελεστής: $\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n}{k_1! \cdots k_r!}$, όπου $k_1, \ldots, k_r$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι με $k_1 + \cdots + k_r = n$. Δείτε το Θεώρημα 3.5.1.
- $\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}$. Δείτε το Θεώρημα 3.6.2.
- $\lfloor x \rfloor$, για $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζει το ακέραιο μέρος του x, τον μεγαλύτερο δηλ. ακέραιο $k \leq x$. Π.χ. $\lfloor 2.1 \rfloor = 2$ και $\lfloor -2.1 \rfloor = -3$.
- $\lceil x \rceil$, για $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζει το μικρότερο ακέραιο $k \geq x$. Π.χ. $\lceil 2.1 \rceil = 3$ και $\lceil -2.1 \rceil = -2$.
- $\mathbf{1}$ (συνθήκη) ισούται με 1 αν ισχύει η συνθήκη, αλλιώς ισούται με 0. Για παράδειγμα η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου A μπορεί να γραφεί ως $\chi_A(x) = \mathbf{1}\,(x \in A)$.

Κεφάλαιο 1

Επαγωγή

1.1 Η μέθοδος στην απλή της μορφή

Η μέθοδος της *μαθηματικής επαγωγής* χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε προτάσεις οι οποίες εξαρτώνται, στην απλούστερη περίπτωση, από μια ακέραια μεταβλητή, η οποία συνήθως, αλλά όχι πάντα, συμβολίζεται με το γράμμα n. Συμβολίζουμε συνήθως με $P(n)$ την πρόταση αυτή. Έτσι, $P(0)$ σημαίνει ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = 0$, $P(1)$ ότι είναι αληθής για $n = 1$, κ.ο.κ. Σκοπός μας είναι να δείξουμε την αλήθεια της $P(n)$, για $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι ένας ακέραιος, συνήθως μη αρνητικός, αριθμός. Θέλουμε με άλλα λόγια να δείξουμε την αλήθεια των προτάσεων

$$P(n_0), P(n_0+1), P(n_0+2), \ldots.$$

Η μέθοδος, λοιπόν, της επαγωγής για την απόδειξη της πρότασης

$$\text{για κάθε } n \geq n_0 : \ P(n), \tag{1.1}$$

συνίσταται στην απόδειξη των εξής δύο προτάσεων:

$$P(n_0) \tag{1.2}$$

και

$$\text{για κάθε } n \geq n_0 : \ P(n) \Rightarrow P(n+1). \tag{1.3}$$

Για να δείξουμε δηλ. ότι ισχύει η πρόταση για όλες τις τιμές του n που θέλουμε, δηλ. για $n \geq n_0$, δείχνουμε πρώτα ότι ισχύει για $n = n_0$ και επίσης δείχνουμε ότι αν ισχύει για μια τιμή του n τότε ισχύει και για την επόμενη, δηλ. για το $n+1$. Η (1.2) ονομάζεται *αρχική* ή *βασική περίπτωση* και η (1.3) ονομάζεται *επαγωγικό βήμα*. Η υπόθεση $P(n)$ στο επαγωγικό βήμα ονομάζεται *επαγωγική υπόθεση*.

Παράδειγμα 1.1.1. Να δειχτεί ότι, για $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1). \tag{1.4}$$

Εδώ η αρχική τιμή της παραμέτρου n είναι $n = 1$, οπότε ελέγχουμε πρώτα απ' όλα αν ισχύει η πρόταση για $n = 1$. Προφανώς το αριστερό μέλος ισούται με 1 ενώ, αντικαθιστώντας, βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το δεξί. Άρα ισχύει η βασική περίπτωση και προχωρούμε να δείξουμε το επαγωγικό βήμα.

Η επαγωγική υπόθεση είναι τώρα η (1.4) (με την υπόθεση πάντα ότι $n \geq 1$) και πρέπει χρησιμοποιώντας την να δείξουμε την ίδια πρόταση όπου το n έχει αντικατασταθεί με $n+1$, την ισότητα δηλαδή

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \tag{1.5}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας την (1.4) (αφαιρώντας την (1.4) από την (1.5) κατά μέλη) η (1.5) είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$n + 1 = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)$$

που εύκολα ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι ισχύει. Δείξαμε λοιπόν και το επαγωγικό βήμα οπότε η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατήρηση 1.1.1. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής πρέπει η παράμετρος της πρότασης (n στο προηγούμενο παράδειγμα) απαραίτητα να παίρνει τιμές σε ένα σύνολο (στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν οι φυσικοί αριθμοί) που να μπορεί να εξαντληθεί αν ξεκινήσουμε από τη βασική περίπτωση και προχωράμε κάθε φορά κατά ένα.

Έτσι *δε* μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής όταν π.χ. η παράμετρος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Ας δούμε, για παράδειγμα, την πρόταση

$$P(x): \text{ ο πραγματικός αριθμός } x \text{ είναι ακέραιος.}$$

Το $P(0)$ προφανώς ισχύει και το ίδιο ισχύει και η συνεπαγωγή $P(x) \Rightarrow P(x+1)$, δεν ισχύει όμως η πρόταση για όλες τις (πραγματικές) τιμές της παραμέτρου x, αλλά μόνο για όσες είναι *προσιτές* από το βασικό αριθμό 0 με διαδοχικές αυξήσεις κατά 1, είναι δηλ. αληθής για τους φυσικούς αριθμούς αλλά όχι για όλους τους πραγματικούς.

▷ **Πρόβλημα 1.1.1. Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \geq 1$ ισχύει**

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{1.6}$$

Παράδειγμα 1.1.2. Να δειχτεί ότι $2^n > n^3$ για $n \geq 10$.

Για την αρχική τιμή $n = 10$ πρέπει να δείξουμε

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000,$$

που ισχύει.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $n \geq 10$ και ότι $2^n > n^3$ και πρέπει να δείξουμε ότι $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Πολλαπλασιάζοντας την επαγωγική μας υπόθεση με 2 παίρνουμε $2^{n+1} > 2n^3$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για $n \geq 10$, ισχύει $2n^3 \geq (n+1)^3$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα ως

$$(2^{1/3}n)^3 \geq (n+1)^3,$$

ή

$$2^{1/3}n \geq n+1,$$

ή

$$n \geq \frac{1}{2^{1/3} - 1},$$

που ισχύει για $n \geq 10$ αφού ισχύει για $n = 10$ (απλές πράξεις).

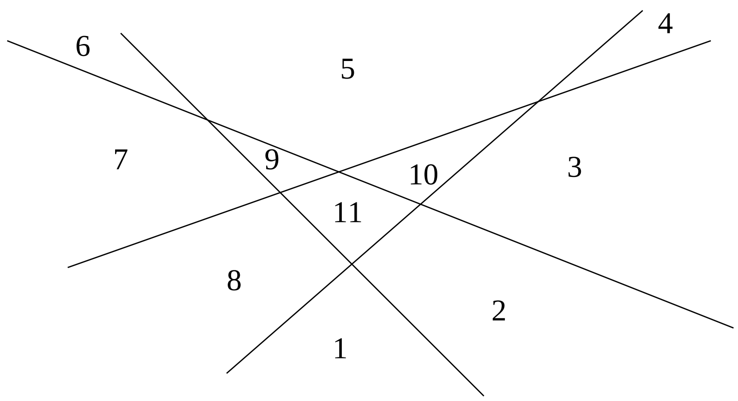
$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.1.2.** Ας δείξουμε επαγωγικά την εξής πρόταση: για κάθε σύνολο από n άλογα ($n \geq 1$) όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Για $n = 1$ άλογο η πρόταση είναι προφανώς αληθινή. Ας δείξουμε και το επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για n άλογα και τη δείχνουμε για $n+1$. Έστω λοιπόν άλογα $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Από την επαγωγική υπόθεση τα n άλογα $a_1, \ldots, a_n$ έχουν όλα το ίδιο χρώμα. Επίσης από την επαγωγική υπόθεση τα n άλογα $a_2, \ldots, a_{n+1}$ έχουν όλα το ίδιο χρώμα. Άρα έχουν όλα τα άλογα το ίδιο χρώμα.

Πού είναι το λάθος;

$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.1.3.** Οι αριθμοί Fibonacci F_i, $i \geq 1$, ορίζονται αναδρομικά από

$$F_1 = F_2 = 1, \text{ και } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ για } n > 2.$$

Δείξτε με επαγωγή ότι για $n \geq 1$ ο αριθμός F_{3n} είναι άρτιος.



Σχήμα 1. Τέσσερεις ευθείες που ορίζουν 11 χωρία στο επίπεδο

$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.1.4.** Δίνονται n ευθείες στο επίπεδο. Σε πόσα το πολύ χωρία χωρίζουν αυτές το επίπεδο; (Δείτε το Σχήμα 1.)

$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.1.5.** Σε μία χώρα κάθε μια από τις $n \geq 2$ πόλεις της συνδέεται με κάθε άλλη με ένα μονόδρομο. Δείξτε ότι υπάρχει τρόπος να ξεκινήσει κανείς από μία πόλη της χώρας αυτής και να επισκεφτεί κάθε άλλη, ακριβώς μία φορά, κινούμενος πάνω στο υπάρχον οδικό δίκτυο (και σεβόμενος τους μονόδρομους).

$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.1.6.** Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ισχύει ο τύπος για την *πεπερασμένη γεωμετρική σειρά*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad n \geq 1. \tag{1.7}$$

Δείτε επίσης και το Πρόβλημα 2.1.1 παρακάτω.

1.1.1 Όλες οι προηγούμενες περιπτώσεις ως επαγωγική υπόθεση

Η μέθοδος της λεγόμενης *ισχυρής μαθηματικής επαγωγής* αποδεικνύει την αλήθεια μιας πρότασης $P(n)$, για $n \geq n_0$, δείχνοντας κατ' αρχήν την αλήθεια της πρότασης $P(n_0)$ (σε αυτό ταυτίζεται με τη συνηθισμένη επαγωγή) αλλά το επαγωγικό βήμα συνίσταται στην απόδειξη της συνεπαγωγής

$$P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n-1), P(n) \Rightarrow P(n+1).$$

Με άλλα λόγια, για να δείξουμε την πρόταση $P(n+1)$ μας επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε την αλήθεια *όλων* των προηγουμένων περιπτώσεων, και όχι μόνο της αμέσως προηγούμενης.

Παράδειγμα 1.1.3. *Πρώτος* λέγεται ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 αν οι μόνοι διαιρέτες του είναι το 1 και ο εαυτός του. Δείχνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ είναι γινόμενο πρώτων αριθμών (ισχύει και μοναδικότητα του *αναπτύγματος* αυτού αλλά δεν το αποδεικνύουμε αυτό εδώ).

Η βασική περίπτωση είναι η $n = 2$. Αφού το 2 είναι πρώτος αριθμός η πρόταση ισχύει. Έστω τώρα $n > 2$ και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλες τις μικρότερες τιμές. Υποθέτουμε δηλ. ότι αν $2 \leq k < n$ τότε ο φυσικός αριθμός k μπορεί να γραφεί σα γινόμενο πρώτων αριθμών. Οφείλουμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας αυτή την υπόθεση, οτι και ο n γράφεται σα γινόμενο πρώτων.

Αν ο n είναι πρώτος αριθμός τότε ισχύει φυσικά αυτό. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο n δεν είναι πρώτος. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k, διαφορετικός από το 1 και από το n, που διαιρεί το n. Αυτό συνεπάγεται ότι $1 < k < n$, άρα, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, οι αριθμοί k και n/k (για τον οποίο επίσης ισχύει $1 < n/k < n$) γράφονται σα γινόμενο πρώτων. Το ίδιο ισχύει συνεπώς και για τον n που ισούται με το γινόμενός τους.

▷ **Πρόβλημα 1.1.7.** Κάθε ακέραια αξία $n \geq 12$ μπορεί να φτιαχτεί με κέρματα αξίας 4 και 5.

▷ **Πρόβλημα 1.1.8.** Η ακολουθία a_n, $n \geq 1$, ορίζεται από τους τύπους

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3).$$

Δείξτε ότι $a_n < (7/4)^n$, για $n \geq 1$.

1.2 Προχωρημένη χρήση της επαγωγής

1.2.1 Πολλαπλή επαγωγή

Πολλές φορές η πρόταση που θέλουμε να δείξουμε εξαρτάται από περισσότερες από μία παραμέτρους. Μπορεί, για παράδειγμα, να προκειται για μια πρόταση $P(m, n)$ που εξαρτάται από δύο παραμέτρους $m, n \geq 0$. Η μέθοδος της επαγωγής μπορεί μερικές φορές να εφαρμοστεί και σε τέτοιες περιπτώσεις. Στην απλούστερη περίπτωση το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σα μια επαλληλία μονοπαραμετρικών προβλημάτων.

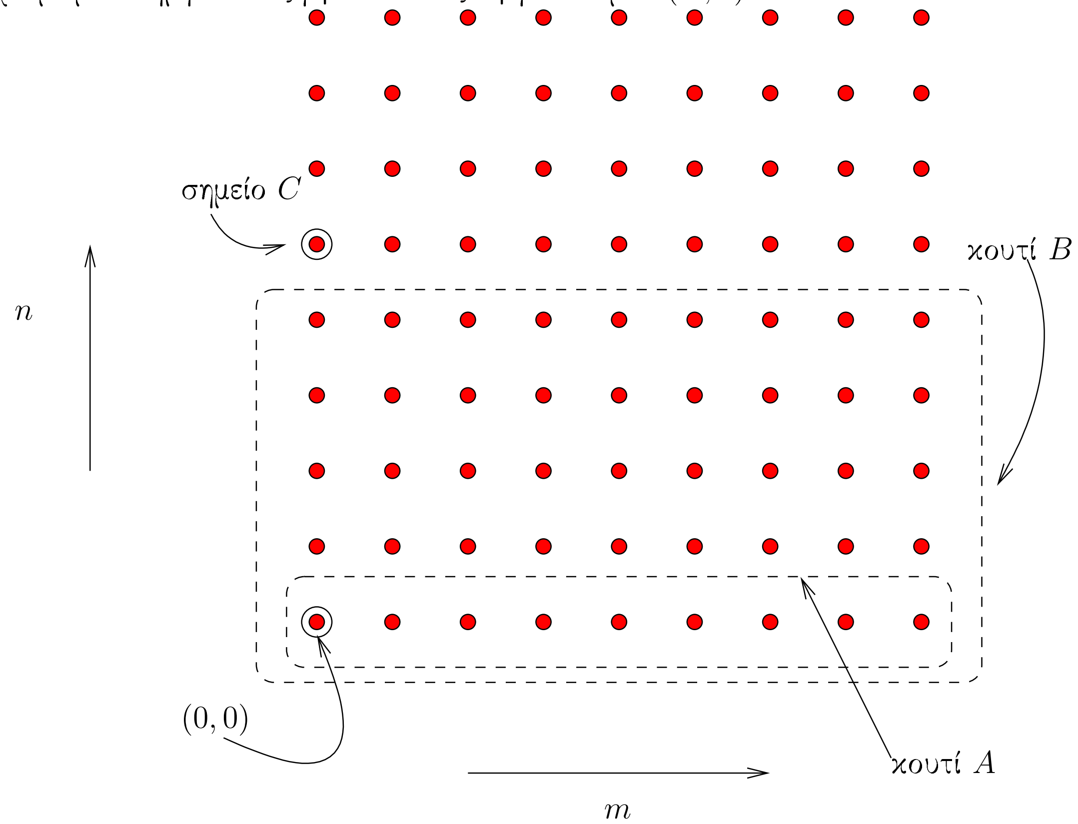
Σε μια τυπική τέτοια περίπτωση αποδεικνύεται πρώτα η πρόταση $P(0, 0)$, και μετά δείχνουμε τη συνεπαγωγή

$$P(m, n) \Rightarrow P(m+1, n). \tag{1.8}$$

Με μόνα αυτά τα δύο βήματα στο "οπλοστάσιό" μας δε μπορούμε ακόμη να ξεφύγουμε από τη γραμμή $n = 0$. Αν όμως αποδείξουμε και τη συνεπαγωγή

$$(\forall m \geq 0 \; \forall k < n \; P(m, k)) \Rightarrow P(0, n), \tag{1.9}$$

τότε έχουμε μια πλήρη απόδειξη για όλα τα ζεύγη των τιμών (m, n).



Σχήμα 2. Διπλή επαγωγή

Ας περιγράψουμε λίγο το τι σημαίνουν αυτές οι συνεπαγωγές που μοιάζουν (και είναι) αρκετά αυθαίρετες. Αυτό που θέλουμε είναι να αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης $P(m, n)$ σε όλα τα ακέραια σημεία του τεταρτημορίου $m, n \geq 0$ του επιπέδου. Ας αναφερθούμε στο Σχήμα 2 όπου παριστάνεται σχηματικά το τεταρτημόριο αυτό.

Με το βασικό βήμα της επαγωγής αποδεικνύουμε την αλήθεια της $P(\cdot, \cdot)$ στο σημείο $(0, 0)$. Μετά την απόδειξη της (1.8) μπορούμε επεκτείνουμε την αλήθεια της $P(\cdot, \cdot)$ σε όλο το (ημιάπειρο) "κουτί A", που αποτελείται από όλα τα σημεία του τύπου $(\cdot, 0)$. Και αυτό γιατί το νόημα της συνεπαγωγής (1.8) είναι ότι η αλήθεια της πρότασης επεκτείνεται από κάθε σημείο στο αμέσως δεξιά του.

Για να επεκτείνουμε την αλήθεια της $P(\cdot, \cdot)$ και προς τα πάνω χρειάζεται να έχουμε και ένα "κανόνα" που να συνάγει την αλήθεια της $P(\cdot, \cdot)$ σε ένα σημείο γνωρίζοντας την αλήθεια αυτής σε σημεία που είναι αυστηρά χαμηλότερα. Αυτός είναι ακριβώς ο ρόλος της συνεπαγωγής (1.9). Αν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η P αληθεύει στο "κουτί B", δηλ. σε όλα τα σημεία του τύπου (m, k), όπου το m είναι οτιδήποτε και $k < n$, συμπεραίνουμε τότε ότι η $P(0, n)$ (στο "σημείο C") ισχύει. Με σημείο αφετηρίας τώρα το σημείο C και χρησιμοποιώντας ξανά τη συνεπαγωγή 1.8 επεκτείνουμε την αλήθεια της P στη γραμμή ακριβώς πάνω από το κουτί B. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο επ' άπειρον βλέπουμε ότι η πρόταση αληθεύει παντού στο τεταρτημόριο που μας ενδιαφέρει.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει η επαγωγή σε παραπάνω από μία μεταβλητή, και ότι αυτός που αναφέραμε παραπάνω είναι απλά ένας από αυτούς. Αυτό που χρειάζεται σε μια εφαρμογή της επαγωγής είναι ένα επαγωγικό βήμα που να μπορεί να "καλύψει" όλο το σύνολο των τιμών που παίρνουν οι παράμετροι (m και n στον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω) ξεκινώντας από μερικές απλές βασικές περιπτώσεις. Ιδού ένα άλλο παράδειγμα: ας υποθέσουμε ότι οι παράμετροι m και n της πρότασής μας παίρνουν όλες τους φυσικούς αριθμούς ως τιμές και ότι μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε την πρότασή μας αν $m = 0$ ή αν $n = 0$ (συνοριακές συνθήκες). Επίσης, για κάθε ζεύγος τιμών m και n όπου και τα δύο είναι τουλάχιστον 1, η αλήθεια της πρότασης προκύπτει από την αλήθεια της πρότασης στα σημεία $(m-1, n-1)$ και $(m-1, n)$ (τα σημεία ακριβώς αριστερά και αριστερά-κάτω από το (m, n) στο Σχήμα 2). Τότε η πρόταση αληθεύει για όλα τα $m, n \geq 0$ αφού για οποιοδήποτε τέτοιο ζεύγος μπορεί κανείς με διαδοχικές αναγωγές να οδηγηθεί να εξαρτάται από την αλήθεια της πρότασης στο σύνορο του τεταρτημορίου, όπου γνωρίζουμε ότι αυτή ισχύει. Δείτε και το Πρόβλημα 1.2.1.

▷ **Πρόβλημα 1.2.1.** Η ακολουθία $a(n, k)$ ορίζεται για $n, k \geq 0$, και ικανοποιεί τα παρακάτω.

$$a(n,0) = 1, \ (n \geq 0),$$
$$a(n,k) = 0, \ (n < k),$$

και

$$a(n,k) = a(n-1,k-1) + a(n-1,k), \ (n \geq k \geq 1).$$

Δείξτε ότι για $n \geq k \geq 1$ ισχύει

$$a(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}.$$

1.2.2 Ενισχύοντας την πρόταση που θέλουμε να δείξουμε

Πολλές φορές, και παρ' ότι εκ πρώτης όψεως μπορεί να φαίνεται παράδοξο, όταν πάμε να δείξουμε με επαγωγή μια πρόταση P είναι ευκολότερο να δείξουμε μια *ισχυρότερη* πρόταση Q, μια πρόταση δηλ. για την οποία να ισχύει για κάθε n η συνεπαγωγή $Q(n) \Rightarrow P(n)$.

Αυτό δεν είναι και τόσο περίεργο αν σκεφτούμε ότι στο επαγωγικό βήμα (1.3) η πρόταση P εμφανίζεται στο συμπέρασμα αλλά και στην υπόθεση. Δηλ. ναι μεν δυσκολεύουμε κάπως τη ζωή μας (περνώντας από την P στην Q) αφού έχουμε να αποδείξουμε κάτι δυσκολότερο από πριν, ενισχύουμε όμως ταυτόχρονα και την επαγωγική μας υπόθεση οπότε δεν είναι προφανές ότι χάνουμε. Σε πολλές περιπτωσεις κερδίζουμε στην ευκολία απόδειξης.

Παράδειγμα 1.2.1. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$ (άθροισμα των πρώτων n περιττών φυσικών αριθμών) είναι τέλειο τετράγωνο για $n \geq 1$.

Ας γράψουμε για απλότητα $S_n = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1$, οπότε $S_{n+1} = S_n + 2n + 1$. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει η πρόταση αφού $S_1 = 1 = 1^2$.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει $S_n = t^2$ για κάποιο ακέραιο t. Έχουμε τότε

$$S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = t^2 + 2n + 1.$$

Δυστυχώς από δω και πέρα δεν υπάρχει τρόπος να δείξουμε ότι η ποσότητα $t^2 + 2n + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Αν όμως αντί να δείξουμε την πρόταση

$$P(n): \ S_n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}$$

δείξουμε την ισχυρότερη πρόταση

$$Q(n): \ S_n = n^2,$$

η οποία προφανώς συνεπάγεται την $P(n)$, τότε μας λύνονται τα χέρια, αφού παραπάνω από την επαγωγική υπόθεση $t = n$ και σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα $t^2 + 2n + 1$ είναι ίση με $(n+1)^2$, και έχουμε λοιπόν δείξει το επαγωγικό βήμα.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 1.2.2.** (Ανισότητα Bernoulli) Δείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$ και πραγματικό αριθμό $x \geq -1$ ισχύει

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{1.10}$$

Δοκιμάστε τώρα να δείξετε με επαγωγή την ασθενέστερη ανισότητα $(1+x)^n \geq nx$.

1.3 Εφαρμογή: Το θεώρημα του Γάμου

Έστω X ένα, πεπερασμένο ή άπειρο, σύνολο και $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ένα *σύστημα υποσυνόλων* του X. Για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο X είναι πεπερασμένο, αν και όλες οι αποδείξεις ισχύουν και για άπειρο X (αλλά πάντα τα A_i πρέπει να είναι πεπερασμένα).

Ορισμός 1.3.1. Τα στοιχεία $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ ονομάζονται ένα *σύστημα ξένων αντιπροσώπων* (ΣΞΑ) για το σύστημα συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι όλα διαφορετικά.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να βρούμε συνθήκες για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για ένα σύστημα συνόλων

$$\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Η ονομασία "θεώρημα του Γάμου" προέρχεται από την εξής αναλογία: υποθέτουμε ότι έχουμε n γυναίκες $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ και ότι A_i είναι το σύνολο των ανδρών που αποδέχεται η γυναίκα Γ_i ως συζύγους. Το ερώτημα είναι πότε μπορούμε να διαλέξουμε από ένα σύζυγο για κάθε γυναίκα, από αυτούς που αποδέχεται, και διαφορετικό για κάθε γυναίκα. Αυτό λοιπόν γίνεται αν και μόνο αν η οικογένεια υποσυνόλων $A_1, \ldots, A_n$ (του συνόλου όλων των ανδρών) έχει κάποιο σύστημα ξένων αντιπροσώπων.

Ορισμός 1.3.2. Για κάθε $J \subseteq [n]$ ορίζουμε

$$A(J) = A_{\mathcal{F}}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Ο δείκτης $\mathcal{F}$ θα παραλείπεται όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχισης.

Είναι φανερό πως αν το σύστημα $\mathcal{F}$ έχει ένα ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε έχουμε

$$\forall J \subseteq [n]: \quad |A(J)| \geq |J|. \tag{1.11}$$

Αυτό γιατί το σύνολο $A(J)$ περιέχει τουλάχιστον τα $x_j, j \in J$, τα οποία εξ ορισμού είναι όλα διαφορετικά.

Η συνθήκη (1.11) λέγεται συνθήκη του Hall και το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 1.3.1. (Το θεώρημα του Γάμου)
Το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$ έχει ΣΞΑ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη του Hall (1.11).

Απόδειξη. Επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ το θεώρημα είναι προφανές. Υποθέτουμε πως ισχύει μέχρι και $n-1$. Εστω $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την (1.11). Ενα σύνολο $J \subset [n]$, $J \neq \emptyset, [n]$, λέγεται *κρίσιμο* αν $|A(J)| = |J|$.

Περίπτωση 1η: Δεν υπάρχει κρίσιμο σύνολο J.
Από την (1.11) το A_1 έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω x_1. Θεωρούμε τώρα το σύστημα υποσυνόλων του $X \setminus \{x_1\}$
$$\mathcal{F}' = \left\{A'_2, \ldots, A'_n\right\},$$
με $A'_j = A_j \setminus \{x_1\}$, $j = 2, \ldots, n$. Εστω $J \subseteq \{2, \ldots, n\}$. Αφού το J δεν είναι κρίσιμο για το σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned}|A_{\mathcal{F}'}(J)| &\geq |A_{\mathcal{F}}(J)| - 1 \\ &> |J| - 1 \\ &\geq |J|,\end{aligned}$$

άρα η συνθήκη του Hall (1.11) ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}'$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα ΣΞΑ $x_2, \ldots, x_n$ για το $\mathcal{F}'$. Είναι εύκολο τότε να δεί κανείς πως τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ένα ΣΞΑ για το $\mathcal{F}$.

Περίπτωση 2η: Υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο.
Εστω J ένα κρίσιμο σύνολο με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Για απλούστευση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $J = \{1, \ldots, k\}$. Εχουμε τότε $|A(J)| = |J|$. Αφού η συνθήκη του Hall ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}$ είναι φανερό ότι θα ισχύει και για το σύστημα $A_1, \ldots, A_k$ υποσυνόλων του $A(J)$. Αφού $k < n$ συμπεραίνουμε από την επαγωγική υπόθεση πως υπάρχει ΣΞΑ $x_1, \ldots, x_k \in A(J)$ για τα $A_1, \ldots, A_k$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει και ένα ΣΞΑ για τα σύνολα $A_{k+1}, \ldots, A_n$ με όλους τους αντιπροσώπους $\notin A(J)$, και έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη. Γιάυτό θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall για το σύστημα $\mathcal{F}' = \left\{A'_{k+1}, \ldots, A'_n\right\}$ υποσυνόλων του $X \setminus A(J)$, με

$$A'_j = A_j \setminus A(J), \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Εστω λοιπόν $I \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$. Πρέπει να δείξουμε $|A_{\mathcal{F}'}(I)| \geq |I|$.

Από τη συνθήκη του Hall για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| \geq |I \cup J| = |I| + |J|.$$

Αλλά είναι φανερό ότι επίσης έχουμε

$$A_{\mathcal{F}}(I \cup J) = A_{\mathcal{F}'}(I) \cup A_{\mathcal{F}}(J),$$

όπου η ένωση είναι ξένη.

Επεται ότι

$$\begin{aligned}|A_{\mathcal{F}'}(I)| &= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |A_{\mathcal{F}}(J)| \\ &= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |J| \\ &\geq |I \cup J| - |J| \\ &= |I| + |J| - |J| \\ &= |I|,\end{aligned}$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Αρα το σύστημα $\mathcal{F}'$ έχει ΣΞΑ του οποίου η ένωση με το ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του συστήματος $A_1, \ldots, A_k$, μας δίνει ένα ΣΞΑ για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$.
■

▷ **Πρόβλημα 1.3.1.** Δείξτε ότι ο αριθμός 8 διαιρεί το $9^k - 1$ για $k \geq 1$.

▷ **Πρόβλημα 1.3.2.** Δείξτε ότι για $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$ έχουμε

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

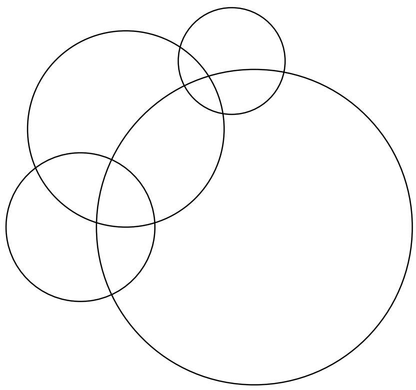
▷ **Πρόβλημα 1.3.3.** Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \geq 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \tag{1.12}$$

▷ **Πρόβλημα 1.3.4.** Δείξτε την ισότητα

$$\sum_{\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq [n]} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = n,$$

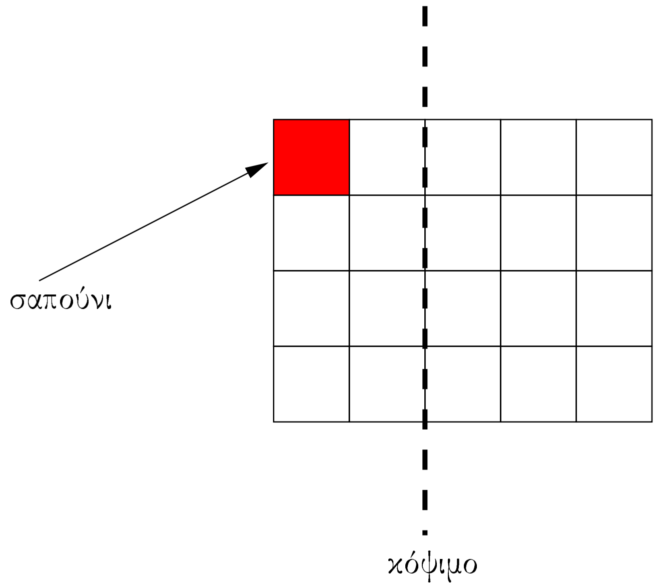
όπου στο άθροισμα υπάρχει ακριβώς ένας προσθετέος για κάθε ένα από τα υποσύνολα $\{a_1, \ldots, a_k\}$ του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.



Σχήμα 3. Κύκλοι που ορίζουν χωρία στο επίπεδο

▷ **Πρόβλημα 1.3.5.** Δίνονται n κύκλοι στο επίπεδο. (Δείτε το Σχήμα 3.) Αυτοί ορίζουν κάποια χωρία. Δείξτε ότι αυτά μπορούν να χρωματιστούν κόκκινα ή μπλέ με τέτοιο τρόπο ώστε χωρία που έχουν κοινό σύνορο (όχι απλώς κοινή γωνία αλλά ολόκληρο τόξο ως κοινό σύνορο) να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Οι κύκλοι βρίσκονται σε *γενική θέση*: κάθε δύο από αυτούς είτε τέμνονται είτε είναι ξένοι (δεν μπορούν να εφάπτονται) και δεν υπάρχουν τριπλά σημεία τομής.



Σχήμα 4. Η σοκολάτα του Προβλήματος 1.3.6 ($m = 4$, $n = 5$), και ένα κόψιμο από πάνω προς το κάτω.

▷ **Πρόβλημα 1.3.6.** Έχουμε μια ορθογώνια σοκολάτα που αποτελείται από τετραγωνάκια τοποθετημένα σε m γραμμές και n στήλες. Το τετραγωνάκι όμως της πάνω αριστερά γωνίας (και μόνο αυτό) είναι φτιαγμένο από σαπούνι αντί για σοκολάτα.

Δύο παίκτες παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Όταν έρθει η σειρά κάποιου παίκτη αυτός κόβει ένα κομμάτι σοκολάτα και το τρώει. Η $m \times n$ σοκολάτα μπορεί να κοπεί είτε οριζόντια είτε κάθετα αλλά πλήρως, δηλ. αν η σοκολάτα κοπεί οριζόντια τότε αυτή χωρίζεται σε δύο ορθογώνιες σοκολάτες, μια $k \times n$ και μια $(m-k) \times n$, και ο παίκτης διαλέγει και τρώει ένα από τα δύο ορθογώνια κομμάτια. Ομοίως, αν η σοκολάτα κοπεί κάθετα τότε χωρίζεται σε δυο κομμάτια, ένα $m \times k$ και ένα $m \times (n-k)$. (Δείτε Σχήμα 4.)

Χάνει ο παίκτης που αναγκάζεται να φάει το τετραγωνάκι με το σαπούνι. Θα θέλατε να παίζατε πρώτος ή δεύτερος; Η απάντηση εξαρτάται από τα m και n. Βρείτε (π.χ. μαντέψτε) την απάντηση και αποδείξτε ότι έχετε δίκιο με επαγωγή ως προς το μέγεθος της σοκολάτας (mn).

Κεφάλαιο 2

Εισαγωγικά στην έννοια της πιθανότητας

2.1 Πειράματα

2.1.1 Ρίψη νομίσματος

Το πείραμα: Η ρίψη ενός νομίσματος.
Το αποτέλεσμα: Κορώνα (Κ) ή γράμματα (Γ)

Αν υποθέσουμε ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα N φορές τότε περιμένουμε τις μισές από αυτές *περίπου* το αποτέλεσμα να είναι Κ. Αυτή ακριβώς την έννοια κωδικοποιούμε λέγοντας ότι η πιθανότητα το πείραμα να έχει αποτέλεσμα Κ είναι ίση με $1/2$. Η πιθανότητα p δηλ. να φέρει ένα πείραμα ένα αποτέλεσμα Α είναι η αναμενόμενη συχνότητα με την οποία θα εμφανιστεί το αποτέλεσμα Α αν επαναλάβουμε το πείραμα πάρα πολλές φορές. Αν δηλ. το επαναλάβουμε N φορές περιμένουμε το αποτέλεσμα Α να εμφανιστεί περίπου pN φορές. Εύλογο είναι ότι ο αριθμός p πρέπει να είναι ένας πραγματικός αριθμός στο διάστημα $[0, 1]$.

2.1.2 Ρίψη ζαριού

Το πείραμα: Η ρίψη ενός ζαριού.
Το αποτέλεσμα: Ένας από τους αριθμούς 1 έως 6.

Αν υποθέσουμε ότι επαναλαμβάνουμε το πείραμα N φορές τότε περιμένουμε το αποτέλεσμα να είναι ο αριθμός 2 με περίπου $N/6$ φορές. Η πιθανότητα δηλ. το αποτέλεσμα να είναι 2 ισούται με $1/6$. Το ίδιο είναι και η πιθανότητα το αποτέλεσμα να είναι 1 ή 3 ή οποιοδήποτε άλλο από τα δυνατά αποτελέσματα.

Σε αυτό το παράδειγμα (ζάρι) όπως και στο προηγούμενο (νόμισμα) τα δυνατά αποτελέσματα είναι όλα ισοπίθανα.

Παρατηρείστε επίσης ότι αν αθροίσουμε (είτε στο παράδειγμα του νομίσματος είτε του ζαριού) τις πιθανότητες των δυνατών αποτελεσμάτων θα πάρουμε 1. Αυτό είναι αναμενόμενο με βάση την ερμηνεία που έχουμε προσδώσει στην πιθανότητα ως συχνότητα εμφάνισης του αποτελεσματος: αν επαναλάβουμε το πείραμα N φορές τότε το άθροισμα των συχνοτήτων εμφάνισης των αποτελεσμάτων είναι 1.

2.1.3 Ζεύγος νομισμάτων

Το πείραμα: Ρίχνουμε δύο νομίσματα και παρατηρούμε τι (Κ ή Γ) έφερε το κάθε νόμισμα.
Το αποτέλεσμα: Όλα τα ζεύγη (x, y) όπου τα x, y είναι Κ ή Γ.

Ερμηνεύοντας όπως και προηγουμένως την πιθανότητα ενός δυνατού αποτελέσματος ως τη συχνότητα με την οποία εμφανίζεται εύκολα καταλήγουμε ότι οι πιθανότητες των τεσσάρων δυνατών αποτελεσμάτων (Κ,Κ), (Κ,Γ), (Γ,Κ) και (Γ,Γ) πρέπει να είναι όλες ίσες και άρα ίσες με $1/4$. Ένας άλλος τρόπος να το σκεφτούμε αυτό είναι να παρατηρήσουμε ότι αν εκτελέσουμε το πείραμα N φορές περιμένουμε περίπου τις μισές από αυτές το πρώτο νόμισμα να έρθει Κ, και περίπου τις μισές από αυτές να έρθει και το δεύτερο νόμισμα Κ, αφού οι ρίψεις των δύο νομισμάτων δεν αλληλοεπηρεάζονται. Άρα η πιθανότητα του αποτελέσματος (Κ,Κ) πρέπει να είναι $1/4$.

2.1.4 Αριθμός παιδιών

Το πείραμα: Ένα ζευγάρι κάνει συνεχώς παιδιά μέχρι να κάνει το πρώτο αγόρι, οπότε και σταματάει. Υποθέτουμε ότι σε όλες τις γέννες γεννιέται ένα παιδί κι ότι μπορούν να κάνουν απεριόριστα μεγάλο αριθμό παιδιών.

Το αποτέλεσμα: Ο αριθμός N, $N = 1, 2, 3, \ldots$, των παιδιών που κάνει τελικά το ζευγάρι.

Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων εδώ είναι άπειρο, αλλά αριθμήσιμο.

Η επίλυση του προβλήματος αυτού συνίσταται στο να υπολογιστεί η πιθανότητα να έχουμε $N = 1$, η πιθανότητα να έχουμε $N = 2$, κλπ. Για παράδειγμα, είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι η πιθανότητα $N = 1$ ισούται με $1/2$ (υποθέτουμε εδώ ότι η πιθανότητα γέννησης αγοριού είναι $1/2$), αφού $N = 1$ όταν και μόνο όταν το πρώτο παιδί που θα γεννηθεί είναι αγόρι. Θα δούμε αργότερα ότι η πιθανότητα να έχουμε $N = k$, για ένα οποιοδήποτε φυσικό αριθμό k, ισούται με 2^{-k}.

Αν το δεχτούμε αυτό τότε επαληθεύουμε εύκολα και πάλι ότι το άθροισμα των πιθανοτήτων για όλα τα δυνατά αποτελέσματα του πειράματος ισούται με 1:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1.$$

Για να δείτε την παραπάνω ισότητα χρησιμοποιείστε την ταυτότητα (άθροισμα άπειρης γεωμετρικής σειράς) για $z = 1/2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1-z}, \tag{2.1}$$

που ισχύει για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $|z| < 1$.

▷ **Πρόβλημα 2.1.1.** Δείξτε την (2.1) αφού δείξετε πρώτα τον τύπο για το άθροισμα πεπερασμένης γεωμετρικής σειράς:

$$\sum_{k=0}^{N-1} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1} = \frac{1-z^N}{1-z}, \tag{2.2}$$

που ισχύει για κάθε μιγαδικό αριθμό z.

Υπόδειξη: Μπορείτε να το δείξετε το (2.2) με επαγωγή (δείτε Πρόβλημα 1.1.6 ή πιο έξυπνα θέτοντας $X = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}$ και πολλαπλασιάζοντας την τελευταία αυτή ισότητα με z προσπαθώντας να συμπεράνετε μια εξίσωση για το X την οποία και λύνετε.

Μην ξεχνάτε ότι εξ ορισμού $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k$. Αν δεν αισθάνεστε άνετα με μιγαδικούς αριθμούς, δείξτε τα παραπάνω για πραγματικούς αριθμούς.

▷ **Πρόβλημα 2.1.2.** Βρείτε ένα τύπο για το άθροισμα $\sum_{k=0}^{N-1} kz^k = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdot + (N-1)z^{N-1}$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.1.1.

▷ **Πρόβλημα 2.1.3.** Ένα σύνολο A λέγεται *αριθμήσιμο* αν υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ από το σύνολο των φυσικών αριθμών *επί* του A.

Δείξτε ότι όλα τα πεπερασμένα σύνολα είναι αριθμήσιμα. Επίσης ότι τα σύνολα $\mathbb{N}$ (φυσικοί αριθμοί), $\mathbb{Z}$ (ακέραιοι αριθμοί), $\mathbb{Q}$ (ρητοί αριθμοί) είναι όλα αριθμήσιμα. Επίσης δείξτε ότι υποσύνολα αριθμησίμων συνόλων είναι κι αυτά αριθμήσιμα, και ότι η ένωση δύο αριθμησίμων συνόλων είναι κι αυτή αρθμήσιμη.

2.1.5 Χρόνος αναμονής

Το πείραμα: Καθόμαστε μπροστά από ένα κατάστημα και μετράμε το χρόνο που περνάει από τη στιγμή που θα μπεί ένας πελάτης μέχρι να μπεί ο επόμενος.
Το αποτέλεσμα: Ένας πραγματικός αριθμός $t \geq 0$.

Σε αντίθεση με τα παραδείγματα του ζαριού και του νομίσματος το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων σε αυτό πείραμα είναι άπειρο και μάλιστα υπεραριθμήσιμο. Δεν έχει εδώ νόημα να αντιστοιχήσουμε μια πιθανότητα εμφάνισης σε κάθε δυνατό t. Εξάλλου είναι φανερό ότι αν επαναλάβουμε το πείραμα αυτό πολλές φορές είναι πρακτικά αδύνατο να παρατηρήσουμε τον ίδιο χρόνο δύο φορές (όχι προσεγγιστικά αλλά ακριβώς). Έχει όμως νόημα να μετρήσουμε πόσες φορές (από τις N) ο χρόνος αυτός πέφτει μέσα σε εάν διάστημα, π.χ. ανάμεσα σε 2 και 3 λεπτά. Έχει δηλ. νόημα να μιλήσουμε για την πιθανότητα να συμβεί $2 \leq t \leq 3$.

2.1.6 Ύψος και βάρος

Το πείραμα: Ανοίγουμε τον τηλεφωνικό κατάλογο της πόλης μας και επιλέγουμε ένα τυχαίο άτομο. Το παίρνουμε τηλ. και ρωτάμε το ύψος και το βάρος του.
Το αποτέλεσμα: Δύο πραγματικοί αριθμοί H και W. Υποθέτουμε ότι $0 \leq H \leq 2.5$ (μέτρα) και $0 \leq W \leq 300$ (κιλά).

Εδώ το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι τα ζεύγη (H, W), όπου τα H και W πληρούν τις άνω ανισότητες. Όπως και στο Παράδειγμα της §2.1.5 το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων είναι υπαραριθμήσιμο.

2.2 Δειγματικοί χώροι, ενδεχόμενα, η πιθανότητά τους

Δοθέντος ενός πειράματος που θέλουμε να μελετήσουμε πιθανοθεωρητικά η πρώτη δουλειά που πρέπει να γίνει είναι να καταλάβουμε ποια ακριβώς είναι τα δυνατά αποτελέσματα αυτού του πειράματος.

Ορισμός 2.2.1. *Δειγματικός χώρος* Ω ενός πειράματος ονομάζεται το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων του.

Αν σταματήσουμε εδώ τότε φυσικά δεν έχουμε κάνει τίποτα που θα μας βοηθήσει στην πιθανοθεωρητική ανάλυση αφού έχουμε μόνο μιλήσει για τα *δυνατά* αποτελέσματα και όχι για τα *πιθανά*. Γι' αυτό το λόγο σε κάθε στοιχείο του δειγματικού χώρου αντιστοιχίζουμε ένα αριθμό p που δηλώνει πόσο πιθανό είναι το στοιχείο αυτό να εμφανιστεί.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ ένας πεπερασμένος ή αριθμήσιμος δειγματικός χώρος ενός πειράματος. Ονομάζουμε *κατανομή πιθανότητας στον* Ω μια συνάρτηση $p : \Omega \to [0,1]$ με την ιδιότητα

$$\sum_{j=1}^{|\Omega|} p(\omega_j) = 1. \tag{2.3}$$

Εδώ $|\Omega|$ συμβολίζει τον πληθάριθμο του συνόλου $|\Omega|$.

Ο λόγος που που περιοριζόμαστε, προς το παρόν, σε αριθμήσιμους δειγματικούς χώρους, αφήνοντας έξω από τη μελέτη μας πειράματα όπως αυτό της §2.1.5 όπου ο δειγματικός χώρος είναι αυτός των πραγματικών αριθμών (υπεραριθμήσιμος) είναι ότι το αξίωμα (2.3) πρέπει να αντικατασταθεί με κάτι άλλο και η συνάρτηση p δεν είναι πια μια συνάρτηση στα στοιχεία του Ω. Από δώ και στο εξής θα μιλάμε αποκλειστικά για αριθμήσιμους δειγματικούς χώρους εκτός από ορισμένες περιπτώσεις οπότε και θα το ξεκαθαρίζουμε.

Παράδειγμα 2.2.1. Ο δειγματικός χώρος του τιμίου (έχει δηλ. ίδια πιθανότητα να έρθει κορώνα ή γράμματα) νομίσματος (δες §2.1.1) είναι ο $\Omega = \{\mathrm{K}, \Gamma\}$. Η κατανομή πιθανότητας στον Ω είναι η $p(\mathrm{K}) = p(\Gamma) = 1/2$.

Παράδειγμα 2.2.2. Για το τίμιο ζάρι της §2.1.2 έχουμε $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ και η κατανομή πιθανότητας δίδεται από τη συνάρτηση $p : \Omega \to [0,1]$ που είναι σταθερή στον Ω, έχουμε δηλ. $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = 1/6$. Η τιμή $1/6$ προκύπτει από την (2.3) και την παραδοχή (τιμιότητα) που κάναμε ότι όλες οι τιμές είναι ισοπίθανες.

Ορισμός 2.2.3. Μια κατανομή πιθανότητας $p : \Omega \to [0,1]$ σε ένα δειγματικό χώρο Ω λέγεται *ομοιόμορφη* αν είναι σταθερή στο Ω.

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να λέμε ότι το τίμιο νόμισμα και το τίμιο ζάρι έχουν και τα δύο την ομοιόμορφη κατανομή, πάνω βέβαια σε διαφορετικούς δειγματικούς χώρους.

Παράδειγμα 2.2.3. Στο παράδειγμα της §2.1.4 έχουμε $\Omega = \mathbb{N} \cup \{\infty\} = \{1, 2, 3, \ldots, \infty\}$. Προσέξτε εδώ ότι η τιμή ∞ είναι δυνατή τιμή για το πείραμα: είναι θεωρητικά δυνατό ένα ζευγάρι να μην κάνει ποτέ αγόρι οπότε θα αποκτήσει (εις το διηνεκές) άπειρα το πλήθος κορίτσια.

Η κατανομή πιθανότητας γιάυτό το παράδειγμα δίνεται από τη συνάρτηση $p : \Omega \to [0,1]$

$$p(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega = \infty \\ 2^{\omega} & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Θα το αποδείξουμε αυτό αργότερα. Πρός το παρόν το μόνο που είναι εύκολο να δούμε είναι ότι $p(1) = 1/2$ αφού κάνει η οικογένεια συνολικά μόνο ένα παιδί μόνο αν το πρώτο παιδί είναι αγόρι, και αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $1/2$.

Παρ' ότι η τιμή $\omega = \infty$ είναι δυνατή, εφ' έχει πιθανότητα 0 μπορούμε να την αγνοήσουμε. Με άλλα λόγια, όσον αφορά την πιθανοθεωρητική ανάλυση του πειράματος, στην οποία εν γένει αγνοούμε πράγματα που έχουν πιθανότητα ίση με 0 να συμβούν, μπορούμε να θεωρούμε ότι ο δειγματικός χώρος είναι απλά ο $\Omega' = \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.2.4. Το *δυναμοσύνολο* $\mathcal{P}(\Omega)$ ενός συνόλου Ω είναι το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω.

Ενδεχόμενο ονομάζεται ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του δειγματικού χώρου, ένα οποιοδήποτε δηλ. στοιχείο του $\mathcal{P}(]Omega)$.

Σε σχέση με ένα πείραμα θα λέμε ότι το ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει αν το αποτέλεσμα του πειράματος ανήκει στο A.

▷ **Πρόβλημα 2.2.1.** Αν $|\Omega| = n < \infty$ δείξτε ότι $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^n$.

Με τη βοήθεια της κατανομής πιθανότητας $p : \Omega \to [0, 1]$ ορίζουμε τώρα τη *συνολοσυνάρτηση*[1] της πιθανότητας, που επίσης θα ονομάζουμε κατανομή πιθανότητας, ως εξής.

Ορισμός 2.2.5. Αν Ω δειγματικός χώρος με κατανομή πιθανότητας $p : \Omega \to [0, 1]$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ με

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{a \in A} p(a). \tag{2.4}$$

Με άλλα λόγια η πιθανότητα $\mathbb{P}[A]$ ενός ενδεχομένου $A \subseteq \Omega$ προκύπτει αν προσθέσουμε τις τιμές $p(a)$ για όλα τα στοιχεία του A.

Παράδειγμα 2.2.4. Στο παράδειγμα του ζαριού (§2.1.2) το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ ισχύει μετά την εκτέλεση του πειράματος αν το αποτέλεσμα είναι άρτιο. Έχουμε

$$\mathbb{P}[A] = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1/2.$$

Παράδειγμα 2.2.5. Στο παράδειγμα της §2.1.4 το ενδεχόμενο $A = \{1, 2, 3\}$ ισχύει αν η οικογένεια αποκτήσει τελικά μέχρι και τρία παιδιά. Έχουμε

$$\mathbb{P}[A] = p(1) + p(2) + p(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 7/8.$$

▷ **Πρόβλημα 2.2.2.** Στο πείραμα της §2.1.4 έστω $A = \{2k : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ το ενδεχόμενο η οικογένεια να αποκτήσει άρτιο αριθμό παιδιών. Υπολογίστε την $\mathbb{P}[A]$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.1.1.

Παρατήρηση 2.2.1. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα. Τότε το να ζητήσουμε να ισχύει το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι σα να ζητάμε να ισχύει ένα τουλάχιστον από τα A και B (μπορεί και τα δύο). Το να ζητήσουμε να ισχύει το ενδεχόμενο $A \cap B$ είναι σα να ζητάμε να ισχύουν και τα δύο ενδεχόμενα A και B.

▷ **Πρόβλημα 2.2.3.** Στο παράδειγμα της §2.1.4 έστω $A = \{1, \ldots, 10\}$ και $B = \{3k : k \in \mathbb{N}\}$ δύο ενδεχόμενα. Περιγράψτε τι σημαίνει το κάθε ένα από αυτά όπως και το τι σημαίνουν τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $A \cup B$.

▷ **Πρόβλημα 2.2.4.** Στο παράδειγμα της §2.1.3 γράψτε ποια στοιχεία απαρτίζουν το ενδεχόμενο το δεύτερο νόμισμα να δείξει κάτι διαφορετικό από το πρώτο και βρείτε την πιθανότητά του.

▷ **Πρόβλημα 2.2.5.** Σε ένα κουτί μέσα βρίσκονται τρείς βώλοι, ένας κόκκινος, ένας πράσινος κι ένας μπλέ. Το πείραμά μας συνίσταται στο να τραβήξουμε ένα βώλο, να

[1] Δηλ. μια συνάρτηση που ορίζεται πάνω σε σύνολα.

σημειώσουμε το χρώμα του, να τον επανατοποθετήσουμε μέσα στο κουτί, να τραβήξουμε πάλι ένα βώλο και να σημειώσουμε και αυτού το χρώμα.

Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Ποια η κατανομή πιθανότητας στα στοιχεία του αν όλοι οι βώλοι που είναι μέσα στο κουτί είναι εξ ίσου πιθανό να τραβηχτούν κάθε φορά;

Απαντείστε στο ίδιο ερώτημα αν το πείραμα τροποιηθεί ως εξής: αφού τραβήξουμε πρώτο βώλο, *δεν τον επανατοποθετούμε στο κουτί*, αλλά απλά τραβάμε και τον δεύτερο από τους δύο εναπομείναντες.

Θεώρημα 2.2.1. *Η συνολοσυνάρτηση πιθανότητας έχει τις εξής ιδιότητες ($m \in \overline{\mathbb{N}}$):*

1. $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$, $\mathbb{P}[\Omega] = 1$.

2. $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$, *για κάθε ενδεχόμενο* A.

3. (Προσθετικότητα) *Αν* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *είναι ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα τότε*
$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right] = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[A_j]. \tag{2.5}$$

4. (Υποπροσθετικότητα) *Αν* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *είναι ενδεχόμενα, όχι απαραίτητα ξένα ανά δύο, τότε*
$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right] \le \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}[A_j]. \tag{2.6}$$

5. *Αν* A *και* B *είναι δύο ενδεχόμενα τότε*
$$\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]. \tag{2.7}$$

Απόδειξη. Τα 1, 2 και 3 είναι άμεσες συνέπειες της (2.4) και της (2.3).

Για το 4 αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό (2.4) στα δύο μέλη της ανισότητας που έχουμε να αποδείξουμε, παρατηρούμε ότι στο αριστερό μέλος έχουμε ακριβώς τις ποσότητες $p(x)$ για όλα τα $x \in \bigcup_{j=1}^m A_j$, μια φορά την κάθε μια, ενώ στο δεξί μέλος έχουμε τις ίδιες ποσότητες $p(x)$ αλλά τόσες φορές την κάθε μια όσα και τα A_j στα οποία ανήκει το x και πάντως τουλάχιστον μια φορά. Η ανισότητα ισχύει προφανώς μια και $p(x) \ge 0$.

Για το 5 επιχειρηματολογούμε όπως και στο προηγούμενο: στο αριστερό μέλος έχουμε το άθροισμα των $p(x)$ για $x \in A \cup B$ ενώ στο δεξί έχουμε στο άθροισμα $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$ το άθροισμα των ίδιων $p(x)$ με τη διαφορά ότι για τα $x \in A \cap B$ το $p(x)$ εμφανίζεται δύο φορές. Ο προσθετέος $-\mathbb{P}[A \cap B]$ στο δεξί μέλος διορθώνει αυτή τη διαφορά.
■

Παρατήρηση 2.2.2. Είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί (κάντε το) αλλά και πάρα πολύ σημαντικό σε διάφορες αποδείξεις και εφαρμογές ότι αν $A \subseteq B$ τότε $\mathbb{P}[A] \le \mathbb{P}[B]$. Επίσης είναι πολύ σημαντική η απλή συνεπαγωγή
$$\mathbb{P}[A] > 0 \Longrightarrow A \neq \emptyset.$$

Αυτή η τελευταία συνεπαγωγή, με την οποία αποδεικνύει κανείς ότι ένα σύνολο δεν είναι κενό αποδεικνύοντας πρώτα ότι η πιθανότητά του δεν είναι 0, αποτελεί το θεμέλιο λίθο της λεγόμενης *πιθανοθεωρητικής μεθόδου*, παρόμοιας με την *υπαρξιακή μέθοδο*, στην οποία αποδεικνύει κανείς την ύπαρξη ενός αντικειμένου με πολύ έμμεσο τρόπο, φτιάχνοντας πρώτα ένα πιθανοθεωρητικό μοντέλο γι' αυτό το αντικείμενο που "δουλεύει" με θετική πιθανότητα. Θα έχουμε αργότερα την ευκαιρία να δούμε κάποια παραδείγματα αυτής της μεθόδου.

▷ **Πρόβλημα 2.2.6.** Αν A_i, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \overline{\mathbb{N}}$, είναι ενδεχόμενα με $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = 0$ για κάθε $i \neq j$ δείξτε ότι ισχύει (όπως και όταν $A_i \cap A_j = \emptyset$)

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A_i].$$

▷ **Πρόβλημα 2.2.7.** Αν A, B, C ενδεχόμενα δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C].$$

Παράδειγμα 2.2.6. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα, και έστω ότι $\mathbb{P}[A] = 3/4$ και $\mathbb{P}[B] = 1/3$. Μόνο με αυτή την πληροφορία τι μπορούμε να συμπεράνουμε για την ποσότητα $\mathbb{P}[A \cap B]$;

Σίγουρα δε μπορούμε να την υπολογίσουμε ακριβώς. Μπορούμε όμως να έχουμε μια εκτίμηση των ορίων στα οποία κινείται. Συγκεκριμένα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{12} \leq \mathbb{P}[A \cap B] \leq \frac{1}{3}.$$

Από το Θεώρημα 2.2.1 έχουμε

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[B] = \frac{1}{3},$$

αφού $\mathbb{P}[A \cup B] \geq \mathbb{P}[A]$. Έχουμε δείξει το άνω φράγμα. Για το κάτω φράγμα έχουμε

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cup B] \geq \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{1}{12}.$$

Στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε απλά ότι $\mathbb{P}[A \cup B] \leq 1$.

▷ **Πρόβλημα 2.2.8.** Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{a, b, c\}$ με την κατανομή πιθανότητας $p(a) = 1/3$, $p(b) = 5/12$, $p(c) = 1/4$. Δείξτε ότι αν πάρουμε τα ενδεχόμενα $A = \{a, b\}$, $B = \{a\}$ τότε πιάνεται το άνω όριο στην ανισότητα του Παραδείγματος 2.2.6.

Φτιάξτε ομοίως ένα άλλο απλό δειγματικό χώρο με την κατάλληλη κατανομή πιθανότητας που να δείχνει ότι και το κάτω όριο της ανισότητας του Παραδείγματος 2.2.6 μπορεί να πιάνεται σε κάποια παραδείγματα, και άρα ότι η ανισότητα που δείξαμε στο Παρ. 2.2.6 είναι η καλύτερη δυνατή που μπορεί κανείς να δείξει με τα δεδομένα που μας δόθηκαν.

Το θεώρημα που ακολουθεί, αν και πολύ απλό στην απόδειξή του, θα μας είναι επανειλλημένως χρήσιμο.

Θεώρημα 2.2.2. *(Νόμοι de Morgan) Αν A_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, $m \in \overline{\mathbb{N}}$, είναι ενδεχόμενα σε ένα χώρο Ω τότε έχουμε*

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)^c = \bigcap_{j=1}^{m} A_j^c \tag{2.8}$$

και

$$\left(\bigcap_{j=1}^{m} A_j\right)^c = \bigcup_{j=1}^{m} A_j^c \tag{2.9}$$

Απόδειξη. Ας δείξουμε πρώτα την (2.8). Πρόκειται για μια ισότητα συνόλων. Αρκεί λοιπόν να πάρουμε το τυχόν x που ανήκει στο αριστερό μέλος και να δείξουμε ότι ανήκει και στο δεξί μέλος, και επίσης το τυχόν σημείο που ανήκει στο δεξί και να δείξουμε ότι ανήκει στο αριστερό.

Έστω λοιπόν $x \in \left(\bigcup_{j=1}^{m} A_j\right)^c$. Αυτό σημαίνει ότι $x \notin \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ και αυτό με τη σειρά του ότι το x δεν ανήκει σε κανένα A_j. Δηλαδή το x ανήκει σε όλα τα A_j^c, άρα και στην τομή τους, που είναι και το δεξί μέλος. Ομοίως αποδεικνύεται (άσκηση για τον αναγνώστη) ότι αν το x ανήκει στο δεξί μέλος τότε ανήκει και στο αριστερό.

Έχοντας δείξει την (2.8) μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε για να δείξουμε την (2.9) (ή μπορούμε να επαναλάβουμε για την (2.9) μια απόδειξη όπως αυτή που δώσαμε για την (2.8)). Πράγματι, παρατηρώντας ότι για κάθε σύνολο A έχουμε $(A^c)^c = A$ και χρησιμοποιώντας στη θέση των συνόλων A_j της (2.8) τα σύνολα A_j^c παίρνουμε ακριβώς την (2.9).
■

▷ **Πρόβλημα 2.2.9.** Έστω A, B, C ενδεχόμενα. Βρείτε εκφράσεις, χρησιμοποιώντας τα A, B, C και συνολοθεωρητικές πράξεις, για τα ενδεχόμενα:

1. Συμβαίνει μόνο το A.
2. Συμβαίνει το A και το B αλλά όχι το C.
3. Συμβαίνει τουλάχιστον ένα από τα A, B, C.
4. Συμβαίνουν όλα τα A, B, C.
5. Συμβαίνει το πολύ ένα από τα A, B, C.

▷ **Πρόβλημα 2.2.10.** Δώστε μια συνολοθεωρητική συνθήκη για την πρόταση "Αν συμβαίνει το ενδεχόμενο A τότε συμβαίνει το B ή το C".

Επίσης για την πρόταση "δε γίνεται να συμβαίνουν ταυτόχρονα τα A και B".

▷ **Πρόβλημα 2.2.11.** Ρίχνουμε ζεύγος τιμίων ζαριών. Ποια τα στοιχεία του ενδεχομένου "τα δυο αποτελέσματα έχουν άθροισμα 4"; Ποια η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού;

▷ **Πρόβλημα 2.2.12.** Οι παίκτες Α και Β παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο Α έχει μπροστά του τρία κουτιά, το περιεχόμενο των οποίων βλέπει. Τα δύο κουτιά είναι άδεια και το ένα έχει μέσα ένα νόμισμα. Σκοπός του παίκτη Β είναι να πάρει το νόμισμα.

Οι κανόνες του παιχνιδιού είναι οι εξής: (α) ο Β διαλέγει ένα κουτί και το δείχνει στον Α, (β) ο Α υποχρεούται να επιλέξει ένα άδειο κουτί που δεν είναι αυτό που έδειξε ο Β και να το υποδείξει στον Β, και (γ) ο Β έχει τώρα την ευκαιρία να επιμείνει στην αρχική του επιλογή ή να επιλέξει το άλλο κλειστό κουτί.

Ο Β μπορεί να παίξει με τις εξής τρεις στρατηγικές:

1. Ο Β πάντα εμμένει στην αρχική του επιλογή.

2. Ο Β στρίβει ένα νόμισμα και ξαναεπιλέγει τυχαία ανάμεσα στα δύο εναπομείναντα κλειστά κουτιά.

3. Ο Β πάντα αλλάζει κουτί.

Ποια είναι η πιθανότητα να βρεί ο Β το νόμισμα αν ακολουθήσει κάθε μια από αυτές τις στρατηγικές;

2.2.1 Υπεραριθμήσιμοι δειγματικοί χώροι

Το πείραμα: Έχουμε ένα στρογγυλό στόχο ακτίνας R και πετάμε σε αυτό ένα βέλος.
Το αποτέλεσμα: Το σημείο (x, y) στο οποίο έπεσε το βέλος.

Και πάλι παρατηρούμε, όπως και στο παράδειγμα της §2.1.5 ότι το σύνολο Ω των δυνατών αποτελεσμάτων, που στην προκειμένη περίπτωση είναι τα σημεία του στόχου, είναι υπεραριθμήσιμο.

Η υπόθεσή μας εδώ είναι ότι δύο ενδεχόμενα A και B, υποσύνολα δηλ. του δίσκου, με το ίδιο εμβαδό έχουν την ίδια πιθανότητα να χτυπηθούν. Από την προσθετικότητα που πρέπει να πληροί η συνολοσυνάρτηση της πιθανότητας προκύπτει λοιπόν ότι για κάθε $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\text{εμβαδό του } A}{\pi R^2}.$$

Ποια θα μπορούσε να είναι τότε η κατανομή πιθανότητας $p : \Omega \to [0, 1]$ που παράγει την άνω συνολοσυνάρτηση; Η μόνη αποδεκτή λύση συμβατή με την άνω ισότητα θα έπρεπε να είναι η $p(x) \equiv 0$, η οποία φυσικά είναι άχρηστη. Το συμπέρασμα είναι ότι δε μπορεί φυσικά να οριστεί τέτοια συνάρτηση p.

Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι η εξής. Σε δειγματικούς χώρους που είναι υπεραριθμήσιμοι δε χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση $p : \Omega \to [0, 1]$ για να ορίσουμε τη συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}[\cdot]$ αλλά ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση αυτή κατ' ευθείαν ως μια συνολοσυνάρτηση που πληροί τα παρακάτω:[2]

Αξιώματα της συνολοσυνάρτησης πιθανότητας

1. $0 \le \mathbb{P}[A] \le 1$ για κάθε A.

2. $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

3. Αν $A \cap B = \emptyset$ τότε $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$.

[2] Για να είμαστε ακριβέστεροι θα πρέπει να πούμε ότι συνήθως δεν είναι όλα τα υποσύνολα του δειγματικού χώρου ενδεχόμενα.

2.2.2 Ενδεχόμενα με πιθανότητα 0

Ορισμός 2.2.6. Ένα ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ λέγεται *σχεδόν σίγουρο* αν $\mathbb{P}[A^c] = 0$. Λέγεται *σχεδόν αδύνατο* αν $\mathbb{P}[A] = 0$. Λέμε ότι κάτι (ένα ενδεχόμενο δηλ.) συμβαίνει σχεδόν σίγουρα αν συμβαίνει με πιθανότητα 1.

Παράδειγμα 2.2.7. Στο παράδειγμα της §2.1.4 είναι σχεδόν σίγουρο ότι η οικογένεια θα αποκτήσει πεπερασμένο αριθμό από παιδιά, αφού το συμπληρωματικό ενδεχόμενο, ο αριθμός των παιδιών να είναι ∞, έχει πιθανότητα 0.

Παρατήρηση 2.2.3. Εύκολα βλέπουμε (υποπροσθετικότητα) ότι αν A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, είναι σχεδόν αδύνατα τότε και η ένωσή τους επίσης είναι σχεδόν αδύνατη. Είναι σημαντικό εδώ ότι μιλάμε για μια ένωση από αριθμήσιμα το πλήθος ενδεχόμενα. Είναι λάθος ότι οποιαδήποτε ένωση ενδεχομένων με πιθανότητα 0 έχει πιθανότητα 0. Αυτό θα φανεί καλύτερα αργότερα όταν θα δούμε μη διακριτούς (υπεραριθμήσιμους) δειγματικούς χώρους.

▷ **Πρόβλημα 2.2.13.** Έστω ακολουθία ενδεχομένων E_k, $k \geq 1$, με $\mathbb{P}[E_k] \to 0$. Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $E = \bigcap_{k\geq 1} E_k$ είναι σχεδόν αδύνατο.

▷ **Πρόβλημα 2.2.14.** Έστω σχεδόν σίγουρα ενδεχόμενα E_k, $k \geq 1$. Δείξτε ότι σχεδόν σίγουρα ισχύουν όλα τα E_k.

▷ **Πρόβλημα 2.2.15.** Έστω ενδεχόμενα A_k, $k \geq 1$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$\limsup_k A_k = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{n\geq k} A_n \text{ και } \liminf_k A_k = \bigcup_{k\geq 1} \bigcap_{n\geq k} A_n. \tag{2.10}$$

Δείξτε ότι το ενδεχόμενο $\limsup_k A_k$ ισχύει ακριβώς όταν ισχύουν άπειρα από τα A_k και το ενδεχόμενο $\liminf_k A_k$ ακριβώς όταν ισχύουν *τελικά* όλα τα A_k, όταν δηλ. υπάρχει κάποιο k_0 ώστε να ισχύουν όλα τα A_k, $k \geq k_0$.

▷ **Πρόβλημα 2.2.16.** Αν έχουμε ενδεχόμενα A_k, $k \geq 1$, με $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] < \infty$ τότε είναι σχεδόν αδύνατο να ισχύουν άπειρα από τα A_k.

2.3 Υπό συνθήκη πιθανότητα

Το πείραμα: Σ' ένα κουτί μέσα βρίσκονται δέκα βώλοι με ονόματα 1 έως 10. Τραβάμε ένα βώλο στην τύχη.
Το αποτέλεσμα: Υποθέτουμε ότι κάποιος μας εγγυάται ότι $X \geq 5$.[3] Ποιος βώλος X τραβήχτηκε.

Αν δε βάζαμε τη συνθήκη $X \geq 5$ θα είχαμε το δειγματικό χώρο $\Omega = \{1, \ldots, 10\}$ και τη συνάρτηση πιθανότητας $p(x) = 0.1$ για $x \in \Omega$. Εφόσον όμως είναι εγγυημένο ότι $X \geq 5$ τα δυνατά αποτελέσματα είναι πλέον τα 5 έως 10, και εφ' όσον εξακολουθούν να είναι ισοπίθανα έχουν όλα τώρα πιθανότητα 1/6.

[3] Για παράδειγμα, αυτός που εκτελεί το πείραμα ελέγχει αν η συνθήκη $X \geq 5$ ισχύει και, αν όχι, ακυρώνει το πείραμα και το εκτελεί ξανά. Αντίθετα αν η συνθήκη $X \geq 5$ ισχύει τότε μας αναφέρει ότι αυτό συμβαίνει.

Ορισμός 2.3.1. Έστω δειγματικός χώρος Ω και ενδεχόμενα A, B, με $\mathbb{P}[B] > 0$. Ορίζουμε την *υπό συνθήκη πιθανότητα* του A δεδομένου του B ως την ποσότητα

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}. \tag{2.11}$$

Η ποσότητα αυτή δεν ορίζεται[4] αν $\mathbb{P}[B] = 0$.

Παράδειγμα 2.3.1. Στο προηγούμενο πείραμα, αν $A = \{X \le 5\}$ και $B = \{X \text{ άρτιο}\}$ ποια η υπό συνθήκη πιθανότητα $\mathbb{P}[A \mid B]$;

Εφαρμόζοντας τον ορισμό (2.11) και παρατηρώντας ότι $A \cap B = \{2, 4\}$ παίρνουμε $\mathbb{P}[A \mid B] = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}$. Έχουμε υπολογίσει την πιθανότητα να βγάλουμε ένα βώλο με αριθμό το πολύ 5 αν γνωρίζουμε ότι αυτό που τραβήξαμε είναι άρτιο.

▷ **Πρόβλημα 2.3.1.** **Για τυχόν ενδεχόμενο A σε ένα δειγματικό χώρο Ω υπολογίστε τα** $\mathbb{P}[A \mid A]$, $\mathbb{P}[A \mid A^c]$, $\mathbb{P}[A \mid \Omega]$.

Παράδειγμα 2.3.2. Έχουμε τρία κουτιά με δύο θήκες το καθένα. Κάθε θήκη έχει μέσα ένα βώλο. Στο πρώτο κουτί κι οι δύο βώλοι είναι μαύροι, στο δεύτερο κι οι δύο άσπροι και στο τρίτο κουτί ένας άσπρος κι ένας μαύρος. Επιλέγουμε στην τύχη ένα κουτί και μια από τις δύο θήκες του. Ανοίγουμε τη θήκη και βλέπουμε ένα μαύρο βώλο. Ποια η πιθανότητα στην άλλη θήκη του ίδιου κουτιού ο βώλος να είναι επίσης μαύρος;

Ας γράψουμε A_1 για το ενδεχόμενο να έχουμε επιλέξει το πρώτο κουτί, A_2 για το δεύτερο και A_3 για το τρίτο. Επίσης ας είναι B το ενδεχόμενο ότι στη θήκη που ανοίγουμε έχει μαύρο βώλο. Για να έχει και η δεύτερη θήκη του ίδιου κουτιού μαύρο βώλο πρέπει αναγκαστικά το κουτί να είναι το πρώτο. Πρέπει δηλ. να υπολογίσουμε την ποσότητα

$$\mathbb{P}[A_1 \mid B] = \frac{\mathbb{P}[A_1 \cap B]}{\mathbb{P}[B]}.$$

Όμως $A_1 \subseteq B$, δηλ. αν ισχύει το A_1 σίγουρα ισχύει και το B, οπότε $A_! \cap B = A_1$ και $\mathbb{P}[A_i] = 1/3$ αφού επιλέγεται το κάθε κουτί με ίση πιθανότητα. Επίσης $\mathbb{P}[B] = 1/2$ αφού υπάρχουν συνολικά τόσοι μαύροι βώλοι όσοι και άσπροι κι όλοι οι βώλοι επιλέγονται με την ίδια πιθανότητα. Άρα $\mathbb{P}[A_1 \mid B] = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3}$.

Θεώρημα 2.3.1. *(Τύπος ολικής πιθανότητας) Έστω B_i, $i = 1, \ldots, m$, $m \in \overline{\mathbb{N}}$, ξένα ανά δύο ενδεχόμενα με*

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} B_i$$

και $\mathbb{P}[B_i] > 0$ για κάθε i. Τότε για κάθε ενδεχόμενο $A \subseteq \Omega$ ισχύει

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A \mid B_i] \, \mathbb{P}[B_i]. \tag{2.12}$$

Ειδικότερα αν $0 < \mathbb{P}[B] < 1$ έχουμε για κάθε ενδεχόμενο A

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \mid B] \, \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[A \mid B^c](1 - \mathbb{P}[B]). \tag{2.13}$$

[4] προς το παρόν

Απόδειξη. Το δεξί μέλος της (2.12) γράφεται, χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2.3.1 ως

$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}[A \cap B_i] = \mathbb{P}\left[A \cap \bigcup_{i=1}^{m} B_i\right] = \mathbb{P}[A \cap \Omega] = \mathbb{P}[A].$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα (2.5) της συνολοσυνάρτησης $\mathbb{P}[\cdot]$ και το γεγονός ότι τα $A \cap B_i$ είναι ανά δύο ξένα, όπως και την επιμεριστική ιδιότητα της τομής με την ένωση

$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G).$$

Για την (2.13) πάρτε $m = 2$, $B_1 = B$, $B_2 = B^c$.
■

Ορισμός 2.3.2. Όταν έχουμε κάποια σύνολα των οποίων η ένωση είναι το Ω και είναι ανά δύο ξένα τότε λέμε ότι αυτά αποτελούν μια *διαμέριση* του Ω.

▷ **Πρόβλημα 2.3.2.** Δείξτε ότι ο τύπος (2.12) ισχύει για όλες τις διαμερίσεις του Ω, ακόμα και αυτές όπου κάποια B_i έχουν πιθανότητα 0, αρκεί να παραλειφθούν αυτά τα B_i από το δεξί μέλος της (2.12).

Με άλλα λόγια, αν και η ποσότητα $\mathbb{P}[A \mid B]$ δεν έχει πάντα νόημα, η ποσότητα $\mathbb{P}[A \mid B]\,\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A \cap B]$ έχει.

Παρατήρηση 2.3.1. Το να λέμε ότι τα σύνολα B_i αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω είναι ισοδύναμο με το να λέμε ότι σε κάθε έκβαση του πειράματος ισχύει *ακριβώς ένα* από τα B_i.

Παρατήρηση 2.3.2. Έστω ξένα ανά δύο ενδεχόμενα B_i, $i = 1, \ldots, m$, με $\bigcup_{i=1}^{m} B_i = \Omega \setminus E$, όπου $\mathbb{P}[E] = 0$. Ενώ δηλ. τα B_i δεν αποτελούν κατ' ανάγκη διαμέριση του Ω, παρ' όλ' αυτά αποτελούν *σχεδόν* μια τέτοια, αφού αυτό που τους λείπει για να είναι κανονική διαμέριση είναι ένα σύνολο, το E, που έχει πιθανότητα 0.

Δηλ. με πιθανότητα 1 (*σχεδόν σίγουρα* όπως λέμε στη Θεωρία Πιθανοτήτων) όποτε γίνει το πείραμα θα ισχύει ακριβώς ένα από τα B_i.

▷ **Πρόβλημα 2.3.3.** Στην Παρατήρηση 2.3.2 είδαμε πώς μπορούμε να χαλαρώσουμε τις συνθήκες ορισμού μιας διαμέρισης B_i του Ω ώστε να ισχύει σχεδόν σίγουρα ακριβώς ένα από τα B_i. Μπορούν όμως να χαλαρώσουν περαιτέρω οι συνθήκες αυτές ώστε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Βρείτε πώς πρέπει να χαλαρώσουμε τη συνθήκη ότι τα B_i είναι ανά δύο ξένα ώστε να εξακολουθεί να ισχύει σχεδόν σίγουρα ακριβώς ένα από τα B_i σε κάθε έκβαση του πειράματος.

Παράδειγμα 2.3.3. Σ' ένα κουτί βρίσκονται κόκκινοι, πράσινοι και μπλέ βώλοι σε ποσοστά 30%, 50% και 20% αντίστοιχα. Οι μισοί κόκκινοι βώλοι είναι κούφιοι και το ίδιο ισχύει για τα 2/3 των πράσινων και μπλέ βώλων. Αν διαλέξουμε τυχαία ένα βώλο από το κουτί, ποια η πιθανότητα να είναι κούφιος;

Ορίζουμε A_r, A_g, A_b να είναι τα ενδεχόμενα επιλογής κόκκινου, πράσινου ή μπλέ βώλου. Αυτά είναι ανά δύο ξένα με πιθανότητες που μας δίδονται:

$$\mathbb{P}[A_r] = 0.3, \;\; \mathbb{P}[A_g] = 0.5, \;\; \mathbb{P}[A_b] = 0.2.$$

οπότε αποτελούν διαμέριση του χώρου και μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο ολικής πιθανότητας για το ενδεχόμενο H του να είναι κούφιος ο βώλος που διαλέξαμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[H] &= \mathbb{P}[H \mid A_r]\,\mathbb{P}[A_r] + \mathbb{P}[H \mid A_g]\,\mathbb{P}[A_g] + \mathbb{P}[H \mid A_b]\,\mathbb{P}[A_b] \\ &= \frac{1}{2}0.3 + \frac{2}{3}0.5 + \frac{2}{3}0.2 \\ &= 0.616\end{aligned}$$

▷ **Πρόβλημα 2.3.4.** Μια οικογένεια έχει δύο παιδιά. Ποια η πιθανότητα ότι είναι και τα δύο αγόρια δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα από αυτά είναι αγόρι; Περιγράψτε το δειγματικό χώρο του πειράματος και υποθέστε ότι όλα τα στοιχεία του είναι ισοπίθανα για να απαντήσετε την ερώτηση.

2.4 Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Ορισμός 2.4.1. Δύο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται *ανεξάρτητα* αν $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] \cdot \mathbb{P}[B]$.

Γενικότερα αν A_j, $j \in J$, είναι ένα σύνολο ενδεχομένων[5] αυτό θα λέγεται *ανεξάρτητο σύνολο ενδεχομένων* αν για κάθε πεπερασμένο πλήθος από αυτά, έστω $A_{j_1}, \ldots, A_{j_N}$, η πιθανότητα της τομής τους ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους:

$$\mathbb{P}[A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_N}] = \mathbb{P}[A_{j_1}] \cdots \mathbb{P}[A_{j_N}].$$

Παρατήρηση 2.4.1. Ένας πιο φυσιολογικός ορισμός για την ανεξαρτησία δύο ενδεχομένων A και B είναι να απαιτήσουμε να ισχύει

$$\mathbb{P}[A \mid B] = \mathbb{P}[A].$$

Αυτή η σχέση προκύπτει από τον παραπάνω ορισμό της ανεξαρτησίας διαιρώντας με $\mathbb{P}[B]$, αν αυτό φυσικά δεν είναι 0. Μας λέει λοιπόν αυτή η ισότητα ότι αν υποθέσουμε ότι ισχύει το B δεν αλλάζει τίποτα στην πιθανότητα του A να ισχύει. Δεν επηρεάζει δηλ. το ένα γεγονός το άλλο.

Ο ορισμός αυτός, αν και διαισθητικά ελκυστικότερος, έχει το μειονέκτημα ότι (α) δεν μπορούμε να τον επικαλεστούμε εκτός αν $\mathbb{P}[B] > 0$, (β) τα A και B δεν εμφανίζονται με συμμετρικό τρόπο σε αυτόν και (γ) δε γενικεύεται εύκολα σε περισσότερα από δύο ενδεχόμενα.

▷ **Πρόβλημα 2.4.1.** Αν A και B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα τότε και τα A^c, B είναι και ομοίως και τα A^c, B^c.

▷ **Πρόβλημα 2.4.2.** Δείξτε ότι αν A και B είναι δύο ξένα ενδεχόμενα με $\mathbb{P}[A] > 0$, $\mathbb{P}[B] > 0$ τότε αυτά δεν είναι ανεξάρτητα. Ομοίως αν $A \subseteq B$ και $B \neq \Omega$.

Παράδειγμα 2.4.1. Το πείραμά μας αποτελείται από τη ρίψη ενός τιμίου νομίσματος δύο φορές. Ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{\mathrm{K}, \Gamma\}\}.$$

[5] το σύνολο J μπορεί να είναι και υπεραριθμήσιμο

Ο Ω δηλ. αποτελείται από όλα τα δυνατά ζεύγη αποτελεσμάτων, και έχει συνεπώς 4 στοιχεία. Υποθέτουμε ότι όλα αυτά είναι ισοπίθανα με πιθανότητα $1/4$ το καθένα. Αν ορίσουμε $A = \{\text{το πρώτο νόμισμα είναι Κ}\}$ και $B = \{\text{το δεύτερο νόμισμα είναι Γ}\}$ τότε τα A και B είναι ανεξάρτητα αφού $A \cap B = \{(\text{Κ}, \text{Γ})\}$ και άρα $\mathbb{P}[A \cap B] = 1/4$ ενώ $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = 1/2$ αφού καθένα από τα A, B έχει δύο στοιχεία.

Η ανεξαρτησία αυτών των δύο ενδεχομένων αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι οι δύο διαφορετικές ρίψεις του νομίσματος δεν επηρεάζουν η μια την άλλη, είναι όπως λέμε ανεξάρτητες ρίψεις.

Παράδειγμα 2.4.2. Ας υποθέσουμε ότι τα ενδεχόμενα A, B, C, D είναι ανεξάρτητα. Ορίζουμε $E = A \cup B$ και $H = C \cap D$. Τα ενδεχόμενα H και D εξαρτώνται το καθένα από κάποια από τα A, B, C, D αλλά δεν υπάρχει κανένα από τα A, B, C, D από το οποίο να εξαρτώνται τα E και H. Περιμένουμε λοιπόν τα E και H να είναι ανεξάρτητα.

Πράγματι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[E \cap H] &= \mathbb{P}[(A \cup B) \cap (C \cap D)] \\
&= \mathbb{P}[(A \cap C \cap D) \ \cup \ (B \cap C \cap D)] \\
&= \mathbb{P}[A \cap C \cap D] + \mathbb{P}[B \cap C \cap D] - \mathbb{P}[A \cap B \cap C \cap D].
\end{aligned}$$

ενώ

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[E] \cdot \mathbb{P}[H] &= \mathbb{P}[A \cup B]\,\mathbb{P}[C \cap D] \\
&= (\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B])\,\mathbb{P}[C]\,\mathbb{P}[D] \\
&= \mathbb{P}[A \cap C \cap D] + \mathbb{P}[B \cap C \cap D] - \mathbb{P}[A \cap B \cap C \cap D],
\end{aligned}$$

άρα οι δύο ποσότητες είναι ίδιες. Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε και την ισότητα (2.7).

Παρατήρηση 2.4.2. Πώς γενικεύεται το Παράδειγμα 2.4.2; Αν έχουμε κάποια ενδεχόμενα A_i και κάποια B_j, όλα ανεξάρτητα μεταξύ τους, και ενδεχόμενα A και B που ορίζονται μέσω των A_i και B_j αντιστοιχα, για παράδειγμα μέσω συνολοθεωρητικών πράξεων όπως στο Παράδειγμα 2.4.2, τότε τα A και B είναι ανεξάρτητα. Αν και η απόδειξη δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη δε θα την παρουσιάσουμε εδώ. Θα χρησιμοποιηθεί όμως κατά κόρον.

Παράδειγμα 2.4.3. Ρίχνουμε τρεις φορές ένα νόμισμα. Υποθέτουμε ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες. Τι σημαίνει όμως αυτό ακριβώς;

Ένας τρόπος να εκφραστούμε με ακρίβεια είναι ο εξής. Ονομάζουμε A_i το ενδεχόμενο να έχουμε κορώνα (Κ) στην i-οστή ρίψη, $i = 1, 2, 3$. Η υπόθεση ότι οι ρίψεις είναι ανεξάρτητες σημαίνει ότι τα ενδεχόμενα A_1, A_2, A_3 είναι ανεξάρτητα.

Τι συνέπειες έχει αυτό; Για παράδειγμα εν θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του να έχουμε ΚΚΓ στις τρεις ρίψεις του νομίσματος αυτή είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου $A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$ και, λόγω της ανεξαρτησίας, έχουμε

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3^c] = \mathbb{P}[A_1]\,\mathbb{P}[A_2]\,\mathbb{P}[A_3^c],$$

και, αν το νόμισμα είναι και τίμιο (ίση πιθανότητα να φέρουμε Κ ή Γ σε μία οποιαδήποτε ρίψη) τότε η πιθανότητα αυτή ισούται με $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$.

Παράδειγμα 2.4.4. Σε αντιστοιχία με το Παράδειγμα 2.4.3 τι σημαίνει ότι ρίχνουμε ένα ζάρι τρεις ανεξάρτητες φορές;

Εδώ τα πράγματα περιπλέκονται λίγο σε σχέση με το Παράδειγμα 2.4.3 μια και σε εκείνο το Παράδειγμα αρκούσε να ξέρουμε το αν φέραμε κορώνα ή όχι για να ξέρουμε το αποτέλεσμα της ρίψης, πράγμα που δεν ισχύει εδώ μια και το πλήθος των δυνατών αποτελεσμάτων μιας ρίψης είναι 6 κι όχι 2.

Ένας τρόπος να θεμελιώσουμε με ακρίβεια την ανεξαρτησία των τριών ρίψεων είναι να ορίσουμε το ενδεχόμενο A_i^j, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, \ldots, 6$, να σημαίνει ότι στην i-οστή ρίψη έχουμε αποτέλεσμα j, και να πούμε ότι για κάθε επιλογή των άνω δεικτών $j_1, \ldots, j_3 \in \{1, \ldots, 6\}$ τα ενδεχόμενα $A_1^{j_1}, A_2^{j_2}, A_3^{j_3}$ είναι ανεξάρτητα.

Με αυτό τον τρόπο μπορούμε π.χ. να υπολογίσουμε την πιθανότητα να φέρουμε αποτελέσματα 1,2,3 ως την πιθανότητα του ενδεχομένου $A_1^1 \cap A_2^2 \cap A_3^3$, που, λόγω της ανεξαρτησίας των τριών, ισούται με $1/6^3$.

Πάντως ο πιο απλός τρόπος να θεμελιώσουμε σωστά την έννοια των ανεξάρτητων αυτών ρίψεων θα μας είναι προσιτός αφού μιλήσουμε για τις *τυχαίες μεταβλητές*.

Η σύμβαση που θα ακολουθούμε από δω και πέρα στην περιγραφή πειραμάτων κωδικοποιείται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.4.2. Θα λέμε ότι τα πειράματα $\Pi_1, \ldots, \Pi_m$, $m \in \overline{\mathbb{N}}$, εκτελούνται ανεξάρτητα αν για κάθε επιλογή ενδεχομένων $A_1, \ldots, A_m$ τέτοια ώστε το ενδεχόμενο A_i εξαρτάται[6] μόνο από το πείραμα Π_i, η οικογένεια ενδεχομένων $A_1, \ldots, A_m$ είναι ανεξάρτητη.

Παρατήρηση 2.4.3. Το ότι μπορούμε, δεδομένων κάποιων πειραμάτων, να θεωρήσουμε ότι μπορούν να εκτελεστούν ανεξάρτητα θέλει κάποια τεκμηρίωση. Το να πούμε δηλ. την πρόταση

> Έστω n ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος.

συνεπάγεται ότι στον προφανή δειγματικό χώρο αυτού του σύνθετου πειράματος

$$\Omega = \{(x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{\mathrm{K}, \Gamma\}\}$$

μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση πιθανότητας $p : \Omega \to [0, 1]$ τέτοια ώστε η απαίτηση του Ορισμού 2.4.2 να ισχύει. Αυτό δεν είναι δύσκολο αν το πλήθος των ανεξάρτητα εκτελούμενων πειραμάτων είναι πεπερασμένο αλλά είναι αρκετά πιο τεχνικό για $n = \infty$. Στην περίπτωση μάλιστα αυτή ο δειγματικός χώρος δεν είναι καν αριθμήσιμος, οπότε δεν μπορούμε καν να μιλήσουμε για την κατανομή πιθανότητας $p : \Omega \to [0, 1]$ αλλά πρέπει (δείτε §2.2.1) να ορίσει κανείς τη συνολοσυνάρτηση $\mathbb{P}[\cdot]$ που πληροί τα αξιώματα της σελ. 21. Θα το θεωρούμε αυτό γνωστό από δω και πέρα.

▷ **Πρόβλημα 2.4.3.** Δείξτε ότι αν υποθέσουμε ότι έχουμε τρείς ανεξάρτητες ρίψεις ζαριών με βάση τον Ορισμό 2.4.2 τότε ισχύει η υπόθεση που κάναμε στο Παράδειγμα 2.4.4.

▷ **Πρόβλημα 2.4.4.** Ρίχνουμε ένα νόμισμα n φορές. Δείξτε ότι η πιθανότητα να φέρουμε n κορώνες είναι 2^{-n}.

▷ **Πρόβλημα 2.4.5.** Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές, και έστω A_{ij} το ενδεχόμενο η i-οστή και η j-οστή ρίψη να φέρουν το ίδιο αποτέλεσμα, $i < j$, $i, j = 1, 2, 3$.

Δείξτε ότι τα τρία αυτά ενδεχόμενα είναι ανά δύο ανεξάρτητα αλλά όχι και τα τρία μαζί.

[6] Το ότι το ενδεχόμενο A_i εξαρτάται μόνο από το πείραμα Π_i σημαίνει απλά ότι αν γνωρίζουμε το αποτέλεσμα του Π_i και μόνο μπορούμε να αποφασίσουμε αν ισχύει το A_i ή όχι

▷ **Πρόβλημα 2.4.6.** Σε ένα πληθυσμό από N ζευγάρια όπου το καθένα κάνει ακριβώς δύο παιδιά, τι ποσοστό των ζευγαριών περιμένετε να έχει δύο κόρες;

▷ **Πρόβλημα 2.4.7.** Ρίχνουμε τυχαία βελάκια σ' ένα στρογγυλό στόχο ακτίνας R. Υποθέτουμε ότι τα βελάκια ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή, ότι δηλ. αν A και B είναι δύο ισεμβαδικά χωρία μέσα στο στόχο τότε η πιθανότητα να πέσει το βελάκι μέσα στο A και στο B είναι η ίδια. Με άλλα λόγια ακολουθούμε το μοντέλο της §2.2.1. Δείξτε ότι το να πέσει το βελάκι στο αριστερό μισό του δίσκου και το να πέσει στον κάτω μισό δίσκο είναι ανεξάρτητα γεγονότα.

Παράδειγμα 2.4.5. Επανερχόμαστε στο παράδειγμα της §2.1.4 για να υπολογίσουμε την πιθανότητα η οικογένεια να κάνει k παιδιά, $k \geq 1$. Η ακριβής υπόθεση που κάνουμε εδώ είναι ότι οι διαδοχικές γέννες της οικογένειας είναι ανεξάρτητα πειράματα, και το καθένα από αυτά φέρνει αγόρι ή κορίτσι με ίση πιθανότητα. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με A_k το ενδεχόμενο η οικογένεια να αποκτήσει συνολικά k παιδιά, $k \in \overline{\mathbb{N}}$. Ας συμβολίσουμε επίσης με B_i και G_i τα ενδεχόμενα στην i-οστή γέννα[7] το ζευγάρι να αποκτήσει αγόρι ή κορίτσι, αντίστοιχα, $i \in \mathbb{N}$.

Προφανώς τότε ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$A_k = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_{k-1} \cap B_k.$$

Για να αποκτήσει δηλ. το ζευγάρι k παιδιά συνολικά πρέπει και αρκεί να αποκτήσει $k-1$ κορίτσια ακολουθούμενα από ένα αγόρι.

Η ανεξαρτησία όμως των γεννήσεων συνεπάγεται ότι τα ενδεχόμενα $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}, B_k$ είναι ανεξάρτητα αφού κάθε ένα από αυτά εξαρτάται κι από διαφορετικό πείραμα. Άρα

$$\mathbb{P}[A_k] = \mathbb{P}[G_1]\,\mathbb{P}[G_2]\cdots\mathbb{P}[G_{k-1}]\,\mathbb{P}[B_k] = 2^{-k}.$$

Ποια η πιθανότητα τώρα του ενδεχομένου A_∞, του να αποκτήσει δηλ. η οικογένεια άπειρα παιδιά, ή, ισοδύναμα, να μην αποκτήσει ποτέ αγόρι; Είναι φανερό ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$A_\infty \subseteq G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k. \tag{2.14}$$

Αυτός ο εγκλεισμός ενδεχομένων δε λέει τίποτε άλλο από το ότι αν γνωρίζουμε ότι ισχύει το A_∞ τότε οι k πρώτες γέννες είναι κορίτσια, και αυτό φυσικά ισχύει για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Όμως, το ενδεχόμενο στο δεξί μέρος της (2.14) έχει πιθανότητα 2^{-k} λόγω ανεξαρτησίας, άρα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, ισχύει $\mathbb{P}[A_\infty] \leq 2^{-k}$, πράγμα που μπορεί να συμβεί μόνο αν $\mathbb{P}[A_\infty] = 0$.

Παράδειγμα 2.4.6. Ρίχνουμε ένα ζάρι 10 φορές. Ποια η πιθανότητα ότι θα έρθει ακριβώς ένα 6;

Έστω E το ενδεχόμενο να μας έρθει ακριβώς ένα 6, και E_i, $i = 1, \ldots, 10$, το ενδεχόμενο να μας έρθει ακριβώς ένα έξι και μάλιστα στη θέση i. Προφανώς τα E_i αποτελούν διαμέριση του E, οπότε $\mathbb{P}[E] = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}[E_i]$.

[7] Αν και το ζευγάρι σταματά να κάνει παιδιά όταν αποκτήσει αγόρι εμείς ωστόσο μπορούμε ιδεατά να συνεχίσουμε το πείραμα, κι έτσι τα ενδεχόμενα B_i και G_i έχουν νόημα για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια θα μπορούσε το πείραμα να έχει διατυπωθεί ως εξής: έχουμε ένα ζευγάρι που κάνει συνέχεια παιδιά, επ' άπειρον, και μας ενδιαφέρει το πότε κάνει το πρώτο αγόρι.

Ορίζουμε τα ενδεχόμενο A_i^k, για $k = 1, \ldots, 6$, να σημαίνει ότι στην i-οστή ρίψη το αποτέλεσμα είναι k. Προφανώς ισχύει

$$E_i = (A_1^6)^c \cap (A_2^6)^c \cap \cdots \cap A_i^6 \cap (A_{i+1}^6)^c \cap \cdots \cap (A_{10}^6)^c = A_i^6 \cap \bigcap_{j \neq i} (A_j^6)^c. \tag{2.15}$$

Για να ισχύει δηλ. το E_i πρέπει σε όλες τις ρίψεις να μη φέρουμε 6 εκτός από την i-οστή ρίψη στην οποία πρέπει να φέρουμε 6. Τα ενδεχόμενα που εμφανίζονται στο δεξί μέλος της (2.15) είναι ανεξάρτητα μια και το καθένα από αυτά αφορά διαφορετική ρίψη, άρα

$$\mathbb{P}\left[E_i\right] = \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6},$$

αφού το ενδεχόμενα A_j^6 έχει πιθανότητα $1/6$ και τα ενδεχόμενα $(A_j^6)^c$ έχουν τη συμπληρωματική πιθανότητα $5/6$, για κάθε j.

Τέλος $\mathbb{P}\left[E\right] = \sum_{i=1}^{10} \mathbb{P}\left[E_i\right] = 10 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6}$.

▷ **Πρόβλημα 2.4.8.** Αποδείξτε ότι ο αριθμός $10 \left(\frac{5}{6}\right)^9 \frac{1}{6}$ είναι ≤ 1 χωρίς να κάνετε καμία πράξη.

Παράδειγμα 2.4.7. Ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι άπειρες φορές. Παίρνουμε έτσι ως αποτέλεσμα του πειράματος μια άπειρη ακολουθία X_n, $n = 1, 2 \ldots$, με $X_n \in \{1, \ldots, 6\}$. Ποια η πιθανότητα να μη φέρουμε ποτέ 6; Ας είναι E το ενδεχόμενο αυτό.

Ας ονομάσουμε E_i, $i = 1, 2, \ldots$, το ενδεχόμενο να μη φέρουμε 6 στην i-οστή ρίψη. Ισχύει φυσικά $\mathbb{P}\left[E_i\right] = 5/6$ για κάθε iνα μη φέρουμε ποτέ 6;

Ας ονομάσουμε E_i, $i = 1, 2, \ldots$, το ενδεχόμενο να μη φέρουμε 6 στην i-οστή ρίψη. Ισχύει φυσικά $\mathbb{P}\left[E_i\right] = 5/6$ για κάθε i. Επίσης η ακολουθία E_i είναι ανεξάρτητη αφού κάθε E_i αναφέρεται σε διαφορετική ρίψη. Τέλος $E = \bigcap_{i=1}^\infty E_i$, οπότε

$$\mathbb{P}\left[E\right] = \prod_{i=1}^\infty (5/6) = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^N (5/6) = \lim_{N \to \infty} (5/6)^N = 0,$$

αφού $\lim_{N \to \infty} \alpha^N = 0$ αν (και μόνο αν) $|\alpha| < 1$.

Παράδειγμα 2.4.8. Όπως και προηγουμένως ρίχνουμε ένα ζάρι άπειρες φορές και παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία X_n, $n = 1, 2 \ldots$, με $X_n \in \{1, \ldots, 6\}$. Ποια η πιθανότητα να μη δούμε ποτέ στην ακολουθία αυτή τον αριθμό 1, ακολουθούμενο από τον 2, ακολουθούμενο από τον 3;[8] Ας ονομάσουμε E αυτό το ενδεχόμενο του οποίου την πιθανότητα θέλουμε να υπολογίσουμε.

Ορίζουμε πάλι E_i να είναι το ενδεχόμενο $(X_i, X_{i+1}, X_{i+2}) \neq (1, 2, 3)$, το ενδεχόμενο δηλ. να μην εμφανιστεί η "απογορευμένη λέξη" αρχίζοντας από την i-οστή θέση της ακολουθίας. Προφανώς ισχύει και πάλι $E = \bigcap_{i=1}^\infty E_i$. Η ουσιαστική διαφορά με προηγουμένως είναι ότι τα E_i δεν αποτελούν πλέον ανεξάρτητη ακολουθία, τουλάχιστον όχι αν δεν το αποδείξουμε, αφού, για παράδειγμα το E_i και E_{i+1} ανεφέρονται και τα δύο στη ρίψη υπ' αριθμόν $i + 1$.

Ο τρόπος να δείξουμε και πάλι ότι $\mathbb{P}\left[E\right] = 0$ είναι να παρατηρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα E_{3i}, $i = 1, 2, \ldots$, είναι ανεξάρτητα, αφού αναφέρονται σε διαφορετικά πειράματα και ότι

$$E \subseteq \bigcap_{i=1}^\infty E_{3i}.$$

[8] Σε διαφορετική γλώσσα ποια η πιθανότητα η λέξη 123 να μην είναι υπολέξη της άπειρης σε μήκος λέξης $X_1 X_2 X_3 \cdots$;

Επίσης είναι φανερό ότι η ποσότητα E_{3i} είναι ανεξάρτητη του i και μικρότερη του 1, έστω p. Τότε $\mathbb{P}[E] \le \prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_{3i}] = \prod_{i=1}^{\infty} p = 0$.

▷ **Πρόβλημα 2.4.9.** Υπολογίστε την ποσότητα p στο Παράδειγμα 2.4.8.

▷ **Πρόβλημα 2.4.10.** Γενικεύστε το Παράδειγμα 2.4.8 και δείξτε ότι αν X_n είναι μια ακολουθία τέτοια ώστε το X_n έχει επιλεγεί τυχαία (ας πούμε με την ομοιόμορφη κατανομή) από το σύνολο $\{1, \ldots, K\}$ ανεξάρτητα από τα άλλα X_n, και αν $w_1, w_2, \cdots, w_n \in \{1, \ldots, K\}$ είναι κάποια προεπιλεγμένα στοιχεία, τότε η πιθανότητα ότι τα στοιχεία αυτά δεν εμφανίζονται ποτέ στην ακολουθία X_n το ένα μετά το άλλο, είναι 0.

▷ **Πρόβλημα 2.4.11.** Έστω $0 \le a_n \le 1$ ακολουθία αριθμών. Δείξτε ότι

$$0 = \prod_{i=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \prod_{i=1}^{N} a_n$$

αν και μόνο αν $\sum_{i=1}^{\infty}(1 - a_n) = \infty$.

Υπόδειξη: Πάρτε λογαρίθμους και χρησιμοποιείστε την ανισότητα

$$2(x-1) \le \log x \le x - 1,$$

που ισχύει για $\theta \le x \le 1$ (θ είναι κάποιος αριθμός στο (0,1) που δε χρειάζεται να τον γνωρίζουμε ακριβώς).

▷ **Πρόβλημα 2.4.12.** Ας είναι E_n μια ανεξάρτητη ακολουθία ενδεχομένων με $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[E_n] = \infty$. Δείξτε ότι σχεδόν σίγουρα ισχύουν άπειρα από τα E_n.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 2.4.11

Παρατήρηση 2.4.4. Το Πρόβλημα 2.2.16 μαζί με το Πρόβλημα 2.4.12 αποτελούν το λεγόμενο Λήμμα Borel-Cantelli.

Κεφάλαιο 3

Βασικές αρχές απαρίθμησης

3.1 Προβλήματα επιλογής

Σε πολλά και ενδιαφέροντα προβλήματα της θεωρίας Πιθανοτήτων έχουμε πειράματα επιλογής ενός αντικειμένου από πολλά, με βασική υπόθεση ότι κάθε ένα από αυτά τα πολλά αντικείμενα είναι εξ ίσου πιθανό να επιλεγεί. Αν το πλήθος των αντικειμένων είναι N τότε η πιθανότητα να επιλεγεί ένα συγκεκριμένο από τα αντικείμενα αυτά είναι απλά $1/N$. Φαίνεται πραγματικά το απλούστερο από τα προβλήματα. Η δυσκολία συνήθως έγκειται στο ότι η ποσότητα N, το πλήθος των αντικειμένων που συμμετέχουν στην επιλογή, μας δίδεται με έμμεσο τρόπο και πρέπει να το υπολογίσουμε.

Παράδειγμα 3.1.1. Σε ένα κουτί μέσα βρίσκονται 10 βώλοι αριθμημένοι από 1 έως 10. Βάζουμε το χέρι μας μέσα και πιάνουμε δύο. Ποια η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει τον 1 και τον 2;

Αξίζει τον κόπο σε αυτό το στάδιο να δώσουμε λίγη προσοχή στη λεπτομέρεια. Κατ' αρχήν, ποιος είναι ο δειγματικός χώρος; Όσο κι αν φαίνεται προφανές δεν είναι και τόσο, κι αν δε δώσουμε τώρα την πρέπουσα προσοχή αφήνουμε περιθώρια για παρεξηγήσεις αργότερα. Αυτό που έχει σημασία είναι να ξεκαθαρίσουμε αν δύο αποτελέσματα που διαφέρουν μόνο στη σειρά είναι ίδια ή διαφορετικά. Αν δηλ. βγάλουμε το 1 και μετά το 2 είναι αυτό το ίδιο με το να βγάλουμε το 2 και μετά το 1;

Αν ναι, τότε τα δυνατά μας αποτελέσματα είναι τα *αδιάτακτα* ζεύγη από διαφορετικούς αριθμούς ο καθένας από τους οποίους είναι από το 1 έως το 10. Και αφού ζεύγη που δεν έχουν μέσα τους διάταξη είναι το ίδιο με σύνολα από δύο στοιχεία[1] ο δειγματικός χώρος στην περίπτωση αυτή είναι ο

$$\Omega_1 = \{\{x, y\} :\ x, y \in [10]\}. \tag{3.1}$$

Αντίθετα, αν θεωρήσουμε ότι η σειρά έχει σημασία τότε τα δυνατά αποτελέσματα αποτελούνται από *διατεταγμένα* ζεύγη διαφορετικών στοιχείων από το $[10]$, είναι δηλ. στην περίπτωση αυτή ο δειγματικός χώρος ο

$$\Omega_2 = \{(x, y) :\ x, y \in [10],\ x \neq y\}. \tag{3.2}$$

Θα λύσουμε το πρόβλημα στην §3.2 και με τους δύο δειγματικούς χώρους, αν και στη συγκεκριμένη διατύπωση μπορεί κανείς να ισχυριστεί ότι υποννοείται η έλλειψη σειράς στους δύο βώλους (τα περιεχόμενα του χεριού μας αφού το βγάλουμε από το κουτί δύσκολα μπορούν να ταξινομηθούν σε πρώτο καί δεύτερο βώλο). Και στις δύο περιπτώσεις πάντως υποθέτουμε

[1] Όπως συνηθίζεται το να γράφουμε $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$ για ένα σύνολο συνεπάγεται ότι όλα τα $a, b, c, \ldots, z$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους και επίσης δεν υπονοούμε κάποια δυγκεκριμένη διάταξη στα στοιχεία του συνόλου A. Για παράδειγμα $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

ότι όλα τα αποτελέσματα είναι εξίσου πιθανά, άρα το μόνο που έχουμε να κάνουμε για να λύσουμε το πρόβλημα είναι να μετρήσουμε το μέγεθος του δειγματικού χώρου.

Στο υπόλοιπο του Κεφαλαίου αυτού θα ασχοληθούμε με προβλήματα απαρίθμησης. Η πιθανοθεωρητική ορολογία μπορεί ορισμένες φορές να είναι απούσα αλλά θα γίνει εύκολα αντιληπτό ότι κάθε πρόβλημα απαρίθμησης μπορεί εύκολα να εκφρασθεί στην πιθανοθεωρητική γλώσσα χωρίς να αλλάξει καθόλου η ουσία του προβλήματος.

3.2 Αρχή πολλαπλασιασμού ανεξάρτητων επιλογών

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος πίνει τον καφέ του με ή χωρίς ζάχαρη, με ή χωρίς γάλα. (Οι ποσότητες γάλατος και ζάχαρης που μπορεί κανείς να έχει είναι σταθερές. Δεν υπάρχει *με ολίγη*.) Πόσα διαφορετικά είδη από καφέ πρέπει να μπορεί να φτιαξει ένα καφενείο ώστε να μπορεί να εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες;

Η απάντηση είναι 4:

1. Χωρίς γάλα, χωρίς ζάχαρη
2. Χωρίς γάλα, με ζάχαρη
3. Με γάλα, χωρίς ζάχαρη
4. Με γάλα, με ζάχαρη

Αν σκεφτούμε λίγο προσεκτικότερα θα συνειδητοποιήσουμε ότι $4 = 2 \cdot 2$ και ότι ο λόγος που η απάντηση είναι αυτή είναι ότι κάθε μια από τις δύο δυνατές επιλογές όσον αφορά το περιεχόμενο σε γάλα μπορεί να συνδυαστεί μα κάθε μία από τις δύο δυνατές επιλογές που αφορούν στο περιεχόμενο σε ζάχαρη.

▷ **Πρόβλημα 3.2.1.** Ποια η απάντηση στο άνω "πρόβλημα του καφέ" αν οι επιλογές μας ως προς τη ζάχαρη δεν είναι πλέον οι ΝΑΙ, ΟΧΙ, αλλά μπορούμε είτε να μην έχουμε καθόλου ζάχαρη, είτε να έχουμε ένα φακελάκι, είτε δύο;

▷ **Πρόβλημα 3.2.2.** Αν το αρχικό "πρόβλημα του καφέ" προστεθεί η επιλογή ΚΡΥΟΣ ή ΖΕΣΤΟΣ, την οποία μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητα από το γάλα ή τη ζάχαρη που διαλέγουμε, ποια είναι η απάντηση;

Η αρχή του **πολλαπλασιασμού ανεξάρτητων επιλογών** κωδικοποιεί την απλή αυτή παρατήρηση που κάναμε:

> Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να παραγματοποιήσουμε μια σύνθετη επιλογή, η οποία συνίσταται από την πραγματοποίηση k επί μέρους επιλογών, που πραγματοποιούνται *ανεξάρτητα* η μία από την άλλη, είναι δηλ. τέτοιες οι επί μέρους επιλογές ώστε η επιλογή τιμών για κάποιες από αυτές να μην επηρεάζει τις δυνατότητες που υπάρχουν για τις υπόλοιπες. Τότε το συνολικό πλήθος δυνατοτήτων που έχουμε για τη σύνθετή μας επιλογή είναι το γινόμενο των k δυνατοτήτων για τις επί μέρους επιλογές μας.

Σε πιο αυστηρή γλώσσα η αρχή του πολλαπλασιασμού ανεξαρτήτων επιλογών εκφράζεται ως εξής:

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω k φυσικός αριθμός και E το σύνολο όλων των διαφορετικών k-άδων*

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

όπου $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_k \in E_k$, και τα E_j είναι όλα πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|E| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_k|.$$

Απόδειξη. Απόδειξη με επαγωγή ως προς k. Αν $k = 1$ πρόκειται περί ταυτολογίας, αφού $E = E_1$. Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $k = n$ και τη δείχνουμε για $k = n + 1$. Θέλουμε να μετρήσουμε τα διατεταγμένα αντικείμενα της μορφής

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \tag{3.3}$$

όπου $x_j \in E_j$, για $j = 1, \ldots, n + 1$. Αν $E_{n+1} = \{e_1, \ldots, e_r\}$ αυτά τα αντικείμενα (3.3) χωρίζονται στις εξής *ξένες* μεταξύ τους r ομάδες: G_1 είναι εκείνα τα αντικείμενα που στην τελευταία θέση τους έχουν e_1, δηλ. όλα τα αντικείμενα της μορφής

$$(x_1, \ldots, x_n, e_1), \quad \text{με } x_j \in E_j, \tag{3.4}$$

G_2 είναι εκείνα τα αντικείμενα με e_2 στην τελευταία θέση, κ.ο.κ. Οι ομάδες αυτές είναι μεταξύ τους ισοπληθείς, αφού, π.χ. μπορεί η G_1 να τεθεί σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τη G_2 μέσω της απεικόνισης $G_1 \to G_2$

$$(x_1, \ldots, x_n, e_1) \to (x_1, \ldots, x_n, e_2).$$

Το συνολικό πλήθος λοιπόν των αντικειμένων τύπου (3.3) είναι

$$|G_1| \cdot r = |G_1| \cdot |E_{n+1}|. \tag{3.5}$$

Αλλά, είναι φανερό, το πλήθος στοιχείων της G_1 είναι όσα και τα διατεταγμένα αντικείμενα

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{με } x_j \in E_j,$$

που, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, είναι ίσο με $|E_1| \cdots |E_n|$. Αντικαθιστώντας στην (3.5) παίρνουμε το αποτέλεσμα.

■

Παράδειγμα 3.2.1. Πόσους δεκαδικούς ακεραίους με το πολύ πέντε ψηφία μπορεί κανείς να γράψει χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα 2, 3, 5;

Κάθε ένας από αυτούς τους ακεραίους μπορεί να κατασκευασθεί αν κάνουμε πέντε διαδοχικές επιλογές (μια για κάθε ψηφίο του) και σε κάθε μια από τις επιλογές αυτές διαλέξουμε ένα από τους επιτρεπτούς αριθμούς 2, 3, 5. Είναι δηλ. το πλήθος αυτών των σύνθετων επιλογών που μπορούμε να κάνουμε ίσο με 3^5. Αφού διαφορετικές επιλογές δίνουν διαφορετικούς ακεραίους (ας μην ξεχνάμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε ακεραίους, όχι τρόπους κατασκευής των) τόσοι είναι και οι ακέραιοι για τους οποίους μιλάμε.

▷ **Πρόβλημα 3.2.3.** Πόσες διαφορετικές στήλες ΠΡΟ-ΠΟ υπάρχουν (μήκους 13, με 1,2 ή Χ σε κάθε θέση);

Αν παίξετε στην τύχη μια στήλη ποια η πιθανότητα να πιάσετε 13άρι (όλα σωστά);

Ποια η πιθανότητα να πιάσετε 12άρι (ένα ακριβώς λάθος);

Υπόδειξη: Για το τελευταίο ερώτημα, χωρίστε το ενδεχόμενο σε 13 ξένα ενδεχόμενα ανάλογα με το που γίνεται το λάθος.

▷ **Πρόβλημα 3.2.4.** Πόσες διαφορετικές τριάδες γραμμάτων μπορούν να εμφανιστούν σε ελληνικές πινακίδες αυτοκινήτων; (Σε αυτές χρησιμοποιούνται μόνο γράμματα που ανήκουν και στο ελληνικό και στο λατινικό αλφάβητο.) Αν κάθε τέτοια τριάδα ακολουθείται από ένα τετραψήφιο φυσικό αριθμό (με πρώτο ψηφίο διαφορετικό από το 0) πόσα το πολύ αυτοκίνητα μπορούν να ταξινομηθούν στην Ελλάδα;

Παράδειγμα 3.2.2. Χρησιμοποιώντας την αρχή πολλαπλασιασμού μπορούμε τώρα να δώσουμε απάντηση στο πρόβλημα του Παραδείγματος 3.1.1.

Κατ΄ αρχήν το μέγεθος του συνόλου

$$[n] \times [n] = \{(x, y) : \ x \in [n], y \in [n]\},$$

του καρτεσιανού δηλ. γινομένου του $[n]$ με τον εαυτό του, είναι n^2, αφού το τυχόν στοιχείο του φτιάχνεται διαλέγοντας το x και το y, για καθένα από τα οποία έχουμε n επιλογές.

Παρατηρούμε τώρα ότι το σύνολο Ω_2 του Παραδείγματος 3.1.1 είναι το $[n] \times [n]$ εκτός από τα ζεύγη της μορφής (x, x), το πλήθος των οποίων είναι όσες και οι επιλογές για το x, δηλ. n. Έχουμε άρα δείξει ότι $|\Omega_2| = n^2 - n = n(n-1)$.

Παρατηρούμε τέλος ότι $|\Omega_2| = 2|\Omega_1|$, αφού η απεικόνιση

$$f : \Omega_2 \to \Omega_1, \quad f((x, y)) = \{x, y\},$$

είναι 2 προς 1. Με άλλα λόγια σε κάθε διμελές σύνολο αντιστοιχούν ακριβώς δύο διατάξεις των στοιχείων του. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι $\Omega_1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Τέλος όσον αφορά την πιθανότητα να έχουμε επιλέξει τους βώλους 1 και 2, αυτή ισούται με $1/|\Omega_2|$ ή $1/|\Omega_1|$, ανάλογα με τον αν λύνουμε το πρόβλημα όπου η διάταξη έχει δημασία ή όχι.

3.2.1 Πλήθος υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου

Μια σημαντική εφαρμογή της αρχής πολλαπλασιασμού των ανεξάρτητων επιλογών είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω σύνολο A με n στοιχεία, και $\mathcal{P}(A)$ το* δυναμοσύνολο *του A, δηλ. το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Τότε*

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Απόδειξη. Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει το Θεώρημα με επαγωγή ως προς το n, αλλά ας δούμε πώς αποδεικνύεται εφαρμόζοντας την αρχή πολλαπλασιασμού. Η βασική παρατήρηση είναι ότι το πλήθος όλων των υποσυνόλων του $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να τεθεί σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων

$$(x_1, \ldots, x_n) \ \text{ με } x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}. \tag{3.6}$$

Όντως, η 1-1 και επί αυτή αντιστοιχία είναι αυτή που στέλνει το τυχόν υποσύνολο $B \subseteq A$ στη n-άδα $(x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_j = 1$ αν και μόνο αν $j \in B$ (βεβαιωθείτε ότι αυτή η απεικόνιση όντως είναι 1-1 και επί).

Αντί να μετρήσουμε λοιπόν τα στοιχεία του

$$\mathcal{P}(A) = \{B : \ B \subseteq A\}$$

μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των n-άδων (3.6). Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Για να μετρήσουμε τώρα τις n-άδες (3.6) σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε μια τυχούσα n-άδα πρέπει να κάνουμε n ανεξάρτητες επιλογές, μια για κάθε x_j, και σε κάθε μια από αυτές τις επιλογές έχουμε δύο δυνατότητες. Άρα, το πλήθος δυνατοτήτων για τη συνολική επιλογή είναι $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n$.

■

▷ **Πρόβλημα 3.2.5.** Δώστε επαγωγική απόδειξη (ως προς το n) του Θεωρήματος 3.2.2.

Παράδειγμα 3.2.3. Μέ πόσους τρόπους μπορεί κανείς να επιλέξει δύο *ξένα* μεταξύ τους υποσύνολα A και B του συνόλου $[n]$;

Τα σύνολα αυτά μπορούν να είναι και κενά.

Για να απαντήσουμε σκεφτόμαστε ως εξής, και ο τρόπος αυτός σκέψης αποτελεί υπόδειγμα για το πώς σκεφτόμαστε στην πλειονότητα των περιπτώσεων. Για να μετρήσουμε λοιπόν τα συγκεκριμένα αντικείμενα βρίσκουμε, κατ' αρχήν, μια διαδικασία για να τα κατασκευάσουμε. Αυτή η διαδικασία πρέπει να είναι τέτοια ώστε

- Να κωδικοποιείται με μια ακολουθία από επιλογές μετά από τις οποίες καταλήγουμε σε ένα από τα αντικείμενα της κλάσης που προσπαθούμε να μετρήσουμε,
- Για κάθε μια από τις δυνατές ακολουθίες επιλογών που κάνουμε να προκύπτει και ένα διαφορετικό αντικείμενο από την κλάση, και
- Για κάθε στοιχείο της κλάσης των προς μέτρηση αντικειμένων υπάρχει μια ακολουθία επιλογών (που είναι και μοναδική, από την προηγούμενη απαίτηση) που μας δίνει το στοιχείο αυτό.

Η κατασκευή που δίνουμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η εξής. Προχωράμε για $i = 1$ έως $i = n$ και για κάθε i επιλέγουμε αν θα είναι στο σύνολο A, στο σύνολο B ή αν δε θα είναι σε κανένα από αυτά. Δε μπορεί να είναι και στα δύο αφού τα A και B τα θέλουμε ξένα μεταξύ τους.

Είναι φανερό πως αν έχουμε δύο διαφορετικές ακολουθίες από τις n αυτές επιλογές, τότε αυτές οδηγούν σε δύο διαφορετικά αντικείμενα, σε δύο διαφορετικά δηλ. ζεύγη ξένων υποσυνόλων $A, B \subseteq [n]$. Έτσι, το πλήθος των αντικειμένων που μας ενδιαφέρει είναι ίσο με το πλήθος των δυνατών ακολουθιών επιλογών μας. Είναι επίσης φανερό ότι οι n απλές επιλογές που απαρτίζουν αυτή την ακολουθία επιλογών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού κάθε φορά, και ότι και να έχουμε επιλέξει μέχρι στιγμής, τρείς είναι οι δυνατές επιλογές μας για τον τρέχοντα αριθμό i, δηλ. να επιλέξουμε $i \in A$, $i \in B$ ή $i \notin A \cup B$. Έτσι, το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\underbrace{3 \cdots 3}_{n} = 3^n.$$

Παράδειγμα 3.2.4. Επιλέγουμε τυχαία δύο υποσύνολα A και B του $[n]$. Ποια η πιθανότητα ότι αυτά είναι μεταξύ τους ξένα;

Ο δειγματικός μας χώρος εδώ είναι το

$$\Omega = \{(A, B) : \ A, B \subseteq [n]\}.$$

Αφού υπάρχουν 2^n υποσύνολα του $[n]$, έχουμε τόσες επιλογές για το A και τόσες για το B, άρα $|\Omega| = 2^n \cdot 2^n = 4^n$.

Ας είναι
$$E = \{(A, B) : \ A, B \subseteq [n], A \cap B = \emptyset\} \subseteq \Omega.$$
Αφού όλα τα στοιχεία του Ω είναι εξ ίσου πιθανά να εμφανιστούν ως αποτελέσματα του πειράματος η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι ο αριθμός $|E|/|\Omega|$. Κι από το Παράδειγμα 3.2.3 έχουμε $|E| = 3^n$, άρα η πιθανότητα που ψάχνουμε είναι $(3/4)^n$.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 3.2.6.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A και B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;

$\triangleright$ **Πρόβλημα 3.2.7.** Ποια η απάντηση στο ερώτημα του Παραδείγματος 3.2.3 αν απαιτήσουμε τα σύνολα A και B να είναι μη κενά;

(*Υπόδειξη:* αφαιρέσετε από την απάντηση που δόθηκε στο Παράδειγμα 3.2.3 μια κατάλληλη ποσότητα που αντιπροσωπεύει επιλογές που δεν πληρούν το κριτήριο της μη κενότητας που έχουμε θέσει.)

3.2.2 Πλήθος συναρτήσεων από σύνολο A σε σύνολο B

Μια συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B είναι απλά μια αντιστοίχιση *κάθε* στοιχείου του A σε *κάποιο* στοιχείο του B. Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ πόσες τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν; Η απάντηση είναι n^m:

Θεώρημα 3.2.3. *Αν A και B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, και με B^A συμβολίσουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, τότε*
$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Απόδειξη. Το να επιλέξουμε μια συνάρτηση από το A στο B (ένα μέλος δηλ. του συνόλου B^A) σημαίνει απλούστατα να επιλέξουμε την εικόνα κάθε στοιχείου του A ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του B. Οι επιλογές αυτές είναι προφανώς ανεξάρτητες μεταξύ τους αφού δεν έχουμε θέσει κανένα περιορισμό στο τι είδους συναρτήσεις θέλουμε (π.χ., θα μπορούσαμε να θέλουμε 1-1 συναρτήσεις μόνο–σε αυτή την περίπτωση οι επιλογές δε θα ήταν φυσικά ανεξάρτητες). Έτσι το πλήθος των δυνατών επιλογών είναι
$$\underbrace{|B| \cdots |B|}_{|A|} = |B|^{|A|}.$$

■

$\triangleright$ **Πρόβλημα 3.2.8.** Ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $[n] \to \{0, 1\}$; Περιγράψτε μια φυσιολογική σχέση με τα υποσύνολα του $[n]$;

$\triangleright$ **Πρόβλημα 3.2.9.** Πόσοι $m \times n$ πίνακες υπάρχουν με στοιχεία 0, 1 ή 3;

$\triangleright$ **Πρόβλημα 3.2.10.** Ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $f : [n] \to \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ που πληρούν την ανισότητα $f(k) < k$ για κάθε $k \in [n]$;

▷ **Πρόβλημα 3.2.11.** Αν $A = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ και $f : A \to A$ είναι μια τυχαία συνάρτηση (όλες οι συναρτήσεις $A \to A$ εξ ίσου πιθανές) ποια η πιθανότητα η f να είναι ***άρτια***, να ικανοποιεί δηλ. $f(-x) = f(x)$ για όλα τα $x \in A$;

▷ **Πρόβλημα 3.2.12.** Πόσοι ακέραιοι αριθμοί, μικρότεροι από 10^6, έχουν κάποιο 2 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα; (*Υπόδειξη:* Πόσοι *δεν* έχουν;)

▷ **Πρόβλημα 3.2.13.** Επιλέγουμε τυχαία ένα ακέραιο από 0 έως 999 (ένα τυχαίο δηλ. ακέραιο που μπορεί να γραφεί με τρία δεκαδικά ψηφία). Ποια η πιθανότητα ότι αυτός δεν περιέχει άρτιο ψηφίο;

▷ **Πρόβλημα 3.2.14.** Σε μια τυχαία διάταξη του $[n]$ ποια η πιθανότητα ο αριθμός 1 να απέχει από τον αριθμό 2 ακριβώς 5 θέσεις;

▷ **Πρόβλημα 3.2.15.** (Δοκιμές Bernoulli) Ένα νόμισμα έρχεται κορώνα με πιθανότητα $p \in (0, 1)$ και γράμματα με πιθανότητα $1 - p$. Το ρίχνουμε συνεχώς. Ποια η πιθανότητα να έρθει το νόμισμα για πρώτη φορά κορώνα στην k ρίψη;

▷ **Πρόβλημα 3.2.16.** Πόσους διαιρέτες έχει ο φυσικός αριθμός

$$n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}; \tag{3.7}$$

Ο n έχει γραφεί σαν γινόμενο δυνάμεων ξένων μεταξύ τους πρώτων[2] αριθμών p_j. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής που λέει ότι κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή (3.7), εκτός ίσως από τη σειρά των παραγόντων.

3.3 Αρχή πολλαπλασιασμού ημιανεξάρτητων επιλογών

Είδαμε στην §3.2 ότι όταν έχουμε να παραγματοποιήσουμε μια σύνθετη επιλογή που αποτελείται από πολλές επί μέρους επιλογές, οι οποίες είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη, μπορούμε δηλ. να πραγματοποιήσουμε τις επί μέρους επιλογές όλες ταυτόχρονα, τότε το πλήθος δυνατοτήτων για τη σύνθετη επιλογή ισούται με το γινόμενο των δυανατοτήτων για τις επί μέρους επιλογές.

Η αρχή πολλαπλασιασμού γίνεται πολύ χρησιμότερη μετά από την εξής παρατήρηση. Δε χρειάζεται οι επί μέρους επιλογές μας να είναι ανεξάρτητες. Μπορούμε να επιτρέψουμε η πρώτη μας επί μέρους επιλογή να επηρεάζει τις δυνατότητές μας για τη δεύτερη (ή κάποια άλλη) επιλογή, αρκεί να μην επηρεάζει το *πλήθος* των δυνατοτήτων για την επιλογή αυτή. Δεν

[2] *Πρώτος* λέγεται ένας ακέραιος μεγαλύτερος του 1 αν δεν έχει άλλους διαιρέτες παρά μόνο τον εαυτό του και το 1. Π.χ. πρώτοι αριθμοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, ενώ ο 6 δεν είναι πρώτος, αλλά *σύνθετος* αριθμός. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

απαιτούμε δηλ. να μένει το σύνολο δυνατοτήτων της κάθε επί μέρους επιλογής αναλλοίωτο από κάθε προηγούμενή μας απόφαση, αρκεί να μένει το μέγεθος του συνόλου αναλλοίωτο. Λέμε τότε ότι οι επί μέρους επιλογές μας είναι *ημιανεξάρτητες*[3].

Παράδειγμα 3.3.1. Ας υποθέσουμε ότι, παράλληλα με τις υποθέσεις τού Προβλήματος 3.2.1, σε ένα περιέργο τόπο ο κόσμος δεν πίνει ποτέ σκέτο καφέ χωρίς γάλα και ότι δεν πίνει επίσης ποτέ γλυκό (2 φακελάκια ζάχαρη) με γάλα. Το πλήθος των δυνατών τύπων καφέ είναι πάλι $2 \cdot 2$ αν και τώρα οι επιλογές (γάλα, ζάχαρη) δεν είναι πλέον ανεξάρτητες, αφού αν κάποιος επιλέξει πρώτα καφέ χωρίς γάλα οι επιλογές του ως προς τη ζάχαρη είναι 1 ή 2 φακελάκια ενώ αν επιλέξει καφέ με γάλα οι επιλογές του ως προς τη ζάχαρη είναι 0 ή 1 φακελάκι. Οι επιλογή δηλ. που κάνουμε για το γάλα επηρεάζει τις επιλογές μας για τη ζάχαρη, αλλά όχι το πλήθος των επιλογών αυτών, είναι δηλ. η επιλογή της ζάχαρης ημιανεξάρτητη από την επιλογή του γάλακτος.

Παρατήρηση 3.3.1. Είναι πάρα πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε εδώ ότι η έννοια της ημιανεξαρτησίας όπως την ορίσαμε περιγραφικά εδώ *εξαρτάται* από τη σειρά με την οποία πραγματοποιούνται οι επί μέρους επιλογές. Αν στο Παράδειγμα 3.3.1 επιλέξει κανείς πρώτα το επίπεδο ζάχαρης και μετά το αν θα έχει ο καφές του γάλα ή όχι, παύει η ημιανεξαρτησία. Αν επιλέξει κάποιος ο καφές του να είναι σκέτος (καθόλου ζάχαρη) τότε έχει μία επιλογή για το γάλα: πρέπει οπωσδήποτε να βάλει. Αν επιλέξει 1 φακελάκι ζάχαρη μπορεί βάλει γάλα ή όχι, ενώ αν επιλέξει 2 φακελάκια ζάχαρη πάλι έχει 1 επιλογή: να μη βάλει γάλα. Αν αθροίσουμε το πλήθος των επιλογών τότε παίρνουμε πάλι $1+2+1=4$ φυσικά. Αλλά παρατηρείστε ότι αυτός ο τρόπος μετρήματος είναι πιο περίπλοκος μια και δεν μπορούμε πλέον να πολλαπλασιάσουμε τις επιλογές, αλλά πρέπει να αθροίσουμε. Γι' αυτό και ένα μεγάλο κομμάτι από την τέχνη του μετρήματος έγκειται στο να διαλέξουμε μια καλή σειρά μετρήματος, που θα οδηγήσει σε απλό μέτρημα.

Παράδειγμα 3.3.2. Μια 10-μελής ομάδα επιλέγει αρχηγό και (διαφορετικό) υπαρχηγό. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Η απάντηση είναι με $10 \cdot 9 = 90$ διαφορετικούς τρόπους. Πρώτα επιλέγεται ο αρχηγός και μετά ο υπαρχηγός. Για τον αρχηγό έχουμε 10 επιλογές. Αφού επιλεγεί αυτός, έστω ο x, στη θέση του υπαρχηγού μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε εκτός του x, έχουμε δηλ. 9 επιλογές. Παρατηρείστε ότι οι δύο επιλογές δεν είναι ανεξάρτητες αφού η επιλογή του αρχηγού επηρεάζει το σύνολο των δυνατών επιλογών για υπαρχηγό, δεν επηρεάζει όμως το πλήθος των δυνατών υπαρχηγών. Είναι δηλ. οι δύο αυτές επιλογές ημιανεξάρτητες.

▷ **Πρόβλημα 3.3.1.** Έστω μια ομάδα 5 ανδρών και μια ομάδα 7 γυναικών. Με πόσους τρόπους μπορούμε να παντρέψουμε και τους 5 άνδρες με γυναίκες από αυτή την ομάδα των 7; Ισχύουν οι συνήθεις κανόνες (όχι διγαμία).

Υπόδειξη: Επιλέξτε πρώτα τη γυναίκα του άντρα Νο 1, μετά του Νο 2, κλπ, και μετρείστε πόσες επιλογές έχετε σε κάθε βήμα.

▷ **Πρόβλημα 3.3.2.** Για $m \leq n$ πόσες 1-1 συναρτήσεις υπάρχουν από το $[m]$ στο $[n]$;

▷ **Πρόβλημα 3.3.3.** Στο Πρόβλημα 3.3.1 αλλάξτε τους κοινωνικούς κανόνες ώστε να επιτρέπουν σε μια γυναίκα να παντρευτεί ταυτόχρονα όσους άντρες θέλει.

[3] Ο όρος δεν είναι καθιερωμένος.

▷ **Πρόβλημα 3.3.4.** Σε ένα κουτί βρίσκονται 10 κόκκινοι και 5 πράσινοι βώλοι. Επιλέγουμε βώλους χωρίς επανατοποθέτηση. Ποια η πιθανότητα ο πρώτος πράσινος βώλος να έρθει στην τέταρτη λήψη;

3.3.1 Πλήθος διατεταγμένων επιλογών. Μεταθέσεις συνόλου

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε, κατά τρόπο διατεταγμένο, r άτομα από n;

Θεώρημα 3.3.1. *Το πλήθος των διατεταγμένων r-άδων ($r \le n$)*

$$(x_1, \ldots, x_r) \ \text{με } x_j \in [n] \text{ όλα διαφορετικά} \tag{3.8}$$

είναι

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε πρώτα το x_1. Γι' αυτό έχουμε n δυνατότητες. Έχοντας επιλέξει το x_1 δεν μπορούμε πλέον να διαλέξουμε το ίδιο στοιχείο και για x_2. Οι δυνατότητες που έχουμε άρα για το x_2 είναι μία λιγότερες, δηλ. $n-1$. Έχοντας επιλέξει τα x_1, x_2 οι δυνατότητες για το x_3 είναι πλέον $n-2$, κλπ. Παρατηρούμε ότι οι επιλογές είναι ημιανεξάρτητες. Δεν επηρεάζουν δηλ. οι μέχρι κάποια στιγμή επιλογές μας το *πλήθος* των μετέπειτα επιλογών μας. Εφαρμόζοντας την αρχή του πολλαπλασιασμού παίρνουμε το αποτέλεσμα, αφού για το x_r θα έχουμε $n-r+1 = n-(r-1)$ δυνατότητες αφού θα έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί ακριβώς $r-1$ στοιχεία από τα n.
■

Ορισμός 3.3.1. *Μετάθεση* ενός πεπερασμένου συνόλου ονομάζεται μια διάταξη των στοιχείων του, ένας τρόπος δηλ. να γράψουμε τα στοιχεία του το ένα μετά το άλλο.

Αν A είναι οποιοδήποτε σύνολο (όχι κατ' ανάγκη πεπερασμένο) τότε μετάθεση του A ονομάζεται μια 1-1 και επί απεικόνιση $A \to A$.

▷ **Πρόβλημα 3.3.5.** Βεβαιωθείτε ότι οι δύο τρόποι ορισμού της μετάθεσης πεπερασμένου συνόλου στον Ορισμό 3.3.1 ορίζουν την ίδια έννοια.

Πόρισμα 3.3.1. *Το πλήθος των μεταθέσεων ενός συνόλου με n στοιχεία είναι*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Οι διαφορετικοί αυτοί τρόποι διάταξης όλων των στοιχείων ενός συνόλου λέγονται μεταθέσεις *του συνόλου.*

Απόδειξη. Το να διατάξουμε τα στοιχεία του συνόλου στη σειρά είναι το ίδιο πράγμα με το να διαλέξουμε μια διατεταγμένη n-άδα από αυτά. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 3.3.1 με $r = n$.
■

▷ **Πρόβλημα 3.3.6.** Γράψτε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $\{A, B, C\}$.

▷ **Πρόβλημα 3.3.7.** Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα ψηφία 1,2,3,4,5; Με πόσους τα ψηφία 1,1,3,4,5;

▷ **Πρόβλημα 3.3.8.** Δέκα άτομα φοράνε καπέλα που γράφουν επάνω το όνομά τους. Τα πετάνε στον αέρα για να γιορτάσουν και τα καπέλα καταλήγουν και πάλι στα κεφάλια τους, ανακατεμένα. Ποια η πιθανότητα ότι όλοι θα φορέσουν και πάλι το καπέλο τους. (Όλοι οι τρόποι να προσγειωθούν τα καπέλα στα κεφάλια θεωρούνται ισοπίθανοι.)

3.3.2 Μη διατεταγμένες επιλογές. Συνδυασμοί

Πόσα υποσύνολα του συνόλου $[n]$ (ή, εν γένει, ενός συνόλου με n στοιχεία) υπάρχουν με μέγεθος k;

Θεώρημα 3.3.2. *Αν $0 \le k \le n$ τότε το σύνολο $[n]$ (ή οποιοδήποτε σύνολο με n στοιχεία) έχει*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

υποσύνολα μεγέθους k (ακολουθούμε τη σύμβαση ότι ένα γινόμενο με 0 παράγοντες ισούται με 1, έτσι $0! = 1$).

Το σύμβολο $\binom{n}{k}$ προφέρεται: n ανά k.

Απόδειξη. Αυτό που ζητάμε να μετρήσουμε είναι το πλήθος των μη διατεταγμένων k-άδων με διαφορετικά στοιχεία από το $[n]$. Λέγοντας ότι θέλουμε να μετρήσουμε "μη διατεταγμένες" k-άδες εννούμε ότι αν δύο k-άδες διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά που εμφανίζονται τα στοιχεία τους, τότε αυτές τις θεωρούμε ίδιες και τις μετράμε μία φορά. Αν αυτό δεν ίσχυε, αν δηλ. διαφορετικά διατεταγμένες k-άδες θεωρούνταν διαφορετικές, τότε την απάντηση τη δίνει το Θεώρημα 3.3.1, δηλ. $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Παρατηρείστε τώρα ότι σε κάθε μη διατεταγμένη k-άδα με διαφορετικά στοιχεία, σε κάθε δηλ. k-μελές υποσύνολο του $[n]$, αντιστοιχούν ακριβώς $k!$ διατεταγμένες k-άδες, μια και με τόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα στοιχεία ενός k-μελούς συνόλου (Πόρισμα 3.3.1). Άρα, στον αριθμό $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ κάθε k-μελές υποσύνολο του $[n]$ έχει μετρηθεί ακριβώς $k!$ φορές. Για να βρούμε συνεπώς το πλήθος των k-μελών υποσυνόλων του $[n]$ αρκεί να διαιρέσουμε αυτό τον αριθμό με $k!$.

■

Πόρισμα 3.3.2. *Αν n, k φυσικοί αριθμοί, $0 \le k \le n$, τότε ο αριθμός*

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

είναι ακέραιος.

Παρατήρηση 3.3.2. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ ότι η προηγούμενη απόδειξη δουλεύει ακριβώς επειδή κάθε k-μελές σύνολο είχε μετρηθεί *τον ίδιο αριθμό φορών* στην ποσότητα $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, και άρα δικαιούμασταν να διαιρέσουμε δια αυτό τον αριθμό φορών.

▷ **Πρόβλημα 3.3.9.** Ποια είναι τα διμελή υποσύνολα του $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$.

Παράδειγμα 3.3.3. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε τέσσερεις διαφορετικούς διψήφιους ακεραίους (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους) ούτως ώστε να χωρίζονται αυτοί σε δύο ζεύγη και οι αριθμοί κάθε ζεύγους να έχουν το ίδιο δεύτερο (χαμηλότερο) ψηφίο αλλά αριθμοί σε διαφορετικά ζεύγη να έχουν διαφορετικό δεύτερο ψηφίο; Για παράδειγμα οι αριθμοί 12, 22, 13, 43 ικανοποιούν τη ζητούμενη συνθήκη αν τους χωρίσουμε στα ζεύγη $\{12, 22\}$ και $\{13, 43\}$.

Για να μετρήσουμε τους τρόπους σκεφτόμαστε με ποια διαδικασία θα παράγουμε μονοσήμαντα ένα τέτοιο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη θέση χρησιμοποιούνται ακριβώς δύο ψηφία, ένα στο ένα ζεύγος και ένα για το άλλο. Αποφασίζουμε λοιπόν κάθε τετράδα τέτοιων αριθμών να τη γράφουμε ως εξής:

$$xa, ya, zb, wb \tag{3.9}$$

όπου ισχύει

$$a, b \in \{0, \ldots, 9\},\ x, y, z, w \in \{1, \ldots, 9\},\ a > b,\ x > y,\ z > w. \tag{3.10}$$

Την τελευταία αυτή απαίτηση (3.10) τη βάζουμε ώστε κάθε τετράδα από αυτές που θέλουμε να μετρήσουμε να γράφεται με *μοναδικό* τρόπο στη μορφή (3.9). Πάντα δηλ. όταν είναι να γράψουμε μια τετράδα κάτω γράφουμε πρώτα το ζευγάρι όπου το ψηφίο των μονάδων είναι το μεγαλύτερο, και μέσα σε κάθε ζευγάρι γράφουμε πρώτα αυτόν τον αριθμό του οποίο το ψηφίο των δεκάδων είναι το μεγαλύτερο.

Τα αντικείμενα δηλ. που θέλουμε να μετρήσουμε είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις εξάδες

$$(a, b, x, y, z, w)$$

που ικανοποιούν την (3.10). Για να μετρήσουμε τις εξάδες αυτές μετράμε πρώτα πόσες είναι οι επιλογές μας για το ζεύγος a, b, πόσες για το ζεύγος x, y και πόσες για το ζεύγος z, w. Επειδή, λόγω της φύσης της συνθήκης (3.10), αυτές οι επιλογές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε. Αλλά για να επιλέξουμε το ζεύγος $a, b \in \{0, \ldots, 9\}$ με $a > b$ μπορούμε απλά να επιλέξουμε ένα διμελές υποσύνολο του $\{0, \ldots, 9\}$ και να ονομάσουμε a το μεγαλύτερο στοιχείο του και b το μικρότερο. Το πλήθος επιλογών μας δηλ. είναι $\binom{10}{2}$ και, ομοίως σκεπτόμενοι, βλέπουμε ότι για το ζεύγος x, y έχουμε $\binom{9}{2}$ επιλογές και ομοίως για το ζεύγος z, w.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι λοιπόν

$$\binom{10}{2}\binom{9}{2}^2.$$

Παράδειγμα 3.3.4. Από μια συνηθισμένη τράπουλα με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μια εξάδα από φύλλα υπό τον περιορισμό ότι ακριβώς τρία από αυτά είναι σπαθιά ($\clubsuit$); Οι εξάδες που επιλέγουμε είναι μη διατεταγμένες.

Για να απαντήσουμε βρίσκουμε μια διαδικασία παραγωγής του τυπικού αποτελέσματος. Αφού λοιπόν πρέπει τρία από αυτά τα χαρτιά να είναι σπαθιά ξεκινάμε διαλέγοντας πρώτα απ' όλα αυτά τα τρία σπαθιά. Τα τρία αυτά φύλλα επιλέγονται χωρίς κανένα περιορισμό από τα 13 συνολικά σπαθιά της τράπουλας. Άρα οι δυνατότητες γι' αυτή την επιλογή είναι $\binom{13}{3}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε τα υπόλοιπα τρία φύλλα που πρέπει απλά να μην είναι σπαθιά, επιλέγονται δηλ. από τα $3 \times 13 = 39$ φύλλα που δεν είναι σπαθιά, δίνοντάς μας $\binom{39}{3}$ δυνατότητες.

Επειδή η πρώτη επιλογή (των σπαθιών) είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{3}.$$

Παράδειγμα 3.3.5. Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι η απαρίθμηση που κάναμε στο Παράδειγμα 3.3.4 είναι σωστή επειδή η μέθοδος κατασκευής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Είναι τέτοια ώστε διαφορετικές επί μέρους επιλογές (στη μέθοδο κατασκευής που περιγράψαμε οι επί μέρους επιλογές ήταν δύο: πρώτα η επιλογή των σπαθιών και μετά η επιλογή των μη σπαθιών) οδηγούν αναγκαστικά σε διαφορετικό αποτέλεσμα, και

- Κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι δυνατό να κατασκευαστεί με τη μέθοδό μας.

Οι δύο αυτές ιδιότητες μαζί εξασφαλίζουν ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη[4] αντιστοιχία ανάμεσα σε αυτά που κατασκευάζουμε και σε αυτά που θέλουμε να μετρήσουμε, άρα μπορούμε απλά να μετρήσουμε το πλήθος των αντικειμένων που κατασκευάζουμε.

Για να τονίσουμε το πόσο σημαντικές είναι αυτές οι δύο ιδιότητες και πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε σε αντίστοιχα μετρήματα, ας παραλλάξουμε λίγο το ερώτημα του Παραδείγματος 3.3.4. Ας ρωτήσουμε το ίδιο με μόνη διαφορά ότι τώρα δεν απαιτούμε *ακριβώς* τρία φύλλα να είναι σπαθιά αλλά *τουλάχιστον* τρία.

Ας βρούμε μια διαδικασία κατασκευής (σύνθετη επιλογή). Αφού οπωσδήποτε θέλουμε τρία σπαθιά ας ξεκινήσουμε επιλέγοντάς τα. Έχουμε πάλι $\binom{13}{3}$ δυνατότητες γι' αυτή την επιλογή. Στο δεύτερο στάδιο μένει απλά να επιλέξουμε άλλα τρία φύλλα από τα εναπομέναντα 49, αφού τώρα δε μας πειράζει να έχουμε επιπλέον σπαθιά. Στο δεύτερο στάδιο λοιπόν έχουμε $\binom{49}{3}$ δυνατότητες. Εφ' όσον τα δύο στάδια επιλογής είναι ημιανεξάρτητα (προηγουμένως ήταν ανεξάρτητα) μπορούμε και πάλι να πολλαπλασιάσουμε και παίρνουμε τελικό αποτέλεσμα

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{49}{3}.$$

ΛΑΘΟΣ!

Και ο λόγος είναι ότι μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα ακόμη κι αν η σύνθετη επιλογή μας αλλάξει. Για παράδειγμα, η κατασκευή μας μπορεί στο πρώτο στάδιο να μας δώσει 1 $\clubsuit$, 2 $\clubsuit$, 3 $\clubsuit$ και στο δεύτερο 4 $\clubsuit$, 1 $\heartsuit$ και 2 $\heartsuit$. Μπορεί επίσης να μας δώσει στο πρώτο στάδιο 1 $\clubsuit$, 2 $\clubsuit$, 4 $\clubsuit$ και στο δεύτερο να μας δώσει 3 $\clubsuit$, 1 $\heartsuit$ και 2 $\heartsuit$. Η τελική εξάδα είναι στις δύο αυτές περιπτώσεις η ίδια. Άρα ο αριθμός $\binom{13}{3} \cdot \binom{49}{3}$ που υπολογίσαμε προηγουμένως είναι αυστηρά (και μάλλον κατά πολύ) μεγαλύτερος της πραγματικότητας.

Πώς μπορούμε να διορθώσουμε τη μέθοδό μας; Μια απλή απάντηση είναι ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε τις δυνατές εξάδες σε τέσσερεις κατηγορίες: αυτές που έχουν ακριβώς 3, ακριβώς 4, ακριβώς 5 ή ακριβώς 6 σπαθιά. Μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε τις εξάδες κάθε κατηγορίας, ουσιαστικά με τη μέθοδο του Παραδείγματος 3.3.4, και στο τέλος να προσθέσουμε αυτά τα τέσσερα νούμερα. Έτσι το αποτέλεσμα είναι

$$\binom{13}{3}\binom{39}{3} + \binom{13}{4}\binom{39}{2} + \binom{13}{5}39 + \binom{13}{6}$$

όπου ο κάθε προσθετέος αντιπροσωπεύει και μια κατηγορία. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε αυτή την αντιστοιχία.)

Παράδειγμα 3.3.6. Αν αναπτύξουμε (γράψουμε δηλ. στη μορφή $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$) το πολυώνυμο $(1+x)^{10}$ ποιος είναι ο συντελεστής του x^4;

Ας σκεφτούμε λίγο πώς υπολογίζει κανείς το ανάπτυγμα ενός γινομένου, για απλότητα του $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ που έχει δύο μόνο παράγοντες και όχι 10 όπως αυτό που ζητάμε. Το βρίσκουμε παίρνοντας κάθε προσθετέο του πρώτου αθροίσματος πολλαπλασιασμένο με

[4] Δηλ. ένα προς ένα και επί.

κάθε προσθετέο του δεύτερου, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα (αυτό λέγεται επιμεριστική ιδιότητα). Αν λοιπόν ρωτήσουμε ποιός είναι ο συντελεστής του ab στο ανάπτυγμα, είναι σα να ρωτάμε με πόσους τρόπους μπορεί να εμφανιστεί το γινόμενο ab κάνοντας το ανάπτυγμα όπως παραπάνω.

Λόγω αντιμεταθατικότητας του πολλαπλασιασμού αυτό μπορεί να εμφανιστεί είτε ως ab είτε ως ba. Το ab εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, όταν συνδυάζουμε στο ανάπτυγμα το a από την πρώτη παρένθεση με το b από τη δεύτερη. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος. Ομοίως μία φορά εμφανίζεται και το ba όταν συνδυάζεται το b από την πρώτη παρένθεση με το a από τη δεύτερη. Άρα ο συντελεστής του ab στο ανάπτυγμα είναι $1 + 1 = 2$. Ομοίως τα a^2 και b^2 μπορούν το καθένα να προκύψουν με ένα μόνο τρόπο. Για το a^2, π.χ., πρέπει να επιλεγεί το a και από την πρώτη και από τη δεύτερη παρένθεση, ομοίως και για το b^2. Επιβεβαιώνεται έτσι ο γνωστός μας τύπος $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Αν ρωτήσουμε για το συντελεστή του a^2b στο ανάπτυγμα του $(a+b)^3$ είναι σα να ρωτάμε με πόσους τρόπους μπορούμε να συνδυάσουμε ένα b με δύο a από τις τρείς παρενθέσεις $(a+b)$ που υπάρχουν στο γινόμενο. Αυτό μπορεί να γίνει με ακριβώς τρείς τρόπους μια και αρκεί να πούμε από ποια παρένθεση επιλέγουμε να πάρουμε το b. Αυτό προσδιορίζει ότι από τις άλλες δύο παίρνουμε από ένα a.

Επανερχόμαστε τώρα στο αρχικό μας ερώτημα και ρωτάμε για το συντελεστή του x^4 στο ανάπτυγμα του $(1 + x)^{10}$. Στο ανάπτυγμα αυτό οι προσθετέοι προκύπτουν με επιλογή, ο καθένας, ενός 1 ή ενός x από κάθε μία από τις 10 παρενθέσεις. Το x^4 λοιπόν μπορεί να προκύψει με τόσους τρόπους όσοι είναι οι τρόποι να επιλέξουμε τις 4 παρενθέσεις, από τις οποίες θα πάρουμε τα x. Άρα το αποτέλεσμα είναι

$$\binom{10}{4}.$$

▷ **Πρόβλημα 3.3.10.** Από μια ομάδα 10 ατόμων, με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί ένα τριμελές προεδρείο χωρίς διακριτούς ρόλους; Ένα 5μελές προεδρείο με πρόεδρο, αντιπρόεδρο και 3 μέλη; (*Υπόδειξη:* Για το δεύτερο ερώτημα, επιλέξτε το προεδρείο επιλέγοντας πρώτα τον πρόεδρο, μετά τον αντιπρόεδρο και, τέλος, τα τρία μέλη μαζί.)

▷ **Πρόβλημα 3.3.11.** Μέ πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε, από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα (που χωρίζονται σε 4 χρώματα και 13 είδη), πέντε φύλλα από τα οποία 2 κόκκινα ($\diamondsuit$ ή $\heartsuit$) και 3 σπαθιά; Δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των φύλλων.

▷ **Πρόβλημα 3.3.12.** Αν n άρτιο για ποιο $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ μεγιστοποιείται η ποσότητα $\binom{n}{k}$; Τι γίνεται αν n περιττός;

▷ **Πρόβλημα 3.3.13.** Δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

για κάθε $n \geq 0$.

Υπόδειξη: Ερμηνεύστε την ποσότητα 2^n του δεξιού μέλους ως το πλήθος των υποσυνόλων του $[n]$ και προσπαθείστε να ερμηνεύσετε ομοίως και το άθροισμα στο αριστερό μέλος.

▷ **Πρόβλημα 3.3.14.** Δείξτε την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

για κάθε $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$.

▷ **Πρόβλημα 3.3.15.** Αν r, s, k είναι φυσικοί αριθμοί με $r \geq s$ δείξτε ότι ο αριθμός $s!$ είναι διαιρέτης του

$$(k+1)(k+2)\cdots(k+r).$$

▷ **Πρόβλημα 3.3.16.** Σε ένα κουτί υπάρχουν 10 κόκκινοι και 8 πράσινοι βώλοι. Βάζουμε το χέρι μας και πιάνουμε 4 βώλους. Ποια η πιθανότητα να είναι όλοι κόκκινοι;

▷ **Πρόβλημα 3.3.17.** Βγάζουμε 4 χαρτιά από μια συνηθισμένη τράπουλα. Ποια η πιθανότητα να είναι δύο μαύρα και δύο κόκκινα;

3.4 Το Διωνυμικό Θεώρημα

Το Διωνυμικό Θεώρημα (Θεώρημα 3.4.1) είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο για υπολογισμούς που αναφέρονται σε ποσότητες με διωνυμικούς συντελεστές. Είναι επίσης η πρώτη σύνδεση των συνδυαστικών ποσοτήτων που συναντάμε με αλγεβρικές μεθόδους. Θα μας είναι πολύτιμο αργότερα σε υπολογισμούς διαφόρων πιθανοθεωρητικών ποσοτήτων, για παράδειγμα μέσων τιμών.

Θεώρημα 3.4.1. *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, και ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{3.11}$$

Απόδειξη. Το αριστερό μέλος είναι ένα γινόμενο n παραγόντων ίσων με $(a+b)$. Όταν κάνουμε όλες τις πράξεις, όταν δηλ. εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα, αυτό που κάνουμε είναι ότι σχηματίζουμε όλα τα γινόμενα που μπορούμε να φτιάξουμε διαλέγοντας ένα προσθετέο από κάθε παράγοντα (δείτε και Παράδειγμα 3.3.6) και τα προσθέτουμε, μαζεύοντας μαζί ίδια μονώνυμα.

Είναι φανερό ότι, εφόσον οι προσθετέοι από κάθε παράδειγμα είναι a ή b και το πλήθος των παραγόντων είναι n, όλα τα μονώνυμα που θα εμφανιστούν είναι της μορφής

$$a^k b^{n-k},\ (0 \leq k \leq n).$$

Το μονώνυμο αυτό εμφανίζεται οποτεδήποτε έχουμε επιλέξει το a από ακριβώς k από τους παράγοντες. Αλλά αυτό συμβαίνει με ακριβώς τόσους τρόπους όσοι είναι οι τρόποι να επιλεγούν

k παράγοντες από τους n, δηλ. $\binom{n}{k}$, και αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος. ■

▷ **Πρόβλημα 3.4.1.** Ποιο είναι το ανάπτυγμα του $(1+x)^5$ σε δυνάμεις του x;

Το Διωνυμικό Θεώρημα (Θεώρημα 3.4.1) έχει πολλές εφαρμογές σε υπολογισμούς αθροισμάτων.

Παράδειγμα 3.4.1. Θέτοντας $a=b=1$ στην (3.11) παίρνουμε την ταυτότητα (δείτε και το Πρόβλημα 3.3.13)

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Παράδειγμα 3.4.2. Θέτοντας $a=1, b=-1$ στην (3.11) και χωρίζοντας τους αρνητικούς από τους θετικούς όρους παίρνουμε ότι για κάθε n το άθροισμα των διωνυμικών συντελεστών $\binom{n}{k}$ για k άρτιο είναι ίσο με το άθροισμα για k περιττό

$$\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ περιττό}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ άρτιο}}} \binom{n}{k}. \tag{3.12}$$

Αυτό είναι φανερό όταν το n είναι περιττό, μια και τότε οι διωνυμικοί συντελεστές με άρτιο k βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους συντελεστές με περιττό k (αφού ισχύει πάντα $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$–δείτε και το Πρόβλημα 3.3.14), αλλά δεν είναι εξ ίσου εύκολο για άρτιο k.

Παράδειγμα 3.4.3. Θέτουμε $a=x, b=1$ στην (3.11) και παραγωγίζουμε τη σχέση που προκύπτει ως προς x. Παίρνουμε έτσι

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Θέτοντας τώρα $x=1$ παίρνουμε τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

▷ **Πρόβλημα 3.4.2.** Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$.

▷ **Πρόβλημα 3.4.3.** Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

▷ **Πρόβλημα 3.4.4.** Θέτοντας $a=x, b=1/x$ και $2n$ στη θέση του n στην (3.11) δείξτε την ταυτότητα

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

εξετάζοντας το συντελεστή του σταθερού όρου.

▷ **Πρόβλημα 3.4.5.** Ποιος ο συντελεστής του x^3y^5 στο ανάπτυγμα του $(1+x+y)^{12}$; Εκφράστε την απάντησή σας με πολυωνυμικούς συντελεστές. (Δείτε την §3.5.)

3.5 Πολυωνυμικοί συντελεστές

Έχουμε δεί ότι αν θέλουμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από n, χωρίς επανάθεση, το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτό είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Τι γίνεται αν θέλουμε να επιλέξουμε, πάλι χωρίς επανάθεση, μια ομάδα στοιχείων του $\{1,\ldots,n\}$ μεγέθους k_1, μια ομάδα μεγέθους k_2, κλπ, και τέλος μια ομάδα μεγέθους k_r, όπου για $j=1,\ldots,r$ έχουμε $0 \le k_j \le n$ και επιπλέον ισχύει $k_1+\cdots+k_r=n$; Με πόσους τρόπους δηλ. μπορούμε να διαμερίσουμε το $\{1,\ldots,n\}$ σε ένα σύνολο μεγέθους k_1, σε ένα σύνολο μεγέθους k_2 και τέλος σε ένα σύνολο μεγέθους k_r;

Θεώρημα 3.5.1. *Το πλήθος τρόπων να διαμερίσουμε ένα σύνολο με n στοιχεία σε r σύνολα με μεγέθη $k_1,\ldots,k_r$, με $k_1+\cdots+k_r=n$, όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα σύνολα αυτά, είναι*

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}. \tag{3.13}$$

Απόδειξη. Το πρώτο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με

$$\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

τρόπους. Μετά από την επιλογή του πρώτου συνόλου απομένουν $n-k_1$ στοιχεία αχρησιμοποίητα, άρα το δεύτερο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με

$$\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$

τρόπους. Συνεχίζονας κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ότι η επιλογή του προτελευταίου συνόλου (με k_{r-1} στοιχεία) μπορεί να γίνει με

$$\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-2}}{k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}$$

τρόπους. Επίσης, αφού έχουν επιλεγεί τα $r-1$ πρώτα σύνολα δεν υπάρχει πλέον καμιά επιλογή να γίνει αφου τα υπόλοιπα k_r στοιχεία που απομένουν ακόμη αχρησιμοποίητα αναγκαστικά πάνε στο τελευταίο σύνολο που πρέπει να επιλέξουμε.

Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις δυνατότητες επιλογών μας για τα πρώτα $r-1$ σύνολα, και κάνοντας τις απλοποιήσεις παίρνουμε τον τύπο (3.13).

■

Το σύμβολο

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$$

ονομάζεται *πολυωνυμικός συντελεστής* (κατ' αναλογία με τα $\binom{n}{k}$ που ονομάζονται *διωνυμικοί συντελεστές*). Παρατηρείστε επίσης ότι

$$\binom{n}{k,n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Παρατήρηση 3.5.1. Πρέπει να τονίσουμε ότι ο πολυωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ μετράει το πλήθος των τρόπων να διαμερίσουμε τα στοιχεία του $[n]$ σε σύνολα μεγέθους $k_1, \ldots, k_r$. Τα περιεχόμενα των συνόλων, όπως πάντα, δεν είναι διατεταγμένα, όμως τα σύνολα τα ίδια είναι.

Ένας μάλλον πιο ξεκάθαρος τρόπος είναι να πούμε ότι έχουμε r αριθμημένα κουτιά, χωρίς εσωτερική δομή, μεγέθους $k_1, \ldots, k_r$ και μοιράζουμε τα στοιχεία του $[n]$ σε αυτά. Ο συντελεστής $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ μετράει με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό.

Παρατήρηση 3.5.2. Ο πολυωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ δεν αλλάζει αν τα $k_1, \ldots, k_r$ αντικατασταθούν από μια μετάθεσή τους (αν αλλάξει δηλ. απλώς η σειρά τους).

▷ **Πρόβλημα 3.5.1.** Έχουμε 10 αριθμημένες μπάλες και τρία κουτιά με χωρητικότητες 5, 3 και 2 μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις μπάλες στα κουτιά; (Δεν υπάρχει εσωτερική σειρά στα κουτιά.)

▷ **Πρόβλημα 3.5.2.** Βρείτε το συντελεστή του $x^2y^3z^5$ στο ανάπτυγμα του $(x+y+z)^{10}$.

3.6 Διαμερίσεις και συνδυασμοί με επανάθεση

Ας συμβολίσουμε με $P(n,r)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε τον φυσικό αριθμό n ως άθροισμα r μη αρνητικών ακεραίων $x_1, \ldots, x_r$:

$$n = x_1 + \cdots + x_r.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 3$ και $r = 2$ οι τρόποι αυτοί είναι οι

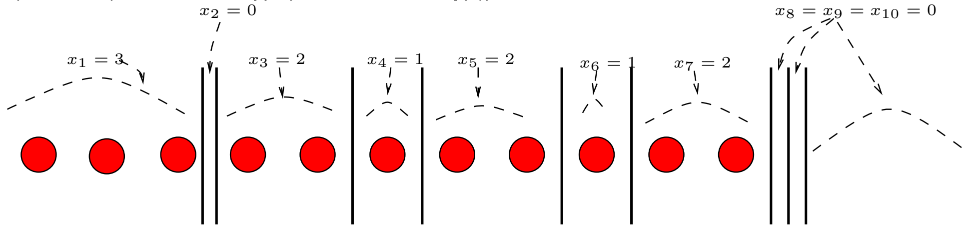
$$3 = 3+0 = 2+1 = 1+2 = 0+3 \tag{3.14}$$

και άρα $P(3,2) = 4$. Η σειρά των προσθετέων $x_1, \ldots, x_r$ έχει σημασία. Την ποσότητα $P(n,r)$ την ονομάζουμε *πλήθος διαμερίσεων του n σε r κομμάτια*. Παρατηρείστε ότι δεν απαιτούμε το r να είναι $\le n$ αφού το μέγεθος των κομματιών μπορεί να είναι και 0.

Θεώρημα 3.6.1. *Αν $n \ge 0$ και $r \ge 0$ τότε ισχύει*

$$P(n,r) = \binom{n+r-1}{n} = \binom{n+r-1}{r-1}. \tag{3.15}$$

Απόδειξη. Παριστάνουμε τον αριθμό n σα n μπάλες στη σειρά και την τυχούσα διαμέριση του n, δηλ. τον τυχόντα τρόπο να γράψουμε $n = x_1 + \cdots + x_r$, σαν ένα χωρισμό αυτής της σειράς από μπάλες με $r-1$ τοιχώματα (δείτε Σχήμα 5).



Σχήμα 5. Χωρίζοντας $n = 11$ μπάλες σε $r = 10$ ομάδες με 9 ενδιάμεσα τοιχώματα

Η τιμή του x_1 βρίσκεται αν μετρήσουμε πόσες μπάλες υπάρχουν από το $-\infty$ έως το πρώτο τοίχωμα, το x_2 αν μετρήσουμε τις μπάλες από το πρώτο έως το δεύτερο τοίχωμα, κλπ. Τέλος το x_r βρίσκεται αν μετρήσουμε τις μπάλες από το τελευταίο (υπ' αριθμόν $r-1$) τοίχωμα έως το $+\infty$.

Άρα, για να μετρήσουμε το πλήθος των διαμερίσεων $P(n,r)$ αρκεί να μετρήσουμε πόσα διαφορετικά σχήματα σαν και αυτό του Σχήματος 5 υπάρχουν, αφού είναι φανερό ότι σε κάθε τέτοιο σχήμα αντιστοιχεί και μια διαφορετική διαμέριση, και αντίστροφα.

Με ποια διαδικασία μπορούμε λοιπόν να κατασκευάσουμε μονοσήμαντα ένα τέτοιο σχήμα; το κάνουμε ως εξής: βάζουμε πρώτα στη σειρά $n+r-1$ αντικείμενα και κατόπιν ονομάζουμε τα n από αυτά μπάλες και τα υπόλοιπα $r-1$ τοιχώματα. Αυτό μπορεί να γίνει ακριβώς με $\binom{n+r-1}{n}$ τρόπους. Η δεύτερη ισότητα μέσα στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.6.1 είναι απλή συνέπεια της ταυτότητας $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ (δείτε το Πρόβλημα 3.3.14).

■

Για παράδειγμα σύμφωνα με το Θεώρημα 3.6.1 ισχύει $P(3,2) = \binom{3+2-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$ το οποίο συμφωνεί με την (3.14).

▷ **Πρόβλημα 3.6.1.** Βρείτε όλες τις διαμερίσεις του 4 σε 3 κομμάτια.

Πέρα από τη σημασία που έχει το ίδιο το πρόβλημα του να μετρήσουμε το πλήθος των διαμερίσεων του n σε r κομμάτια, το ερώτημα αποκτά μεγαλύτερη σημασία γιατί είναι ένας ισοδύναμος τρόπος του να ρωτήσουμε το εξής:

> Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k από n στοιχεία όταν κάθε στοιχείο από τα n μπορεί να επιλεγεί ένα απεριόριστο αριθμό από φορές, και όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των επιλεγέντων στοιχείων;

Ένας ισοδύναμος τρόπος να θέσουμε το ίδιο ερώτημα είναι ο ακόλουθος. Έχουμε ένα σάκο που έχει μέσα n μπάλες. Οι μπάλες φέρουν η κάθε μια τον αριθμό της. Επαναλαμβάνουμε k φορές την πράξη:

> Παίρνουμε μια μπάλα από το σάκο και γράφουμε σ' ένα χαρτί τον αριθμό της. Έπειτα επανατοποθετούμε τη μπάλα στο σάκο.

Στο τέλος παρατηρούμε τους k αριθμούς που γράψαμε, χωρίς να μας εναδιαφέρει η σειρά τους. Πόσα είναι τα δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα; Από αυτή την εναλλακτική περιγραφή προκύπτει και το όνομα *συνδυασμοί n στοιχείων ανά k με επανάθεση*. Το πλήθος αυτών των συνδυασμών συμβολίζεται με $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

Παράδειγμα 3.6.1. Οι συνδυασμοί του συνόλου $\{A,B\}$ ανά 3 με επανάθεση είναι οι

$$AAA, AAB, ABB, BBB.$$

Για παράδειγμα, ο συνδυασμός ABB θεωρείται ίδιος με τον BAB μια και τα στοιχεία διαφέρουν μόνο στη σειρά εμφάνισης.

▷ **Πρόβλημα 3.6.2.** Δείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n$. Επίσης ότι, για $n \geq 2$, ισχύει $\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = n + \binom{n}{2}$.

Στο τέλος αυτής της διαδικασίας επιλογής k στοιχείων με επανάθεση έχουμε στα χέρια μας k αριθμούς, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικούς μεταξύ τους, κάθε ένας από τους οποίους ανήκει στο σύνολο $\{1,\ldots,n\}$. Έστω x_i, $i=1,\ldots,n$, το πλήθος αυτών των αριθμών που είναι ίσοι με i. Επειδή δε μας ενδιαφέρει η σειρά που εμφανίζεται κάθε ένα από τα νούμερα που επιλέγουμε, αλλά μόνο το πόσες φορές εμφανίζεται, γίνεται φανερό ότι

$$x_1 + \cdots + x_n = k \tag{3.16}$$

και ότι κάθε διαφορετικό αποτέλεσμα της επιλογής με επανάθεση αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική n-άδα $x_1, \ldots, x_n$ που ικανοποιεί την (3.16). Έχουμε έτσι αποδείξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.6.2. *Τα δυνατά αποτελέσματα επιλογής k αντικειμένων από n με επανάθεση είναι ίσα το πλήθος με τις δυνατές διαμερίσεις του k σε n κομμάτια. Έχουμε δηλαδή*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}.$$

▷ **Πρόβλημα 3.6.3.** Αν επιλέξουμε k αντικείμενα από n με επανάθεση και δεν αγνοήσουμε τη σειρά των επιλογών (π.χ., αν επιλέγουμε 3 αντικείμενα από τα Α, Β με επανάθεση, τα αποτελέσματα ΑΑΒ και ΑΒΑ θεωρούνται τώρα διαφορετικά), πόσες διαφορετικές επιλογές υπάρχουν;

Υπόδειξη: Αυτό το ερώτημα είναι σημαντικά ευκολότερο από το Θεώρημα 3.6.2.

Παράδειγμα 3.6.2. (Αλυσίδες DNA κατά Gamow) Μια αλυσίδα DNA είναι μια πεπερασμένη σειρά από χημικές βάσεις. Οι βάσεις αυτές είναι γνωστές με τα σύμβολα A, C, G και T. Ένα αμινοξύ είναι μια αλυσίδα DNA και είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακριβώς 20 αμινοξέα. Αν υποθέσουμε ότι όλα τα αμινοξέα είναι αλυσίδες με το ίδιο μήκος, τότε εύκολα βλέπουμε ότι το μήκος αυτό δε μπορεί να είναι 1 ή 2. Πράγματι υπάρχουν ακριβώς 4 αλυσίδες μήκους 1 (οι A, C, G και T) και $4^2 = 16$ αλυσίδες μήκους 2 (αυτό γιατί μια τέτοια αλυσίδα ορίζεται από δύο επιλογές με 4 δυνατότητες για την κάθε μία). Από την άλλη μεριά οι αλυσίδες DNA μήκους 3 είναι το πλήθος $4^3 = 64$, είναι δηλ. περισσότερες από 20.

Το 1954 ο Gamow πρότεινε ότι δύο αλυσίδες DNA κωδικοποιούν το ίδιο αμινοξύ αν και μόνο αν περιέχουν τις ίδιες βάσεις ανεξαρτήτως σειράς. Οι αλυσίδες δηλ. ACC και CAC, αν και διαφορετικές, κωδικοποιούν το ίδιο αμινοξύ. Αν η υπόθεση του Gamow είναι σωστή πόσα διαφορετικά αμινοξέα κωδικοποιούνται με αλυσίδες DNA μήκους 3; Με λίγη σκέψη βλέπουμε ότι το πλήθος των διαφορετικών αμινοξέων είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των τεσσάρων γραμμάτων A, C, G και T ανά τρία, με επανάθεση. Ο αριθμός αυτός είναι δηλ.

$$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} = 20,$$

συμφωνεί δηλ. η υπόθεση του Gamow με το πειραματικά διαπιστωμένο γεγονός ότι υπάρχουν ακριβώς 20 αμινοξέα. Όμως, για άλλους λόγους, η υπόθεση του Gamow έχει αποδειχθεί ότι δεν ισχύει.

▷ **Πρόβλημα 3.6.4.** Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n όμοιες μπάλες σε k κουτιά που είναι αριθμημένα με τους αριθμούς 1 έως k;

Παράδειγμα 3.6.3. (Η κατανομή Bose-Einstein στη στατιστική μηχανική) Στη στατιστική μηχανική εξετάζουμε ένα σύστημα από t σωμάτια κάθε ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε p διαφορετικές καταστάσεις, π.χ. σε p διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα. Μια *κατάσταση* του συστήματος είναι περιγράψουμε σε ποια κατάσταση είναι το κάθε σωμάτιο. Όταν τα σωμάτια είναι ίδια μεταξύ τους υποθέτουμε συνήθως ότι δεν έχει σημασία ποια από τα t σωμάτια είναι στο κάθε ενεργειακό επίπεδο αλλά μόνο πόσα. Αν κάνουμε την υπόθεση ότι όλες αυτές οι καταστάσεις είναι εξ ίσου πιθανές λέμε ότι το σύστημά μας ακολουθεί την κατανομή Bose-Einstein.

Στο μοντέλο Bose-Einstein πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος υπάρχουν; Αν θέσουμε x_i, $i = 1, \ldots, p$, να είναι το πλήθος των σωματίων στο ενεργειακό επίπεδο i, τότε πρέπει απλά να διαλέξουμε τους μη αρνητικούς ακεραίους x_i ώστε να έχουν άθροισμα t. Δηλαδή το πλήθος καταστάσεων του συστήματος είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του t σε p κομμάτια, δηλ.

$$\binom{t+p-1}{t}.$$

Κάθε μια από αυτές τις καταστάσεις έχει συνεπώς πιθανότητα εμφάνισης ίση με τον αντίστροφο αυτού του αριθμού.

▷ **Πρόβλημα 3.6.5.** Στην κατανομή Fermi-Dirac υποθέτουμε ότι τα t σωμάτια είναι όλα όμοια και ότι δε μπορούν δύο σωμάτια να βρίσκονται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο (υπάρχουν p ενεργειακά επίπεδα). Αν $t \leq p$ πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος σωματίων υπάρχουν;

Κεφάλαιο 4

Τυχαίες μεταβλητές και μέση τιμή

4.1 Τυχαίες μεταβλητές και η κατανομή τους

Παράδειγμα 4.1.1. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο φορές ένα συνηθισμένο ζάρι, και συμβολίζουμε με X_1 το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης ($X_1 \in \{1, \ldots, 6\}$) και X_2 το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης. Ορίζουμε ακόμη $X = X_1 + X_2$ να είναι το άθροισμα των δύο ρίψεων. Οι ποσότητες X, X_1, X_2 εν γένει αλλάζουν κάθε φορά που πραγματοποιείται το πείραμα. Τέτοιες ποσότητες, των οποίων η τιμή εξαρτάται από την έκβαση κάποιου πειράματος, τις ονομάζουμε τυχαίες μεταβλητές.

Ορισμός 4.1.1. Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος ονομάζουμε *τυχαία μεταβλητή* (ΤΜ) πάνω στο Ω κάθε συνάρτηση πάνω στο Ω. Αν $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ή $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ θα ονομάζουμε ειδικότερα την ΤΜ X *αριθμητική ΤΜ* ενώ αν $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ή $X : \Omega \to \mathbb{Z}^d$ θα ονομάζουμε την X *πολυδιάστατη* ή *διανυσματική* ΤΜ.

Αν $X : \Omega \to T$ και το σύνολο τιμών T είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο[1] τότε η ΤΜ X ονομάζεται *διακριτή*.

Παρατήρηση 4.1.1. Εύκολα βλέπει κανείς [2] ότι αν $X_1, \ldots, X_n$ είναι διακριτές ΤΜ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τότε η ΤΜ $Z = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ είναι επίσης διακριτή. Έτσι μπορούμε ελεύθερα να μιλάμε για πεπερασμένους γραμμικού συνδυασμούς διακριτών ΤΜ γνωρίζοντας εκ των προτέρων ότι κι αυτοί είναι διακριτές ΤΜ.

Κάτι τέτοιο δεν ισχύει για άπειρους γραμμικούς συνδυασμούς από ΤΜ. Για παράδειγμα, αν X_j, $j = 1, 2, \ldots$, είναι ΤΜ τέτοιες ώστε η X_j έχει σύνολο τιμών το $\{0, 2^{-j}\}$, τότε η ΤΜ $Z = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ ορίζεται χωρίς πρόβλημα αφού η σειρά πάντα συγκλίνει, ότι τιμές και να έχουν τα X_j, αλλά μπορεί εν δυνάμει (για παράδειγμα όταν όλες οι X_j είναι ανεξάρτητες – δείτε παρακάτω τον Ορισμό 4.1.4 για τον ορισμό της ανεξαρτησίας ΤΜ) να πάρει οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό του διαστήματος $(0, 1)$ ως τιμή. Πράγματι, αν $x \in (0, 1)$ τότε, γράφοντας τον x στο δυαδικό του ανάπτυγμα $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j 2^{-j}$, με $x_j \in \{0, 1\}$, βλέπουμε ότι είναι δυνατό να έχουμε $Z = x$ φτάνει να πάρουν οι X_j τις κατάλληλες τιμές.

[1] Αριθμήσιμο ονομάζεται ένα σύνολο A αν υπάρχει επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to A$ από το σύνολο των φυσικών αριθμών επί του A. Με άλλα λόγια, το A είναι αριθμήσιμο αν μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $a_1, a_2, \ldots$ που περιέχει όλα τα στοιχεία του.

Είναι προφανές ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι αριθμήσιμο. Επίσης αριθμήσιμα σύνολα είναι οι φυσικοί αριθμοί $\mathbb{N}$, οι ακέραιοι $\mathbb{Z}$, οι ρητοί $\mathbb{Q}$, καρτεσιανά γινόμενα $A \times B$, όπου τα A και B είναι αριθμήσιμα, και άπειρες ενώσεις του τύπου $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, όπου τα A_j είναι αριθμήσιμα.

Σύνολα που δεν είναι αριθμήσιμα είναι π.χ. το $\mathbb{R}$ ή ένα διάστημα (a, b), $a < b$. Αυτό το τελευταίο δεν είναι προφανές και θέλει απόδειξη, την οποία δε θα δώσουμε εδώ.

[2] Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι καρτεσιανά γινόμενα αριθμησίμων συνόλων με πεπερασμένους το πλήθος παράγοντες είναι επίσης αριθμήσιμα

Παράδειγμα 4.1.2. Στο Παράδειγμα 4.1.1 οι ΤΜ που ορίσαμε είναι όλες αριθμητικές και διακριτές. Η ΤΜ $Z = (X_1, X_2)$ έχει σύνολο τιμών το $\{1, \ldots, 6\}^2$ και είναι διανυσματική ΤΜ.

Παράδειγμα 4.1.3. Ας υποθέσουμε ότι παρατηρούμε μια καταιγίδα και καταγράφουμε τη χρονική στιγμή που θα πέσει η πρώτη αστραπή. Η ΤΜ αυτή (χρόνος) είναι μια αριθμητική αλλά όχι διακριτή ΤΜ αφού το σύνολο τιμών είναι το διάστημα $[0, \infty)$.

Παράδειγμα 4.1.4. Ρίχνουμε ένα νόμισμα (που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0, 1)$) άπειρες φορές και έστω X η πρώτη φορά που έρχεται κορώνα. Αυτή η ΤΜ έχει το $\{1, 2, \ldots\}$ ως σύνολο τιμών και είναι άρα διακριτή, αριθμητική ΤΜ.

Παρατήρηση 4.1.2. Αν έχουμε μια ΤΜ που παίρνει τιμές σε ένα μη αριθμητικό σύνολο, π.χ. μια ΤΜ που παίρνει τιμές Κ ή Γ (το αποτέλεσμα της ρίψης ενός νομίσματος), θα κωδικοποιούμε συνήθως τις τιμές αυτές με φυσικούς αριθμούς, για παράδειγμα 1 αντί Κ και 0 αντί Γ, ώστε να θεωρούμε ότι οι ΤΜ αυτές παίρνουν αριθμητικές τιμές.

Σε μερικές περιπτώσεις όμως αυτό είναι αρκετά αφύσικο. Για παράδειγμα αν έχουμε μια ΤΜ που παίρνει ρητές τιμές, μπορούμε φυσικά να κάνουμε αυτή την κωδικοποίηση που σε κάθε ρητό αντιστοιχεί ένα ακέραιο, όμως αυτή η διαδικασία στερείται φυσικότητας και, κατά κανόνα, δεν πρόκειται να προσφέρει τίποτα στην ανάλυση.

Πάνω στο δειγματικό χώρο Ω υπάρχει ορισμένη η κατανομή πιθανότητας (δείτε Ορισμό 2.2.2), μια συνάρτηση δηλ. $p : \Omega \to [0, 1]$, τ.ώ. η τιμή $p(\omega)$ μας δηλώνει πόσο πιθανό είναι το αποτέλεσμα ω όταν εκτελεσθεί το πείραμα. Αν τώρα $X : \Omega \to T$ (T ένα οποιοδήποτε σύνολο τιμών) είναι μια ΤΜ X με τιμές στο T, μπορούμε τότε να θεωρήσουμε ένα νέο πείραμα με αποτέλεσμα $X(\omega)$. Εκτελούμε δηλ. το προηγούμενο πείραμα (αυτό με δειγματικό χώρο Ω), μας δίνει αυτό κάποιο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$, και αναφέρουμε ως αποτέλεσμα του νέου μας πειράματος το $X(\omega) \in T$. Το νέο αυτό πείραμα έχει το T ως δειγματικό χώρο και μια νέα κατανομή πιθανότητας $p : T \to [0, 1]$ που ορίζεται από

$$p(t) = \mathbb{P}[\omega : X(\omega) = t].$$

Οι πιθανοθεωρητικές ερωτήσεις λοιπόν που αφορούν την ΤΜ X λοιπόν μπορούν να μελετηθούν πάνω σε αυτόν τον νεό δειγματικό χώρο T, σύνολο τιμών της X. Έχει επικρατήσει όμως συχνά να μην αναφερόμαστε στο νέο αυτό δειγματικό χώρο και να μελετάμε τέτοια ερωτήματα πάνω στον παλιό δειγματικό χώρο Ω. Ο κυριότερος λόγος γι' αυτό είναι ότι πολύ συχνά μελετάμε παραπάνω από μια ΤΜ και μάλιστα σε συνδυασμό, οπότε αν περιοριστεί κανείς στο δειγματικό χώρο T για μια από τις ΤΜ αυτές, πράξη που πάντα συνεπάγεται "χάσιμο πληροφορίας", δε μπορεί να μελετήσει τις άλλες.

Ορισμός 4.1.2. Αν X είναι μια διακριτή ΤΜ με σύνολο τιμών T τότε ονομάζουμε *πυκνότητα πιθανότητας* της X τη συνάρτηση $f_X : T \to [0, 1]$ που δίδεται από τον τύπο

$$f_X(t) = \mathbb{P}[X = t].$$

Για μια οποιαδήποτε (διακριτή ή όχι) ΤΜ X με τιμές στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε τη *συνάρτηση κατανομής* της X ως τη συνάρτηση $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ που δίδεται από τον τύπο

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \le x].$$

Παρατήρηση 4.1.3. Η συνάρτηση κατανομής F_X είναι μια αύξουσα συνάρτηση (όχι κατ' ανάγκη γνήσια αύξουσα) τέτοια ώστε $\lim_{k \to -\infty} F_X(k) = 0$ και $\lim_{k \to \infty} F_X(k) = 1$.

Είναι επίσης προφανές ότι αν $X \in \mathbb{Z}$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$F_X(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} f_X(k). \tag{4.1}$$

Τέλος, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_X(n) = 1$.

Παρατήρηση 4.1.4. Η συνάρτηση κατανομής της X ορίζεται για κάθε πραγματικό x ακόμα κι αν είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι η X παίρνει μόνο ακέραιες τιμές. Σε αυτή βέβαια την περίπτωση ισχύει $F_X(x) = F_X(\lfloor x \rfloor)$ οπότε αρκεί να μελετήσει κανείς την F_X για ακέραιες μόνο τιμές της μεταβλητής.

Ορισμός 4.1.3. Δύο ΤΜ X και Y λέγονται ισόνομες αν έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής.

Παρατήρηση 4.1.5. Δύο ΤΜ X και Y είναι ίσες αν και μόνο αν $X(\omega) = Y(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Δηλ. για κάθε έκβαση του πειράματος οι X και Y έχουν την ίδια τιμή. Αυτή είναι πολύ ισχυρή έννοια. Αντίθετα, δύο ΤΜ είναι ισόνομες αν έχουν απλά (αν πρόκειται για διακριτές μεταβλητές) την ίδια πυκνότητα. Για παράδειγμα, αν κρατάμε δύο ίδια ζάρια στα χέρια μας και ονομάσουμε X το αποτέλεσμα του πρώτου και Y του δεύτερου, τότε οι X και Y είναι φυσικά ισόνομες αλλά δεν είναι ίσες αφού σε κάποια πειράματα θα εμφανίσουν διαφορετικές τιμές.

Παράδειγμα 4.1.5. Αν $X \in \{\mathrm{K}, \Gamma\}$ είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0,1)$ τότε η πυκνότητα πιθανότητας της X είναι η συνάρτηση $f_X : \{\mathrm{K}, \Gamma\} \to [0,1]$ που δίνεται από τις τιμές $f_X(\mathrm{K}) = p$, $f_X(\Gamma) = 1 - p$.

Παράδειγμα 4.1.6. Αν $X \in \mathbb{Z}$ είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού τότε

$$f_X(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/6 & n \in \{1, \ldots, 6\} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{array} \right. ,$$

και εύκολα βλέπουμε ότι $F_X(n)$ ισούται με 0 για $n \le 0$, $F_X(n) = 1$ για $n \ge 6$ και $F_X(n) = n/6$ για $n \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Παράδειγμα 4.1.7. Αν $X \in \mathbb{Z}$ είναι το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού και $Y = X^2$ τότε

$$f_Y(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1/6 & n \in \left\{1, 2^2, \ldots, 6^2\right\} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{array} \right. .$$

Επίσης $F_Y(n)$ ισούται με 0 για $n \le 0$, $F_Y(n) = 1$ για $n \ge 36$ και $F_Y(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor / 6$ για $n \in \{1, 2, \ldots, 36\}$.

Παράδειγμα 4.1.8. Αν A είναι ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο η ΤΜ $X(\omega) = \mathbf{1}(\omega \in A)$ ονομάζεται δείκτρια ΤΜ του ενδεχομένου A και παίρνει τιμή 1 αν ισχύει το A, 0 αλλιώς. Η πυκνότητα πιθανότητας της A παίρνει την τιμή $\mathbb{P}[A]$ στον αριθμό 1, $1 - \mathbb{P}[A]$ στον αριθμό 0, και 0 παντού αλλού.

▷ **Πρόβλημα 4.1.1.** Η συνάρτηση $\Omega \to \mathbb{R}$ που είναι ίση με c παντού ονομάζεται σταθερή ΤΜ με τιμή c. Ποια η πυκνότητα πιθανότητάς της και ποια η συνάρτηση κατανομής της;

Παράδειγμα 4.1.9. Λέμε ότι η ΤΜ X είναι *ομοιόμορφα κατανεμημένη* στο (πεπερασμένο) σύνολο T αν η ποσότητα $\mathbb{P}[X = t]$ δεν εξαρτάται από το $t \in T$. Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητα πιθανότητας είναι ίση με $1/|T|$ σε κάθε στοιχείο του T.

▷ **Πρόβλημα 4.1.2.** Αν X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[n]$ και $Y = 2^X$ περιγράψτε τις συναρτήσεις f_Y και F_Y.

▷ **Πρόβλημα 4.1.3.** Η ΤΜ $X \in \mathbb{Z}$ έχει πυκνότητα πιθανότητας f_X. Γράψτε από ένα άθροισμα τιμών της f_X που να δίνει την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

1. $\{X \le 0\}$
2. $\{X \text{άρτιο}\}$
3. $\{|X| \le 100\}$.

▷ **Πρόβλημα 4.1.4.** Αν $Y = -X + b$, b σταθερά, δώστε ένα τύπο για τις f_Y, F_Y, μέσω των f_X, F_X.

Παράδειγμα 4.1.10. Ένα νόμισμα φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0,1)$. Το ρίχνουμε άπειρες φορές και έστω X η ρίψη κατά την οποία εμφανίζεται η πρώτη κορώνα. Είναι φανερό ότι $X \in \{1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$, αφού μπορεί κατά τη διάρκει του πειράματος να μην εμφανιστεί ποτέ κορώνα.[3] Ας είναι $X_i = 1$ αν το νόμισμα φέρει κορώνα στην i-οστή ρίψη και $X_i = 0$ αν φέρει γράμματα. Έχουμε, για $n = 1, 2, \ldots$,

$$f_X(n) = \mathbb{P}[X = n] = \mathbb{P}[X_1 = 0, X_2 = 0, \ldots, X_{n-1} = 0, X_n = 1],$$

και, λόγω της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων $\{X_1 = 0\}, \ldots, \{X_{n-1} = 0\}, \{X_n = 1\}$,

$$f_X(n) = \mathbb{P}[X_1 = 0] \cdots \mathbb{P}[X_{n-1} = 0] \cdot \mathbb{P}[X_n = 1] = p(1-p)^{n-1}, \tag{4.2}$$

και για κάθε $n \le 0$ έχουμε προφανώς $f_X(n) = 0$. Τέλος επειδή $\{X = \infty\} \subseteq \{X_1 = 0, \ldots, X_k = 0\}$ για κάθε $k \ge 1$, και επειδή η πιθανότητα του δεύτερου ενδεχομένου ισούται με $(1-p)^k$, και άρα συγκλίνει στο 0 με το k, έπεται ότι

$$f_X(\infty) = \mathbb{P}[X = \infty] = 0.$$

Έχουμε λοιπόν προσδιορίσει πλήρως την πυκνότητα της X.

Η X δεν είναι αριθμητική ΤΜ αφού παίρνει και την τιμή ∞, οπότε δεν ορίζεται η συνάρτηση κατανομής. Όμως, μπορεί κανείς να μελετήσει την ΤΜ

$$Y = X \cdot \mathbf{1}(X \text{ πεπερασμένη}) = \begin{cases} X & \text{αν } X \text{ πεπερασμένη} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

[3] Το ότι χρησιμοποιήσαμε το σύμβολο ∞ για να δηλώσουμε ότι δεν έρχεται ποτέ κορώνα κατά κάποια εκτέλεση του πειράματος πρόκειται απλά για μια σύμβαση και δεν έχει τίποτε να κάνει με τις ιδιότητες μεγέθους που δίδει κανείς συνήθως στο σύμβολο ∞, π.χ. ότι είναι μεγαλύτερο από κάθε φυσικό αριθμό. Θα μπορούσαμε δηλ. εξ ίσου καλά να δίδαμε τιμή $X = 0$ ή $X =$"ΠΟΤΕ" στην περίπτωση αυτή.

που είναι σχεδόν σίγουρα ίση με την X^4 αφού $\mathbb{P}[X \neq Y] = \mathbb{P}[X = \infty] = 0$. Γι' αυτό εφαρμόζουμε τον τύπο (4.1). Για $n \leq 0$ έχουμε φυσικά $F_Y(n) = 0$. Για $n \geq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} F_Y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{n} f_X(k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} \\ &= p\sum_{l=0}^{n-1}(1-p)^l \quad (\text{αλλαγή μεταβλητής } l = k-1) \\ &= p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \quad (\text{πεπερασμένη γεωμ. σειρά}) \\ &= 1-(1-p)^n. \end{aligned}$$

Η πυκνότητα (4.2) ονομάζεται *γεωμετρική κατανομή με παράμετρο* p.

Παράδειγμα 4.1.11. Ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα τυχαίο σημείο του $[0,1]$, και ότι το X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο $[0,1]$. Αυτό σημαίνει ότι αν A και B είναι δύο υποσύνολα του $[0,1]$ με το ίδιο μήκος τότε $\mathbb{P}[X \in A] = \mathbb{P}[X \in B]$.

Η αριθμητική ΤΜ X δεν είναι διακριτή, οπότε δεν ορίζουμε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Όμως η συνάρτηση κατανομής της X ορίζεται και είναι πολύ εύκολο να υπολογιστεί, αφού λόγω της ομοιόμορφης κατανομής έχουμε $\mathbb{P}[X \in [0,x]] = x$. Αν λοιπόν $x \leq 0$ τότε $F_X(x) = 0$, αν $x \geq 1$ τότε $F_X(x) = 1$ και αν $0 \leq x \leq 1$ τότε $F_X(x) = x$.

Παράδειγμα 4.1.12. Ρίχνουμε N φορές ένα νόμισμα που φέρνει κορώνα με πιθανότητα $p \in (0,1)$ και έστω X το πλήθος των φορών που το νόμισμα έρχεται κορώνα. Προφανώς $X \in \{0,\ldots,N\}$. Για να υπολογίσουμε το $f_X(k) = \mathbb{P}[X = k]$, $0 \leq k \leq N$, σκεφτόμαστε ως εξής. Έστω $\mathcal{B}$ το σύνολο όλων των υποσυνόλων του $[N]$ μεγέθους k, και για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ορίζουμε το ενδεχόμενο

$$E_B = \{\text{το νόμισμα φέρνει κορώνα τη χρονική στιγμή } t \text{ αν και μόνο αν } t \in B\}.$$

Είναι φανερό ότι τα E_B, $B \in \mathcal{B}$, αποτελούν μια διαμέριση του ενδεχομένου $\{X = k\}$. Επίσης για κάθε $B \in \mathcal{B}$ η πιθανότητα του E_B ισούται με $p^k(1-p)^{N-k}$ αφού το E_B ισχύει αν και μόνο αν το νόμισμα φέρει κορώνα σε κάθε μια από τις k χρονικές στιγμές που ανήκουν στο B και γράμματα σε κάθε μια από τις υπόλοιπες $N-k$ χρονικές στιγμές, και τα ενδεχόμενα αυτά είναι ανεξάρτητα. Τέλος $|E_B| = \binom{N}{k}$ οπότε

$$f_X(k) = \binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k}, \quad (0 \leq k \leq N). \tag{4.3}$$

Η συνάρτηση κατανομής $F_X(k)$ ισούται με 0 αν $k < 0$ και με 1 αν $k > N$. Για $0 \leq k \leq N$ δίδεται από τον τύπο

$$F_X(k) = \sum_{l=0}^{k}\binom{N}{l}p^l(1-p)^{N-l},$$

και δεν υπάρχει γενικά κάποια απλούστευση του τύπου αυτού.

Η πυκνότητα (4.3) ονομάζεται *διωνυμική κατανομή με παραμέτρους* p *και* N.

▷ **Πρόβλημα 4.1.5.** Έχουμε n παίκτες που ρίχνουν από ένα τίμιο νόμισμα ο καθένας. Όσοι από αυτούς φέρουν κορώνα ξαναρίχνουν το νόμισμά τους και έστω X ο αριθμός αυτών που ξαναφέρνουν κορώνα. Να βρεθεί η πυκνότητα πιθανότητας της ΤΜ X.

Παράδειγμα 4.1.13. Αν $\lambda > 0$ είναι μια παράμετρος, η πυκνότητα

$$f(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\mathbf{1}\,(n \geq 0) \tag{4.4}$$

ονομάζεται *κατανομή Poisson με παράμετρο* λ. Για να επιβεβαιώσουμε ότι η (4.4) είναι όντως μια πυκνότητα αρκεί να επικαλεστούμε τον τύπο

$$e^x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!},$$

που ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

▷ **Πρόβλημα 4.1.6.** Η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Βρείτε την πυκνότητα της X^2.

▷ **Πρόβλημα 4.1.7.** Η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p και C είναι σταθερά. Ορίζουμε $Y = X\mathbf{1}\,(X \leq C) + C\mathbf{1}\,(X > C)$. Να βρεθεί η πυκνότητα της Y.

Ορισμός 4.1.4. Έστω $X_1, \ldots, X_n$ διακριτές ΤΜ πάνω σε ένα δειγματικό χώρο Ω. Αυτές λέγονται *ανεξάρτητες* ΤΜ αν για κάθε $x_1, \ldots, x_n$ ισχύει

$$\mathbb{P}\,[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \mathbb{P}\,[X_1 = x_1]\cdots\mathbb{P}\,[X_n = x_n].$$

Ένα άπειρο σύνολο από ΤΜ πάνω στον ίδιο δειγματικό χώρο λέγεται *ανεξάρτητο* αν κάθε πεπερασμένο υποσύνολο είναι ανεξάρτητο.

Παρατήρηση 4.1.6. Αν η X_i παίρνει τιμές στο σύνολο T_i τότε η διανυσματική ΤΜ $(X_1, \ldots, X_n)$ παίρνει τιμές στο $T_1 \times \cdots \times T_n$. Η ανεξαρτησία των X_i μπορεί ισοδύναμα να γραφεί ως

$$f_{(X_1,\ldots,X_n)}(t_1, \ldots, t_n) = f_{X_1}(t_1)\cdots f_{X_n}(t_n).$$

▷ **Πρόβλημα 4.1.8.** Δείξτε ότι αν οι διακριτές ΤΜ X και Y είναι ανεξάρτητες τότε για οποιαδήποτε σύνολα A και B ισχύει $\mathbb{P}\,[X \in A, Y \in B] = \mathbb{P}\,[X \in A]\,\mathbb{P}\,[Y \in B]$.

▷ **Πρόβλημα 4.1.9.** Δείξτε ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τότε και οι $f(X)$, $g(Y)$ είναι ανεξάρτητες, όπου f και g είναι τυχούσες συναρτήσεις.

▷ **Πρόβλημα 4.1.10.** Οι X και Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και $\mathbb{P}\,[X = 1] =$

[4] Όσον αφορά τις πιθανοθεωρητικές τους ιδιότητες δύο ΤΜ που είναι ίσες σχεδόν σίγουρα είναι ουσιαστικά η ίδια ΤΜ και τις θεωρούμε μία.

$\mathbb{P}[X=-1] = 1/2$. Ορίζουμε $Z = XY$. Δείξτε ότι οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες ανά δύο αλλά όχι ανεξάρτητες.

▷ **Πρόβλημα 4.1.11.** Οι X και Y είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και $\mathbb{P}[X=k] = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Υπολογίστε τις ποσότητες

1. $\mathbb{P}[\min\{X, Y\} \le n]$,
2. $\mathbb{P}[Y > X]$,
3. $\mathbb{P}[X = Y]$,
4. $\mathbb{P}[X \ge kY]$, για δοσμένο θετικό ακέραιο k,
5. $\mathbb{P}[X$ διαιρεί την $Y]$,
6. $\mathbb{P}[X = rY]$, για δοσμένο θετικό ρητό r.

▷ **Πρόβλημα 4.1.12.** Αν f και g είναι συναρτήσεις $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ με $F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ και $G = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g(n)| < \infty$ δείξτε ότι το άθροισμα

$$f * g(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)g(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$$

συγκλίνει για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f * g(n)| \le F \cdot G.$$

Αν $f, g \ge 0$ τότε $f * g \ge 0$ και η παραπάνω ανισότητα ισχύει ως ισότητα.

Ορισμός 4.1.5. Έστω $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ συναρτήσεις που ικανοποιούν $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)| < \infty$ και ομοίως για την g. Η συνάρτηση $f * g$ που ορίζεται στο Πρόβλημα 4.1.12 ονομάζεται *συνέλιξη* των f και g.

▷ **Πρόβλημα 4.1.13.** Δείξτε ότι $f * g = g * f$ και $f * (g + h) = f * g + f * h$, όταν όλες οι συνελίξεις ορίζονται.

Παρατήρηση 4.1.7. Χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 4.1.12 βλέπουμε ότι αν f και g είναι πυκνότητες πιθανότητας, αν δηλ. υπάρχουν ΤΜ X και Y τέτοιες ώστε $f = f_X$ και $g = f_Y$, ή, ισοδύναμα, αν για κάθε μια από τις f και g ισχύουν τα

1. $f(n) \ge 0$, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$,
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = 1$,

τότε και η συνέλιξη $f * g$ επίσης είναι πυκνότητα πιθανότητας.

Θεώρημα 4.1.1. *Αν X και Y είναι ανεξάρτητες ΤΜ με ακέραιες τιμές τότε*

$$f_{X+Y}(n) = f_X * f_Y(n),$$

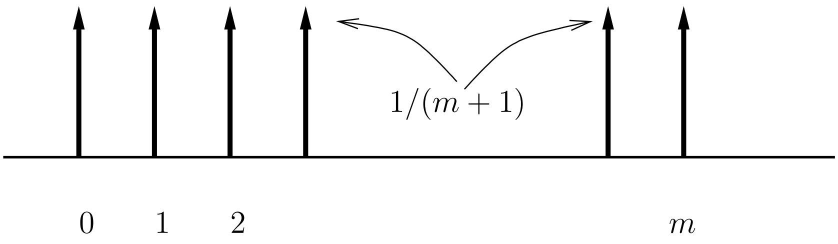
για κάθε $n \in \mathbb{Z}$.

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
f_{X+Y}(n) &= \mathbb{P}[X+Y=n] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X+Y=n \mid Y=k]\,\mathbb{P}[Y=k] \quad (\text{από Θεώρημα 2.3.1}) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}[X=n-k]\,\mathbb{P}[Y=k] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_X(n-k) f_Y(k) \\
&= f_X * f_Y(n).
\end{aligned}$$

■

Παράδειγμα 4.1.14. Έστω X, Y ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο $\{0, \ldots, m\}$. Ποια η πυκνότητα πιθανότητας της $Z = X + Y$;



Σχήμα 6. Η πυκνότητα της ομοιόμορφης κατανομής στο $\{0, \ldots, m\}$

Πρέπει φυσικά να υπολογίσουμε τη συνέλιξη $f_X * f_Y$ ή $f_X * f_X$, αφού οι X και Y είναι ισόνομες (έχουν δηλ. την ίδια κατανομή). Το ότι η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{0, \ldots, m\}$ σημαίνει ακριβώς ότι

$$f_X(n) = \frac{1}{m+1} \mathbf{1}(0 \le n \le m).$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}
f_Z(n) &= \sum_k f_X(k) f_X(n-k) \\
&= \frac{1}{(m+1)^2} \sum_k \mathbf{1}(0 \le k \le m,\ 0 \le n-k \le m) \\
&= \frac{1}{(m+1)^2} \sum_k \mathbf{1}(0 \le k \le m,\ n-m \le k \le n) \\
&= \frac{1}{(m+1)^2} \sum_k \mathbf{1}(\max\{0, n-m\} \le k \le \min\{m, n\})
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι

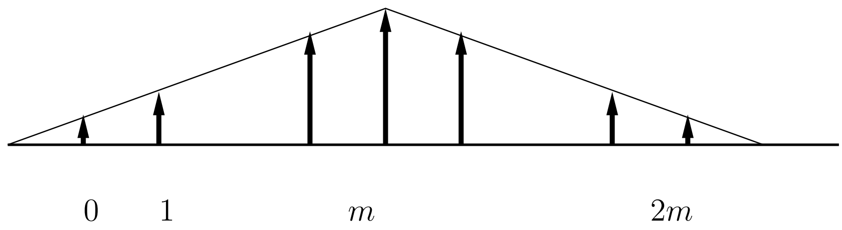
$$|\{k:\ A \le k \le B\}| = (B - A + 1)\mathbf{1}\,(A \le B)\,,$$

παίρνουμε

$$f_Z(n) = \frac{1}{(m+1)^2}(\min\{m,n\} - \max\{0, n-m\} + 1)\mathbf{1}\,(\max\{0, n-m\} \le \min\{m,n\})\,.$$

Για να βρούμε ένα πιο κατανοητό τύπο για την $f_Z(n)$ χωρίζουμε τις περιπτώσεις $n < 0$, $0 \le n \le m$, $m < n \le 2m$ και $2m < n$. Για κάθε μια από αυτές μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές των $\max\{0, n-m\}, \min\{m,n\}$, και καταλήγουμε στο αποτέλεσμα

$$f_Z(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{n+1}{(m+1)^2} & 0 \le n \le m \\ \frac{2m-n+1}{(m+1)^2} & m < n \le 2m \\ 0 & 2m < n \end{cases}$$



Σχήμα 7. Η πυκνότητα της $X+Y$

▷ **Πρόβλημα 4.1.14.** Να βρεθεί η $f_Y(n)$ μέσω της $f_X(n)$ αν $Y = X + t$, όπου t ένας σταθερός ακέραιος.

4.2 Μέση τιμή μιας ΤΜ

Ορισμός 4.2.1. Αν X είναι μια ΤΜ με ακέραιες τιμές τότε ορίζουμε τη *μέση τιμή* της X μέσω του τύπου

$$\mathbb{E}\,[X] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n f_X(n), \tag{4.5}$$

αν η σειρά συγκλίνει απόλυτα, αν έχουμε δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| f_X(n) < \infty. \tag{4.6}$$

Γενικότερα, αν $X : \Omega \to T \subseteq \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε διακριτή ΤΜ, με T αριθμήσιμο, τότε η μέση τιμής της ορίζεται από τον τύπο

$$\mathbb{E}\,[X] = \sum_{t \in T} t \cdot \mathbb{P}\,[X = t], \tag{4.7}$$

και πάλι μόνο όταν

$$\sum_{t \in T} |t| \cdot \mathbb{P}\,[X = t] < \infty, \tag{4.8}$$

Παρατήρηση 4.2.1. Είναι προφανές ότι ο γενικότερος ορισμός (4.7) συμπίπτει με τον ειδικότερο, για την περίπτωση ακέραιας ΤΜ, ορισμό (4.5).

Είναι επίσης φανερό ότι αν τα ενδεχόμενα A_s, $s \in S$, με αριθμήσιμο σύνολο δεικτών S, αποτελούν διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω και έχουν την ιδιότητα ότι η ΤΜ X είναι σταθερή σε κάθε A_s με τιμή c_s τότε

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{s \in S} c_s \, \mathbb{P}[A_s].$$

Παρατήρηση 4.2.2. Αν η ΤΜ X παίρνει πεπερασμένες μόνο τιμές τότε η μέση τιμή της υπάρχει αφού η σειρά (4.5) δεν είναι παρά ένα πεπερασμένο άθροισμα. Για παράδειγμα, αν X είναι το αποτέλεσμα ενός συνηθισμένου ζαριού, τότε $f_X(n) = \frac{1}{6}\mathbf{1}(1 \le n \le 6)$ και

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}1 + \frac{1}{6}2 + \cdots + \frac{1}{6}6 = 3.5.$$

Γενικότερα, αν η ΤΜ X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{0, \ldots, m\}$ τότε $\mathbb{E}[X] = m/2$.

Παρατήρηση 4.2.3. Ο λόγος που απαιτούμε να ισχύει η (4.6) ή (4.8) για να μιλήσουμε για τη σειρά (4.5) ή (4.7) είναι ότι αν δεν ισχύει η (4.6) ή (4.8) τότε το άθροισμα της σειράς (4.5) ή (4.7) εξαρτάται από την οριακή διαδικασία με την οποία το ορίζουμε, ή, με άλλα λόγια, από τη σειρά με την οποία αθροίζουμε τους όρους της (4.5) ή της (4.7).

Αν η ΤΜ X είναι πάντα μη αρνητική και η σειρά (4.6) ή (4.8) αποκλίνουν (ισούνται με $+\infty$), τότε θα θεωρούμε $\mathbb{E}[X] = \infty$.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 4.2.1.** Αν $A \subseteq \Omega$ είναι ένα ενδεχόμενο και $X(\omega) = \mathbf{1}(\omega \in A)$ υπολογίστε τη $\mathbb{E}[X]$.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 4.2.2.** Αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson (δείτε (4.4)) με παράμετρο λ δείξτε ότι $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 4.2.3.** Δείξτε ότι αν η σταθερά $C > 0$ οριστεί κατάλληλα τότε η συνάρτηση $f(n) = \frac{C}{n^2}\mathbf{1}(n \ge 1)$ είναι πυκνότητα πιθανότητας και ότι οποιαδήποτε ΤΜ με πυκνότητα $f_X \equiv f$ δεν έχει μέση τιμή $\mathbb{E}[X]$.

$\triangleright$ **Πρόβλημα 4.2.4.** Αν η πυκνότητα της X είναι συμμετρική ως πρός το σημείο $x \in \mathbb{R}$, αν δηλ. ισχύει

$$f(n) = f(2x - n), \forall n \in \mathbb{Z},$$

τότε, αν υπάρχει η $\mathbb{E}[X]$ έχουμε $\mathbb{E}[X] = x$.

Παράδειγμα 4.2.1. Αν $T \in \{1, 2, \ldots\}$ είναι ο χρόνος εμφάνισης της πρώτης κορώνας σε μια άπειρη ακολουθία ρίψεως ενός νομίσματος που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p, η πυκνότητα της T δίνεται από τον τύπο

$$f_T(n) = p(1-p)^{n-1}\mathbf{1}(n \ge 1),$$

οπότε

$$\mathbb{E}\left[T\right] = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} n.$$

Παραγωγίζοντας τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$ κατά όρους παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Εφαρμόζοντας αυτό τον τύπο για $x = 1-p$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[T\right] = p\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

Ο μέσος χρόνος εμφάνισης δηλ. της πρώτης κορώνας είναι αντιστρόφως ανάλογος της πιθανότητας εμφάνισης κορώνας σε μια ρίψη του νομίσματος.

Η πιο σημαντική ιδιότητα της μέσης τιμής είναι η γραμμικότητά της. Είναι σκόπιμο να τονιστεί εδώ πως, αντίθετα με το Θεώρημα 4.2.3 παρακάτω, το Θεώρημα 4.2.1 δεν απαιτεί ανεξαρτησία των ΤΜ. Εκεί έγκειται και η μεγάλη χρησιμότητά του.

Θεώρημα 4.2.1. *Αν οι διακριτές ΤΜ X και Y έχουν μέση τιμή και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ είναι σταθερές, τότε η ΤΜ $Z = \lambda X + \mu Y$ έχει μέση τιμή και $\mathbb{E}\left[Z\right] = \lambda\mathbb{E}\left[X\right] + \mu\mathbb{E}\left[Y\right]$.*

Απόδειξη. Έστω $X : \Omega \to T_1$ και $Y : \Omega \to T_2$, όπου τα σύνολα T_1, T_2 είναι αριθμήσιμα. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$A_t = \{X = s\}, \quad (s \in T_1),$$
$$B_t = \{Y = t\} \quad (t \in T_2),$$

και

$$C_{s,t} = \{X = s, Y = t\}, \quad (s \in T_1, t \in T_2).$$

Έχουμε

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{s \in T_1} s\,\mathbb{P}\left[A_s\right] = \sum_{s \in T_1} s \sum_{t \in T_2} \mathbb{P}\left[C_{s,t}\right],$$

και

$$\mathbb{E}\left[Y\right] = \sum_{t \in T_2} s\,\mathbb{P}\left[B_t\right] = \sum_{t \in T_2} t \sum_{s \in T_1} \mathbb{P}\left[C_{s,t}\right],$$

οπότε

$$\lambda\mathbb{E}\left[X\right] + \mu\mathbb{E}\left[Y\right] = \sum_{s \in T_1, t \in T_2} \mathbb{P}\left[C_{s,t}\right](\lambda s + \mu t) = \mathbb{E}\left[Z\right],$$

αφού τα ενδεχόμενα $C_{s,t}$, $s \in T_1, t \in T_2$, αποτελούν διαμέριση του Ω στα οποία η ΤΜ Z είναι σταθερή (δείτε Παρατήρηση 4.2.1).

■

Παράδειγμα 4.2.2. Στο Παράδειγμα 4.1.14 μπορούμε να υπολογίσουμε τη $\mathbb{E}\left[X+Y\right]$ χωρίς να χρησιμοποιήσουμε καθόλου τη συνάρτηση πυκνότητας της $X+Y$ που υπολογίσαμε εκεί. Για την X έχουμε από το Πρόβλημα 4.2.4 ότι $\mathbb{E}\left[X\right] = m/2$ αφού η ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0, \ldots, m\}$ είναι συμμετρική γύρω από το σημείο $m/2$. Τέλος $\mathbb{E}\left[X+Y\right] = \mathbb{E}\left[X\right] + \mathbb{E}\left[Y\right] = 2\mathbb{E}\left[X\right] = 2\frac{m}{2} = m$.

Παράδειγμα 4.2.3. Έστω ότι η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (δείτε Παράδειγμα 4.1.12) με παραμέτρους p και N, ότι έχουμε δηλαδή

$$f_X(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)N - k\mathbf{1}\,(0 \le k \le N)\,.$$

Η X μπορεί να υλοποιηθεί ως το πλήθος των κορωνών σε N ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρενι κορώνα με πιθανότητα p. Άρα, αν συμβολίσουμε $X_j = \mathbf{1}\,$(φέρνουμε κορώνα στη j ρίψη) έχουμε

$$X = X_1 + \cdots + X_N,$$

Άρα $\mathbb{E}\,[X] = \mathbb{E}\,[X_1] + \cdots + \mathbb{E}\,[X_N] = N\mathbb{E}\,[X_1] = Np$.

Παράδειγμα 4.2.4. Σ' ένα δωμάτιο μπαίνουν N άτομα και αφήνουν τα καπέλα τους στον προθάλαμο, όπου όμως παίζουν κάποια παιδιά και ανακατεύουν τα καπέλα. Φεύγοντας τα N άτομα παίρνουν από ένα καπέλο στην τύχη. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός των ατόμων που παίρνουν το δικό τους καπέλο;

Η ΤΜ που μας ενδιαφέρει είναι η X, ο αριθμός των ατόμων, που παίρνουν το δικό τους καπέλο. Ας είναι X_j, $j = 1, \ldots, N$, οι ΤΜ $X_j = \mathbf{1}\,$(το άτομο j παίρνει το δικό του καπέλο). (Οι ΤΜ X_j δεν είναι ανεξάρτητες. Γιατί;) Είναι φανερό ότι

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N.$$

Άρα, από το Θεώρημα 4.2.1 έχουμε $\mathbb{E}\,[X] = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}\,[X_j]$. Επίσης, λόγω της συμμετρίας, έχουμε ότι οι X_j είναι ισόνομες, άρα $\mathbb{E}\,[X] = N\mathbb{E}\,[X_1]$. Τέλος $\mathbb{E}\,[X_1] = \mathbb{P}\,[\text{ο 1 παίρνει το καπέλο του}] = 1/n$, επίσης λόγω της συμμετρίας. Άρα $\mathbb{E}\,[X] = 1$. Είναι εντυπωσιακό ότι το $\mathbb{E}\,[X]$ δεν εξαρτάται από το N.

Το "σπάσιμο" της ΤΜ X σαν άθροισμα άλλων απλουστέρων, και μάλιστα δεικτριών, ΤΜ είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο στη λύση προβλημάτων.

Το παρακάτω είναι εξαιρετικά χρήσιμο σε υπολογισμούς.

Θεώρημα 4.2.2. *Αν X είναι μια διακριτή ΤΜ (όχι αναγκαστικά αριθμητική) και f μια αριθμητική συνάρτηση ορισμένη στο πεδίο τιμών T της X τότε η ΤΜ $f(X)$ έχει μέση τιμή αν*

$$\sum_{t \in T} |f(t)|\,\mathbb{P}\,[X = t] < \infty,$$

και αυτή τότε ισούται με

$$\mathbb{E}\,[f(X)] = \sum_{t \in T} f(t)\,\mathbb{P}\,[X = t].$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση αν εφαρμόσουμε την Παρατήρηση 4.2.1 στη διαμέριση $\Omega = \bigcup_{t \in T} \{X = t\}$.
■

Παρατήρηση 4.2.4. Μετά το Θεώρημα 4.2.2 είναι φανερό πως η συνθήκες (4.6) και (4.8) δεν είναι τίποτε άλλο από τη συνθήκη $\mathbb{E}\,[|X|] < \infty$ (η μέση τιμή μιας μη αρνητικής ΤΜ υπάρχει πάντα και είναι πεπερασμένος αριθμός ή $+\infty$).

▷ **Πρόβλημα 4.2.5.** Όταν αγοράζετε ένα συγκεκριμένο προϊόν υπάρχει πάντα μέσα στη συσκευασία ένα παιχνίδι-έκπληξη. Υπάρχουν c διαφορετικά τέτοια παιχνίδια που μπορεί να βρείτε μέσα στη συσκευασία και όλα αυτά τα παιχνίδια είναι εξ ίσου πιθανό να εμφανιστούν. Αγοράζετε ένα τέτοιο προϊόν κάθε μέρα. Ποιος είναι ο μέσος αριθμός ημερών που περνάει από τότε που θα βρείτε το j-οστό νέο παιχνίδι μέχρι να βρείτε το $(j+1)$-οστό νέο παιχνίδι; Ποιος είναι ο μέσος αριθμός ημερών που περνάει έως ότου βρείτε και τα c διαφορετικά παιχνίδια;

Θεώρημα 4.2.3. *Αν οι ΤΜ X και Y είναι ανεξάρτητες και έχουν μέσες τιμές τότε και η XY έχει μέση τιμή και* $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$.

Απόδειξη. Έστω $X : \Omega \to T_1$ και $Y : \Omega \to T_2$, όπου τα σύνολα T_1, T_2 είναι αριθμήσιμα. Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$C_{s,t} = \{X = s, Y = t\}, \quad (s \in T_1, t \in T_2).$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|XY|] &= \sum_{s\in T_1, t\in T_2} |st|\,\mathbb{P}[C_{s,t}] \\
&= \sum_{s\in T_1, t\in T_2} |st|\,\mathbb{P}[X=s]\,\mathbb{P}[Y=t] \quad \text{από ανεξαρτησία των } X, Y \\
&= \sum_{s\in T_1} |s|\,\mathbb{P}[X=s] \cdot \sum_{t\in T_2} |t|\,\mathbb{P}[Y=t] \\
&= \mathbb{E}[|X|]\,\mathbb{E}[|Y|] < \infty,
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε δείξει ότι η XY έχει μέση τιμή. Ομοίως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \sum_{s\in T_1, t\in T_2} st\,\mathbb{P}[C_{s,t}] \\
&= \sum_{s\in T_1, t\in T_2} st\,\mathbb{P}[X=s]\,\mathbb{P}[Y=t] \quad \text{από ανεξαρτησία των } X, Y \\
&= \sum_{s\in T_1} s\,\mathbb{P}[X=s] \cdot \sum_{t\in T_2} t\,\mathbb{P}[Y=t] \\
&= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 4.2.5. Ομοίως προκύπτει ότι αν οι $X_1, \ldots, X_N$ είναι ένα ανεξάρτητο σύνολο από ΤΜ τότε $\mathbb{E}[X_1 \cdots X_N] = \mathbb{E}[X_1] \cdots \mathbb{E}[X_N]$.

Παρατήρηση 4.2.6. Η συνθήκη "X, Y ανεξάρτητες" δε μπορεί να παραλειφθεί στο Θεώρημα 4.2.3. Ας είναι, για παράδειγμα, A και B δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα με θετική πιθανότητα το καθένα, και $X = \mathbf{1}_A$, $Y = \mathbf{1}_B$ οι αντίστοιχες δείκτριες ΤΜ (δείτε το Παράδειγμα 4.1.8). Έχουμε τότε $XY = \mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_\emptyset$ άρα $\mathbb{E}[XY] = 0$ ενώ $\mathbb{E}[X] = \mathbb{P}[A] > 0$ και $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{P}[B] > 0$.

Παράδειγμα 4.2.5. Ένα σωμάτιο εκτελεί ένα "τυχαίο περίπατο" ως εξής: τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στη θέση 0 του άξονα των ακεραίων αριθμών. Σε κάθε ακέραια χρονική στιγμή ρίχνει ένα τίμιο νόμισμα και αν έρθει κορώνα μετακινείται μια μονάδα αριστερά, αλλιώς πάει μια μονάδα δεξιά. Αν λοιπόν γράψουμε X_j για τη μετακίνηση του σωματίου κατά τη χρονική στιγμή j έχουμε $X_j \in \{-1,+1\}$ και $\mathbb{P}[X_j=-1] = \mathbb{P}[X_j=+1] = 1/2$, άρα $\mathbb{E}[X_j] = \frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}1 = 0$. Η θέση του σωματιδίου τη χρονική στιγμή n, έστω S_n, μπορεί να γραφεί ως

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

οπότε, από τη γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε επίσης $\mathbb{E}[S_n]=0$ για κάθε n.

Ας υπολογίσουμε τέλος τη "μέση τετραγωνική απόσταση" του σωματιδίου από το 0 τη χρονική στιγμή n. Αυτή είναι η ποσότητα $\sqrt{\mathbb{E}[S_n^2]}$ και έχουμε

$$S_n^2 = (X_1+\cdots+X_n)^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 + 2\sum_{i<j} X_i X_j,$$

όπου το δεύτερο άθροισμα είναι για όλους τους δείκτες $i,j=1,\ldots,n$, με $i<j$. Επειδή X_i και X_j είναι ανεξάρτητες αν $i \neq j$ και $\mathbb{E}[X_i]=0$ έχουμε ότι οι μέσες τιμές όλων των προσθετέων στο δεύτερο άθροισμα είναι 0. Τέλος έχουμε $\mathbb{E}\left[X_j^2\right]=1$ αφού $X_j^2=1$ πάντα. Άρα $\mathbb{E}\left[S_n^2\right]=n$ και η μέση τετραγωνική απόσταση από το 0 είναι $\sqrt{n}$.

▷ **Πρόβλημα 4.2.6.** Έχουμε n παίκτες που ρίχνουν από ένα ζάρι ο καθένας. Αν X είναι το πλήθος των ζευγών που φέρνουν τον ίδιο αριθμό να βρεθεί η $\mathbb{E}[X]$.

▷ **Πρόβλημα 4.2.7.** Έχουμε n ζευγάρια και από αυτά τα $2n$ άτομα ένα τυχαίο υποσύνολο μεγέθους m πεθαίνει. Να βρεθεί ο μέσος αριθμών των ζευγαριών που έχουν απομείνει.

▷ **Πρόβλημα 4.2.8.** Έχουμε δύο κουτιά που στην αρχή περιέχουν n κόκκινους βώλους το πρώτο και n μπλε βώλους το δεύτερο. Σε κάθε χρονική στιγμή βάζουμε από ένα χέρι σε κάθε κουτί, πιάνουμε από ένα βώλο και τους εναλάσσουμε. Να βρεθεί ο μέσος αριθμός κόκκινων βώλων στο πρώτο κουτί μετά από k τέτοιες εναλλαγές.

Υπόδειξη: Ένας κόκκινος βώλος είναι στο πρώτο κουτί μετά από k βήματα αν και μόνο αν έχει επιλεγεί για εναλλαγή ένα άρτιο αριθμό φορών.

4.3 Διασπορά μιας ΤΜ και ανισότητες απόκλισης

Ορισμός 4.3.1. Αν X είναι μια ΤΜ με μέση τιμή $\mu = \mathbb{E}[X]$ τότε η *διασπορά* της X είναι η ποσότητα $\mathbb{V}ar[X] = \sigma^2(X) = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right]$. Ορίζουμε επίσης την *τυπική απόκλιση* της X ως την ποσότητα $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}ar[X]}$.

Παρατήρηση 4.3.1. Από τον Ορισμό 4.3.1 γίνεται φανερό ότι η διασπορά και η τυπική απόκλιση μιας ΤΜ μετρούν το πόσο πιθανό είναι να αποκλίνει η ΤΜ X από τη μέση τιμή της.

Παρατήρηση 4.3.2. Επειδή η ΤΜ $(X-\mu)^2 \geq 0$ η διασπορά της X υπάρχει πάντα και είναι πεπερασμένος μη αρνητικός αριθμός ή $+\infty$, υπό την προϋπόθεση μόνο ότι η X έχει μέση τιμή, δηλ. $\mathbb{E}[|X|]<\infty$.

▷ **Πρόβλημα 4.3.1.** Αν η ΤΜ έχει $\mathbb{E}\left[X^2\right]<\infty$ τότε έχουμε αναγκαστικά και $\mathbb{E}[|X|]<\infty$.

Υπόδειξη: Γράψτε $X = Y+Z$, όπου $Y = X\mathbf{1}(|X|\leq 1)$ και $Z = X-Y$. Δείξτε ότι $\mathbb{E}[|Y|]<\infty$ και $\mathbb{E}[|Z|]<\infty$.

▷ **Πρόβλημα 4.3.2.** Αν $\mathbb{E}\left[X^2\right] < \infty$ τότε ισχύει $\mathbb{V}ar\left[X\right] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$.

▷ **Πρόβλημα 4.3.3.** Δείξτε ότι αν c είναι σταθερά τότε $\mathbb{V}ar\left[X - c\right] = \mathbb{V}ar\left[X\right] = \mathbb{V}ar\left[-X\right]$.

▷ **Πρόβλημα 4.3.4.** Δείξτε ότι αν $\mathbb{V}ar\left[X\right] = 0$ τότε $X = \mathbb{E}\left[X\right]$ σχεδόν σίγουρα.

Παράδειγμα 4.3.1. Αν η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $\{0, \ldots, m\}$ τότε

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{m+1} k^2 = \frac{1}{6} m(2m+1)$$

χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Προβλήματος 1.1.1. Επίσης $\mathbb{E}\left[X\right] = m/2$ αφού η πυκνότητα της X είναι συμμετρική γύρω από το $m/2$. Οπότε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Προβλήματος 4.3.2 έχουμε

$$\mathbb{V}ar\left[X\right] = \frac{1}{6} m(2m+1) - \frac{m^2}{4} = \frac{m(m+2)}{12}.$$

Θεώρημα 4.3.1. *Αν οι ΤΜ $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες* ανά δύο *και έχουν μέση τιμή τότε*

$$\mathbb{V}ar\left[X_1 + \cdots + X_n\right] = \mathbb{V}ar\left[X_1\right] + \cdots + \mathbb{V}ar\left[X_n\right].$$

Απόδειξη. Ας είναι $\mu_j = \mathbb{E}\left[X_j\right]$, $j = 1, \ldots, n$. Η μέση τιμή της $S = X_1 + \cdots + X_n$ υπάρχει και ισούται με $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$, οπότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[S\right] &= \mathbb{E}\left[(S-\mu)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_j)\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n}(X_j - \mu_j)^2 + 2\sum_{i<j}(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{n}\mathbb{V}ar\left[X_j\right] + 2\sum_{i<j}\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right].
\end{aligned}$$

Η απόδειξη τελειώνει με την παρατήρηση ότι $\mathbb{E}\left[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)\right] = 0$ αν $i \neq j$, αφού οι ΤΜ $X_i - \mu_i$ και $X_j - \mu_j$ είναι ανεξάρτητες και έχουν μέση τιμή 0.
■

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω ότι η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (δείτε Παράδειγμα 4.1.12) με παραμέτρους p και N. Η X μπορεί να υλοποιηθεί ως το πλήθος των κορωνών σε N ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος που φέρενι κορώνα με πιθανότητα p. Άρα, αν συμβολίσουμε $X_j = \mathbf{1}$ (φέρνουμε κορώνα στη j ρίψη) έχουμε

$$X = X_1 + \cdots + X_N,$$

Άρα $\mathbb{V}ar\left[X\right] = \mathbb{V}ar\left[X_1\right] + \cdots + \mathbb{V}ar\left[X_N\right] = N\mathbb{V}ar\left[X_1\right] = Np(1-p)$, αφού εύκολα βλέπουμε ότι $\mathbb{V}ar\left[X_1\right] = p(1-p)$.

Θεώρημα 4.3.2. (Ανισότητα Markov) *Αν $X \geq 0$ έχει μέση τιμή $\mu \in \mathbb{R}$ τότε*

$$\mathbb{P}[X \geq \lambda\mu] \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε το ενδεχόμενο $A = \{X \geq \lambda\mu\}$. Αν T είναι το σύνολο τιμών της X τότε, από τον ορισμό της $\mathbb{E}[X]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{t \in T} t\,\mathbb{P}[X = t] \\ &= \sum_{t \in T, t < \lambda\mu} t\,\mathbb{P}[X = t] + \sum_{t \in T, t \geq \lambda\mu} t\,\mathbb{P}[X = t] \\ &\geq \sum_{t \in T, t \geq \lambda\mu} t\,\mathbb{P}[X = t] \\ &\geq \sum_{t \in T, t \geq \lambda\mu} \lambda\mu\,\mathbb{P}[X = t] \\ &= \lambda\mu\,\mathbb{P}[A]. \end{aligned}$$

Η ανισότητα προκύπτει αφού διαρέσουμε δια του $\lambda\mu$.
■

Πόρισμα 4.3.1. (Ανισότητα Chebyshev) *Αν η X έχει πεπερασμένη διασπορά σ^2 και μέση τιμή μ τότε*

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq \lambda\sigma] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τη μη-αρνητική ΤΜ $Y = (X - \mu)^2$ με $\mathbb{E}[Y] = \sigma^2$ και εφαρμόζουμε σε αυτή την ανισότητα του Markov(Θεώρημα 4.3.2). Παίρνουμε

$$\mathbb{P}[|X - \mu| \geq \lambda\sigma] = \mathbb{P}\left[Y \geq \lambda^2\sigma^2\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

▷ **Πρόβλημα 4.3.5.** Έστω $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ μια αυστηρά αύξουσα συνάρτηση και X μια ΤΜ τέτοια ώστε $\mathbb{E}[g(|X|)] < \infty$. Δείξτε ότι

$$\mathbb{P}[|X| \geq \lambda] \leq \frac{\mathbb{E}[g(|X|)]}{g(\lambda)}.$$

▷ **Πρόβλημα 4.3.6.** (Ακολουθούμε το συμβολισμό και ορολογία του Παραδείγματος 4.2.5.) Χρησιμοποιείστε την ανισότητα του Chebyshevγια να βρείτε ένα άνω φράγμα για την $\mathbb{P}[|S_n| > n/10]$.

▷ **Πρόβλημα 4.3.7.** Έστω X μια ΤΜ που ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή (4.2) με παράμετρο $p = 1/2$. Βρείτε άνω φράγματα για την ποσότητα $\mathbb{P}[X \geq 10]$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markovκαι την ανισότητα του Chebyshevκαι συγκρίνετέ τα μεταξύ τους καθώς και με την ακριβή τιμή γι΄ αυτή την ποσότητα.

4.4 Γεννήτριες συναρτήσεις

Ορισμός 4.4.1. Αν X είναι μια ΤΜ που παίρνει τιμές στο σύνολο $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ τότε η *γεννήτρια συνάρτηση* της X είναι η συνάρτηση

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_X(n) t^n, \quad (|t| \leq 1).$$

Παρατήρηση 4.4.1. Αποδεικνύεται ότι η άπειρη σειρά στον ορισμό 4.4.1 συγκλίνει για όλα τα t με $|t| \leq 1$.

Παράδειγμα 4.4.1. Αν $X = c$ σχεδόν σίγουρα τότε $\Phi_X(t) = t^c$.

Παράδειγμα 4.4.2. Αν η X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή (4.2) με παράμετρο p τότε

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} t^n p(1-p)^{n-1} \\
&= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-p))^n \\
&= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-t(1-p)} - 1\right) \\
&= \frac{pt}{1-(1-p)t}.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.4.3. Αν η X ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή (4.3) με παραμέτρους N και p, τότε

$$\begin{aligned}
\Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{N} t^n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n} \\
&= \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} (tp)^n (1-p)^{N-n} \\
&= (1-p+pt)^N \quad \text{(με εφαρμογή του διωνμικού Θεωρήματος 3.4.1.)}
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 4.4.4. Αν η X ακολουθεί κατανομή Poisson (4.4) με παράμετρο $\lambda > 0$ τότε

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} == e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda} = e^{\lambda(1-t)}.$$

Θεώρημα 4.4.1. *Αν $X_1, \ldots, X_r$ είναι ανεξάρτητες ΤΜ και $Y = X_1 + \cdots + X_r$ τότε*

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_r}(t).$$

Απόδειξη. $\Phi_Y(t) = \mathbb{E}\left[t^Y\right] = \mathbb{E}\left[t^{X_1} \cdot t^{X_2} \cdots t^{X_r}\right]$. Οι ΤΜ $t^{X_1}, \ldots, t^{X_r}$ είναι κι αυτές ανεξάρτητες άρα $\Phi_Y(t) = \mathbb{E}\left[t^{X_1}\right] \cdots \mathbb{E}\left[t^{X_r}\right] = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_r}(t)$.
■

Το επόμενο πολύ σημαντικό θεώρημα το δεχόμαστε χωρίς απόδειξη.

Θεώρημα 4.4.2. *Αν δύο ΤΜ X και Y (που παίρνουν τιμές στο $\mathbb{N}$) έχουν την ίδια γεννήτρια συνάρτηση τότε είναι ισόνομες.*

Χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 4.4.1 και 4.4.2 μπορούμε εύκολα να δείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.4.3. *(α) Αν οι $X_1, \ldots, X_r$ είναι ανεξάρτητες και η X_i ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους N_i και p τότε η $Y = X_1 + \cdots + X_r$ ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N_1 + \cdots + N_r$ και p.*
(β) Αν οι $X_1, \ldots, X_r$ είναι ανεξάρτητες και η X_i ακολουθεί τη κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_i > 0$ τότε η $Y = X_1 + \cdots + X_r$ ακολουθεί τη κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r$.

Απόδειξη. (α) Έχουμε $\Phi_{X_i}(t) = (1 - p + pt)^{N_i}$ και από την ανεξαρτησία έχουμε

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_r}(t) = (1 - p + pt)^{N_1 + \cdots + N_r}.$$

Αλλά και η διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $N_1 + \cdots + N_r$ και p έχει την ίδια γεννήτρια συνάρτηση, άρα (Θεώρημα 4.4.2) αυτή είναι η κατανομή της Y.

(β) Έχουμε $\Phi_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(1-t)}$ και από την ανεξαρτησία έχουμε

$$\Phi_Y(t) = \Phi_{X_1}(t) \cdots \Phi_{X_r}(t) = e^{(\lambda_1 + \cdots + \lambda_r)(1-t)}.$$

Αλλά και η κατανομή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r$ έχει την ίδια γεννήτρια συνάρτηση, άρα (Θεώρημα 4.4.2) αυτή είναι η κατανομή της Y.
■

▷ **Πρόβλημα 4.4.1.** Υπολογίστε τη γεννήτρια συνάρτηση της ομοιόμορφης κατανομής στο $\{a, \ldots, b\}$, $0 \le a < b$.

▷ **Πρόβλημα 4.4.2.** Αν η ΤΜ X έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $\Phi_X(t)$ ποια είναι η πυκνότητα μιας ΤΜ που έχει γεννήτρια συνάρτηση τη $\Phi_X(t^2)$;