Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5

1. (α) Δίνεται μια οικογένεια ξένων ανά δύο ανοιχτών συνόλων στο επίπεδο. Δείξτε ότι η οικογένεια είναι αριθμήσιμη.
(β) Ένα *ομοιμορφικό οχτάρι* είναι μια συνεχής κλειστή καμπύλη στο επέπεδο που αυτοτέμνεται ακριβώς μια φορά. Δίνεται μια οικογένεια ξένων ανά δύο ομοιομορφικών οχταριών. (Μόνο οι καμπύλες υποθέτονται ξένες· όχι και τα εσωτερικά.) Δείξτε ότι η οικογένεια είναι αριθμήσιμη.
(γ) Δείξτε το ίδιο για κάθε οικογένεια από ξένα ανά δύο ομοιμορφικά Υ. Καθένα από αυτα είναι μια τριάδα από συνεχείς μη αυτοτεμνόμενες καμπύλες που έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, την αρχή τους.
(δ) Δείξτε ότι μια οικογένεια από ξένους ανά δύο κύκλους στο επίπεδο, με ρητό εμβαδό, είναι απαραίτητα αριθμήσιμη.

2. Δίδεται ένα ορθογώνιο T με τις πλευρές του παράλληλες προς τους άξονες του επιπέδου. Υποθέτουμε πως μπορούμε να γράψουμε το T σαν ένωση κάποιων ορθογωνίων $T_1, \ldots, T_n$, επίσης με τις πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, και με ξένα εσωτερικά. Υποθέτουμε επίσης πως για κάθε T_i η μία ή η άλλη πλευρά του έχει ακέραιο μήκος. Δείξτε ότι η μια ή η άλλη πλευρά του T έχει ακέραιο μήκος.

3. Κόβουμε τη μοναδιαία σφαίρα στο $\mathbb{R}^3$ με δύο παράλληλα επίπεδα που έχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με d. Δείξτε ότι η επιφάνεια της σφαίρας ανάμεσα στα δύο επίπεδα εξαρτάται μόνο από το d και όχι από τη σχετική θέση σφαίρας και ζεύγους επιπέδων.

4. Δίνεται ένα ανοιχτό συνεκτικό και φραγμένο χωρίο στο επίπεδο. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες ℓ_1 και ℓ_2 που χωρίζουν το χωρίο σε τέσσερα ισεμβαδικά κομμάτια.

5. Σε ένα ορθογώνιο τραπέζι T βρίσκονται τοποθετημένα n όμοια, κυκλικά νομίσματα, με τέτοιο τρόπο ώστε δε χωράει να τοποθετηθεί άλλο νόμισμα πάνω στο τραπέζι αυτό χωρίς να επικαλύπτει μερικώς κάποιο από τα ήδη υπάρχοντα νομίσματα. (Ένα νόμισμα θεωρείται τοποθετημένο πάνω στο τραπέζι όταν το κέντρο του βρίσκεται πάνω στο τραπέζι· δε χρειάζεται να βρίσκεται ολόκληρο επάνω.) Δείξτε ότι $4n$ νομίσματα αρκούν για να καλύψουν πλήρως το τραπέζι, ενδεχομένως αλληλοκαλυπτόμενα.

6. Μια απλή κλειστή πολυγωνική γραμμή σας περιγράφεται μέσω των συντεταγμένων των κορυφών της $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ κατά τη θετική φορά.
(α) Βρείτε ένα τύπο για το εμβαδό του πολυγώνου ο οποίος να χρησιμοποιεί μόνο τις τέσσερεις αλγεβρικές πράξεις $(+, -, \times, /)$.
(β) Ομοίως βρείτε ένα τύπο για το κέντρο βάρους του πολυγώνου.

7. Κατασκευάστε τρία ανοιχτά συνεκτικά υποσύνολα του επιπέδου με το ίδιο σύνορο. (Το σημείο x του επιπέδου θεωρείται ότι ανήκει στο σύνορο ενός συνόλου Ω αν είναι σημείο συσσώρευσης και του Ω και του Ω^c.)

8. Γράψτε την περιφέρεια του μοναδιαίου κύκλου σα ξένη ένωση δύο συνόλων A και B ώστε να είναι δυνατό με κάποια στερεά κίνηση να μετακινήσετε τα A και B με τρόπο ώστε να παραμένουν ξένα και η ένωσή τους να είναι ένας κύκλος μείον ακριβώς ένα σημείο.

9. Βρείτε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που να είναι παραγωγίσιμη παντού αλλά η παράγωγός της να είναι ασυνεχής στο 0.

Ηράκλειο, 22 Μαρ. 2000