Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης, Σταύρος Παπαδόπουλος – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 7

1. Έστω $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τ.ώ. $f(x)f(a-x) = 1$ για κάθε x. Να υπολογισθεί το

$$\int_0^a \frac{1}{1+f(x)} dx.$$

2. Υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ που να είναι γραμμικώς εξαρτημένα πάνω από το $\mathbb{Q}$ ενώ τα $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ να μην είναι;

3. Δίνεται μια ακολουθία a_n θετικών αριθμών και ορίζουμε

$$b_n = \left(\frac{a_1 + a_{n+1}}{a_n}\right)^n.$$

Δείξτε ότι $\limsup_{n\to]infty} b_n \geq e$.

4. Έστω $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει $S \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ τ.ώ.

$$\left|\sum_{j\in S} z_j\right| \geq \frac{1}{6}\sum_{j=1}^n |z_j|.$$

β) Δείξτε την παραπάνω ανισότητα με $\frac{1}{\pi}$ στη θέση του $\frac{1}{6}$.

5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ώ. για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = 0.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

6. Να δειχτεί ότι το μοναδιαίο τετράγωνο μπορεί να καλυφθεί από οποιοδήποτε (πεπερασμένο ή άπειρο) πλήθος από τετράγωνα που το συνολικό τους εμβαδό είναι μεγαλύτερο του 3. Δείξτε επίσης ότι ο 3 είναι ο μικρότερος αριθμός μ΄ αυτή την ιδιότητα.

7. Δίνονται n διαφορετικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{x-a_1} + \cdots + \frac{1}{x-a_n}, \quad (x \neq a_i, \forall i).$$

α) Δείξτε ότι για $y \neq 0$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει n πραγματικές ρίζες. Πόσες έχει για $y = 0$;

β) Τι μορφή έχει το σύνολο $\{x : f(x) > y\}$ και ποιο είναι το συνολικό του μήκος για $y > 0$;

Ηράκλειο, 18 Απρ. 2000