Το σύνολο μηδενισμού του μετασχηματισμού Fourier στη Διακριτή Γεωμετρία

Μιχάλης Κολουντζάκης

Πανεπιστήμιο Κρήτης

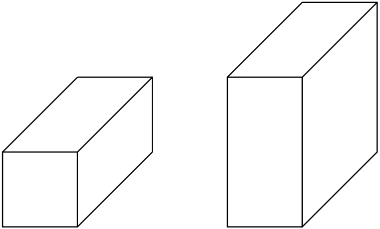
Αθήνα, Μάιος 2008

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Γέμισμα κουτιού με δυο ειδών τούβλα

Δύο τύποι τούβλων:

$A = a_1 \times a_2 \times a_3$ και

$B = b_1 \times b_2 \times b_3$.



- *Πότε μπορούμε να γεμίσουμε κουτί Q διαστάσεων*

$$q_1 \times q_2 \times q_3$$

με τα A και B; Δεν επιτρέπονται περιστροφές των τούβλων.

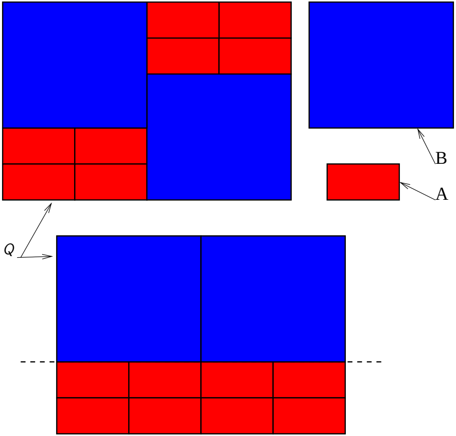
Θεώρημα (Bower and Michael, 2004)

Μόνο αν μπορείς να κόψεις το κουτί Q σε δύο κουτιά το ένα από τα οποία μπορεί να γεμίσει μόνο με το A και το άλλο μόνο με το B.

Ισχύει σε όλες τις διαστάσεις.

Γέμισμα κουτιού πριν και μετά

<u>Παράδειγμα:</u>
A: 4×2,
B: 8×7,
Q: 16×11.



Κόβουμε το κουτί εγκάρσια στον y-άξονα

Μετασχηματισμός Fourier

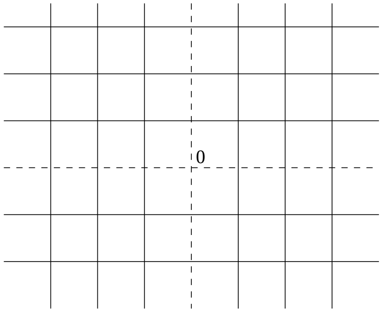
- Μετασχηματισμός Fourier της f:

$$\widehat{f}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)e^{-2\pi i(\xi x+\eta y)}\,dxdy.$$

- Κουτί

$$C = \left(-\frac{c_1}{2},\frac{c_1}{2}\right)\times\left(-\frac{c_2}{2},\frac{c_2}{2}\right)$$

$$\widehat{\chi_C}(\xi,\eta) = \frac{\sin(\pi c_1\xi)}{\xi}\cdot\frac{\sin(\pi c_2\eta)}{\eta}.$$



- Πού μηδενίζεται η $\widehat{\chi_C}(\xi,\eta)$;

- Όταν ($0\neq\xi$ πολ/σιο του $\frac{1}{c_1}$) ή ($0\neq\eta$ πολ/σιο του $\frac{1}{c_2}$).

Γέμισμα κουτιού στο πεδίο Fourier

- Τούβλο A στις θέσεις T, τούβλο B στις θέσεις S:

  Γέμισμα κουτιού Q: $\forall x \in \mathbb{R}^2: \ \chi_Q(x) = \sum_{t\in T} \chi_A(x-t) + \sum_{s\in S} \chi_B(x-s)$.

  Αλλιώς: $\chi_Q = \delta_T * \chi_A + \delta_S * \chi_B$ όπου

  $$\delta_T = \sum_{t\in T} \delta_t, \quad \delta_S = \sum_{s\in S} \delta_s \quad (\delta_a = \text{σημειακή μάζα στο } a).$$

- Fourier την άνω ισότητα, δίνει:

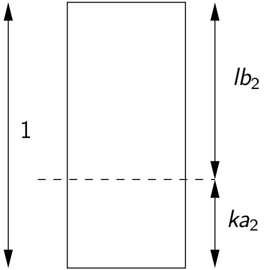
  $$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}: \quad \widehat{\chi_Q}(\xi,\eta) = \phi_T(\xi,\eta)\widehat{\chi_A}(\xi,\eta) + \phi_S(\xi,\eta)\widehat{\chi_B}(\xi,\eta)$$

- Κοινά μηδενικά των $\widehat{\chi_A}$ και $\widehat{\chi_B}$ είναι και μηδενικά της $\widehat{\chi_Q}$.
- Παίρνουμε $Q = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ οπότε

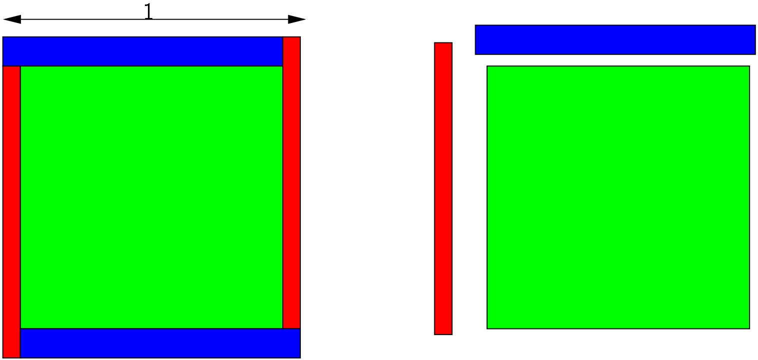
  $$\widehat{\chi_Q}(\xi,\eta) = 0 \Longleftrightarrow \left[\xi \in \mathbb{Z}\setminus\{0\} \text{ ή } \eta \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}\right]$$

Συνέπειες των κοινών μηδενικών

- $\widehat{\chi_Q}$ μηδενίζεται στο
$$(1/a_1, 1/b_2) \in (\frac{1}{a_1}, \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R}, \frac{1}{b_2}).$$
Ομοίως στο $(1/b_1, 1/a_2)$.
- Άρα $\left(\frac{1}{a_1} \in \mathbb{Z} \text{ ή } \frac{1}{b_2} \in \mathbb{Z}\right)$ και $\left(\frac{1}{b_1} \in \mathbb{Z} \text{ ή } \frac{1}{a_2} \in \mathbb{Z}\right)$.
- Αν $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2} \in \mathbb{Z}$ τότε τούβλο A γεμίζει μόνο του το Q.
Αν $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2} \in \mathbb{Z}$ τότε τούβλο B γεμίζει μόνο του το Q.
- Έστω $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{b_1} \in \mathbb{Z}$.
Διασχίζοντας το κουτί κατά τον y-άξονα:
$$1 = ka_2 + lb_2,$$
για κάποια $k, l \in \mathbb{Z}$.



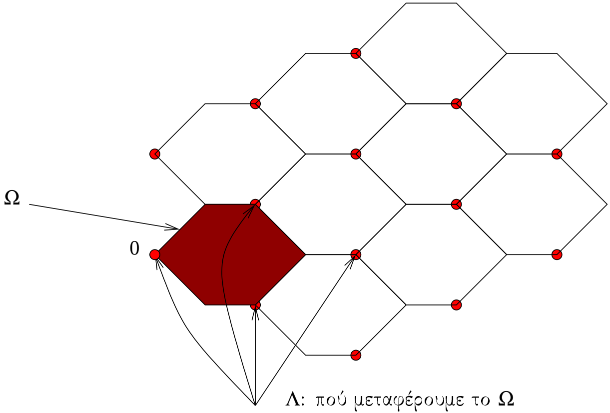
Το θεώρημα δεν ισχύει για τρία τούβλα



Παράλειψη ενός τούβλου δεξιά $\Longrightarrow$

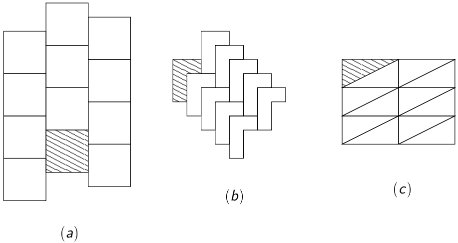
Δε γεμίζει ορθογώνιο με μια πλευρά ίση με 1.

Πότε έχουμε tiling (πλακόστρωση) κατά μεταφορές;

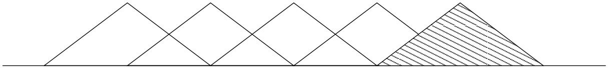


Πότε ένα χωρίο Ω μπορεί να μεταφερθεί σε σημεία Λ ώστε να γεμίζει ο χώρος χωρίς επικαλύψεις;

Πλακόστρωση κατά μεταφορές. Παραδείγματα.



(a): έχει μία περίοδο (b): έχει δύο ανεξάρτητες περιόδους (c): δεν είναι πλακόστρωση κατά μεταφορές



Tiling από συνάρτηση: $\sum_{\lambda\in\Lambda} f(x-\lambda) = \ell = const.$, σχ.$\forall x$.

Γράφουμε: $f + \Lambda = \ell\mathbb{R}^d$.

Ανοιχτό πρόβλημα 1: Αναπόφευκτη περιοδικότητα;

- Η περιοδικότητα ενός tiling είναι μια σημαντική ιδιότητα.
- Στη διάσταση 1 όλα τα tilings είναι ουσιαστικά περιοδικά:

$$A+B=\mathbb{Z} \textit{ και } |A|<\infty \Longrightarrow B=B+t, \textit{ για κάποιο } t \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}.$$

- Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο του διακριτού επιπέδου που δίνει tiling κατά μεταφορές δίνει και περιοδικά tilings.

Εικασία (Lagarias και Wang 1996)

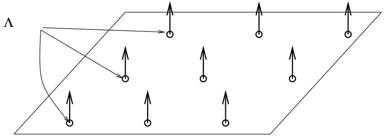
Αν $A+B=\mathbb{Z}^2$ *με* $|A|<\infty$ *τότε υπάρχει* $B' \subseteq \mathbb{Z}^2$, *περιοδικό, τέτοιο ώστε*

$$A+B'=\mathbb{Z}^2.$$

Γνωστή υπό συνθήκες. Π.χ. για 'τοπολογικούς δίσκους'.

Tiling στο πεδίο Fourier

- Κωδικοποιούμε το σύνολο Λ σε ένα *μέτρο* δ_Λ: ένα σημειακό φορτίο σε κάθε σημείο του Λ.



- Tiling σημαίνει $\forall x \in \mathbb{R}^2: \quad \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x-\lambda) = 1$ ή

$$\chi_\Omega * \delta_\Lambda = 1.$$

- Παίρνοντας μετ. Fourier γίνεται

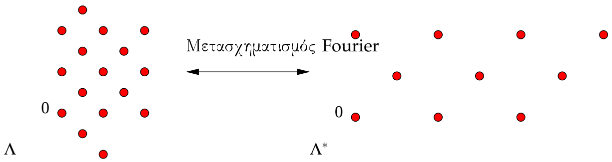
$$\widehat{\chi_\Omega} \cdot \widehat{\delta_\Lambda} = \delta_0.$$

- Άρα: το $\widehat{\delta_\Lambda}$ "ζεί" <u>στα μηδενικά του $\widehat{\chi_\Omega}$</u> και στο 0:

$$\operatorname{supp} \widehat{\delta_\Lambda} \subseteq \{\widehat{\chi_\Omega} = 0\} \cup \{0\}.$$

Υπό προϋποθέσεις αρκεί για tiling.

Ειδική περίπτωση: Poisson Summation Formula



- Lattice (δίκτυο) στο $\mathbb{R}^d$ είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\Lambda = \left\{ Ax : x \in \mathbb{Z}^d \right\}, \quad A \text{ ένας } d \times d \text{ αντιστρέψιμος πίνακας.}$$

- Δυικό lattice είναι το $\Lambda^* = \left\{ A^{-\top} x : x \in \mathbb{Z}^d \right\}$.
- Poisson Summation Formula:

$$\widehat{\delta_\Lambda} = (\mathrm{dens}\,\Lambda) \cdot \delta_{\Lambda^*}.$$

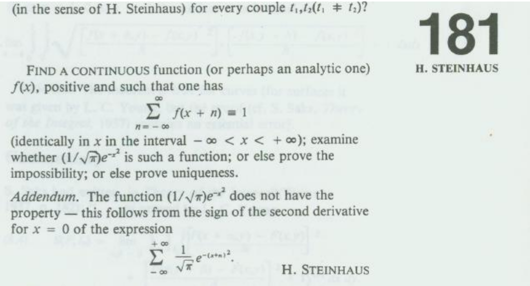
- Για lattice tiling του Ω με lattice Λ πρέπει και αρκεί:

$$0 \neq \nu \in \Lambda^* \implies \widehat{\chi_\Omega}(\nu) = 0.$$

H. Steinhaus: υπάρχει αναλυτική $f > 0$ τ.ώ.

$$f + \mathbb{Z} = \mathbb{R};$$

Μήπως η Ce^{-x^2};



(in the sense of H. Steinhaus) for every couple $t_1, t_2 (t_1 \neq t_2)$?

181

H. STEINHAUS

FIND A CONTINUOUS function (or perhaps an analytic one) $f(x)$, positive and such that one has

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \equiv 1$$

(identically in x in the interval $-\infty < x < +\infty$); examine whether $(1/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$ is such a function; or else prove the impossibility; or else prove uniqueness.

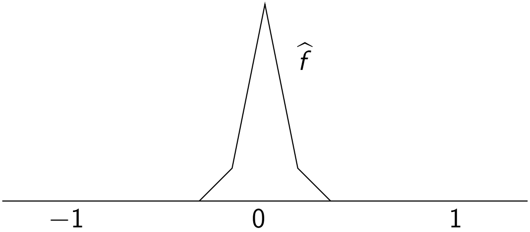
Addendum. The function $(1/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$ does not have the property — this follows from the sign of the second derivative for $x = 0$ of the expression

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+n)^2}.$$

H. STEINHAUS

$\Leftrightarrow \widehat{f} = 0$ στο $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Η Ce^{-x^2} δεν έχει μηδενικά στο μετ. Fourier.



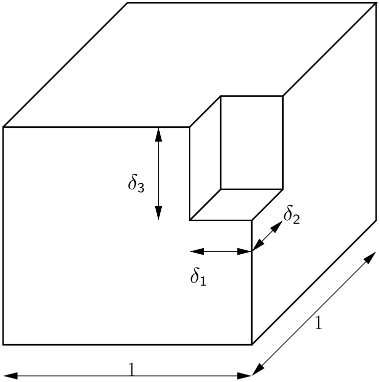
Για $f > 0$ αθροίζουμε στο $\widehat{f}$ δύο τρίγωνα με ασύμμετρη βάση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Γεμίζει ο "δαγκωμένος κύβος" το χώρο;

- Έχουμε κόψει τη γωνία ενός κύβου.

  Καμιά υπόθεση δε κάνουμε για τις διαστάσεις $\delta_1, \delta_2, \delta_3$.

  Δίνει tilings του χώρου;



- Η απάντηση είναι ΝΑΙ σε κάθε διάσταση (απλή εποπτεία σε διάσταση 2).
  Το δείχνουμε χρησιμοποιώντας το μετ. Fourier.
- Μεγάλο κουτί: $Q = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$, μικρό κουτί που αφαιρούμε: $R = \prod_{j=1}^{d}(\frac{1}{2} - \delta_j, \frac{1}{2})$.

Ο δαγκωμένος κύβος στο πεδίο Fourier

- Ο μετ. Fourier του δαγκωμένου κύβου είναι:

$$\prod_{j=1}^{d} \frac{\sin \pi \xi_j}{\pi \xi_j} - F(\xi) \prod_{j=1}^{d} \frac{\sin \pi \delta_j \xi_j}{\pi \xi_j},$$

όπου $F(\xi) = \exp\left(\pi i \sum_{j=1}^{d} (\delta_j - 1) \xi_j\right)$.

- Ορίζουμε πίνακα A και το lattice Λ^*:

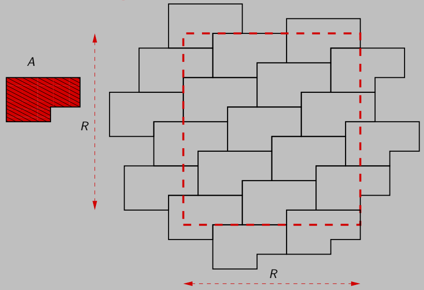
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\delta_2 & & & \\ & 1 & -\delta_3 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -\delta_d \\ -\delta_1 & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda^* = \left\{ A^{-1} x : \quad x \in \mathbb{Z}^d \right\}.$$

- Εύκολα ελέγχουμε ότι ο μετ. Fourier μηδενίζεται στο $\Lambda^* \setminus \{0\}$.
- Άρα έχουμε lattice tiling με το δυικό lattice $\Lambda = \left\{ A^{\top} x : \; x \in \mathbb{Z}^d \right\}$.

Ανοιχτό πρόβλημα 2: Αποφασισιμότητα

• Από των χώρο των tilings έχουν προέλθει πολλά παραδείγματα μη αποφασίσιμων προβλημάτων (Berger 1964, Robinson 1971).
• Δοθέντος πεπερασμένου $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ δεν είναι γνωστό αν μπορούμε να αποφασίσουμε αλγοριθμικά αν το A δίνει tilings κατά μεταφορές.

Έστω $R(A)$ το μέγιστο $R > 0$ τ.ώ. κάποιες μεταφορές του A καλύπτουν το $[-R, R]^2$ χωρίς αλληλοεπικαλύψεις.



Διαγώνιο επιχείρημα $\to$
A δε δίνει tilings $\iff R(A) < \infty$.

• Δώστε ένα φράγμα για το $R(A)$ μέσω, π.χ., της διαμέτρου D του A, για A όχι tile.
• Π.χ. 2^{2^D} αρκεί για αποφασισιμότητα.

50 χρόνια πίσω: Idempotent Theorem

- Ένα δύσκολο ερώτημα για σειρές Fourier:
  Πότε είναι μια ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{Z}$, σειρά Fourier ενός μέτρου $\mu \in M(\mathbb{T})$;
- Μέτρο μ λέγεται idempotent αν $\widehat{\mu}(n) \in \{0, 1\}$. (*Τότε* $\mu * \mu = \mu$.)
- Ποια είναι τα idempotent μέτρα; Πότε μια ακολουθία από 0 ή 1 είναι μετ. Fourier μέτρου;

Θεώρημα (Helson, Rudin, Cohen)

Όταν η ακολουθία των 1 είναι (α) πεπερασμένη, (β) πλήρης αριθμ. πρόοδος ή μπορεί να φτιαχτεί από τέτοια με πεπερασμένες το πλήθος συνολοθεωρητικές πράξεις.

- Ισχύει σε κάθε τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα (αριθμ. πρόοδοι $\longrightarrow$ cosets).
- Το βλέπουμε σαν ένα θεώρημα που παράγει δομή.

Δομή των tilings σε διάσταση 1

Θεώρημα (Leptin και Müller, 1991, K. και Lagarias 1996)

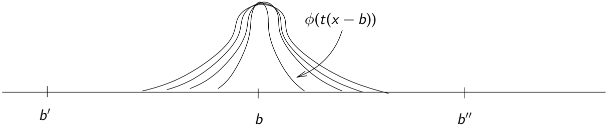
Αν $f + \Lambda = \mathbb{R}$, και η $f \in L^1$ έχει συμπαγή φορέα τότε $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{J}(\alpha_j \mathbb{Z} + \beta_j)$.

Tiling είναι επιπλέον ανάγωγο $\Rightarrow \alpha_j = \alpha$ (περιοδικό tiling).

- Η δομή προκύπτει από το idempotent theorem μέσω ενός θεωρήματος του Y. Meyer (1970).
- Tiling $\Longrightarrow \operatorname{supp} \widehat{\delta_\Lambda} \subseteq B := \{0\} \cup \left\{\widehat{f} = 0\right\}$.
- Συμπ. φορέας $f \Rightarrow \widehat{f}$ αναλυτική $\Rightarrow B$ διακριτό, αυξάνει γραμμικά.
- Για πολυώνυμα $P_b(\cdot)$ έχουμε: $\widehat{\delta_\Lambda} = \sum_{b \in B} P_b(\partial)\delta_b$.
- Τι τάξης είναι η <u>κατανομή</u> $\widehat{\delta_\Lambda}$; ('Πόσες παραγώγους έχει;')

Ο δυϊσμός ως μεγεθυντικός φακός

- Εφαρμόζουμε την κατανομή $\widehat{\delta_\Lambda}$ στη συνάρτηση $\phi(t(x-b))$.



- Η τάξη μεγέθους του $\widehat{\delta_\Lambda}(\phi(t(x-b))$ για $t \to \infty$ μας λέει την ταξη της κατανομής.
  Φραγμένο $\widehat{\delta_\Lambda}(\phi(t(x-b)) \Longrightarrow \widehat{\delta_\Lambda}$ είναι τοπικά μέτρο.
- Δυϊσμός $\widehat{\alpha}(\beta) = \alpha(\widehat{\beta})$ δίνει

$$\left|\widehat{\delta_\Lambda}(\phi(t(x-b)))\right| = \left|\delta_\Lambda(\phi(\widehat{t(x-b)}))\right| \le \frac{1}{t}\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|\widehat{\phi}(\frac{\lambda}{t})\right| = O(1)$$

- Άρα $\widehat{\delta_\Lambda} = \sum_{b\in B} c_b\delta_b$, με $|c_b| = O(1)$.
- Θέωρημα Meyer $\longrightarrow \Lambda = \bigcup_{j=1}^{J}(\alpha_j\mathbb{Z} + \beta_j)$.

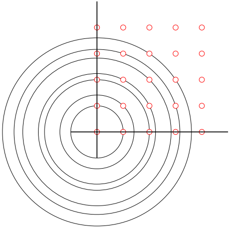
Ανοιχτό πρόβλημα 3: Απαραίτητος ο συμπαγής φορέας;

- Ο συμπαγής φορέας της f συνεπάγεται
  1. Διακριτό σύνολο ριζών για την $\widehat{f}$
  2. Έλεγχο για το πλήθος των ριζών στο $(-R, R)$.

- Ισχύει το θεώρημα δομής όταν η f δεν έχει συμπαγή φορέα;

(περ. 1950) Υπάρχει σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^2$ που όπως και να το μετακινήσουμε πάνω στο επίπεδο περιέχει πάντα ακριβώς ένα ακέραιο σημείο;
Tiling μορφή: το E δίνει tilings του επιπέδου με κάθε στροφή του $\mathbb{Z}^2$.

- Μη μετρήσιμη περίπτωση: ΝΑΙ από Jackson και Mauldin (2002).



Fourier μορφή για μετρήσιμη περίπτωση:

Υπάρχει E με το $\widehat{\chi_E}$ να μηδενίζεται σε όλους τους κύκλους με κέντρο το 0 που περνούν από ακέραια σημεία;

- f έχει συμπαγή φορέα $\Rightarrow$ $\widehat{f}$ ακέραια συνάρτηση, $\left|\widehat{f}(z)\right| \le e^{C|z|}$

$\Rightarrow$ η $\widehat{f}$ έχει γραμμικό πλήθος ριζών σε κάθε ευθεία
$\Rightarrow$ Steinhaus σύνολα δε μπορούν να είναι φραγμένα (Beck, 1989).

Άλλα αποτελέσματα για το πρόβλημα του Steinhaus

- (K. 1996) E σύνολο Steinhaus $\Longrightarrow \int_E |x|^\alpha \, dx = \infty$, $\alpha > 10/3$.
- (K. και Wolff 1997) $\alpha > 46/27$.

Το $46/27$ συνδέεται με τις υπάρχουσες εκτιμήσεις στο πρόβλημα 'Πόσα ακέραια σημεία βρίσκονται σ'ένα μεγάλο δίσκο;'.

Θεώρημα (K. και Wolff 1997)

$f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$, και $\widehat{f}$ μηδενίζεται σε όλες τις σφαίρες με κέντρο 0 που περνούν από ακέραια σημεία $\Longrightarrow f$ συνεχής.

- Άρα δεν υπάρχουν μετρήσιμα σύνολα Steinhaus σε διάσταση $d \geq 3$.

Μια απλή απόδειξη για $d \geq 3$

Θεώρημα (Κ. και Παπαδημητράκης 2000)

Δεν υπάρχουν σύνολα Steinhaus σε διάσταση $d = 3$.

- Αρκεί να βρούμε lattice Λ^* στο σύνολο μηδενισμού του $\widehat{\chi_E}$ (σφαίρες) με
$$\operatorname{vol}\Lambda^* \notin \mathbb{Z}.$$
- Γιατί τότε θα είχαμε $E + \Lambda = \ell\mathbb{R}^3$ με
$$\ell = \operatorname{dens}\Lambda = \operatorname{vol}\Lambda^* \notin \mathbb{Z}.$$
- Με $\Lambda^* = \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{11})\mathbb{R}^3$,
$$\operatorname{vol}\Lambda^* = \sqrt{2\cdot 6\cdot 11} \notin \mathbb{Z}$$

και δείχνουμε για $x, y, z \in \mathbb{Z}$:
$$2x^2 + 6y^2 + 11z^2 = \Box + \Box + \Box.$$

Κοινά tiles για πολλά lattices

Μια πεπερασμένη εκδοχή συνόλων Steinhaus:

Θεώρημα (Κ. (1997))

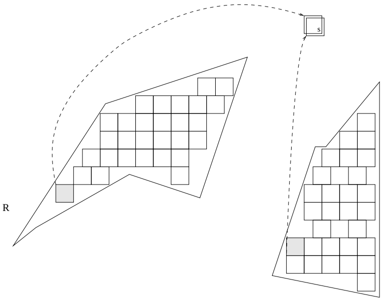
Αν τα lattices $\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \subseteq \mathbb{R}^d$ *έχουν τον ίδιο όγκο και το άθροισμα*

$$\Lambda_0^* + \cdots + \Lambda_n^*$$

είναι ευθύ τότε υπάρχει ένα $E \subseteq \mathbb{R}^d$ *που δίνει tilings με κάθε* Λ_j.

Απόδειξη μέσω ενός θεωρήματος πυκνότητας τύπου Kronecker για lattices.

Τα θεμελιώδη χωρία των lattices μετακινούνται με κινήσεις από τα αντίστοιχα lattices ώστε να επικαλύπτονται.



Ανοιχτό πρόβλημα 4: Φραγμένο κοινό θεμελιώδες χωρίο

• Αν Λ_1, Λ_2 είναι δύο lattices στο επίπεδο με

$$\Lambda_1^* \cap \Lambda_2^* = \{0\},$$

μπορεί ένα (μετρήσιμο) κοινό tile αυτών να είναι φραγμένο;
• Στη μη-μετρήσιμη περίπτωση αυτό είναι δυνατό αν το άθροισμα

$$\Lambda_1 + \cdots + \Lambda_n$$

είναι ευθύ.
• ανάγεται στο:
Αν δύο lattices $\Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ έχουν ίδιο όγκο τότε υπάρχει $f : \Lambda_1 \to \Lambda_2$, <u>1-1 και επί</u> τ.ώ.

$$|x - f(x)| \leq \text{const}.$$

Ανοιχτό πρόβλημα 5: Διάμετρος κοινού tile

- Αν $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ είναι lattices στο $\mathbb{R}^d$ και D_j τα αντίστοιχα θεμελιώδη χωρία η συνάρτηση

$$f = \chi_{D_1} * \cdots * \chi_{D_N}$$

είναι tile με όλα τα Λ_j.
- Εύκολα προκύπτει ότι όπως και να επιλέξουμε τα D_j

$$\operatorname{diam}\operatorname{supp} f \sim C_d N.$$

- Με θεωρία αναλυτικών συναρτήσεων πολλών μεταβλητών:

Θεώρημα (K. και Wolff, 1997)

Αν $f + \Lambda_j = \mathbb{R}^d$ για $j = 1, 2, \ldots, N$, με $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \{0\}$, τότε

$$\operatorname{diam}\operatorname{supp} f \geq C N^{1/d}.$$

- Ποια η ελάχιστη διάμετρος ως συνάρτηση του N;

Ανοιχτό πρόβλημα 6: Κοινά θεμελιώδη χωρία σε ομάδες

• G αβελιανή ομάδα, $H \leq G$ υποομάδα, $T \subseteq G$ επιλογή αντιπροσώπων για τα cosets της H στην G (θεμελιώδες χωρίο) $\Longrightarrow$

$$T + H = G, \quad \text{είναι tiling.}$$

• $H_1, H_2 \leq G$ πληρούν $[G : H_1] = [G : H_2] \Longrightarrow$
πάντα υπάρχει κοινό θεμελιώδες χωρίο των H_1, H_2 στην G.

• Όχι πάντα για τρεις υποομάδες.

• Δώστε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε οι $H_1, H_2, H_3 \leq G$ με τον ίδιο δείκτη να έχουν ένα κοινό θεμελιώδες χωρίο στην G.
Μπορείτε να υποθέσετε $|G| < \infty$.

Φασματικά σύνολα (spectral sets)

- $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι *φάσμα* του $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ αν

$$E(\Lambda) = \left\{ e_\lambda(x) = e^{2\pi i \lambda \cdot x} : \lambda \in \Lambda \right\}$$

  είναι ορθογώνια βάση για το χώρο $L^2(\Omega)$. Το Ω λέγεται τότε *φασματικό*.
- Παράδειγμα: $\Omega = (0,1)^d$ έχει το $\Lambda = \mathbb{Z}^d$ ως φάσμα.
- Μη μοναδικότητα: Το $(0,1)^d$ επίσης έχει το $v + \mathbb{Z}^d$ ως φάσμα, $v \in \mathbb{R}^d$. Έχει και άλλα φάσματα, πολύ διαφορετικά.
- $\langle e_\lambda, e_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} = \widehat{\chi_\Omega}(\lambda - \mu)$ και Θ. Parseval συνεπάγεται:

$$\Lambda \text{ φάσμα του } \Omega \Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \Lambda} \left|\widehat{\chi_\Omega}\right|^2 (x - \lambda) = \left|\Omega\right|^2, \text{ α.ε. } x \in \mathbb{R}^d.$$

- Με άλλα λόγια, $\left|\widehat{\chi_\Omega}\right|^2 + \Lambda$ είναι tiling σε επίπεδο $\left|\Omega\right|^2$.
- Ορθογωνιότητα: $\Lambda - \Lambda \subseteq \{0\} \cup \{\widehat{\chi_\Omega} = 0\}$.

Η εικασία του Fuglede

Εικασία (Fuglede, 1974)

Το $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φασματικό αν και μόνο αν επιδέχεται tilings κατά μεταφορές. Υποθέτοντας $|\Omega| = 1$:

$$\exists \Lambda : |\widehat{\chi_\Omega}|^2 + \Lambda = \mathbb{R}^d \quad \Leftrightarrow \quad \exists M : \Omega + M = \mathbb{R}^d.$$

- $\widehat{|\widehat{\chi_\Omega}|^2} = \chi_\Omega * \widetilde{\chi_\Omega}$ και

$$\operatorname{supp} \chi_\Omega * \widetilde{\chi_\Omega} = \Omega - \Omega.$$

- $|\widehat{\chi_\Omega}|^2 + \Lambda = \mathbb{R}^d \Rightarrow \operatorname{supp} \widehat{\delta_\Lambda} \subseteq \{0\} \cup (\Omega - \Omega)^c$
- Fuglede: lattice tiling $\Longleftrightarrow$ lattice φάσμα
- PSF: $\widehat{\delta_\Lambda} = \delta_{\Lambda^*}$ άρα

$$|\widehat{\chi_\Omega}|^2 + \Lambda = \mathbb{R}^d \Rightarrow \Omega - \Omega \cap \Lambda^* = \{0\}$$

- Άρα $\Omega + \Lambda^*$ είναι packing. Αλλά $|\Omega| \cdot \operatorname{dens} \Lambda^* = 1$ άρα είναι tiling.
- Ομοίως για το αντίστροφο.

Εικασία Fuglede: θετικά αποτελέσματα για κυρτά

• Venkov, 1954, McMullen, 1980: Κυρτά tiles επιδέχονται και lattice tilings $\Longrightarrow$ είναι φασματικά.

• K., 2000: Μη-συμμετρικά κυρτά σώματα δεν είναι φασματικά. Επίσης δεν είναι tiles (Minkowski).

• Iosevich, Katz και Tao, 2001: Κυρτό με κάποιο σημείο θετικής καμπυλότητας δεν είναι φασματικό (ούτε βέβαια και tile).

• Iosevich, Katz και Tao, 2003: Εικασία σωστή για κυρτά στο επίπεδο. Μόνο παραλληλόγραμμα και συμμετρικά εξάγωνα είναι κυρτά tiles.

• Iosevich και Rudnev, 2002: Αν Ω ομαλό, συμμετρικό κυρτό στο $\mathbb{R}^d$ τότε κάθε ορθογώνια οικογένεια από εκθετικά είναι πεπερασμένη ($d \neq 1 \bmod 4$) ή υποσύνολο 1-διάστατης αριθμητικής προόδου ($d = 1 \bmod 4$).

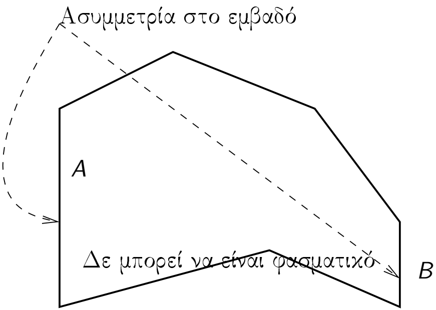
Ανοιχτό πρόβλημα 7: Πόσα ορθογώνια εκθετικά για τη μπάλα;

- Iosevich και Rudnev, 2002 και Fuglede, 2002 έδειξαν για τη μπάλα $B \subseteq \mathbb{R}^d$ ότι δεν υπάρχει άπειρο σύνολο $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε η οικογένεια

$$e^{2\pi i \lambda \cdot x}, \quad \lambda \in \Lambda,$$

  να είναι ορθογώνιο στο $L^2(B)$.
- Μπορεί όμως ένα τέτοιο σύνολο να είναι οσοδήποτε μεγάλο;

Εικασία Fuglede: θετικά αποτελέσματα για γενικά χωρία



Κ. και Παπαδημητράκης, 2003: Αν ένα πολύτοπο είναι φασματικό τότε για κάθε κάθετη κατεύθυνση πρέπει να υπάρχει τόσο εμβαδό που 'βλέπει αριστερά' όσο 'βλέπει δεξιά'.
Αυτό ισχύει και για tiles.

- Κ. και Łaba, 2001: Αν $\Omega \subseteq (0, 3/2-\epsilon)$ και $|\Omega| = 1$ τότε η εικασία ισχύει για το Ω.

Εικασία Fuglede: Αντιπαραδείγματα για ‘Φασματικό $\Longrightarrow$ tile’

• Tao, 2003: ‘Φασματικό $\Longrightarrow$ tile’ δεν ισχύει σε διάσταση $d \geq 5$.

• Matolcsi, 2004: $d = 4$ επίσης.

• K. και Matolcsi, 2004: $d = 3$ επίσης.

• Πρώτα σε πεπερασμένες ομάδες:
Αντιπαράδειγμα στο $\mathbb{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_d}$ μεταφέρεται στο $\mathbb{Z}^d$ και στο $\mathbb{R}^d$.

• Σε ομάδα $\mathbb{Z}_2^n$ ορθογώνια εκθετικά δίνονται από ένα πίνακα Hadamard.

• Πίνακας Hadamard 12×12 δίνει φασματικό σύνολο μεγέθους 12 στην ομάδα $\mathbb{Z}_2^{12}$.
Αυτό δεν είναι tile αφού το 12 δε διαιρεί την τάξη της ομάδας $= 2^{12}$

Εικασία Fuglede: Αντιπαραδείγματα για ‘tile $\Longrightarrow$ φασματικό’

• Επιπλέον δυσκολία: δεν υπάρχουν εύκολα κριτήρια για να μην είναι ένα χωρίο φασματικό.
• Για tiles σε πεπερασμένες ομάδες έχουμε το κριτήριο της διαιρετότητας.

• K. και Matolcsi, 2004:‘tile $\Longrightarrow$ φασματικό’ είναι λάθος για $d = 5$

• Farkas και Révész, 2004: $d = 4$

• Farkas, Matolcsi και Mora, 2005: $d = 3$

• Εικασία ανοιχτή και στις δύο κατευθύνσεις για $d = 1, 2$.

• Ίσως να ισχύει η εικασία για κυρτά σώματα (ισχύει ήδη στη μία κατεύθυνση).