Σημειώσεις για τα Μαθήματα
Εισαγωγή στην Ανάλυση Ι και Εισαγωγή στην Ανάλυση ΙΙ

Θέμης Μήτσης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Κρητης

Ηρακλειο

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το Αξίωμα τής Πληρότητας

Κάνουμε τη σύμβαση ότι όλα τα σύνολα στους ορισμούς και στις διατυπώσεις των θεωρημάτων είναι μη κενά.

Ορισμός. *Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται*

(1) *Άνω φραγμένο, αν υπάρχει $s \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a \leq s$ για κάθε $a \in A$. Κάθε τέτοιο s ονομάζεται άνω φράγμα τού A.*
(2) *Κάτω φραγμένο, αν υπάρχει $\ell \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $a \geq \ell$ για κάθε $a \in A$. Κάθε τέτοιο ℓ ονομάζεται κάτω φράγμα τού A.*
(3) *Φραγμένο, αν είναι άνω και κάτω φραγμένο.*

Γεωμετρικά, όλα τα στοιχεία ενός άνω φραγμένου συνόλου είναι αριστερά από κάποιον αριθμό. Όλα τα στοιχεία ενός κάτω φραγμένου συνόλου είναι δεξιά από κάποιον αριθμό. Όλα τα στοιχεία ενός φραγμένου συνόλου είναι ανάμεσα σε δυο αριθμούς.

Παραδείγματα. Το $(0, +\infty)$ είναι κάτω φραγμένο, όχι άνω φραγμένο. Ένα κάτω φράγμα είναι το -1289092. Ένα άλλο κάτω φράγμα είναι το 0. Στην πραγματικότητα, κάθε αριθμός μικρότερος από ή ίσος με μηδέν είναι κάτω φράγμα. Το $(0, 1)$ είναι φραγμένο. Ένα κάτω φράγμα είναι το 0 και ένα άνω φράγμα είναι το $10^{1000} + 5647$. Ένα άλλο άνω φράγμα είναι το 1. Παρατηρήστε και εδώ ότι κάθε αριθμός μεγαλύτερος από ή ίσος με 1 είναι άνω φράγμα. Το 1 είναι το ελάχιστο από όλα τα άνω φράγματα.

Παρατήρηση. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι φραγμένο αν και μόνο αν υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $|a| \leq c$ για κάθε $a \in A$. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής: Αν υπάρχει τέτοιο c τότε ένα άνω φράγμα τού A είναι το c και ένα κάτω φράγμα είναι το $-c$. Αντίστροφα, αν το A είναι φραγμένο και s, ℓ είναι ένα άνω και ένα κάτω φράγμα αντίστοιχα, τότε για c μπορούμε να πάρουμε το $\max\{|s|, |\ell|\}$.

Αξίωμα (Η πληρότητα των πραγματικών αριθμών)**.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο. Τότε το A έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο ονομάζεται supremum τού A και συμβολίζεται με $\sup A$. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο τότε γράφουμε $\sup A = +\infty$.*

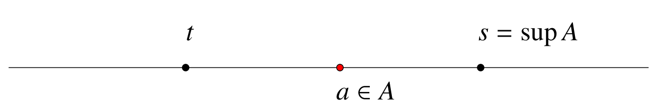
Παραδείγματα. $\sup(0 + \infty) = +\infty$, $\sup(-\infty, 1) = \sup(0, 1) = \sup(0, 1] = 1$.

Θεώρημα (Ύπαρξη infimum)**.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο. Τότε το A έχει μέγιστο κάτω φράγμα το οποίο ονομάζεται infimum τού A και συμβολίζεται με $\inf A$. Αν το A δεν είναι κάτω φραγμένο τότε γράφουμε $\inf A = -\infty$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{-a : a \in A\}$. Αφού το A είναι κάτω φραγμένο, το B είναι άνω φραγμένο, επομένως από το αξίωμα τής πληρότητας έχει supremum, έστω s. Τότε το $-s$ είναι το infimum τού A. □

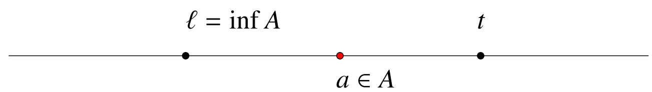
Παραδείγματα. $\inf(-\infty, 0) = -\infty$, $\inf(0, +\infty) = \inf(0, 1) = \inf[0, 1) = 0$.

Θεώρημα (Η χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum)**.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο και $s \in \mathbb{R}$. Τότε $s = \sup A$ αν και μόνο αν το s είναι άνω φράγμα τού A και για κάθε $t < s$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $t < a$.*



Απόδειξη. Έστω ότι $s = \sup A$ και $t < s$. Τότε το t δεν είναι άνω φράγμα τού A αφού το s είναι το ελάχιστο άνω φράγμα. Επομένως υπάρχει στοιχείο τού A μεγαλύτερο από t. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, αν το s δεν ήταν το supremum τού A, τότε θα υπήρχε κάποιο άνω φράγμα s' τού A τέτοιο ώστε $s' < s$. Έτσι από υπόθεση, θα υπήρχε $a \in A$ με $s' < a$, άτοπο γιατί το s' είναι άνω φράγμα τού A. □

Θεώρημα (Η χαρακτηριστική ιδιότητα τού infimum)**.** *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ κάτω φραγμένο και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε $\ell = \inf A$ αν και μόνο αν το ℓ είναι κάτω φράγμα τού A και για κάθε $t > \ell$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $t > a$. Η απόδειξη είναι τελείως ανάλογη με αυτήν τής χαρακτηριστικής ιδιότητας τού supremum.*



Όλα τα παρακάτω είναι συνέπειες τού αξιώματος τής πληρότητας.

Θεώρημα. *Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο. Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο. Θέτουμε $s = \sup \mathbb{N}$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $s - 1 < n$. Αλλά $n + 1 \in \mathbb{N}$, άρα $n + 1 \leq s$ αφού το s υποτίθεται ότι είναι άνω φράγμα τού $\mathbb{N}$. Έτσι, $n \leq s - 1$, άτοπο. Επομένως το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, άρα ούτε το $\mathbb{Z}$. Δείχνουμε τώρα ότι το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο. Έστω ένα τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Αφού το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $-x < n$, άρα $-n < x$. Δηλάδη για το τυχόν x υπάρχει ακέραιος μικρότερος από x. Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο. □

Θεώρημα (Η Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{N}$)**.** *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο. □

Παράδειγμα. Θέτουμε $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Τότε $\inf A = 0$. Πράγματι, το 0 είναι προφανώς κάτω φράγμα. Επίσης, αν πάρουμε τυχόν $t > 0$, τότε από την Αρχιμήδεια ιδιότητα των φυσικών, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n < t$. Αλλά το $1/n$ είναι στοιχείο τού A, άρα από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού infimum, έχουμε το ζητούμενο.

Θεώρημα. *Έστω $A \subset \mathbb{Z}$. Αν το A είναι άνω φραγμένο τότε έχει μέγιστο στοιχείο. Αν το A είναι κάτω φραγμένο τότε έχει ελάχιστο στοιχείο.*

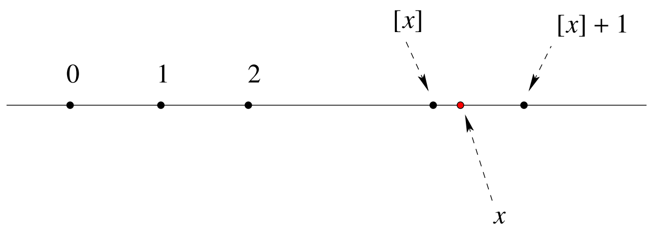
Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος αποδεικνύεται ανάλογα. Έστω λοιπόν ότι το A είναι άνω φραγμένο. Θέτουμε $s = \sup A$ και ας υποθέσουμε ότι το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $n \in A$ τέτοιο ώστε $s - 1 < n$. Αφού το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο, πρέπει $n < s$. Πάλι από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $m \in A$ τέτοιο ώστε $n < m$. Αφού το A δεν έχει μέγιστο στοιχείο, πρέπει $m < s$. Επομένως, $s - 1 < n < m < s$. Δηλαδή τα n και m έχουν απόσταση μικρότερη από 1, άτοπο γιατί είναι ακέραιοι αριθμοί. □

Ορισμός. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε*

$$A = \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

Το A δεν είναι κενό (αφού το $\mathbb{Z}$ δεν είναι κάτω φραγμένο), και άνω φραγμένο (από το x). Επομένως, από το προηγούμενο θεώρημα, το A έχει μέγιστο στοιχείο το οποίο ονομάζεται ακέραιο μέρος τού x και συμβολίζεται με $[x]$. Δηλαδή το $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος από ή ίσος με x.

Παρατήρηση. Προφανώς $[x] \leq x < [x] + 1$ (το $[x]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος από ή ίσος με x, άρα κατ' ανάγκη το $[x] + 1$ είναι μεγαλύτερο από x) . Αυτό λέει ότι κάθε πραγματικός αριθμός x πέφτει ανάμεσα σε δυο διαδοχικούς ακεραίους. Ο μικρότερος από τους δυο είναι το ακέραιο μέρος τού x.



Παραδείγματα. $[1] = 1$, $[1.2] = 1$, $[-1] = -1$, $[-1.2] = -2$.

Θεώρημα (Η πυκνότητα των ρητών)**.** *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει $q \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $a < q < b$. Δηλαδή ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δυο πραγματικούς υπάρχει ρητός.*

Απόδειξη. Από την Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{N}$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < b - a$. Θέτουμε

$$q = \frac{[na] + 1}{n}.$$

Τότε το q είναι ρητός αριθμός. Επίσης

$$\frac{[na] + 1}{n} \leq \frac{na + 1}{n} = a + \frac{1}{n} < a + b - a = b,$$

και

$$\frac{[na] + 1}{n} > \frac{na}{n} = a.$$

Άρα $a < q < b$. □

Θεώρημα (Υπαρξη n-οστής ρίζας)**.** *Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ με $a > 0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικό $b > 0$ τέτοιο ώστε $b^n = a$. Το b αυτό λέγεται n-οστή ρίζα τού a και συμβολίζεται με $\sqrt[n]{a}$ ή $a^{1/n}$.*

Απόδειξη. Για απλότητα, θα δώσουμε την απόδειξη στην ειδική περίπτωση $a = n = 2$. Η ιδέα στη γενική περίπτωση είναι ακριβώς η ίδια. Θέτουμε

$$A = \{x > 0 : x^2 < 2\}.$$

Το A είναι μη κενό ($1 \in A$) και άνω φραγμένο (το 666 είναι ένα άνω φράγμα). Θέτουμε $b = \sup A$ και ισχυριζόμαστε ότι $b^2 = 2$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $b^2 < 2$, επιλέγουμε ένα $\varepsilon \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon < \frac{2 - b^2}{2b + 1}.$$

Τότε

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 < b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2b + 1) + b^2 < \frac{2 - b^2}{2b + 1} \cdot (2b + 1) + b^2 = 2.$$

Άρα $b + \varepsilon \in A$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το b είναι άνω φράγμα τού A.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι $b^2 > 2$, επιλέγουμε ένα $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\varepsilon < \frac{b^2 - 2}{2b} < b.$$

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $b - \varepsilon < x$. Άρα

$$x^2 > (b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2b\varepsilon > b^2 - 2b \cdot \frac{b^2 - 2}{2b} = 2,$$

άτοπο γιατί $x \in A$. Συμπεραίνουμε ότι $b^2 = 2$. Το b είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός μ' αυτήν την ιδιότητα, γιατί αν $b_1^2 = 2$ για κάποιο $b_1 > 0$, τότε $b^2 = b_1^2$, άρα $b = b_1$ αφού τα b και b_1 είναι θετικά. □

Θεώρημα (Υπαρξη άρρητων αριθμών)**.** *Το $\sqrt{2}$ δεν είναι ρητός αριθμός.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ για κάποια $m, n \in \mathbb{N}$. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι m και n δεν είναι και οι δυο άρτιοι. Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε ότι $m^2 = 2n^2$, δηλαδή ο m^2 είναι άρτιος, άρα και ο m. Αυτό σημαίνει ότι $m = 2k$ για κάποιον φυσικό k. Επομένως $2n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, άρα $n^2 = 2k^2$. Δηλαδή και ο n^2 είναι άρτιος, άρα και ο n, άτοπο. □

Θεώρημα (Η πυκνότητα των άρρητων)**.** *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε υπάρχει άρρητος γ τέτοιος ώστε $a < \gamma < b$.*

Απόδειξη. Από την πυκνότητα των ρητών, υπάρχει ρητός $q \neq 0$ τέτοιος ώστε $a/\sqrt{2} < q < b/\sqrt{2}$. Θέτουμε $\gamma = q\sqrt{2}$. Τότε ο γ είναι άρρητος (αν ήταν ρητός τότε και το $\sqrt{2} = \gamma/q$ θα ήταν ρητός), και $a < \gamma < b$. $\square$

Ασκήσεις

1.1. *Έστω $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $x < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι $x = 0$.*

Λύση. Αν το x ήταν θετικό, τότε για $\varepsilon = \frac{x}{2}$ θα είχαμε $x < \frac{x}{2}$, άτοπο. □

1.2. *Έστω x, y τέτοια ώστε $x < y + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι $x \leq y$.*

Λύση. Αν είχαμε $x > y$ τότε για $\varepsilon = x - y$ θα παίρναμε $x < y + x - y = x$, άτοπο. □

1.3. *Έστω x, y θετικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x < ty$ για κάθε $t > 1$. Δείξτε ότι $x \leq y$.*

Λύση. Αν είχαμε $x > y$, τότε για $t = x/y$ θα παίρναμε $x < \frac{x}{y} \cdot y = x$, άτοπο. □

1.4. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ φραγμένο τέτοιο ώστε $\sup A = \inf A$. Δείξτε ότι το A είναι μονοσύνολο.*

Λύση. Θέτουμε $c = \sup A = \inf A$. Τότε για κάθε $a \in A$ έχουμε $c \leq a \leq c$. Άρα $A = \{c\}$. □

1.5. *Έστω A μη κενό άνω φραγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι κάποιο $a \in A$ είναι άνω φράγμα τού A. Δείξτε ότι $\sup A = a$.*

Λύση. Το $\sup A$ είναι άνω φράγμα τού A και το a στοιχείο τού A, άρα $a \leq \sup A$. Το a είναι άνω φράγμα τού A και το $\sup A$ το μικρότερο άνω φράγμα τού A, άρα $\sup A \leq a$. Επομένως $\sup A = a$. □

1.6. *Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $A = \{q \in \mathbb{Q} : q < a\}$. Δείξτε ότι $\sup A = a$.*

Λύση. Το a είναι άνω φράγμα τού A, άρα $\sup A \leq a$. Αν είχαμε $\sup A < a$, τότε, από πυκνότητα ρητών, θα υπήρχε $q_0 \in \mathbb{Q}$ τέτοιος ώστε $\sup A < q_0 < a$. Αλλά τότε το q_0 θα ήταν στοιχείο τού A μεγαλύτερο από $\sup A$, άτοπο. □

1.7. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά, φραγμένα με $A \subset B$. Δείξτε ότι*

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B.$$

Λύση. Το $\sup B$ είναι άνω φράγμα τού B, άρα και τού A αφού κάθε στοιχείο τού A ανήκει στο B. Επομένως $\sup A \leq \sup B$. Ομοίως $\inf B \leq \inf A$. Η ανισότητα $\inf A \leq \sup A$ είναι προφανής. □

1.8. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα. Θέτουμε*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Δείξτε ότι

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Λύση. Για κάθε $a \in A$, $b \in B$ έχουμε $a + b \leq \sup A + \sup B$, άρα το $\sup A + \sup B$ είναι άνω φράγμα τού $A + B$. Επομένως $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ τυχόν. Τότε υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε $\sup A - \varepsilon/2 < a$ και $\sup B - \varepsilon/2 < b$ (χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum). Άρα

$$\sup A + \sup B < a + b + \varepsilon \leq \sup(A + B) + \varepsilon.$$

Επομένως

$$\sup A + \sup B < \sup(A + B) + \varepsilon.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\sup A + \sup B \leq \sup(A + B)$ (άσκηση 1.2). □

1.9. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ μη κενά, άνω φραγμένα σύνολα θετικών αριθμών. Θέτουμε*

$$A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Δείξτε ότι

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B.$$

Λύση. (Παρατηρήστε την απόλυτη αναλογία με την προηγούμενη άσκηση) Για κάθε $a \in A$, $b \in B$ έχουμε $a \cdot b \le \sup A \cdot \sup B$, άρα το $\sup A \cdot \sup B$ είναι άνω φράγμα τού $A \cdot B$. Επομένως $\sup(A \cdot B) \le \sup A \cdot \sup B$. Έστω τώρα $t > 1$ τυχόν. Τότε υπάρχουν $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε $\sup A/\sqrt{t} < a$ και $\sup B/\sqrt{t} < b$ (χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum). Άρα

$$\sup A \cdot \sup B < tab \le t \sup(A \cdot B).$$

Επομένως

$$\sup A \cdot \sup B < t \sup(A \cdot B).$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $t > 1$, άρα $\sup A \cdot \sup B \le \sup(A \cdot B)$ (άσκηση 1.3). □

1.10. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ έχουμε $a \le b$. Δείξτε ότι $\sup A \le \inf B$.*

Λύση. Το b είναι άνω φράγμα τού A για κάθε $b \in B$. Άρα $\sup A \le b$ για κάθε $b \in B$. Αυτό σημαίνει ότι το $\sup A$ είναι κάτω φράγμα τού B, επομένως $\sup A \le \inf B$. □

1.11. *Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένα, τέτοια ώστε για κάθε $a \in A$ υπάρχει $b \in B$ με $a \le b$. Δείξτε ότι $\sup A \le \sup B$.*

Λύση. Έστω ότι είχαμε $\sup B < \sup A$. Τότε θα υπήρχε $a \in A$ με $\sup B < a$. Αλλά από την ιδιότητα που έχουν τα A, B, υπάρχει $b \in B$ με $a \le b$. Άρα $\sup B < b$, άτοπο. □

1.12. *Έστω $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a_{n+1} < \dfrac{a_n}{2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι*

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Λύση. Θέτουμε $s = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ και υποθέτουμε ότι $s > 0$. Τότε $s < 2s$ άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $a_{n_0} < 2s$ (χαρακτηριστική ιδιότητα τού infimum). Επομένως $a_{n_0+1} < \dfrac{a_{n_0}}{2} < s = \inf A$, άτοπο. □

1.13. *Θέτουμε $A = \left\{ \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Υπολογίστε τα $\inf A$ και $\sup A$.*

Λύση. Κάθε στοιχείο τού A είναι μικρότερο ή ίσο από το 2, αλλά $2 \in A$, άρα $\sup A = 2$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$ τυχόν. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Τότε

$$0 \le \inf A \le \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\inf A = 0$ (άσκηση 1.1). □

1.14. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $[x]$ είναι ο μοναδικός ακέραιος με την ιδότητα $[x] \le x < [x] + 1$.*

Λύση. Αν έχουμε $n \le x < n + 1$ και $m \le x < m + 1$ για κάποιους ακέραιους n, m, τότε $m < n + 1$ και $n < m + 1$. Άρα $-1 < n - m < 1$. Επομένως $|n - m| < 1$. Συνεπώς $n = m$, αφού δυο ακέραιοι δεν μπορεί να έχουν απόσταση μικρότερη από 1, εκτός κι' αν είναι ίσοι. □

1.15. *Αν $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$ τότε $[x + k] = [x] + k$.*

Λύση. Έχουμε $[x] \le x < [x] + 1$, άρα $[x] + k \le x + k < [x] + k + 1$. Αλλά το $[x + k]$ είναι ο μοναδικός ακέραιος m με την ιδιότητα $m \le x + k < m + 1$, άρα $[x + k] = [x] + k$. □

1.16. *Αν $x \le y$, τότε $[x] \le [y]$.*

Λύση. Έχουμε $[x] \le x \le y$ και $[x]$ ακέραιος. Αλλά το $[y]$ είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος τού y, άρα $[x] \le [y]$. □

1.17. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι $[x] + [y] \le [x + y]$.*

Λύση. Ο $[x] + [y]$ είναι ακέραιος μικρότερος ή ίσος τού $x + y$, άρα $[x] + [y] \le [x + y]$. □

1.18. *Αν $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε $\left[\dfrac{x}{n}\right] = \left[\dfrac{[x]}{n}\right]$.*

Λύση. Έχουμε $\frac{[x]}{n} \leq \frac{x}{n}$, άρα $\left[\frac{[x]}{n}\right] \leq \left[\frac{x}{n}\right]$. Επίσης

$$n\left[\frac{x}{n}\right] = \left[\frac{x}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{n}\right] \leq \left[\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}\right] = [x].$$

Άρα $\left[\frac{x}{n}\right] \leq \frac{[x]}{n}$. Επομένως $\left[\frac{x}{n}\right] \leq \left[\frac{[x]}{n}\right]$. □

1.19. *Δείξτε ότι* $\sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] = [nx]$.

Λύση. Θέτουμε $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] - [nx]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με 0. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k+1}{n}\right] - [nx+1] = \sum_{k=0}^{n-2}\left[x + \frac{k+1}{n}\right] + [x+1] - [nx+1] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] + [x] + 1 - [nx] - 1 = \sum_{k=0}^{n-1}\left[x + \frac{k}{n}\right] - [nx] = f(x). \end{aligned}$$

Επίσης, αν $x \in [0, 1/n)$, τότε $0 \leq nx < 1$ και $0 \leq x+k/n < 1$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$, συνεπώς $[nx] = [x+k/n] = 0$. Επομένως $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1/n)$. Δηλαδή η f είναι περιοδική με περίοδο $1/n$ και μηδενίζεται στο $[0, 1/n)$, άρα μηδενίζεται παντού. □

Κεφάλαιο 2

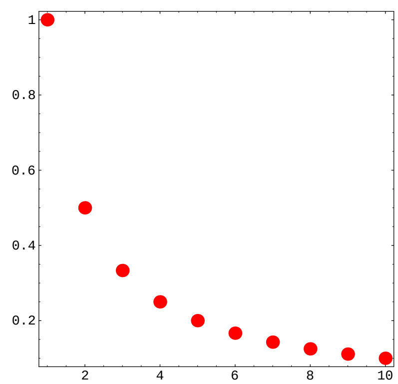
Ακολουθίες Πραγματικών Αριθμών

Συγκλίνουσες ακολουθίες

Μια ακολουθία είναι μια συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Γράφουμε x_n αντί $x(n)$ (η μεταβλητή γίνεται δείκτης) και λέμε ότι το x_n είναι ο n-οστός όρος τής ακολουθίας. Διαισθητικά, μια ακολουθία είναι μια άπειρη λίστα πραγματικών αριθμών:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots).$$

Η γραφική παράσταση μιας ακολουθίας είναι μια σειρά από διακεκριμένα σημεία. Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι 10 πρώτοι όροι τής $x_n = 1/n$.

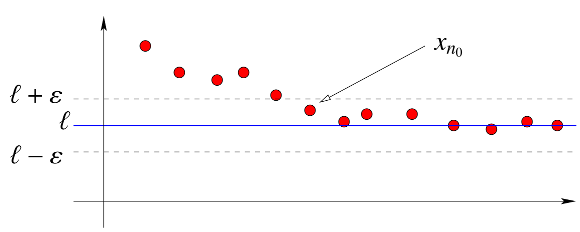


Ορισμός. *Έστω x_n μια ακολουθία και $\ell \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο ℓ και γράφουμε*

$$x_n \to \ell \quad \text{ή} \quad \lim x_n = \ell,$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Το ℓ ονομάζεται όριο τής x_n.

Δηλαδή, αν σας δώσουν οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$, μπορείτε να βρείτε ένα δείκτη τέτοιο ώστε από κει και μετά όλοι οι όροι τής ακολουθίας να απέχουν από το ℓ απόσταση μικρότερη από ε.



Παρατηρήσεις.

(1) Στον ορισμό, το n_0 γενικά εξαρτάται από το ε.
(2) Η σύγκλιση μιας ακολουθίας δεν επηρεάζεται αν αλλάξουμε τις τιμές πεπερασμένου πλήθους όρων. Δηλαδή, αν μια ακολουθία συγκλίνει στο 1 και αλλάξουμε τις τιμές των 5000 πρώτων όρων, η ακολουθία που θα πάρουμε εξακολουθεί να συγκλίνει στο 1.

Παραδείγματα.

(1) Η σταθερή ακολουθία $x_n = c$ συγκλίνει στο c. Αν πάρουμε οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, τότε για κάθε $n \geq 1$ έχουμε $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$.

(2) Η ακολουθία $x_n = 1/n$ συγκλίνει στο 0. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$, από την Αρχιμήδεια ιδιότητα τού $\mathbb{N}$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n_0 < \varepsilon$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε
$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

(3) Η ακολουθία $x_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε σε κάποιο ℓ θα υπήρχε n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < 1/10$ για κάθε $n \geq n_0$. Ιδιαίτερα, θα είχαμε
$$|1 - \ell| = |x_{2n_0} - \ell| < 1/10 \quad \text{και} \quad |1 + \ell| = |-1 - \ell| = |x_{2n_0+1} - \ell| < 1/10.$$
Άρα
$$2 = |1 - \ell + \ell + 1| \leq |1 - \ell| + |1 + \ell| < 1/5,$$
άτοπο.

Θεώρημα (Μοναδικότητα τού ορίου)**.** *Έστω x_n μια ακολουθία και $x, y \in \mathbb{R}$. Αν $x_n \to x$ και $x_n \to y$ τότε $x = y$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Αφού $x_n \to x$ υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $x_n \to y$ υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|x_n - y| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_2$. Επιλέγουμε $n_0 \geq \max\{n_1, n_2\}$. Τότε $|x_{n_0} - x| < \varepsilon/2$ και $|x_{n_0} - y| < \varepsilon/2$. Άρα
$$|x - y| = |x - x_{n_0} + x_{n_0} - y| \leq |x_{n_0} - x| + |x_{n_0} - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Δηλαδή $0 \leq |x - y| < \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Επομένως $|x - y| = 0$, συνεπώς $x = y$. □

Θεώρημα. *Αν μια ακολουθία συγκλίνει τότε είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to \ell$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά $|x_n| - |\ell| \leq |x_n - \ell|$. Άρα $|x_n| < 1 + |\ell|$ για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς
$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, |\ell| + 1\}$$
για κάθε n. Επομένως η x_n είναι φραγμένη. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, γενικά, δεν ισχύει. Η $x_n = (-1)^n$ είναι φραγμένη αλλά δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα. Οι $x_n = n$, $y_n = (-1)^n n$, $z_n = \sqrt{n}$ δεν συγκλίνουν γιατί δεν είναι φραγμένες.

Θεώρημα. *Αν $x_n \to \ell$ τότε $|x_n| \to |\ell|$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα
$$\big||x_n| - |\ell|\big| \leq |x_n - \ell| < \varepsilon$$
για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $|x_n| \to |\ell|$. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, γενικά, δεν ισχύει. Για παράδειγμα, αν $x_n = (-1)^n$ τότε $|x_n| = 1 \to 1$, αλλά η x_n δεν συγκλίνει. Παρ' όλα αυτά, μια ακολουθία συγκλίνει στο 0 αν και μόνο αν η απόλυτη τιμή της συγκλίνει στο 0.

Θεώρημα. *Έστω x_n και y_n δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n \to x$ και $y_y \to y$. Τότε:*

(1) $x_n + y_n \to x + y$.
(2) $x_n y_n \to xy$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $y_n \to y$, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|y_n - y| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε
$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Άρα $x_n + y_n \to x + y$.

(2) Αφού η y_n συγκλίνει είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|y_n| \leq M$ για κάθε n. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < \varepsilon/(|x| + M)$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $y_n \to y$, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|y_n - y| < \varepsilon/(|x| + M)$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| \leq |x_n - x| \cdot |y_n| + |y_n - y| \cdot |x| < \frac{\varepsilon}{|x| + M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{|x| + M} \cdot |x| = \varepsilon.$$

Άρα $x_n y_n \to xy$.

□

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to \ell$, όπου $\ell \neq 0$. Τότε $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό τής σύγκλισης, έχουμε ότι υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < |\ell|/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Αλλά $\big||x_n| - |\ell|\big| \leq |x_n - \ell|$, άρα $\big||x_n| - |\ell|\big| < |\ell|/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως

$$-\frac{|\ell|}{2} < |x_n| - |\ell| < \frac{|\ell|}{2}$$

για κάθε $n \geq n_1$. Συνεπώς $|x_n| > |\ell|/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Πάλι από τον ορισμό τής σύγκλισης, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon|\ell|^2/2$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{\ell}\right| = \frac{|x_n - \ell|}{|x_n| \cdot |\ell|} < \frac{2\varepsilon|\ell|^2}{2|\ell|^2} = \varepsilon.$$

Άρα $1/x_n \to 1/\ell$. □

Παρατήρηση. Συνδυάζοντας τα δυο προηγούμενα θεωρήματα, παίρνουμε ότι αν $x_n \to x$ και y_n είναι μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε $y_n \to y$, όπου $y \neq 0$, τότε $x_n/y_n \to x/y$.

Θεώρημα (Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες)**.** *Έστω x_n, y_n, z_n τρεις ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n \leq y_n \leq z_n$ για κάθε n. Αν $x_n \to \ell$ και $z_n \to \ell$ τότε $y_n \to \ell$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to \ell$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $z_n \to \ell$, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|z_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_2$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$-\varepsilon < -|x_n - \ell| \leq x_n - \ell \leq y_n - \ell \leq z_n - \ell \leq |z_n - \ell| < \varepsilon.$$

Άρα $|y_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. αυτό σημαίνει ότι $y_n \to \ell$. □

Παραδείγματα.

(1) Αν η x_n είναι φραγμένη και $y_n \to 0$, τότε $x_n y_n \to 0$. Πράγματι, αφού η x_n είναι φραγμένη υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Άρα $0 \leq |x_n y_n| \leq M|y_n|$. Αλλά $M|y_n| \to 0$, άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, $|x_n y_n| \to 0$. Επομένως $x_n y_n \to 0$.

(2) Αν $|a| < 1$ τότε $a^n \to 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|a|^n \to 0$. Αν $a = 0$ αυτό είναι προφανές. Αν $a \neq 0$ τότε $1/|a| > 1$, άρα υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $1/|a| = 1 + \xi$. Επομένως, από ανισότητα Bernoulli

$$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n = (1 + \xi)^n \geq 1 + n\xi > n\xi \Rightarrow 0 < |a|^n < \frac{1}{\xi n} \to 0.$$

Άρα $|a|^n \to 0$.

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν έχουμε $x_n \leq y_n \leq z_n$ όχι για όλα τα n αλλά από κάποιο δείκτη και μετά.

Αποκλίνουσες ακολουθίες

Ορισμός. *Έστω x_n μια ακολουθία.*

(1) *Λέμε ότι η x_n αποκλίνει στο $+\infty$ ή τείνει στο $+\infty$ και γράφουμε*

$$x_n \to +\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = +\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n > M$.

(2) *Λέμε ότι η x_n αποκλίνει στο $-\infty$ ή τείνει στο $-\infty$ και γράφουμε*

$$x_n \to -\infty \quad \text{ή} \quad \lim x_n = -\infty,$$

αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n < -M$.

Δηλαδή, $x_n \to +\infty$ αν για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$, από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι τής ακολουθίας είναι μεγαλύτεροι από M. Ανάλογα στην περίπτωση $x_n \to -\infty$.

Παρατήρηση. $x_n \to +\infty$ αν και μόνο αν $-x_n \to -\infty$.

Παραδείγματα.

(1) Η ακολουθία $x_n = n^2$ τείνει στο $+\infty$. Πράγματι, έστω $M > 0$. Αφού το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0 > \sqrt{M}$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n = n^2 \geq n_0^2 > M$.

(2) Η ακολουθία $x_n = (-1)^n n$ δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Αν είχαμε $x_n \to +\infty$ θα υπήρχε n_1 τέτοιο ώστε $x_n > 1$ για κάθε $n \geq n_1$. Ιδιαίτερα, $-(2n_1 + 1) = x_{2n_1+1} > 1$, άτοπο. Ομοίως αν είχαμε $x_n \to -\infty$ θα υπήρχε n_2 τέτοιο ώστε $x_n < -1$ για κάθε $n \geq n_2$. Ιδιαίτερα, $2n_2 = x_{2n_2} < -1$, άτοπο.

Θεώρημα. *Αν $x_n \to +\infty$ τότε η x_n δεν είναι άνω φραγμένη. Αν $x_n \to -\infty$ τότε η x_n δεν είναι κάτω φραγμένη.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τον ορισμό. □

Παρατήρηση. Στο προηγούμενο θεώρημα, τα αντίστροφα, γενικά, δεν ισχύουν. Για παράδειγμα, η ακολουθία $x_n = (-1)^n n$ δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη. Παρ' όλα αυτά δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$.

Θεώρημα. *Έστω x_n και y_n δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n \leq y_n$ για κάθε n. Αν $x_n \to +\infty$ τότε $y_n \to +\infty$. Αν $y_n \to -\infty$ τότε $x_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος αποδεικνύεται ανάλογα. Έστω $M > 0$. Αφού $x_n \to +\infty$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $y_n \geq x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $y_n \to +\infty$. □

Παράδειγμα. Έχουμε $n^n \geq n! \geq n$ και $n \to +\infty$. Άρα $n^n \to +\infty$, $n! \to +\infty$.

Παρατήρηση. Ακριβώς όπως στην περίπτωση των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών, το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν έχουμε $x_n \leq y_n$ όχι για όλα τα n αλλά από κάποιο δείκτη και μετά.

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών. Αν $x_n \to +\infty$ ή αν $x_n \to -\infty$ τότε $1/x_n \to 0$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $x_n \to +\infty$ και έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Αφού $x_n \to +\infty$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n| > 1/\varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $1/|x_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αυτό σημαίνει ότι $1/x_n \to 0$. Αν $x_n \to -\infty$ τότε $-x_n \to +\infty$ και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. □

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Αν η x_n είναι θετική τότε $1/x_n \to +\infty$. Αν η x_n είναι αρνητική, τότε $1/x_n \to -\infty$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η x_n είναι θετική και έστω $M > 0$. Αφού $x_n \to 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n < 1/M$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $1/x_n > M$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $1/x_n \to +\infty$. Αν τώρα η x_n είναι αρνητική τότε η $-x_n$ είναι θετική και αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα, γενικά, δεν ισχύει αν η ακολουθία έχει και θετικούς και αρνητικούς όρους. Για παράδειγμα, η ακολουθία $x_n = (-1)^n/n$ συγκλίνει στο 0, αλλά η $1/x_n = (-1)^n n$ δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$. Παρ' όλα αυτά εξακολουθεί να ισχύει αν η ακολουθία είναι θετική από κάποιο δείκτη και μετά ή αν είναι αρνητική από κάποιο δείκτη και μετά.

Μονότονες ακολουθίες

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία. Αν η x_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη ή φθίνουσα και κάτω φραγμένη, τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο τον πρώτο ισχυρισμό. Ο δεύτερος αποδεικνύεται ανάλογα. Έστω

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

το σύνολο τιμών τής ακολουθίας. Το A είναι άνω φραγμένο. Θέτουμε $\ell = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $x_n \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $x_{n_0} \in A$ τέτοιο ώστε $\ell - \varepsilon < x_{n_0}$. Συνεπώς για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n - \ell| = \ell - x_n \leq \ell - x_{n_0} < \varepsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι $x_n \to \ell$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Το θεώρημα λέει ότι κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία συγκλίνει.

(2) Το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει. Μια συγκλίνουσα ακολουθία δεν είναι κατ' ανάγκη μονότονη. Για παράδειγμα η $x_n = (-1)^n/n$ συγκλίνει στο 0 αλλά δεν είναι ούτε αύξουσα ούτε φθίνουσα.

Παραδείγματα.

(1) (Ο αριθμός e). Η ακολουθία $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνει. Το όριό της συμβολίζεται με e. Για να δείξουμε ότι είναι αύξουσα, παρατηρούμε ότι από την ανισότητα Bernoulli έχουμε

$$\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$x_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \geq \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = x_n.$$

Για να δείξουμε ότι είναι φραγμένη χρησιμοποιούμε το διωνυμικό θεώρημα.

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{n \cdot n \cdots n \cdot n} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&< \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.
\end{aligned}$$

(2) (Αρχή κιβωτισμού). Έστω $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, μια οικογένεια κλειστών διαστημάτων τέτοια ώστε $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$ και $b_n - a_n \to 0$, δηλαδή τα διαστήματα είναι το ένα μέσα στο άλλο και το μήκος τους τείνει στο 0. Τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ είναι μονοσύνολο. Πράγματι, η ακολουθία a_n είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα $a_n \to a$ για κάποιο a. Ομοίως η b_n είναι φθίνουσα και φραγμένη, άρα $b_n \to b$ για κάποιο b. Έτσι έχουμε $b_n - a_n \to b - a$. Αλλά, από υπόθεση, $b_n - a_n \to 0$. Επομένως, από μοναδικότητα τού ορίου, $a = b$. Θέτουμε $\ell = a = b$. Θα δείξουμε ότι $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] = \{\ell\}$. Έστω n τυχόν. Τότε για κάθε $k \geq n$ έχουμε $a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_n$. Παίρνοντας όρια ώς προς k έχουμε $a_n \leq \ell \leq b_n$, δηλαδή $\ell \in [a_n, b_n]$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε n, άρα $\ell \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$. Απ' την άλλη, αν $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$ είναι κάποιο στοιχείο τής τομής, τότε $x \in [a_n, b_n]$ για κάθε n, δηλαδή $a_n \leq x \leq b_n$. Παίρνοντας όρια ως προς n έχουμε $x = \ell$, άρα το ℓ είναι το μοναδικό στοιχείο τής τομής.

Παρατήρηση. Το προηγούμενο αποτέλεσμα, γενικά, δεν ισχύει αν τα διαστήματα δεν είναι κλειστά. Για παράδειγμα $\bigcap_{n=1}^{\infty}(0, 1/n) = \emptyset$ γιατί αν υπήρχε κάποιο στοιχείο x στην τομή, θα είχαμε $0 < x < 1/n$ για κάθε n, άτοπο γιατί $1/n \to 0$.

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία. Αν η x_n είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη τότε τείνει στο $+\infty$. Αν είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη τότε τείνει στο $-\infty$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η x_n είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη. Θα δείξουμε ότι $x_n \to +\infty$. Έστω $M > 0$. Αφού η x_n δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_{n_0} > M$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n \geq x_{n_0} > M$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n \to +\infty$. Αν τώρα η x_n είναι φθίνουσα και όχι κάτω φραγμένη, τότε η $-x_n$ είναι αύξουσα και όχι άνω φραγμένη άρα $-x_n \to +\infty$, επομένως $x_n \to -\infty$. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, γενικά, δεν ισχύει. Για παράδειγμα η ακολουθία

$$(2, 1, 4, 3, 6, 5, 8, 7, \dots)$$

τείνει στο $+\infty$ αλλά δεν είναι αύξουσα.

Υπακολουθίες

Ορισμός. *Έστω x_n μια ακολουθία και $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_n < \cdots$ ένα άπειρο σύνολο φυσικών αριθμών. Η ακολουθία $y_n = x_{k_n}$ λέγεται υπακολουθία τής x_n. Δηλαδή η x_{k_n} προκύπτει αν κρατήσουμε τους όρους τής x_n οι οποίοι αντιστοιχούν στους δείκτες $k_1, k_2, \ldots$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Κάθε ακολουθία είναι υπακολουθία τού εαυτού της.
(2) Για κάθε n έχουμε $k_n \geq n$, δηλαδή ο n-οστός όρος τής x_{k_n} είναι μετά τον n-οστό όρο τής x_n.

Παράδειγμα. Αν $x_n = (-1)^n$ τότε για $k_n = 2n$ παίρνουμε την υπακολουθία x_{2n}, δηλαδή την ακολουθία που αντιστοιχεί στους άρτιους όρους τής x_n. Προφανώς $x_{2n} = 1$ για κάθε n.

Θεώρημα. *Έστω x_n μια ακολουθία και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε $x_n \to \ell$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία τής x_n συγκλίνει στο ℓ.*

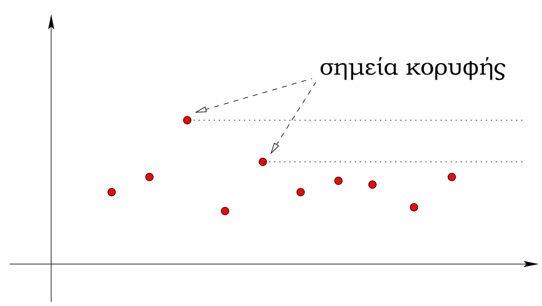
Απόδειξη. Αν κάθε υπακολουθία τής x_n συγκλίνει στο ℓ τότε $x_n \to \ell$ αφού η x_n είναι υπακολουθία τού εαυτού της. Αντίστροφα, έστω ότι $x_n \to \ell$ και έστω x_{k_n} τυχούσα υπακολουθία. Θα δείξουμε ότι $x_{k_n} \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to \ell$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Αλλά $k_n \geq n$, άρα $|x_{k_n} - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Δηλαδή $x_{k_n} \to \ell$. □

Παρατήρηση. Με τελείως ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι $x_n \to \pm\infty$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία τής x_n τείνει στο $\pm\infty$.

Παράδειγμα. Η ακολουθία $x_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει διότι $x_{2n} = 1 \to 1$ και $x_{2n+1} = -1 \to -1$. Ομοίως, η $y_n = (-1)^n n$ δεν τείνει ούτε στο $+\infty$ ούτε στο $-\infty$ διότι $y_{2n} = 2n \to +\infty$ και $y_{2n+1} = -2n - 1 \to -\infty$.

Θεώρημα. *Κάθε ακολουθία έχει μονότονη υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω x_n τυχούσα ακολουθία. Λέμε ότι ένας όρος x_n είναι σημείο κορυφής αν $x_n \geq x_m$ για κάθε $m > n$. Δηλαδή το x_n είναι σημείο κορυφής αν είναι μεγαλύτερο από ή ίσο με όλους τους επόμενους όρους.



Θέτουμε

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \text{το } x_n \text{ είναι σημείο κορυφής}\}$$

και διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

(1) Το A είναι πεπερασμένο (ή κενό). Στην περίπτωση αυτή επιλέγουμε $k_1 \in \mathbb{N}$ με $k_1 > \max A$. Τότε το x_{k_1} δεν είναι σημείο κορυφής άρα υπάρχει $k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε $x_{k_1} < x_{k_2}$. Τώρα, ούτε το x_{k_2} είναι σημείο κορυφής, άρα υπάρχει $k_3 > k_2$ τέτοιο ώστε $x_{k_2} < x_{k_3}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε φυσικούς αριθμούς $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ τέτοιους ώστε $x_{k_1} < x_{k_2} < x_{k_3} < \cdots$. Έτσι η υπακολουθία x_{k_n} είναι αύξουσα.
(2) Το A είναι άπειρο. Ας πούμε ότι αποτελείται από τους φυσικούς αριθμούς $m_1 < m_2 < m_3 < \cdots$. Αφού το x_{m_1} είναι σημείο κορυφής, έχουμε $x_{m_1} \geq x_{m_2}$. Αφού το x_{m_2} είναι σημείο κορυφής, έχουμε $x_{m_2} \geq x_{m_3}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι $x_{m_1} \geq x_{m_2} \geq x_{m_3} \geq \cdots$. Δηλαδή η υπακολουθία x_{m_n} είναι φθίνουσα.

□

Θεώρημα (Bolzano-Weierstrass). *Κάθε φραγμένη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία. Από το προηγούμενο θεώρημα, η x_n έχει μονότονη υπακολουθία, έστω x_{k_n}. Τότε η x_{k_n} είναι μονότονη και φραγμένη, άρα συγκλίνει. □

Παρατηρήσεις.

(1) Το θεώρημα Bolzano-Weierstrass εξασφαλίζει την ύπαρξη συγκλίνουσας υπακολουθίας. Δεν μας λέει πως μπορούμε να την βρούμε. Για παράδειγμα η $x_n = \sin n$ είναι φραγμένη, άρα έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες. Είναι όμως δύσκολο να τις προσδιορίσουμε.

(2) Αν μια ακολουθία δεν είναι φραγμένη, τότε μπορεί να έχει ή να μη έχει συγκλίνουσες υπακολουθίες. Για παράδειγμα η
$$(0, 2, 0, 4, 0, 6, \dots)$$
έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (την υπακολουθία των περιττών όρων), ενώ η
$$(1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots)$$
δεν έχει.

Ακολουθίες Cauchy

Ορισμός. *Μια ακολουθία x_n ονομάζεται Cauchy, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ έχουμε $|x_n - x_m| < \varepsilon$.*

Ο ορισμός λέει ότι σε μια ακολουθία Cauchy, αν σας δώσουν οποιοδήποτε ε, από κάποιο δείκτη και μετά όλοι οι όροι τής ακολουθίας απέχουν μεταξύ τους απόσταση μικρότερη από ε. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμο με το ότι η ακολουθία συγκλίνει.

Θεώρημα. *Μια ακολουθία x_n είναι Cauchy αν και μόνο αν συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to \ell$ για κάποιο ℓ. Θα δείξουμε ότι η x_n είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to \ell$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - \ell| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $m, n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n - x_m| = |x_n - \ell + \ell - x_m| \leq |x_n - \ell| + |x_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Δηλαδή η x_n είναι Cauchy. Αντίστροφα, έστω ότι είναι Cauchy. Δείχνουμε κατ' αρχάς ότι είναι φραγμένη. Αφού είναι Cauchy, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x_{n_1}| < 1$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως $|x_n| < 1 + |x_{n_1}|$ για κάθε $n \geq n_1$, συνεπώς

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, \ldots, |x_{n_1-1}|, 1 + |x_{n_1}|\}$$

για κάθε n. Άρα η x_n είναι φραγμένη. Έτσι, από Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$ για κάποιο x. Θα δείξουμε ότι $x_n \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η x_n είναι Cauchy, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \geq n_2$. Αφού $x_{k_n} \to x$, υπάρχει n_3 τέτοιο ώστε $|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_3$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_2, n_3\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $k_n \geq n \geq n_0$, άρα

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι η x_n συγκλίνει στο x. □

Η σημασία τού προηγούμενου θεωρήματος είναι ότι μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουμε ή να μαντέψουμε το όριο της.

Παράδειγμα. Έστω $I_1, I_2, I_3, \ldots$ μια οικογένεια διαστημάτων τέτοια ώστε $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ και $\mu(I_n) \to 0$, όπου με $\mu(\cdot)$ συμβολίζουμε το μήκος. Για κάθε n επιλέγουμε ένα σημείο $x_n \in I_n$. Τότε η ακολουθία x_n συγκλίνει. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι είναι Cauchy. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\mu(I_{n_0}) < \varepsilon$. Τώρα για κάθε $n, m \geq n_0$ τα σημεία x_n, x_m ανήκουν στο I_{n_0} αφού τα I_n και I_m είναι υποσύνολα τού I_{n_0}. Επομένως $|x_n - x_m| \leq \mu(I_{n_0}) < \varepsilon$.

liminf & limsup

Ορισμός. *Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία. Ορίζουμε δυο άλλες ακολουθίες L_n και U_n ως εξής:*

$$L_n = \inf_{k\geq n} x_k \quad U_n = \sup_{k\geq n} x_k.$$

Προφανώς $L_n \leq x_n \leq U_n$. Επίσης, οι L_n και U_n είναι φραγμένες, η L_n αύξουσα και η U_n φθίνουσα. Επομένως συγκλίνουν. Θέτουμε

$$\liminf x_n = \lim L_n \quad \limsup x_n = \lim U_n.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό

$$\underline{\lim} x_n = \liminf x_n \quad \overline{\lim} x_n = \limsup x_n.$$

Τα liminf και limsup παίζουν το ρόλο τού «ορίου» μιας φραγμένης όχι κατ' ανάγκη συγκλίνουσας ακολουθίας.

Θεώρημα. *Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία και x_{k_n} μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Τότε*

$$\liminf x_n \leq \lim x_{k_n} \leq \limsup x_n.$$

Απόδειξη. Απλά παίρνουμε όρια στη σχέση

$$L_{k_n} \leq x_{k_n} \leq U_{k_n}.$$

□

Θεώρημα. *Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία. Τότε υπάρχουν υπακολουθίες x_{k_n} και x_{m_n} τέτοιες ώστε*

$$x_{k_n} \to \limsup x_n \quad x_{m_n} \to \liminf x_n.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u = \limsup x_n$. Αφού $U_n \to u$, υπάρχει $\nu_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$u - 1 < U_{\nu_1} < u + 1.$$

Δηλαδή

$$u - 1 < \sup_{k\geq \nu_1} x_k < u + 1.$$

Από την ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $k_1 \geq \nu_1$ τέτοιο ώστε

$$u - 1 < x_{k_1} < u + 1.$$

Ομοίως, αφού $U_n \to u$, υπάρχει $\nu_2 > k_1$ τέτοιο ώστε

$$u - \frac{1}{2} < U_{\nu_2} < u + \frac{1}{2}.$$

Όπως πριν, υπάρχει $k_2 \geq \nu_2 > k_1$ τέτοιο ώστε

$$u - \frac{1}{2} < x_{k_2} < u + \frac{1}{2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε

$$u - \frac{1}{n} < x_{k_n} < u + \frac{1}{n}.$$

Άρα $x_{k_n} \to u$. Η x_{m_n} κατασκευάζεται με τελείως ανάλογο τρόπο. □

Τα δυο προηγούμενα θεωρήματα λένε ότι το liminf και το limsup είναι το μικρότερο και το μεγαλύτερο αντίστοιχα υπακολουθιακό όριο μιας φραγμένης ακολουθίας.

Θεώρημα. *Έστω x_n φραγμένη ακολουθία. Τότε $x_n \to x$ αν και μόνο αν* $\liminf x_n = \limsup x_n = x$.

Απόδειξη. Έστω ότι $x_n \to x$. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχουν υπακολουθίες x_{k_n} και x_{m_n} τέτοιες ώστε $x_{k_n} \to \limsup x_n$ και $x_{m_n} \to \liminf x_n$. Αλλά, αφού η x_n συγκλίνει στο x, έχουμε ότι $x_{k_n} \to x$ και $x_{m_n} \to x$. Επομένως, από τη μοναδικότητα τού ορίου, παίρνουμε ότι $\liminf x_n = \limsup x_n = x$.

Αντίστροφα, έστω ότι $\limsup x_n = \liminf x_n = x$. Τότε $L_n \to x$ και $U_n \to x$. Αλλά $L_n \leq x_n \leq U_n$. Επομένως $x_n \to x$. □

Παράδειγμα. Αν $x_n = (-1)^n$ τότε $\liminf x_n = -1$ και $\limsup x_n = 1$. Πράγματι, αφού $-1 \le x_n \le 1$, έχουμε $\liminf x_n \ge -1$ και $\limsup x_n \le 1$. Τώρα το $\liminf x_n$ είναι το μικρότερο υπακολουθιακό όριο τής x_n, και $x_{2n+1} = -1 \to -1$. Άρα $\liminf x_n \le -1$. Επομένως $\liminf x_n = -1$. Ομοίως $\limsup x_n = 1$.

Ασκήσεις

2.1. *Έστω q ένας θετικός ρητός. Δείξτε με τον ορισμό ότι η ακολουθία $x_n = 1/n^q$ συγκλίνει στο 0.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $n_0 > 1/\varepsilon^{1/q}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n^q} \leq \frac{1}{n_0^q} < \varepsilon.$$

Άρα $x_n \to 0$. □

2.2. *Δείξτε με τον ορισμό ότι η ακολουθία $x_n = \dfrac{n}{2n^2 - 1}$ συγκλίνει στο 0.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $n_0 > 1/\varepsilon$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n - 0| = \frac{n}{2n^2 - 1} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Αυτός είναι ο «έξυπνος» τρόπος. Ο «τυφλοσούρτικος» τρόπος, όπως αναφέραμε στο μάθημα, είναι ο εξής: Θέλουμε να βρούμε n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ να έχουμε $x_n < \varepsilon$. Δηλαδή

$$\frac{n}{2n^2 - 1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2\varepsilon n^2 - n - \varepsilon > 0.$$

Οι θετικές λύσεις τής ανίσωσης είναι

$$n > \frac{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon^2}}{4\varepsilon}.$$

Επομένως αν επιλέξουμε n_0 μεγαλύτερο από την παραπάνω ποσότητα τελειώσαμε. □

2.3. *Έστω ότι $x_n \to x$. Θεωρούμε την ακολουθία*

$$y_n = \begin{cases} n^2 - 23456n - \sqrt{n}, & \text{αν } n < 800 \\ x_n, & \text{αν } n \geq 800 \end{cases}.$$

Δείξτε ότι $y_n \to x$.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επιλέγουμε $n_1 \geq \max\{n_0, 800\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε

$$|y_n - x| = |x_n - x| < \varepsilon.$$

Άρα $y_n \to x$. Η άσκηση αυτή δείχνει αυτό που αναφέραμε στη θεωρία: Η σύγκλιση μιας ακολουθίας δεν επηρεάζεται αν αλλάξουμε τις τιμές πεπερασμένου πλήθους όρων. □

2.4. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$ άνω φραγμένο. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to \sup A$.*

Λύση. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, για κάθε n υπάρχει $x_n \in A$ τέτοιο ώστε

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A.$$

Άρα $x_n \to \sup A$. □

2.5. *Έστω $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών q_n τέτοια ώστε $q_n \to x$.*

Λύση. Από πυκνότητα ρητών, για κάθε n υπάρχει $q_n \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x.$$

Άρα $q_n \to x$. □

2.6. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \to x$, όπου $x > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n > 0$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Λύση. Από τον ορισμό τού ορίου έχουμε ότι υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < x/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα

$$-\frac{x}{2} < x_n - x < \frac{x}{2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως

$$x_n > x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} > 0$$

για κάθε $n \geq n_0$. □

2.7. *Έστω x_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to x$. Δείξτε ότι $x \geq 0$.*

Λύση. Έχουμε ότι $-x_n \to -x$. Αν το x ήταν αρνητικό, το $-x$ θα ήταν θετικό, άρα από την προηγούμενη άσκηση, η $-x_n$ από κάποιο όρο και μετά θα ήταν θετική, άτοπο. □

2.8. *Είναι αλήθεια ότι το όριο μιας συγκλίνουσας ακολουθίας θετικών αριθμών είναι θετικό;*

Λύση. Όχι. Για παράδειγμα $1/n \to 0$. □

2.9. *Έστω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to x$. Δείξτε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $x_n^{1/k} \to x^{1/k}$.*

Λύση. Αν $x = 0$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n < \varepsilon^k$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $x_n^{1/k} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $x_n^{1/k} \to 0$.
Αν $x > 0$, τότε έχουμε $x_n^{-1} \to x^{-1}$, άρα η x_n^{-1} είναι φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέοιο ώστε $x_n \geq M$ για κάθε n. Χρησιμοποιώντας τώρα την ταυτότητα

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{j=1}^{k} a^{k-j}b^{j-1}$$

παίρνουμε

$$0 \leq \left|x_n^{1/k} - x^{1/k}\right| = |x_n - x|\left(\sum_{j=1}^{k} x_n^{\frac{k-j}{k}} x^{\frac{j-1}{k}}\right)^{-1} \leq |x_n - x|\left(\sum_{j=1}^{k} M^{\frac{k-j}{k}} x^{\frac{j-1}{k}}\right)^{-1} \to 0,$$

διότι $|x_n - x| \to 0$. Άρα $\left|x_n^{1/k} - x^{1/k}\right| \to 0$, επομένως $x_n^{1/k} \to x^{1/k}$.

Παρατηρήστε ότι από την άσκηση συνεπάγεται ότι αν $q \in \mathbb{Q}$, τότε $x_n^q \to x^q$. □

2.10. *Θέτουμε $x = 2 + \sqrt{2}$. Βρείτε το όριο τής ακολουθίας $x^n - [x^n]$.*

Λύση. Έστω $y = 2 - \sqrt{2}$. Τότε, από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned} x^n + y^n = (2+\sqrt{2})^n + (2-\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(\sqrt{2})^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k}(-\sqrt{2})^k \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ άρτιος}}}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k/2} + \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ περιττός}}}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k/2} + \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ άρτιος}}}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k/2} - \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ περιττός}}}\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k/2} \\ &= \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ άρτιος}}}\binom{n}{k}2^{1+n-k/2}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω ποσότητα είναι ακέραιος αριθμός. Επίσης $x^n + y^n - 1 < x^n < x^n + y^n$. Άρα, $[x^n] = x^n + y^n - 1$. Επομένως $x^n - [x^n] = 1 - y^n \to 1$. □

2.11. *Δείξτε ότι αν $x_n \to 0$, τότε $x_n^n \to 0$*

Λύση. Αφού $x_n \to 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n| < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για όλα αυτά τα n έχουμε $|x_n^n| \leq |x_n|$. Αλλά $|x_n| \to 0$, άρα $x_n^n \to 0$. □

2.12. *Έστω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\frac{x_{n+1}}{x_n} \to \ell$, όπου $\ell < 1$. Δείξτε ότι $x_n \to 0$.*

Λύση. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\ell + \varepsilon < 1$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \ell\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για $n > n_0$ έχουμε

$$0 < x_n = \underbrace{\frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} \cdots \frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}}}_{n-n_0 \text{ φορές}} \cdot x_{n_0} < \underbrace{(\ell+\varepsilon)\cdots(\ell+\varepsilon)}_{n-n_0 \text{ φορές}} \cdot x_{n_0} = (\ell+\varepsilon)^n \frac{x_{n_0}}{(\ell+\varepsilon)^{n_0}} \to 0,$$

διότι $0 < \ell + \varepsilon < 1$. Άρα $x_n \to 0$. □

2.13. *Έστω $q \in \mathbb{Q}$ και a ένας θετικός πραγματικός. Δείξτε ότι*

$$\lim \frac{n^q}{(1+a)^n} = 0.$$

Δηλαδή το εκθετικό πάει στο άπειρο «πιο γρήγορα» από τη δύναμη.

Λύση. Αν $x_n = \frac{n^q}{(1+a)^n}$, τότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{1}{1+a} \to \frac{1}{1+a} < 1.$$

Το συμπέρασμα έπεται από την άσκηση 2.12. □

2.14. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0.$$

Λύση. Η x_n είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n| < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Αφού $M(n_0-1)/n \to 0$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $M(n_0-1)/n < \varepsilon/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Έτσι για κάθε $n \geq \max\{n_0, n_1\}$ έχουμε

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0-1}|x_k| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|x_k| < \frac{M(n_0-1)}{n} + \frac{n-n_0+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Η δεύτερη ανισότητα παραπάνω ισχύει διότι το πρώτο άθροισμα έχει $n_0 - 1$ όρους και ο καθένας είναι μικρότερος από ή ίσος με M, και το δεύτερο άθροισμα έχει $n - n_0 + 1$ όρους και ο καθένας είναι μικρότερος από $\varepsilon/2$.

Το παραπάνω επιχείρημα αποδεικνύει και την ακόλουθη γενίκευση. Αν b_n είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} b_k = +\infty,$$

τότε

$$\frac{x_1 b_1 + x_2 b_2 + \cdots + x_n b_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \to 0.$$

Η άσκηση είναι ειδική περίπτωση τού προηγουμένου για $b_n = 1$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι

$$\frac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n(n+1)} \to 0.$$

□

2.15. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \to x$. Δείξτε ότι*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to x.$$

Λύση. Έχουμε $x_n - x \to 0$, άρα από την προηγούμενη άσκηση,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x) \to 0.$$

Αλλά

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k - x.$$

Επομένως

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to x.$$

□

2.16. *Έστω $a_n \to a$ και $b_n \to b$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

Στην άσκηση αυτή, οι δείκτες των ακολουθιών ξεκινάνε από το 0.

Λύση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $a = b = 0$. Οι ακολουθίες συγκλίνουν άρα είναι φραγμένες. Έτσι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| \le M$, $|b_n| \le M$, για κάθε n. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού οι ακολουθίες είναι μηδενικές, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|a_n| < \varepsilon/M$, $|b_n| < \varepsilon/M$, για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως για κάθε $n \ge 2n_0$ έχουμε

$$\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right| \le \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n_0}|a_k||b_{n-k}| + \sum_{k=n_0+1}^{n}|a_k||b_{n-k}|\right) < \frac{1}{n+1}\left((n_0+1)M\frac{\varepsilon}{M} + (n-n_0)\frac{\varepsilon}{M}M\right) = \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

Αν τώρα τα a, b είναι αυθαίρετα, τότε από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)(b_{n-k} - b) = 0.$$

Αλλά

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)(b_{n-k} - b) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} - \frac{b}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k - \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k + ab.$$

Άρα

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(a_k - a)(b_{n-k} - b) + \frac{b}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \frac{a}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k - ab.$$

Όμως από την άσκηση 2.15 έχουμε

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = a, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k = b.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

□

2.17. *Έστω x_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to 0$. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$

έχει μέγιστο στοιχείο.

Λύση. Αφού $x_n \to 0$, υπάρχει $n_0 > 1$ τέτοιο ώστε $x_n < x_1$ για κάθε $n \ge n_0$. Θέτουμε $x_j = \max\{x_1, \ldots, x_{n_0-1}\}$. Έτσι ο x_j είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους $n_0 - 1$ πρώτους όρους τής ακολουθίας. Αλλά όλοι οι υπόλοιποι είναι μικρότεροι από τον x_1. Άρα ο x_j είναι μεγαλύτερος ή ίσος από κάθε όρο τής ακολουθίας, επομένως είναι το μέγιστο στοιχείο τού συνόλου A. □

2.18. *Έστω x_n μια συγκλίνουσα ακολουθία ακέραιων αριθμών. Δείξτε ότι η x_n είναι τελικά σταθερή, δηλαδή υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n = x_{n_0}$.*

Λύση. Θέτουμε $\ell = \lim x_n$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|x_n - \ell| < 1/2$. Επομένως για κάθε τέτοιο n

$$|x_n - x_{n_0}| = |x_n - \ell + \ell - x_{n_0}| \leq |x_n - \ell| + |x_{n_0} - \ell| < 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι $x_n = x_{n_0}$ διότι η ακολουθία αποτελείται από ακέραιους αριθμούς. □

2.19. *Έστω x_n, y_n δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n \to x$, όπου $x > 0$, και $y_n \to +\infty$. Δείξτε ότι $x_n y_n \to +\infty$.*

Λύση. Έστω $M > 0$. Αφού $x_n \to x$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $|x_n - x| < x/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Άρα $x_n > x/2$ για κάθε $n \geq n_1$. Αφού $y_n \to +\infty$, υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε $y_n > 2M/x$ για κάθε $n \geq n_2$. Άρα, για κάθε $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε $x_n y_n > M$. Επομένως $x_n y_n \to +\infty$. □

2.20. *Έστω x_n, y_n δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε η x_n είναι κάτω φραγμένη και $y_n \to +\infty$. Δείξτε ότι $x_n + y_n \to +\infty$.*

Λύση. Έστω $M > 0$. Αφού η x_n είναι κάτω φραγμένη, υπάρχει c τέτοιο ώστε $x_n > c$ για κάθε n. Αφού $y_n \to +\infty$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $y_n > M - c$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n + y_n > M$. Επομένως $x_n + y_n \to +\infty$. □

2.21. *Δείξτε ότι $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι για $k = 1, 2, \ldots, n$ έχουμε $(k-1)(n-k) \geq 0$. Άρα $(n-k+1)k \geq n$. Έτσι παίρνουμε τις ανισότητες

$$\left.\begin{array}{c} n \cdot 1 \geq n \\ (n-1) \cdot 2 \geq n \\ (n-2) \cdot 3 \geq n \\ \vdots \\ 2 \cdot (n-1) \geq n \\ 1 \cdot n \geq n \end{array}\right\} \overset{(\times)}{\Longrightarrow} (n!)^2 \geq n^n.$$

Επομένως $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n} \to +\infty$. □

2.22. *Μια γνήσια αύξουσα ακολουθία ακέραιων αριθμών τείνει στο $+\infty$.*

Λύση. Από την άσκηση 2.18, η ακολουθία δεν συγκλίνει. Αφού επιπλέον είναι αύξουσα, πρέπει κατ' ανάγκη να τείνει στο $+\infty$. □

2.23. *Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

συγκλίνει.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία είναι αύξουσα και φραγμένη. Έχουμε

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0 \Rightarrow x_n < x_{n+1}$$

άρα η x_n είναι αύξουσα. Επίσης

$$x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{n+1} < 1$$

άρα η x_n είναι φραγμένη. □

2.24. *Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

συγκλίνει.

Λύση. $x_{n+1} - x_n = 1/(n+1)! > 0$, άρα η x_n είναι αύξουσα. Επίσης

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

Επομένως η x_n είναι φραγμένη. Άρα συγκλίνει. □

2.25. *Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία τέτοια ώστε $2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1}$ για κάθε n. Δείξτε ότι*

$$\lim(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Λύση. Έχουμε

$$2x_n \leq x_{n-1} + x_{n+1} \Rightarrow x_n - x_{n-1} \leq x_{n+1} - x_n.$$

Άρα αν θέσουμε $y_n = x_{n+1} - x_n$, έχουμε ότι η y_n είναι αύξουσα και φραγμένη (αφού η x_n είναι φραγμένη), άρα $y_n \to y$ για κάποιο y. Θα δείξουμε ότι $y = 0$. Πράγματι, αν $y > 0$, τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $y_n > y/2$ για κάθε $n \geq n_0$ (γιατί;), επομένως

$$\left.\begin{aligned} y_{n_0} = x_{n_0+1} - x_{n_0} &> \frac{y}{2} \\ y_{n_0+1} = x_{n_0+2} - x_{n_0+1} &> \frac{y}{2} \\ &\vdots \\ y_n = x_{n+1} - x_n &> \frac{y}{2} \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} x_{n+1} - x_{n_0} > (n - n_0 + 1)\frac{y}{2} \Rightarrow x_{n+1} \geq (n - n_0 + 1)\frac{y}{2} + x_{n_0} \to +\infty$$

το οποίο είναι άτοπο διότι η x_n είναι φραγμένη. Με παρόμοιο τρόπο αποκλείουμε την περίπτωση $y < 0$. □

2.26. *Αν $x_{2n} \to x$ και $x_{2n-1} \to x$, τότε $x_n \to x$.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_{2n} \to x$, υπάρχει άρτιος n_1 τέτοιος ώστε $|x_n - x| < \varepsilon$ για κάθε άρτιο $n \geq n_1$. Αφού $x_{2n-1} \to x$, υπάρχει περιττός n_2 τέτοιος ώστε $|x_n - x| < \varepsilon$ για κάθε περιττό $n \geq n_2$. Επομένως για κάθε φυσικό $n \geq \max\{n_1, n_2\}$ έχουμε $|x_n - x| < \varepsilon$. □

2.27. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε οι υπακολουθίες x_{2n}, x_{2n+1} και x_{3n} συγκλίνουν. Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.*

Λύση. Θέτουμε $a = \lim x_{2n}$, $b = \lim x_{2n+1}$ και $c = \lim x_{3n}$. Παρατηρούμε ότι η x_{6n} είναι υπακολουθία τής x_{2n} και τής x_{3n}, άρα η x_{6n} συγκλίνει στο a και στο c, επομένως $a = c$. Ομοίως, η $x_{3(2n+1)}$ είναι υπακολουθία τής x_{2n+1} (διότι $3(2n+1) = 2(3n+1) + 1$), και τής x_{3n}, άρα $b = c$. Δηλαδή η υπακολουθία των άρτιων όρων και η υπακολουθία των περιττών όρων τής x_n συγκλίνουν στο ίδιο όριο (c), επομένως η ακολουθία συγκλίνει. □

2.28. *Δείξτε ότι αν μια μονότονη ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε συγκλίνει.*

Λύση. Έστω x_n μονότονη, και x_{k_n} μια υπακολουθία τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x_n είναι αύξουσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $x_{k_n} \to x$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$x - \varepsilon < x_{k_n} < x + \varepsilon,$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq k_{n_0}$ έχουμε

$$x - \varepsilon < x_{k_{n_0}} \leq x_n \leq x_{k_n} < x + \varepsilon.$$

(Χρησιμοποιήσαμε ότι $n \leq k_n$). Δηλαδή $|x_n - x| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq k_{n_0}$. Άρα $x_n \to x$. □

2.29. *Έστω x_n μια φραγμένη ακολουθία. Θέτουμε A να είναι το σύνολο των ορίων όλων των συγκλινουσών υπακολουθιών τής x_n. Έστω τώρα $y_n \in A$ τέτοια ώστε $y_n \to y$. Δείξτε ότι $y \in A$.*

Λύση. Το y_1 ανήκει στο A, άρα υπάρχει υπακολουθία τής x_n η οποία συγκλίνει στο y_1. Επομένως υπάρχει k_1 τέτοιο ώστε $|x_{k_1} - y_1| < 1$. Το y_2 ανήκει στο A, άρα υπάρχει (κάποια άλλη) υπακολουθία τής x_n η οποία συγκλίνει στο y_2. Επομένως υπάρχει $k_2 > k_1$ τέτοιο ώστε $|x_{k_2} - y_2| < 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $|x_{k_n} - y_n| < 1/n$. Αλλά τότε

$$|x_{k_n} - y| \leq |x_{k_n} - y_n| + |y_n - y| \leq |y_n - y| + \frac{1}{n} \to 0.$$

Επομένως $x_{k_n} \to y$. Δηλαδή το y είναι όριο υπακολουθίας τής x_n, άρα $y \in A$. □

2.30. *Έστω x_n μια όχι άνω φραγμένη ακολουθία. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \to +\infty$.*

Λύση. Αφού η x_n δεν είναι άνω φραγμένη, υπάρχει k_1 τέτοιο ώστε $x_{k_1} > 1$. Για τον ίδιο λόγο υπάρχει k_2 τέτοιο ώστε $x_{k_2} > \max\{2, x_1, x_2, \dots, x_{k_1}\}$. Παρατηρήστε ότι $k_2 > k_1$ διαφορετικά το x_{k_2} θα ήταν γνήσια μεγαλύτερο από τον εαυτό του. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: υπάρχει k_3 τέτοιο ώστε $x_{k_3} > \max\{3, x_1, x_2, \dots, x_{k_2}\}$. Όπως πριν, πρέπει $k_3 > k_2$. Παίρνουμε έτσι μια υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} > n$, άρα $x_{k_n} \to +\infty$. □

2.31. *Έστω x_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $0 < \theta < 1$ τέτοιο ώστε*

$$|x_n - x_{n-1}| \le \theta |x_{n-1} - x_{n-2}|$$

για κάθε $n \ge 3$. Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.

Λύση. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \ge 3$ έχουμε

$$|x_n - x_{n-1}| \le \theta |x_{n-1} - x_{n-2}| \le \theta^2 |x_{n-2} - x_{n-3}| \le \cdots \le \theta^{n-2} |x_2 - x_1|.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η x_n είναι Cauchy. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού $\theta^n \to 0$, υπάρχει $n_0 \ge 3$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\theta^{n_0 - 1}}{1 - \theta} |x_2 - x_1| < \varepsilon.$$

Τότε για κάθε $n > m \ge n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| \le (\theta^{n-2} + \theta^{n-3} + \cdots + \theta^{m-1}) |x_2 - x_1| \\
&= \theta^{m-1} (1 + \theta + \theta^2 + \cdots + \theta^{n-m-1}) |x_2 - x_1| = \theta^{m-1} \frac{1 - \theta^{n-m}}{1 - \theta} |x_2 - x_1| \\
&\le \frac{\theta^{n_0 - 1}}{1 - \theta} |x_2 - x_1| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα η x_n είναι Cauchy, επομένως συγκλίνει. □

2.32. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε*

$$x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$$

για κάθε $n \ge 2$. Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.

Λύση. Έχουμε

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n \right| = \frac{1}{2} |x_n - x_{n-1}|.$$

Άρα από την άσκηση 2.31, η x_n συγκλίνει. □

2.33. *Υπολογίστε απ' ευθείας το όριο τής ακολουθίας τής άσκησης 2.32.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι

$$x_{k+1} - x_k = -\frac{1}{2}(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{4}(x_{k-1} - x_{k-2}) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} (x_2 - x_1).$$

Αθροίζοντας τις παραπάνω ισότητες για $k = 1, \dots, n-1$ παίρνουμε

$$x_n - x_1 = (x_2 - x_1) \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{2}{3}(x_2 - x_1)(1 - (1/2)^{n-1}).$$

Επομένως $x_n \to (x_1 + 2x_2)/3$. □

2.34. *Ορίζουμε αναδρομικά $x_1 = x$, $x_{n+1} = \theta \sin x_n + c$, όπου $x, c \in \mathbb{R}$ και $0 < \theta < 1$. Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.*

Λύση. Έχουμε

$$|x_{n+1} - x_n| = \theta |\sin x_n - \sin x_{n-1}| = \theta |\cos \xi_n| \cdot |x_n - x_{n-1}|,$$

για κάποιο ξ_n (θεώρημα μέσης τιμής). Δηλαδή $|x_{n+1} - x_n| \le \theta |x_n - x_{n-1}|$. Άρα, από την άσκηση 2.31, η x_n συγκλίνει. □

2.35. *Έστω x_n μια ακολουθία τέτοια ώστε*

$$0 \le x_1 \le x_2, \quad x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n}x_{2n-1}}, \quad x_{2n+2} = \frac{x_{2n} + x_{2n-1}}{2}.$$

Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.

Λύση. Έχουμε ότι $x_{2n-1} \le x_{2n+1} \le x_{2n+2} \le x_{2n}$. Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$. Η πρώτη και η τρίτη από την δεύτερη:

$$x_{2n-1} \le x_{2n} \Rightarrow x_{2n-1} \le \sqrt{x_{2n}x_{2n-1}} \Rightarrow x_{2n-1} \le x_{2n+1}.$$

$$x_{2n-1} \le x_{2n} \Rightarrow \frac{x_{2n} + x_{2n-1}}{2} \le x_{2n} \Rightarrow x_{2n+2} \le x_{2n}.$$

Έτσι, η υπακολουθία των άρτιων όρων είναι φθίνουσα και φραγμένη, ενώ η υπακολουθία των περιττών όρων είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα συγκλίνουν. Επίσης

$$x_{2n+2} - x_{2n+1} = \frac{x_{2n} + x_{2n-1}}{2} - x_{2n+1} \le \frac{x_{2n} + x_{2n-1}}{2} - x_{2n-1} = \frac{x_{2n} - x_{2n-1}}{2} \le \cdots \le \frac{x_2 - x_1}{2^n} \to 0.$$

Επομένως οι υπακολουθίες των άρτιων και περιττών όρων συγκλίνουν στο ίδιο όριο, συνεπώς η ακολουθία συγκλίνει. □

2.36. *Έστω x_n μια ακολουθία. Ορίζουμε*

$$y_n = \sup_k |x_{n+k} - x_n|.$$

Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει αν και μόνο αν $y_n \to 0$.

Λύση. Έστω ότι η x_n συγκλίνει, και έστω $\varepsilon > 0$. Η x_n είναι Cauchy, άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - x_m| < \varepsilon/2$ για κάθε $n, m \ge n_0$. Επομένως για κάθε $n \ge n_0$ και κάθε k έχουμε $|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon/2$. Συνεπώς

$$y_n = \sup_k |x_{n+k} - x_n| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Άρα $y_n \to 0$. Αντίστροφα, έστω ότι $y_n \to 0$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $y_n < \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως για κάθε $m > n > n_0$ έχουμε

$$|x_n - x_m| = |x_{n+(m-n)} - x_n| \le \sup_k |x_{n+k} - x_n| = y_n < \varepsilon.$$

Δηλαδή η x_n είναι Cauchy, άρα συγκλίνει. □

2.37. *Έστω x_n, y_n φραγμένες ακολουθίες με $x_n \le y_n$ για κάθε n. Δείξτε ότι*

$$\liminf x_n \le \liminf y_n \quad \textit{και} \quad \limsup x_n \le \limsup y_n.$$

Λύση. Για κάθε n και $j \ge n$ έχουμε

$$x_j \le y_j \le \sup_{k \ge n} y_k.$$

Άρα

$$\sup_{j \ge n} x_j \le \sup_{k \ge n} y_k.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n έχουμε $\limsup x_n \le \limsup y_n$. Η σχέση $\liminf x_n \le \liminf y_n$ αποδεικνύεται ανάλογα. □

2.38. *Έστω x_n φραγμένη ακολουθία και x_{k_n} μια υπακολουθία της. Δείξτε ότι*

$$\liminf x_n \le \liminf x_{k_n} \le \limsup x_{k_n} \le \limsup x_n.$$

Λύση. Υπάρχει υπακολουθία τής x_{k_n}, άρα και τής x_n, η οποία συγκλίνει στο $\liminf x_{k_n}$. Αλλά το $\liminf x_n$ είναι το μικρότερο υπακολουθιακό όριο τής x_n άρα είναι μικρότερο από ή ίσο με το $\liminf x_{k_n}$. Ομοίως με τα $\limsup$. □

2.39. *Έστω x_n, y_n φραγμένες ακολουθίες. Τότε*

(1) $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$ *και* $\liminf(-x_n) = -\limsup x_n$.
(2) $\liminf x_n + \liminf y_n \le \liminf(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \liminf y_n \le \limsup(x_n + y_n) \le \limsup x_n + \limsup y_n$
(3) *Αν επιπλέον η y_n συγκλίνει, τότε* $\limsup(x_n+y_n) = \limsup x_n + \lim y_n$ *και* $\liminf(x_n+y_n) = \liminf x_n + \lim y_n$.

Λύση.

(1) Αποδεικνύουμε την πρώτη ισότητα:

$$\limsup(-x_n) = \lim_n \sup_{k\geq n}(-x_k) = -\lim_n \inf_{k\geq n} x_k = -\liminf x_n.$$

(2) Αποδεικνύουμε τις δυο τελευταίες ανισότητες:

Για κάθε n και κάθε $l \geq n$, έχουμε

$$x_l \leq \sup_{k\geq n} x_k, \quad y_l \leq \sup_{k\geq n} y_k.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$x_l + y_l \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $l \geq n$, άρα

$$\sup_{l\geq n}(x_l + y_l) \leq \sup_{k\geq n} x_k + \sup_{k\geq n} y_k.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n έχουμε

$$\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

Για να δείξουμε την άλλη ανισότητα, χρησιμοποιούμε αυτήν που μόλις δείξαμε:

$$\limsup x_n = \limsup(x_n + y_n - y_n) \leq \limsup(x_n + y_n) + \limsup(-y_n) = \limsup(x_n + y_n) - \liminf y_n.$$

Άρα $\limsup x_n + \liminf y_n \leq \limsup(x_n + y_n)$.

(3) Αποδεικνύουμε μόνο την πρώτη ισότητα:

Από το (2) έχουμε ότι

$$\limsup x_n + \liminf y_n \leq \limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n.$$

Αλλά η y_n συγκλίνει, άρα $\limsup y_n = \liminf y_n = \lim y_n$. Επομένως η προηγούμενη ανισότητα μας δίνει το ζητούμενο.

□

2.40. *Έστω* $x_n = \cos(\pi n/3) + 1/n$. *Βρείτε τα* $\liminf x_n$ *και* $\limsup x_n$.

Λύση. Θέτουμε $y_n = \cos(\pi n/3)$, $z_n = 1/n$. Παρατηρούμε ότι $y_{n+6} = \cos(2\pi + \pi n/3) = \cos(\pi n/3) = y_n$. Επίσης, οι 6 πρώτοι όροι τής y_n είναι $1/2, -1/2, -1, -1/2, 1/2, 1$. Δηλαδή η y_n είναι περιοδική με περίοδο 6. Άρα

$$\liminf y_n = \min\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\} = -1, \quad \limsup y_n = \max\left\{\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right\} = 1.$$

Προφανώς $\lim z_n = 0$. Επομένως

$$\liminf x_n = \liminf(y_n + z_n) = \liminf y_n + \lim z_n = -1, \quad \limsup x_n = \limsup(y_n + z_n) = \limsup y_n + \lim z_n = 1.$$

□

2.41. *Βρείτε δυο ακολουθίες* x_n *και* y_n *τέτοιες ώστε*

$$\limsup x_n + \liminf y_n < \limsup(x_n + y_n) < \limsup x_n + \limsup y_n.$$

Λύση. Θέτουμε

$$x_n : (1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots)$$
$$y_n : (0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots).$$

Τότε

$$x_n + y_n : (1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots).$$

Άρα

$$\limsup x_n + \liminf y_n = 1 + 0 = 1 < \limsup(x_n + y_n) = 2 < \limsup x_n + \limsup y_n = 1 + 2 = 3.$$

□

2.42. *Έστω* x_n, y_n *φραγμένες ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών. Δείξτε ότι*

$$\lim\sup(x_n y_n) \leq \lim\sup x_n \lim\sup y_n.$$

Λύση. Για κάθε n και καθε $l \geq n$ έχουμε

$$x_l \leq \sup_{k \geq n} x_k, \quad y_l \leq \sup_{k \geq n} y_k.$$

Συνεπώς,

$$x_l y_l \leq \sup_{k \geq n} x_k \sup_{k \geq n} y_k.$$

Άρα

$$\sup_{l \geq n}(x_k y_k) \leq \sup_{k \geq n} x_k \sup_{k \geq n} y_k.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$, έχουμε το ζητούμενο. □

2.43. *Βρείτε δυο φραγμένες ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε*

$$\limsup(x_n y_n) < \limsup x_n \limsup y_n.$$

Λύση. Θέτουμε

$$x_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 2, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases} \qquad y_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 1/2, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}.$$

Τότε $\limsup(x_n y_n) = \lim(x_n y_n) = 1$ και $\limsup x_n \limsup y_n = 2 \cdot 1 = 2$. □

2.44. *Έστω x_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε* $\limsup \sqrt[n]{x_n} < 1$. *Δείξτε ότι $x_n \to 0$.*

Λύση. Θέτουμε $u = \limsup \sqrt[n]{x_n}$. Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ με $u + \varepsilon < 1$. Τότε, αφού $\lim_n \sup_{k \geq n} \sqrt[k]{x_k} = u$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$\sup_{k \geq n_0} \sqrt[k]{x_k} < u + \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$x_n < (u + \varepsilon)^n \to 0.$$

□

2.45. *Έστω x_n φραγμένη ακολουθία. Θέτουμε*

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Δείξτε ότι

$$\liminf x_n \leq \liminf \sigma_n \leq \limsup \sigma_n \leq \limsup x_n.$$

Ιδιαίτερα, αν η x_n συγκλίνει, τότε η σ_n συγκλίνει στο ίδιο όριο. Αυτό είχε αποδειχτεί απ' ευθείας στην άσκηση 2.15.

Λύση. Θέτουμε $u = \limsup x_n$, και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, αφού $\lim_n \sup_{k \geq n} x_k = u$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$\sup_{k \geq n_0} x_k < u + \varepsilon.$$

Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n_0 - 1} + x_{n_0} + \cdots + x_n}{n} < \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0 - 1}}{n} + \frac{n - n_0 + 1}{n}(u + \varepsilon)$$

Το δεξιά μέλος συγκλίνει, ως προς n, στο $u + \varepsilon$, άρα $\limsup \sigma_n \leq u + \varepsilon$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\limsup \sigma_n \leq \limsup x_n$. Ομοίως δείχνουμε ότι $\liminf x_n \leq \liminf \sigma_n$. □

2.46. *Έστω x_n μια αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \to x.$$

Δείξτε ότι $x_n \to x$.

Λύση. Θέτουμε

$$\sigma_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Τότε

$$0 \le x_n = \frac{nx_n}{n} \le \frac{(n+1)x_n}{n} = \frac{\overbrace{x_n + \cdots + x_n}^{n+1 \text{ φορές}}}{n} \le \frac{x_n + x_{n+1} + \cdots + x_{2n}}{n} \le 2\sigma_{2n}.$$

Αλλά η σ_n είναι φραγμένη γιατί συγκλίνει. Επομένως η x_n είναι αύξουσα και φραγμένη, άρα $x_n \to y$ για κάποιο y. Αλλά τότε $\sigma_n \to y$, από την άσκηση 2.45 ή την άσκηση 2.15. Επομένως $x = y$. □

2.47. *Βρείτε μια μη συγκλίνουσα ακολουθία x_n τέτοια ώστε η*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

συγκλίνει.

Λύση. Η $x_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει αλλά

$$\left| \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \right| \le \frac{1}{n} \to 0.$$

□

2.48. *Έστω x_n, y_n δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε y_n γνήσια αύξουσα, $y_n \to +\infty$, και*

$$\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a.$$

Δείξτε ότι

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Η άσκηση αυτή είναι ο «κανόνας L' Hôpital» για ακολουθίες. Οι διαφορές διαδοχικών όρων $x_{n+1} - x_n$ και $y_{n+1} - y_n$ παίζουν το ρόλο των παραγώγων.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$a - \varepsilon < \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} < a + \varepsilon.$$

Επομένως

$$\begin{gathered}
(a-\varepsilon)(y_{n_0+1} - y_{n_0}) < x_{n_0+1} - x_{n_0} < (a+\varepsilon)(y_{n_0+1} - y_{n_0}) \\
(a-\varepsilon)(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) < x_{n_0+2} - x_{n_0+1} < (a+\varepsilon)(y_{n_0+2} - y_{n_0+1}) \\
\vdots \\
(a-\varepsilon)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (a+\varepsilon)(y_n - y_{n-1})
\end{gathered}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις προηγούμενες ανισότητες παίρνουμε

$$(a-\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) + x_{n_0} < x_n < (a+\varepsilon)(y_n - y_{n_0}) + x_{n_0}.$$

Άρα

$$(a-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n} < \frac{x_n}{y_n} < (a+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}.$$

Αλλά $\lim 1/y_n = 0$, άρα

$$\liminf \left[(a-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = \limsup \left[(a-\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = a - \varepsilon.$$

$$\liminf \left[(a+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = \limsup \left[(a+\varepsilon)\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) + \frac{x_{n_0}}{y_n}\right] = a + \varepsilon.$$

Συνεπώς

$$a - \varepsilon \le \liminf \frac{x_n}{y_n} \le \limsup \frac{x_n}{y_n} \le a + \varepsilon.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\liminf \frac{x_n}{y_n} = \limsup \frac{x_n}{y_n} = a.$$

Επομένως

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = a.$$

□

2.49. *Έστω r_n η ακολουθία όλων τών ρητών αριθμών στο $(0, 1)$, δηλαδή $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Βρείτε το* $\liminf r_n$.

Λύση. Η ακολουθία r_n είναι κάτω φραγμένη από το 0, άρα $\liminf r_n \geq 0$. Θα δείξουμε ότι $\liminf r_n \leq 0$ (άρα $\liminf r_n = 0$) βρίσκοντας μια υπακολουθία r_{k_n} με $r_{k_n} \to 0$ (το όριο κάθε συγκλίνουσας υπακολουθίας είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το liminf). Έστω $k_1 \in \mathbb{N}$ αυθαίρετο. Επιλέγουμε ένα ρητό r_{k_2} τέτοιο ώστε

$$r_{k_2} < \min\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{k_1}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Έχουμε κατ' ανάγκη ότι $k_2 > k_1$ (διαφορετικά ο r_{k_2} θα ήταν γνήσια μικρότερος από τον εαυτό του). Επιλέγουμε τώρα ένα ρητό r_{k_3} τέτοιο ώστε

$$r_{k_3} < \min\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{k_2}, \frac{1}{3}\right\}.$$

Όπως πριν, έχουμε $k_3 > k_2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια υπακολουθία r_{k_n} τέτοια ώστε

$$r_{k_n} < \min\left\{r_1, r_2, \ldots, r_{k_{n-1}}, \frac{1}{n}\right\} \leq \frac{1}{n} \to 0.$$

□

2.50. *Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to a$. Δείξτε ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$.*

Λύση. Υποθέτουμε αρχικά ότι $a > 0$. Έστω $0 < \varepsilon < a$ τυχόν. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$a - \varepsilon < \frac{a_{k+1}}{a_k} < a + \varepsilon,$$

για κάθε $k \geq n_0$. Έστω τώρα $n > n_0$. Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις προηγούμενες ανισότητες για $k = n_0, \ldots, n-1$ και παίρνουμε

$$(a-\varepsilon)^{n-n_0} < \frac{a_n}{a_{n_0}} < (a+\varepsilon)^{n-n_0} \Rightarrow (a-\varepsilon)^{1-n_0/n} \sqrt[n]{a_{n_0}} < \sqrt[n]{a_n} < (a+\varepsilon)^{1-n_0/n} \sqrt[n]{a_{n_0}}.$$

Παίρνοντας lim inf και lim sup στην προηγούμενη σχέση έχουμε

$$a - \varepsilon \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq a + \varepsilon.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $0 < \varepsilon < a$, άρα $\liminf a_n = \limsup a_n = a$, το οποίο σημαίνει ότι $\sqrt[n]{a_n} \to a$. Αν $a = 0$, το επιχείρημα είναι ανάλογο (και απλούστερο). □

2.51. *Έστω a_n μια ακολουθία τέτοια ώστε $a_{n+1} - \frac{a_n}{2} \to 0$. Δείξτε ότι $a_n \to 0$.*

Λύση. Θέτουμε $x_n = a_{n+1} - \frac{a_n}{2}$. Τότε

$$\begin{aligned} a_n &= x_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{2} = x_{n-1} + \frac{1}{2}\left(x_{n-2} + \frac{a_{n-2}}{2}\right) = x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2} + \frac{1}{2^2}a_{n-2} \\ &\ldots \\ &= x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2} + \frac{1}{2^2}x_{n-3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}x_1 + \frac{1}{2^{n-1}}a_1 = \frac{a_1}{2^{n-1}} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x_{n-k-1}}{2^k} \\ &= y_n + z_n. \end{aligned}$$

Προφανώς $y_n \to 0$, έτσι αρκεί να δείξουμε ότι $z_n \to 0$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού $x_n \to 0$ υπάρχει $n_0 > 2$ τέτοιο ώστε $|x_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επίσης η x_n είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|x_n| \leq M$ για κάθε n. Επομένως για κάθε $n > n_0 + 1$ έχουμε

$$|z_n| \leq \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \frac{|x_{n-k-1}|}{2^k} + \sum_{k=n-n_0}^{n-2} \frac{|x_{n-k-1}|}{2^k} < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-n_0-1} \frac{1}{2^k} + M \sum_{k=n-n_0}^{n-2} \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon + \frac{M}{2^{n-n_0-1}}.$$

Άρα $\limsup |z_n| \leq 2\varepsilon$. Αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $\limsup |z_n| = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $z_n \to 0$. □

2.52. *Έστω ξ ένας άρρητος αριθμός. Δείξτε ότι το σύνολο*

$$A = \{m + n\xi : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$, δηλαδή ανάμεσα σε κάθε δυο πραγματικούς υπάρχει στοιχείο τού A.

Λύση. Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει στοιχείο τού A στο διάστημα (a, b). Θέτουμε

$$x_n = n\xi - [n\xi].$$

Αφού ο ξ είναι άρρητος, η x_n είναι 1-1. Η x_n είναι φραγμένη, άρα από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Επομένως υπάρχουν $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $0 < x_{n_1} - x_{n_2} < b - a$. Έστω τώρα k ο μεγαλύτερος ακέραιος τέτοιος ώστε $k(x_{n_1} - x_{n_2}) \leq a$. Τότε, από την επιλογή τού k, $(k+1)(x_{n_1} - x_{n_2}) > a$. Επίσης

$$(k+1)(x_{n_1} - x_{n_2}) = k(x_{n_1} - x_{n_2}) + (x_{n_1} - x_{n_2}) < a + (b - a) = b.$$

Έτσι το ζητούμενο στοιχείο τού A είναι το $(k+1)(x_{n_1} - x_{n_2})$. □

Κεφάλαιο 3

Σειρές Πραγματικών Αριθμών

Γενικά

Ορισμός. *Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Θέτουμε*

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \cdots$$

Η ακολουθία s_n ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Για ένα δεδομένο n, ο αριθμός a_n λέγεται n-οστός όρος τής σειράς, και ο αριθμός s_n n-οστό μερικό άθροισμα τής σειράς.

- *Αν $\lim s_n = s$ για κάποιο $s \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο s και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = s.$$

- *Αν $\lim s_n = \pm\infty$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $\pm\infty$ και γράφουμε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm\infty \quad \text{ή} \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \pm\infty.$$

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ αποκλίνει στο $+\infty$ διότι αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τότε $s_n = n \to +\infty$.

(2) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ δεν συγκλίνει διότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$$s_n = \begin{cases} -1, & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ 0, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \end{cases}$$

δεν συγκλίνει.

(3) Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ συγκλίνει στο 1. Πράγματι

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1.$$

(4) (Η γεωμετρική σειρά) Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Θα εξετάσουμε τη σύγκλιση τής σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$.

- Αν $\alpha = 1$ τότε $s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n \to +\infty$, άρα $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n = +\infty$.
- Αν $\alpha \neq 1$ τότε $s_n = \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = \dfrac{\alpha - \alpha^{n+1}}{1-\alpha}$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για το α.

– Αν $|\alpha| < 1$, τότε $\alpha^{n+1} \to 0$, άρα $s_n \to \dfrac{\alpha}{1-\alpha}$, άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-\alpha}$.
– Αν $\alpha > 1$, τότε $\alpha^{n+1} \to +\infty$, άρα $s_n \to +\infty$, άρα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n = +\infty$.
– Αν $\alpha \leq -1$, τότε η ακολουθία α^{n+1} δεν συγκλίνει, άρα η s_n δεν συγκλίνει, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει.

Παρατηρήσεις.

(1) Κάθε άθροισμα πεπερασμένου πλήθους όρων μπορεί να θεωρηθεί συγκλίνουσα σειρά.
(2) Η σύγκλιση ή η απόκλιση μιας σειράς δεν επηρεάζεται αν αλλάξουμε τις τιμές πεπερασμένου πλήθους όρων. Σαν άσκηση, διατυπώστε και αποδείξτε αυστηρά την πρόταση αυτήν.
(3) Ο υπολογισμός τής τιμής τού ορίου μιας σειράς είναι, γενικά, πολύ δύσκολος διότι σπανίως μπορούμε να βρούμε κλειστό τύπο για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Στο μάθημα αυτό θα δούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την σύγκλιση μιας σειράς, και όχι τεχνικές υπολογισμού τού ορίου της.

Θεώρημα. *Αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\lim a_n = 0$.

Απόδειξη. Θέτουμε $s = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Τότε

$$a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0.$$

□

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, όπως θα δούμε παρακάτω, γενικά **δεν** ισ-χύει.

Θεώρημα. *Αν η σειρά* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει, τότε* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$.

Απόδειξη. Για κάθε n, m με $m > n$ έχουμε

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Σταθεροποιούμε το n και παίρνουμε όρια καθώς $m \to \infty$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Τώρα παίρνουμε όρια καθώς $n \to \infty$ και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0.$$

□

Αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η πόσοτητα $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, τού προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται μερικές φορές «ουρά» τής σειράς. Παρατηρήστε ότι η σειρά «σπάει» στο μερικό άθροισμα και στην ουρά.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Το θεώρημα λέει ότι η ακολουθία των ουρών είναι μια μηδενική ακολουθία.

Θεώρημα. *Έστω ότι* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, *και* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$. *Τότε* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda a + \mu b$ *για κάθε* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Αν s_n, t_n είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των δύο σειρών, τότε η $\lambda s_n + \mu t_n$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$. Αλλά $\lambda s_n + \mu t_n \to \lambda a + \mu b$. □

Παρατήρηση. Ο «πολλαπλασιασμός» δυο σειρών, όπως θα δούμε παρακάτω, γενικά δεν επιτρέπεται.

Θεώρημα (Κριτήριο Cauchy)**.** *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $n_0 \in \mathbb{N}$*, τέτοιο ώστε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$ *με* $m > n \geq n_0$ *έχουμε* $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$*.*

Απόδειξη. Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_n συγκλίνει. Η s_n συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy. Η s_n είναι Cauchy αν και μόνο αν

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m > n \geq n_0 \Rightarrow |s_m - s_n| < \varepsilon).$$

Αλλά $|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m|$. □

Παραδείγματα.

(1) (Η αρμονική σειρά) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει. Αν συνέκλινε, από το κριτήριο Cauchy θα υπήρχε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ θα είχαμε

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{m} < \frac{1}{2}.$$

Ιδιαίτερα,

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \frac{1}{2}.$$

Αλλά

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \geq \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \cdots + \frac{1}{n+n}}_{n \text{ φορές}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

άτοπο. Η αρμονική σειρά είναι το βασικό παράδειγμα μη-συγκλίνουσας σειράς με μηδενική ακολουθία όρων.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ με $m > n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Από το κριτήριο Cauchy, η σειρά συγκλίνει.

Σειρές μη αρνητικών όρων

Στην ενότητα αυτήν θα δούμε κριτήρια σύγκλισης για σειρές οι οποίες αποτελούνται από μη αρνητικούς όρους.

Θεώρημα. *Έστω a_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών και s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε*

(1) *Αν η s_n είναι φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει.*
(2) *Αν η s_n δεν είναι φραγμένη τότε $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Απόδειξη. Αφού $a_n \geq 0$ για κάθε n, η ακολουθία s_n είναι αύξουσα. Επομένως αν είναι φραγμένη συγκλίνει, αν δεν είναι φραγμένη αποκλίνει στο $+\infty$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι μια σειρά μη αρνητικών όρων είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Για παράδειγμα, είδαμε ότι η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, άρα κατ' ανάγκη αποκλίνει στο $+\infty$.
(2) Το προηγούμενο θεώρημα δεν ισχύει για σειρές αριθμών με αυθαίρετα πρόσημα. Για παράδειγμα η $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ δεν συγκλίνει. Παρά ταύτα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι φραγμένη.

Θεώρημα (Κριτήριο σύγκρισης)**.** *Έστω a_n, b_n ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών τέτοιες ώστε $a_n \leq b_n$ για κάθε n. Τότε*

(1) *Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*
(2) *Αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n, t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των δύο σειρών. Εφόσον $a_n \leq b_n$ για κάθε n, έχουμε ότι $s_n \leq t_n$ για κάθε n. Τώρα, αν η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε η t_n συγκλίνει άρα είναι φραγμένη, επομένως και η s_n είναι φραγμένη συνεπώς η $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε $s_n \to +\infty$, άρα $t_n \to +\infty$, επομένως $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι $a_n \leq b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, όπου n_0 κάποιος δεδομένος φυσικός αριθμός. Εξακολουθεί, επίσης, να ισχύει αν $\lambda a_n \leq \mu b_n$, όπου λ, μ δεδομένοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Παραδείγματα.

(1) Αν $p > 1$ τότε η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θεωρούμε την υπακολουθία $s_{2^{n+1}-1}$ και για κάθε n χωρίζουμε το $s_{2^{n+1}-1}$ σε $n+1$ διαδοχικές ομάδες με $1, 2, 2^2, \ldots, 2^n$ όρους η κάθε μία. Μέσα σε κάθε ομάδα κρατάμε τον πρώτο όρο (ο οποίος είναι ο μεγαλύτερος) τόσες φορές όσες και το πλήθος των όρων τής ομάδας. Έτσι το όλο άθροισμα μεγαλώνει

$$s_{2^{n+1}-1} = \underbrace{1}_{1\text{ όρος}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right)}_{2\text{ όροι}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^n)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}\right)}_{2^n\text{ όροι}}$$

$$\leq 1+\frac{2}{2^p}+\cdots+\frac{2^n}{2^{pn}} = \underbrace{1+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n(p-1)}}}_{\text{γεωμετρική πρόοδος}}$$

$$= \frac{1-2^{(1-p)(n+1)}}{1-2^{1-p}} \leq \frac{1}{1-2^{1-p}}.$$

Επομένως η $s_{2^{n+1}-1}$ είναι φραγμένη, άρα και η s_n είναι φραγμένη διότι $s_n \leq s_{2^{n+1}-1}$. Συνεπώς η σειρά συγκλίνει. Η ιδέα αυτής τής απόδειξης θα χρησιμοποιηθεί παρακάτω στην απόδειξη τού κριτήριου συμπύκνωσης τού Cauchy. Παρατηρήστε ότι αν $p \geq 2$, τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε την προηγούμενη απόδειξη. Στην περίπτωση αυτή η σύγκλιση τής σειράς προκύπτει άμεσα από την ανισότητα $\frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{n^2}$ και το κριτήριο σύγκρισης (έχουμε δείξει σε παράδειγμα τής προηγούμενης ενότητας ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει).

(2) Αν $0 < p \leq 1$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = +\infty$. Πράγματι, έχουμε $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ και γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty$, άρα από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = +\infty$.

(3) (Ο αριθμός e σαν όριο σειράς) Θυμίζουμε ότι ο αριθμός e ορίζεται σαν το όριο τής ακολουθίας

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = e$. Το ότι η σειρά συγκλίνει προκύπτει άμεσα από το κριτήριο σύγκρισης. Πράγματι, για κάθε $n \geq 2$ έχουμε ότι $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^n}$ και γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική σειρά συγκλίνει. Θέτουμε λοιπόν $s = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ και θα δείξουμε ότι $s = e$. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Τότε $s_n \to s$. Παρατηρούμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n-1)n}{n\cdot n\cdots n\cdot n}$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right) < \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = s_n.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση, έχουμε $e \leq s$. Έστω τώρα τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού $s_n \to s$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $s_{n_0} > s-\varepsilon$. Τότε για κάθε $n > n_0$ έχουμε

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} > 1+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$e \geq \sum_{k=0}^{n_0}\frac{1}{k!} = s_{n_0} > s-\varepsilon.$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $e \geq s$. Δείξαμε δηλαδή ότι $e \leq s$ και $e \geq s$. Επομένως, $e = s$.

Θεώρημα (Οριακό κριτήριο σύγκρισης). *Έστω a_n, b_n ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, όπου $\ell > 0$. Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Εφόσον $\frac{a_n}{b_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_n}{b_n} - \ell\right| < \frac{\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $\frac{\ell}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3\ell}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως $\frac{\ell}{2} b_n < a_n < \frac{3\ell}{2} b_n$ για κάθε $n \geq n_0$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+2}$ αποκλίνει διότι $\frac{\frac{\sqrt{n}}{n+2}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1$ και γνωρίζουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{n+2}{n^3 - n - 8}$ συγκλίνει διότι $\frac{\frac{n+2}{n^3-n-8}}{\frac{1}{n^2}} \to 1$ και γνωρίζουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Θεώρημα (Κριτήριο λόγου)**.** *Έστω a_n ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$.*

(1) *Αν $\ell < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\ell > 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$*

Απόδειξη.

(1) Αν $\ell < 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell + \varepsilon_0 < 1$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon_0$, και άρα

$$a_{n+1} < a_n(\ell + \varepsilon_0) < a_{n-1}(\ell + \varepsilon_0)^2 < a_{n-2}(\ell + \varepsilon_0)^3 < \cdots < a_{n_0}(\ell + \varepsilon_0)^{n-n_0+1}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell + \varepsilon_0)^n$ συγκλίνει (γεωμετρική, $0 < \ell + \varepsilon_0 < 1$). Άρα από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\ell > 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell - \varepsilon_1 > 1$. Αφού $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_1$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \ell - \varepsilon_1$, και άρα

$$a_{n+1} > a_n(\ell - \varepsilon_1) > a_{n-1}(\ell - \varepsilon_1)^2 > a_{n-2}(\ell - \varepsilon_1)^3 > \cdots > a_{n_0}(\ell - \varepsilon_1)^{n-n_0+1}.$$

Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell - \varepsilon_1)^n = +\infty$ (γεωμετρική, $\ell - \varepsilon_1 > 1$). Από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

□

Θεώρημα (Κριτήριο ρίζας)**.** *Έστω a_n ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$.*

(1) *Αν $\ell < 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.*

(2) *Αν $\ell > 1$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.*

Απόδειξη.

(1) Αν $\ell < 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell + \varepsilon_0 < 1$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon_0$, και άρα $a_n < (\ell + \varepsilon_0)^n$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\ell + \varepsilon_0)^n$ συγκλίνει , άρα από κριτήριο σύγκρισης, και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\ell > 1$ επιλέγουμε $\varepsilon_1 > 0$ τέτοιο ώστε $\ell - \varepsilon_1 > 1$. Αφού $\sqrt[n]{a_n} \to \ell$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\left|\sqrt[n]{a_n} - \ell\right| < \varepsilon_1$ για κάθε $n \geq n_1$. Επομένως για κάθε $n \geq n_1$ έχουμε $\sqrt[n]{a_n} > \ell - \varepsilon_1$, και άρα $a_n > (\ell - \varepsilon_1)^n$. Αλλά $\sum_{n=1}^{\infty}(\ell - \varepsilon_1)^n = +\infty$. Άρα από κριτήριο σύγκρισης $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Στα κριτήρια λόγου και ρίζας, αν $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to +\infty$ ή αν $\sqrt[n]{a_n} \to +\infty$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

(2) Τα κριτήρια δεν εφαρμόζονται αν $\ell = 1$. Πράγματι,

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ αποκλίνει, ενώ η $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει.

Παραδείγματα.

(1) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ συγκλίνει διότι $\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \to \dfrac{1}{e} < 1$ (κριτήριο λόγου).

(2) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}$ συγκλίνει διότι $\sqrt[n]{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-n} \to \dfrac{1}{e} < 1$ (κριτήριο ρίζας).

Θεώρημα (Κριτήριο ολοκληρώματος). *Έστω $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, φθίνουσα, μη αρνητική. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία x_n με $x_n = \int_1^n f(x)dx$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Αφού η f είναι φθίνουσα έχουμε $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$, $k \in \mathbb{N}$. Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx.$$

Άρα

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

Αθροίζοντας για k από 1 ως n έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Επομένως

$$\sum_{k=1}^{n} f(k+1) \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Ισοδύναμα

$$s_{n+1} - f(1) \leq x_{n+1} \leq s_n.$$

Από την τελευταία σχέση συνεπάγονται τα εξής.

- Αν η σειρά συγκλίνει τότε η s_n είναι φραγμένη. Άρα και η x_n είναι φραγμένη, επομένως συγκλίνει διότι είναι αύξουσα.
- Αν η x_n συγκλίνει τότε είναι φραγμένη, άρα και η s_n είναι φραγμένη, επομένως η σειρά συγκλίνει.

□

Παράδειγμα. Έχουμε $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}dx = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \to +\infty$. Άρα από κριτήριο ολοκληρώματος $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = +\infty$.

Θεώρημα (Κριτήριο συμπύκνωσης τού Cauchy)**.** *Έστω a_n μια φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n, t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των σειρών $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}-1} &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^n} + \cdots + a_{2^{n+1}-1}) \\ &\le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n} = t_n. \end{aligned}$$

Δηλαδή $s_{2^{n+1}-1} \le t_n$ $(*)$. Απ' την άλλη

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + (a_{2^n+1} + \cdots + a_{2^{n+1}}) \\ &\ge a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^n a_{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}(2a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots + 2^{n+1} a_{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}(a_1 + t_{n+1}). \end{aligned}$$

Δηλαδή $t_{n+1} \le 2s_{2^{n+1}} - a_1$ $(**)$. Αν η $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει, τότε η t_n είναι φραγμένη, άρα και η $s_{2^{n+1}-1}$ είναι φραγμένη από την $(*)$. Επομένως η s_n είναι φραγμένη, συνεπώς η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

Αν η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε η s_n είναι φραγμένη, άρα και η $2s_{2^{n+1}} - a_1$ είναι φραγμένη, επομένως η t_{n+1} είναι φραγμένη από την $(**)$. Συνεπώς η $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ συγκλίνει. □

Παράδειγμα. Έστω $p > 0$. Τότε $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} = +\infty$. Πράγματι, από κριτήριο συμπύκνωσης, αρκεί να δείξουμε ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ όπου $a_n = \dfrac{2^n}{(\ln 2^n)^p}$. Αλλά $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p \to 2 > 1$. Άρα από κριτήριο λόγου $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Σειρές όρων με αυθαίρετα πρόσημα

Στην παράγραφο αυτή δεν κάνουμε καμία υπόθεση σε ό,τι αφορά τα πρόσημα των όρων των σειρών τις οποίες εξετάζουμε. Κανένα από τα κριτήρια που έχουμε δει μέχρι τώρα (εκτός από το κριτήριο Cauchy) δεν μπορεί να εφαρμοστεί απ' ευθείας σε τέτοιου είδους σειρές.

Ορισμός. *Μια σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *λέμε ότι συγκλίνει απόλυτα, αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *συγκλίνει.*

Θεώρημα. *Αν η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει απόλυτα τότε συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει, από κριτήριο Cauchy υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $m > n \geq n_0$ να ισχύει $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Επομένως $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Cauchy. □

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα διότι $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$. Άρα συγκλίνει.

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος **δεν** ισχύει. Για παράδειγμα, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

δεν συγκλίνει απόλυτα διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Παρά ταύτα συγκλίνει. Πράγματι, έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Θα δείξουμε ότι οι υπακολουθίες s_{2n} και s_{2n+1} συγκλίνουν στο ίδιο όριο. Παρατηρούμε ότι $s_{2n+2} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$, άρα η s_{2n} είναι αύξουσα. Επίσης

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n)} \\ &\leq 1 + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Δηλαδή η s_{2n} είναι αύξουσα και φραγμένη, επομένως συγκλίνει. Τώρα $s_{2n+1} = s_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, άρα και η s_{2n+1} συγκλίνει στο ίδιο όριο. Συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει.

Ορισμός. *Μια σειρά η οποία συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα (όπως η προηγούμενη) λέμε ότι συγκλίνει υπό συνθήκη.*

Η σύγκλιση μιας τέτοιας σειράς οφείλεται όχι μόνο στο απόλυτο μέγεθος των όρων της, αλλά και στις αλληλοαναιρέσεις που προκύπτουν από τη συνύπαρξη άπειρου πλήθους θετικών και άπειρου πλήθους αρνητικών όρων.

Θεώρημα (Κριτήριο Dirichlet)**.** *Έστω* a_n, b_n *δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε*

(1) *Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *είναι φραγμένη.*

(2) *Η* b_n *είναι φθίνουσα και μηδενική.*

Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Αφού η s_n είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $b_n \searrow 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $0 \leq b_n \leq \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε m, n με $m > n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| &= \left|\sum_{k=n+1}^{m} (s_k - s_{k-1}) b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m} s_{k-1} b_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} s_k b_k - \sum_{k=n}^{m-1} s_k b_{k+1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} s_k b_k - \sum_{k=n+1}^{m-1} s_k b_{k+1} + s_m b_m - s_n b_{n+1}\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_m b_m - s_n b_{n+1}\right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} |s_k||b_k - b_{k+1}| + |s_m b_m| + |s_n b_{n+1}| \leq M \sum_{k=n+1}^{m-1} |b_k - b_{k+1}| + 2M\varepsilon \\
&= M \sum_{k=n+1}^{m-1} (b_k - b_{k+1}) + 2M\varepsilon = M(b_{n+1} - b_m) + 2M\varepsilon \leq 3M\varepsilon.
\end{aligned}$$

Από κριτήριο Cauchy, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει. □

Παρατήρηση. Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι η b_n είναι φθίνουσα από κάποιο δείκτη και μετά.

Παράδειγμα. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε $p > 0$. Πράγματι η $\frac{1}{n^p}$ είναι φθίνουσα και μηδενική, και η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ είναι φραγμένη. Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Dirichlet. Παρατηρήστε ότι η σειρά συγκλίνει απόλυτα μόνο για $p > 1$.

Αναδιατάξεις και γινόμενα σειρών

Ορισμός. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια σειρά πραγματικών αριθμών και* $\tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *μια 1-1 και επί συνάρτηση. Τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *ονομάζεται αναδιάταξη τής* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Παραδείγματα.

(1) Η σειρά

$$(*)\ \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \cdots$$

είναι μια αναδιάταξη τής αρμονικής σειράς

$$(**)\ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots .$$

Παρατηρούμε ότι η $(**)$ αποκλίνει. Πράγματι, αν s_n και t_n είναι οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $(*)$ και $(**)$ αντίστοιχα, τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= \left(\frac{1}{2} + 1\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) = t_{2n} \to +\infty. \end{aligned}$$

Άρα $s_n \to +\infty$ διότι η s_n είναι αύξουσα.

(2) Υπάρχει αναδιάταξη τής

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

η οποία αποκλίνει. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} = +\infty$ μπορούμε να επιλέξουμε

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

έτσι ώστε

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n_1 + 1} > 1 \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1 + 3} + \frac{1}{2n_1 + 5} + \cdots + \frac{1}{2n_2 + 1} > 1 \\ -\frac{1}{6} + \frac{1}{2n_2 + 3} + \frac{1}{2n_2 + 5} + \cdots + \frac{1}{2n_3 + 1} > 1 \\ \cdots \\ -\frac{1}{2k+2} + \frac{1}{2n_k + 3} + \frac{1}{2n_k + 5} + \cdots + \frac{1}{2n_k + 1} > 1 \\ \cdots \end{gathered}$$

Τότε η ανάδιάταξη

$$\left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n_1 + 1}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2n_1 + 3} + \frac{1}{2n_1 + 5} + \cdots + \frac{1}{2n_2 + 1}\right) + \cdots$$

αποκλίνει διότι το άθροισμα n διαδοχικών παρενθέσεων είναι μεγαλύτερο από n.

Στην πραγματικότητα ισχύει το ακόλουθο πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα τού οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα (Riemann). *Αν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη, τότε για κάθε* $s \in \mathbb{R}$ *υπάρχει αναδιάταξη τέτοια ώστε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = s$.

Απ' την άλλη, έχουμε το εξής.

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια απόλυτα συγκλίνουσα σειρά και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *τυχούσα αναδιάταξη. Τότε η* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)}$ *συγκλίνει απόλυτα και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Απόδειξη. Για κάθε n έχουμε $\sum_{k=1}^{n} |a_{\tau(k)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ άρα η αναδιάταξη συγκλίνει απόλυτα. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε

$$\{1, 2, \ldots, n_1\} \subset \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n_0)\}.$$

Τότε για κάθε n με $n > n_0$ θέτουμε

$$I_n = \{\tau(1), \tau(2), \ldots, \tau(n)\} \setminus \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

και έχουμε

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_1} a_k\right| + \left|\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k\right| = \left|\sum_{k\in I_n} a_k\right| + \left|\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k\right| \leq 2\sum_{k=n_1+1}^{\infty} |a_k| < 2\varepsilon.$$

Επομένως $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\tau(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. □

Ορισμός. *Έστω* a_n, b_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, *δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Θέτουμε*

$$a_n * b_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Η ακολουθία $a_n * b_n$ *λέγεται συνέλιξη ή γινόμενο Cauchy των* a_n *και* b_n.

Θεώρημα. *Έστω* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *δυο απόλυτα συγκλίνουσες σειρές. Θέτουμε* $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $b = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. *Τότε η* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n * b_n$ *συγκλίνει απόλυτα και* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n * b_n = ab$.

Απόδειξη. Θέτουμε $c_n = a_n * b_n$. Για κάθε n έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k| \leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} |a_{k-j}||b_j| = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} |a_{k-j}||b_j| = \sum_{j=0}^{n} |b_j| \sum_{k=j}^{n} |a_{k-j}| = \sum_{j=0}^{n} |b_j| \sum_{k=0}^{n-j} |a_k| \leq \sum_{j=0}^{\infty} |b_j| \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|.$$

Δηλαδή η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ είναι φραγμένη, άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει απόλυτα. Θα δείξουμε τώρα ότι $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = ab$. Έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{k-j} b_j = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=j}^{n} a_{k-j} = \sum_{j=0}^{n} b_j \sum_{k=0}^{n-j} a_k = \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right) + a\sum_{j=0}^{n} b_j.$$

Προφανώς $\lim_{n\to\infty} a\sum_{j=0}^{n} b_j = ab$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} b_j\left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|$ συγκλίνει, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $\sum_{j=n_1+1}^{\infty}|b_j| < \varepsilon$. Επίσης, αφού $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ υπάρχει n_2 τέτοιο ώστε για κάθε n με $n \geq n_2$ έχουμε $\left|\sum_{k=0}^{n} a_k - a\right| < \varepsilon$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Τότε για κάθε n με $n > 2n_0$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=0}^{n} b_j\left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right)\right| &\leq \sum_{j=0}^{n_0}|b_j|\left|\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right| + \sum_{j=n_0+1}^{n}|b_j|\left|\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right| \leq \varepsilon\sum_{j=0}^{n_0}|b_j| + \sum_{j=n_0+1}^{n}|b_j|\left(\sum_{k=0}^{n-j}|a_k| + |a|\right) \\
&\leq \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}|b_j| + \sum_{j=n_0+1}^{\infty}|b_j|\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| + |a|\right) \leq \varepsilon\sum_{j=0}^{\infty}|b_j| + \varepsilon\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k| + |a|\right) \\
&= \varepsilon\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j| + \sum_{k=0}^{\infty}|a_k| + |a|\right).
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n} b_j\left(\sum_{k=0}^{n-j} a_k - a\right) = 0$. □

Παράδειγμα. Η συνέλιξη τής $\frac{1}{n!}$ με τον εαυτό της είναι η ακολουθία $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$. Επομένως

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}.$$

Ασκήσεις

3.1. *Υπολογίστε, αν υπάρχουν, τα όρια των παρακάτω σειρών.*

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)2^n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, *όπου* $|x|<1$.

Λύση. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων.

(1)

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) \to \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο $3/4$.

(2)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k(k+1)2^k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k2^{k-1}}-\frac{1}{(k+1)2^k}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)2^n} \to 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει στο 1.

(3) Παραγωγίζουμε τη σχέση

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$$

ως προς x και παίρνουμε

$$s_n = \frac{-(n+2)x^{n+1}(1-x)+(1-x^{n+2})}{(1-x)^2}.$$

Στέλνουμε το n στο άπειρο και έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

□

3.2. *Για κάθε m θέτουμε $a_m = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^2}$. Δείξτε ότι $\sum_{m=1}^{\infty}a_m = +\infty$.*

Λύση. Έχουμε

$$\sum_{m=1}^{\infty}a_m = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(m+n)^2} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \geq \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m+1} = \infty.$$

□

3.3. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές.*

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{1+n^2}-n\right)$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p-n^q}$, *για κάθε* $p,q\in\mathbb{R}$ *με* $0<q<p$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)$.

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n}\right)$.

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(1+1/n)}$.

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2\frac{1}{n}$.

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{pn}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln^p n}{n}\right)^n$, *όπου* $p > 0$.

(10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Λύση.

(1) Έχουμε
$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{1+n^2-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}.$$
Επίσης
$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}+n}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}+n} \to \frac{1}{2}.$$
Αλλά η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει.

(2) Έχουμε
$$\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$
Αλλά η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$
συγκλίνει, άρα από κριτήριο σύγκρισης, η αρχική σειρά συγκλίνει.

(3) Έχουμε
$$\frac{\dfrac{1}{n^p - n^q}}{\dfrac{1}{n^p}} = \frac{n^p}{n^p - n^q} \to 1.$$
Η σειρά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$
συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$. Άρα, από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$$
συγκλίνει αν και μόνο αν $p > 1$.

(4) Έχουμε
$$\frac{1}{n^{1+1/n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{2n}.$$
Αλλά
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty,$$
άρα από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά αποκλίνει. Εναλλακτικά,
$$\frac{\frac{1}{n^{1+1/n}}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1,$$
και το συμπέρασμα έπεται από το οριακό κριτήριο σύγκρισης.

(5) Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ είναι άνω φραγμένη από το 3 (είναι αύξουσα και συγκλίνει στο e). Επομένως, για $n \geq 3$ έχουμε $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq n$. Συνεπώς $\sqrt[n]{n} - 1 \geq \frac{1}{n}$. Αλλά η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από κριτήριο σύγκρισης, η αρχική σειρά αποκλίνει.

(6) Παρατηρούμε ότι
$$\lim \frac{1-e^{-1/n}}{1/n} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = 1.$$
Η αρμονική σειρά αποκλίνει, άρα από οριακό σύγκρισης, η αρχική σειρά αποκλίνει.

(7) Παρατηρούμε ότι
$$\lim \frac{1}{n\ln(1+1/n)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1.$$
Άρα η ακολουθία
$$\frac{1}{n\ln(1+1/n)}$$
δεν είναι μηδενική. Επομένως η σειρά δεν συγκλίνει, συνεπώς αποκλίνει αφού αποτελείται από θετικούς όρους.

(8) Έχουμε
$$\lim \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{\sin^2\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$
Άρα, από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η πρώτη σειρά αποκλίνει ενώ οι άλλες δυο συγκλίνουν. Στο ερώτημε αυτό, η ιδέα για την επιλογή των ακολουθιών $1/n$ και $1/n^2$ στο οριακό κριτήριο σύγκρισης είναι ότι για πολύ μικρά x, το $\sin x$ είναι περίπου ίσο με x. Έτσι, στην πρώτη σειρά για παράδειγμα, όταν το n είναι πολύ μεγάλο, το $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

(9) Έχουμε
$$\lim \sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^{np}}} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{\log^p n}{n}\right)^n} = 0.$$
Άρα, από το κριτήριο ρίζας, οι σειρές συγκλίνουν.

(10) Η ακολουθία $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ είναι φθίνουσα, άρα από κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(\ln 2^n)^{\ln 2^n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n\ln 2)^{n\ln 2}}$$
συγκλίνει. Αλλά
$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{(n\ln 2)^{n\ln 2}}} = \frac{2}{(n\ln 2)^{\ln 2}} \to 0 < 1.$$
Επομένως, από κριτήριο ρίζας, η σειρά συγκλίνει.

□

3.4. *Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ συγκλίνει για κάθε $p \geq 1$.*

Λύση. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η a_n είναι μηδενική, άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $a_n < 1$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n^p \leq a_n$, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

3.5. *Έστω a_n, b_n ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Λύση. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, η ακολουθία b_n είναι μηδενική, άρα φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $b_n \leq M$ για κάθε n. Άρα $a_n b_n \leq M a_n$ για κάθε n και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

3.6. *Έστω a_n, b_n ακολουθίες θετικών αριθμών τέτοιες ώστε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ συγκλίνουν. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Λύση. Έχουμε ότι $(x-y)^2 \geq 0$, άρα $xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Ιδιαίτερα, $a_n b_n \leq \dfrac{1}{2}a_n^2 + \dfrac{1}{2}b_n^2$ για κάθε n, και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

3.7. *Έστω a_n μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^n$ συγκλίνει.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι $\sqrt[n]{a_n^n} = a_n \to 0 < 1$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο ρίζας. □

3.8. *Έστω a_n μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι υπάρχει υπακολουθία a_{k_n} τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.*

Λύση. Αφού $a_n \to 0$ υπάρχουν $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$ τέτοια ώστε $a_{k_n} < \dfrac{1}{n^2}$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει. □

3.9. *Έστω a_n μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Έστω τώρα a_{k_n} μια υπακολουθία τής a_n. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει.*

Λύση. Έστω s_n και t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ αντίστοιχα. Τότε

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j} \leq \sum_{j=1}^{k_n} a_j = s_{k_n}.$$

Παρατηρήστε ότι η προηγούμενη ανισότητα, γενικά, δεν θα ήταν σωστή αν οι όροι τής a_n είχαν αυθαίρετα πρόσημα. Αφού τώρα η σειρά συγκλίνει, η s_n είναι φραγμένη, άρα και η s_{k_n} είναι φραγμένη. Επομένως η t_n είναι φραγμένη, συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ συγκλίνει. □

3.10. *Έστω a_n ακολουθία θετικών αριθμών. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.*

Λύση. Έχουμε $\frac{a_n}{1+a_n} \leq a_n$, άρα από κριτήριο σύγκρισης, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει. Αντίστροφα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει τότε $\frac{a_n}{1+a_n} \to 0$, επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\frac{a_n}{1+a_n} < \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $a_n < \frac{2a_n}{1+a_n}$ και το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο σύγκρισης. □

3.11. *Έστω a_n, b_n δυο ακολουθίες με $(a_n + b_n)b_n \neq 0$ για κάθε n. Υποθέτουμε ότι οι σειρές*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} \quad \textit{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2$$

συγκλίνουν. Δείξτε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n + b_n}$$

συγκλίνει.

Λύση. Αφού η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ συγκλίνει, η ακολουθία $\frac{a_n}{b_n}$ είναι μηδενική. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε

$$1 + \frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Συνεπώς

$$\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{1 + \frac{a_n}{b_n}} < 2\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2,$$

για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, από κριτήριο σύγκρισης, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{1 + \frac{a_n}{b_n}}$$

συγκλίνει. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\frac{a_n}{a_n + b_n} = \frac{a_n}{b_n} - \frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)^2}{1 + \frac{a_n}{b_n}}$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

3.12. *Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Δείξτε ότι*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n} = +\infty,$$

όπου s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής αρχικής σειράς.

Λύση. Αφού η αρχική σειρά αποκλίνει, έχουμε $s_n \to +\infty$. Τώρα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n}$ συνέκλινε, θα υπήρχε n_0 τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{s_k} < \frac{1}{10}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Απ' την άλλη

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{a_k}{s_k} = \frac{a_{n_0+1}}{s_{n_0+1}} + \cdots + \frac{a_n}{s_n} > \frac{a_{n_0+1} + \cdots + a_n}{s_n} = \frac{s_n - s_{n_0}}{s_n} = 1 - \frac{s_{n_0}}{s_n}.$$

Άρα,

$$1 - \frac{s_{n_0}}{s_n} < \frac{1}{10}.$$

Παίρνοντας όριο κάθως $n \to \infty$, καταλήγουμε σε άτοπο. □

3.13. *Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Δείξτε ότι για κάθε $p > 1$, η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^p}$$

συγκλίνει, όπου s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής αρχικής σειράς.

Λύση. Θεωρούμε τα σύνολα

$$A_0 = \{n \in \mathbb{N} : s_n < 1\},$$

και για $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$A_k = \{n \in \mathbb{N} : 2^{k-1} \leq s_n < 2^k\}.$$

Τότε, τα σύνολα αυτά

- Είναι πεπερασμένα διότι $s_n \to +\infty$ (κάποια μπορεί να είναι κενά).
- Είναι ανά δύο ξένα.
- Η ένωσή τους είναι ολόκληρο το $\mathbb{N}$.
- Κάθε ένα αποτελείται από διαδοχικούς φυσικούς.

Έτσι, αν θέσουμε $u_k = \max A_k$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{s_n^p} &= \sum_{n \in A_0} \frac{a_n}{s_n^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \in A_k} \frac{a_n}{s_n^p} \leq \sum_{n \in A_0} \frac{a_n}{s_n^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k-1)p}} \sum_{n \in A_k} a_n \\ &\leq \sum_{n \in A_0} \frac{a_n}{s_n^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_{u_k}}{2^{(k-1)p}} \leq \sum_{n \in A_0} \frac{a_n}{s_n^p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^{(k-1)p}} < +\infty. \end{aligned}$$

□

3.14. *Έστω a_n φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Δείξτε ότι*

(1) *$na_n \to 0$.*
(2) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ συγκλίνει.*

Λύση.

(1) Θέτουμε $b_n = na_n$. Αρκεί να δείξουμε ότι $b_{2n} \to 0$ και $b_{2n+1} \to 0$. Έχουμε

$$b_{2n} = 2na_{2n} = 2(\underbrace{a_{2n} + \cdots + a_{2n}}_{n \text{ φορές}}) \leq 2(a_{2n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n+1}) = 2\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq 2\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k.$$

Αλλά $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k = 0$ διότι η σειρά συγκλίνει (η ουρά μιας συγκλίνουσας σειράς τείνει στο 0). Άρα $b_{2n} \to 0$. Επίσης,

$$b_{2n+1} = (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = \frac{2n+1}{2n} 2na_{2n} = \frac{2n+1}{2n} b_{2n} \to 0.$$

(2) Έστω s_n και t_n οι ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων των $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n+1})$ αντίστοιχα. Έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 &= a_1 - a_2 \\ 2(a_2 - a_3) &= (a_2 - a_3) + (a_2 - a_3) \\ &\vdots \\ n(a_n - a_{n+1}) &= (a_n - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+1}) + \cdots + (a_n - a_{n+1}). \end{aligned}$$

Αθροίζοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned} t_n &= (a_1 - a_{n+1}) + (a_2 - a_{n+1}) + \cdots + (a_{n-1} - a_{n+1}) + (a_n - a_{n+1}) \\ &= s_n - na_{n+1} = s_n - \frac{n}{n+1}(n+1)a_{n+1}. \end{aligned}$$

Αλλά η s_n συγκλίνει, $\dfrac{n}{n+1} \to 1$, και $(n+1)a_{n+1} \to 0$ από το (1). Άρα η t_n συγκλίνει και μάλιστα στο ίδιο όριο με την s_n.

□

3.15. *Έστω* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *μια συγκλίνουσα σειρά μη αρνητικών όρων. Δείξτε ότι* $\liminf na_n = 0$ *και ότι είναι δυνατό* $\limsup na_n > 0$.

Λύση. Αν υποθέσουμε ότι $\liminf na_n > 0$, τότε υπάρχουν $c > 0$ και n_0 έτσι ώστε $na_n > c$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, για αυτά τα n έχουμε $a_n > c/n$, άτοπο γιατί η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{c}{n}$ αποκλίνει. Αν τώρα θέσουμε

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{αν το } n \text{ δεν είναι δύναμη τού 2} \\[2ex] \dfrac{1}{n}, & \text{αν το } n \text{ είναι δύναμη τού 2} \end{cases},$$

τότε για κάθε n έχουμε

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

άρα η σειρά συγκλίνει. Παρ' όλα αυτά

$$\limsup na_n \geq \lim 2^n a_{2^n} = 1.$$

□

3.16. *Δείξτε ότι αν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ *και* $0 < a_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, *για κάθε* n, *τότε για κάθε* $x \in (0,1)$ *υπάρχει υπακολουθία* a_{n_k} *τέτοια ώστε* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x$.

Λύση. Αφού το όριο τής σειράς είναι 1 και $x < 1$, υπάρχει $n_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n_1}^{\infty} a_k > x \quad \text{και} \quad \sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k \leq x.$$

Επομένως

$$\sum_{k=n_1+1}^{\infty} a_k > x - a_{n_1} \quad \text{και} \quad a_{n_1} \leq x.$$

Ομοίως, υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k=n_2}^{\infty} a_k > x - a_{n_1} \quad \text{και} \quad \sum_{k=n_2+1}^{\infty} \leq x - a_{n_1}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε φυσικούς $n_1 < n_2 < \cdots$ τέτοιους ώστε

$$0 \leq x - \sum_{k=1}^{m} a_{n_k} < \sum_{k=n_m+1}^{\infty} a_k.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $m \to \infty$, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x$. □

3.17. *Έστω* s_n *η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. *Δείξτε ότι*

(1) $0 < en! - s_n n! < 1/n$.
(2) *Ο* e *είναι άρρητος.*

Λύση.

(1) Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 < e - s_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n \cdot n!}. \end{aligned}$$

(2) Ας υποθέσουμε ότι $e = k/\ell$, όπου $k, \ell \in \mathbb{N}$. Τότε από το (1) έχουμε

$$0 < \frac{k}{\ell} n! - s_n n! < \frac{1}{n},$$

για κάθε n. Αλλά $kn!/\ell \in \mathbb{N}$ για $n > \ell$, και $s_n n! \in \mathbb{N}$ για κάθε n. Δηλαδή για $n > \ell$, η ποσότητα

$$\frac{k}{\ell} n! - s_n n!$$

είναι ένας φυσικός αριθμός ανάμεσα στο 0 και το 1, άτοπο.

□

3.18. *Έστω ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. *Δείξτε ότι* $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k a_k \to 0$ *καθώς* $n \to +\infty$.

Λύση. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} ka_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{n} k(s_k - s_{k-1}) = a_1 + \sum_{k=2}^{n} ks_k - \sum_{k=2}^{n} ks_{k-1} = a_1 + \sum_{k=2}^{n} ks_k - \sum_{k=1}^{n-1}(k+1)s_k \\ &= a_1 + ns_n - 2s_1 + \sum_{k=2}^{n-1} ks_k - \sum_{k=2}^{n-1}(k+1)s_k = ns_n - \sum_{k=1}^{n-1} s_k.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = s_n - \frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} s_k \to s - 1\cdot s = 0,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την άσκηση 2.15. □

3.19. *Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Δείξτε ότι*

$$1 + \ln\frac{n+1}{2} \le s_n \le 1 + \ln n,$$

και συμπεράνετε ότι $\lim \frac{s_n}{\ln n} = 1$.

Λύση. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και κάθε $x \in [k, k+1]$ έχουμε $\frac{1}{k+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{k}$. Ολοκληρώνοντας την ανισότητα ως προς x πάνω στο $[k, k+1]$ παίρνουμε

$$\frac{1}{k+1} \le \int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \le \frac{1}{k}.$$

Άρα για κάθε $k \ge 2$ έχουμε

$$\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \le \frac{1}{k} \le \int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}.$$

Αθροίζοντας για k από 2 ως n παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2}^{n}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \le \sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \int_2^{n+1}\frac{dx}{x} \le \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \le \int_1^{n}\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow 1 + \int_2^{n+1}\frac{dx}{x} \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \le 1 + \int_1^{n}\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow 1 + \ln\frac{n+1}{2} \le s_n \le 1 + \ln n.\end{aligned}$$

Διαιρώντας την προηγούμενη ανισότητα με $\ln n$ παίρνουμε

$$\frac{1}{\ln n} + \frac{\ln(n+1)}{\ln n} - \frac{\ln 2}{\ln n} \le \frac{s_n}{\ln n} \le \frac{1}{\ln n} + 1.$$

Παίρνοντας όρια κάθως $n \to \infty$ έχουμε το ζητούμενο. Η άσκηση αυτή λέει ότι η αρμονική σειρά τείνει στο άπειρο «τόσο γρήγορα» όσο και ο λογάριθμος. Παρ' όλα αυτά, το n πρέπει να γίνει πάρα πολύ μεγάλο για να μπορέσουμε να πούμε ότι το s_n είναι «περίπου ίσο» με το $\ln n$. Ένας ηλεκτρονικός υπολογιστής, με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων, έδωσε

$$s_{10^9} = \sum_{n=1}^{10^9}\frac{1}{n} \cong 21.3005, \quad \ln 10^9 \cong 20.7233.$$

□

3.20. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις παρακάτω σειρές:*

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+c)^a(n+d)^b}$, $a, b, c, d > 0$.

(2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *όπου* a_n *είναι η ακολουθία* $\left(1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots\right)$.

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *όπου* a_n *είναι η ακολουθία* $\left(1, -1, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3^2}, -\frac{1}{3}, \frac{3}{4^2}, -\frac{1}{4}, \dots\right)$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Λύση.

(1) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $\displaystyle\frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}$ είναι φθίνουσα και μηδενική. Άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει. Τώρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}.$$

Αλλά

$$\frac{\dfrac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}}{\dfrac{1}{n^{a+b}}} = \frac{1}{(1+c/n)^a(1+d/n)^b} \to 1.$$

Άρα από οριακό κριτήριο σύγκρισης, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+c)^a(n+d)^b}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a+b}}$ συγκλίνει, δηλαδή, αν και μόνο αν $a+b>1$. Επομένως η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν και μόνο αν $a+b>1$.

(2) Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n$ είναι φραγμένη. Η ακολουθία $\displaystyle\frac{1}{n \ln n}$, $n \geq 2$, είναι φθίνουσα και μηδενική. Άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει. Τώρα

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n \ln n}\right| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Αλλά

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n \ln 2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Άρα από κριτήριο συμπύκνωσης, η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(3) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Τότε

$$s_{2n} = (1-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Επίσης

$$s_{2n+1} = (1-1) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και μάλιστα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0$. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Dirichlet, αυτό όμως δεν θα έδινε την τιμή τού ορίου τής σειράς. Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Τότε

$$t_{2n} = (1+1) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Αλλά

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \text{ (αρμονική)}.$$

Άρα $t_{2n} \to +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(4) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= (1-1) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3^2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \\ &= -\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \cdots - \frac{1}{n^2} = -\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}. \end{aligned}$$

Αλλά η ακολουθία $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$, $n \geq 2$, συγκλίνει διότι η σειρά $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει. Άρα η s_{2n} συγκλίνει. Επίσης

$$s_{2n+1} = (1-1) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) + \frac{n}{(n+1)^2} = s_{2n} + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

Αλλά η s_{2n} συγκλίνει και $\frac{n}{(n+1)^2} \to 0$. Άρα η s_{2n+1} συγκλίνει στο ίδιο όριο με την s_{2n}. Επομένως η σειρά συγκλίνει.

Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Τότε

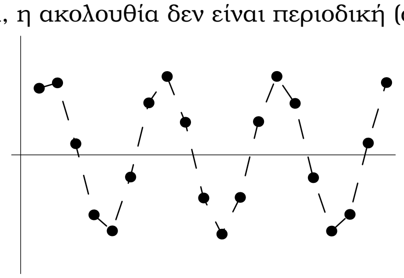
$$\begin{aligned} t_{2n} &= (1+1) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}\right) + \cdots + \left(\frac{n-1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty \text{ (αρμονική)}.$$

Άρα $t_{2n} \to +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

(5) Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, όπου $a_n = \sin n$, $b_n = \frac{1}{n}$. Στο σχήμα φαίνονται οι 20 πρώτοι όροι τής a_n. Παρά τη φαινομενική συμμετρία, η ακολουθία δεν είναι περιοδική (στην πραγματικότητα είναι 1-1).



Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k = \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} \cos k + i\sum_{k=1}^{n} \sin k\right] = \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} (\cos k + i\sin k)\right] = \operatorname{Im}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right] = \operatorname{Im}\frac{e^{i} - e^{i(n+1)}}{1 - e^{i}}.$$

(Im$(x+iy)$ είναι το φανταστικό μέρος τού μιγαδικού αριθμού $x+iy$. Επίσης χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $e^{it} = \cos t + i\sin t$, $t \in \mathbb{R}$). Άρα

$$|s_n| \leq \left|\frac{e^i - e^{i(n+1)}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{|1-e^i|}.$$

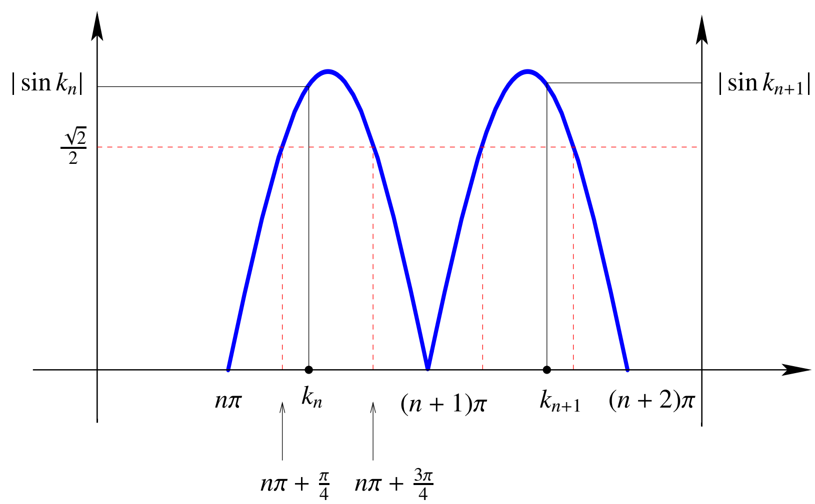
Επομένως η s_n είναι φραγμένη. Αλλά η b_n είναι φθίνουσα και μηδενική, άρα από κριτήριο Dirichlet, η σειρά συγκλίνει.

Έστω τώρα t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n}$. Θεωρούμε τα ξένα ανά δύο διαστήματα

$$\left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right], \ n \in \mathbb{N}.$$

Τότε

$$|\sin t| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ για κάθε } t \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right].$$



Επίσης, το μήκος κάθε διαστήματος είναι $\pi/2 > 1$, άρα υπάρχουν φυσικοί αριθμοί

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$$

τέτοιοι ώστε

$$k_n \in \left[n\pi + \frac{\pi}{4}, n\pi + \frac{3\pi}{4}\right] \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

διότι σε ένα κλειστό διάστημα μήκους τουλάχιστο 1 υπάρχει τουλάχιστο ένας ακέραιος αριθμός. Επομένως

$$t_{k_n} = \sum_{j=1}^{k_n} \frac{|\sin j|}{j} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{|\sin k_j|}{k_j} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_j} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j\pi + \frac{3\pi}{4}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

Αλλά

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j} = +\infty \text{ (αρμονική)}.$$

Άρα $t_{k_n} \to +\infty$, επομένως η σειρά δεν συγκλίνει απόλυτα.

□

3.21. *Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{n} a_n b_n$ συγκλίνει για κάθε φραγμένη ακολουθία b_n. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.*

Λύση. Θέτουμε

$$b_n = \begin{cases} 1 & \text{αν } a_n > 0 \\ 0 & \text{αν } a_n = 0 \\ -1 & \text{αν } a_n < 0 \end{cases}.$$

Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ η οποία συγκλίνει διότι η b_n είναι φραγμένη. Άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα. □

3.22. *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μια συγκλίνουσα σειρά, και b_n μια φθίνουσα και συγκλίνουσα ακολουθία. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ συγκλίνει.*

Λύση. Θέτουμε $b = \lim b_n$. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, και t_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$. Αφού η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, η s_n συγκλίνει, άρα είναι φραγμένη. Επίσης, η ακολουθία $b_n - b$ είναι φθίνουσα και μηδενική, άρα από κριτήριο Dirichlet, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(b_n - b)$ συγκλίνει, δηλαδή η t_n συγκλίνει. Αλλά

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b) + b\sum_{k=1}^{n} a_k = t_n + b s_n.$$

Αφού οι s_n και t_n συγκλίνουν, η ακολουθία $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ συγκλίνει καθώς $n \to \infty$. Επομένως η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ συγκλίνει. □

3.23. *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει υπό συνθήκη. Θέτουμε $A = \{n : a_n < 0\}$ και $B = \{n : a_n > 0\}$. Δείξτε ότι τα σύνολα A και B είναι άπειρα.*

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι το A είναι πεπερασμένο. Θέτουμε $n_0 = \max A$. Τότε $a_n \geq 0$ για κάθε $n > n_0$. Επομένως

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα, άτοπο. Ομοίως δείχνουμε ότι το B δεν μπορεί να είναι πεπερασμένο. □

3.24. *Είναι αλήθεια ότι αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε οι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ συγκλίνουν;*

Λύση. Όχι. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει, αλλά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2n-1} = -\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = +\infty.$$

□

3.25. *Είναι αλήθεια ότι αν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ *συγκλίνουν τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει;*

Λύση. Ναι. Έστω

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}, \quad t_n = \sum_{k=1}^{n} a_{2k}, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Θέτουμε $s = \lim s_n$ και $t = \lim t_n$. Τότε

$$u_{2n} = s_n + t_n \to s + t, \quad u_{2n-1} = s_n + t_{n-1} \to s + t.$$

Άρα η u_n συγκλίνει. □

3.26. *Είναι δυνατό μια αποκλίνουσα σειρά θετικών αριθμών να έχει συγκλίνουσα αναδιάταξη;*

Λύση. Όχι. Αν υπήρχε συγκλίνουσα αναδιάταξη, τότε η αρχική σειρά θα ήταν αναδιάταξη μιας συγκλίνουσας σειράς θετικών αριθμών επομένως θα συνέκλινε. □

3.27. *Έστω ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη. Θέτουμε*

$$A = \{n : a_n \geq 0\} = \{k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots\}, \quad B = \{n : a_n < 0\} = \{l_1 < l_2 < \cdots < l_n < \cdots\}.$$

Τα σύνολα αυτά είναι άπειρα από την άσκηση 3.23. Δείξτε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{l_n}$ *αποκλίνουν.*

Λύση. Θέτουμε

$$b_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n), \quad c_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n), \quad s_n = \sum_{j=1}^{n} b_j, \quad t_n = \sum_{j=1}^{n} c_j.$$

Τότε

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| + \sum_{j=1}^{n} a_j\right) \to +\infty, \quad t_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j| - \sum_{j=1}^{n} a_j\right) \to +\infty.$$

Επομένως

$$\sum_{j=1}^{n} a_{k_j} = s_{k_n} \to +\infty, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{l_j} = -t_{l_n} \to -\infty.$$

□

3.28. *Έστω ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκη. Δείξτε ότι έχει αποκλίνουσα αναδιάταξη.*

Λύση. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό τής προηγούμενης άσκησης, έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = +\infty$. Επομένως υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε

$$a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_{n_1}} > 1 - a_{l_1}.$$

Ομοίως, αφού $\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{k_n} = +\infty$, υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε

$$a_{k_{n_1+1}} + a_{k_{n_1+2}} + \cdots + a_{k_{n_2}} > 1 - a_{l_2}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε $n_1 < n_2 < \cdots < n_j < \cdots$ τέτοια ώστε

$$a_{k_{n_{j-1}+1}} + a_{k_{n_{j-1}+2}} + \cdots + a_{k_{n_j}} > 1 - a_{l_j}.$$

Συνεπώς η αναδιάταξη

$$(a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_{n_1}} + a_{l_1}) + (a_{k_{n_1+1}} + a_{k_{n_1+2}} + \cdots + a_{k_{n_2}} + a_{l_2}) + \cdots + (a_{k_{n_{j-1}+1}} + a_{k_{n_{j-1}+2}} + \cdots + a_{k_{n_j}} + a_{l_j}) + \cdots$$

αποκλίνει (κάθε παρένθεση είναι μεγαλύτερη από 1). □

3.29.

(1) *Δείξτε ότι* $\lim_n \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$.

(2) *Δείξτε ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

Λύση.

(1) Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = n, \dots, 2n$ έχουμε

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x-1}.$$

Άρα

$$\int_n^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_n^{2n+1} \frac{dx}{x-1}.$$

Επομένως

$$\ln \frac{2n+1}{n} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \leq \ln \frac{2n}{n-1}.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n έχουμε το ζητούμενο.

(2) Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς. Τότε

$$\begin{aligned} s_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \to \ln 2. \end{aligned}$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι η s_n συγκλίνει. Επομένως, κατ' ανάγκη, $s_n \to \ln 2$.

□

3.30. *Έστω ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει και ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ *συγκλίνει απόλυτα. Δείξτε ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *συγκλίνει.*

Λύση. Η $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ συγκλίνει αφού συγκλίνει απόλυτα. Αλλά

$$b_n = b_1 - \sum_{k=1}^{n-1}(b_n - b_{n+1}).$$

Άρα η ακολουθία b_n συγκλίνει. Θα χρησιμοποιήσουμε το επιχείρημα τής απόδειξης τού κριτήριου Dirichlet. Έστω s_n η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Η s_n είναι φραγμένη διότι συγκλίνει. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|s_n| \leq M$ για κάθε n. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_n b_n &= a_1 b_1 + \sum_{k=2}^{n}(s_k - s_{k-1})b_k = a_1 b_1 + s_n b_n - a_1 b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} s_k b_k - \sum_{k=3}^{n} s_{k-1} b_k \\ &= a_1 b_1 + s_n b_n - a_1 b_2 + \sum_{k=2}^{n-1} s_k b_k - \sum_{k=2}^{n-1} s_k b_{k+1} \end{aligned}$$

$$= a_1b_1 - a_1b_2 + s_nb_n + \sum_{k=2}^{n-1} s_k(b_k - b_{k+1}) = a_1b_1 - a_1b_2 + x_n + y_n \ (*).$$

Η x_n συγκλίνει αφού οι b_n και s_n συγκλίνουν. Επίσης

$$\sum_{k=2}^{n-1} |s_k(b_k - b_{k+1})| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k - b_{k+1}|$ συγκλίνει από υπόθεση, άρα και η y_n συγκλίνει και το συμπέρασμα έπεται. Παρατηρήστε ότι, λόγω τής σχέσης $(*)$, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει με την υπόθεση ότι απλά έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα, να προσθέσουμε την υπόθεση ότι η b_n είναι μηδενική, και να έχουμε το ίδιο συμπέρασμα. □

3.31. *Δείξτε ότι η σειρά*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin n}{n}$$

συγκλίνει.

Λύση. Έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n,$$

όπου $a_n = \sin n$, και

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει φραγμένα μερικά αθροίσματα, από την άσκηση 3.20. Επίσης,

$$b_n - b_{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{(n+1)^2} > 0,$$

άρα η b_n είναι φθίνουσα. Τέλος, χρησιμοποιώντας την άσκηση 3.19, παίρνουμε

$$b_n \leq \frac{1 + \ln n}{n} \to 0.$$

Εναλλακτικά, η b_n είναι η ακολουθία των μέσων όρων μιας μηδενικής ακολουθίας, άρα είναι και η ίδια μηδενική (άσκηση 2.15). Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Dirichlet. □

Κεφάλαιο 4

Συνεχείς Συναρτήσεις

Όρια συναρτήσεων

Ορισμός. *Ένα διάστημα τής μορφής* $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, *ονομάζεται περιοχή τού* x.

Ορισμός. *Έστω* $A \subset \mathbb{R}$. *Ένα σημείο* $x \in \mathbb{R}$ *λέγεται σημείο συσσώρευσης τού* A *αν κάθε περιοχή τού* x *περιέχει σημεία τού* A *διαφορετικά τού* x. *Δηλαδή για κάθε* $\varepsilon > 0$ *έχουμε*

$$A \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Παραδείγματα.

(1) Τα σημεία συσσώρευσης τού $(0,1)$ είναι όλα τα σημεία τού $(0,1)$ μαζί με το 0 και το 1.
(2) Το $\mathbb{Z}$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης.

Ορισμός. *Έστω* $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *ένα σημείο συσσώρευσης τού* A, *και* $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *σημαίνει ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $0 < |x-x_0| < \delta$ *έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $0 < |x-x_0| < \delta$ *έχουμε* $f(x) > M$.
(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $0 < |x-x_0| < \delta$ *έχουμε* $f(x) < -M$.

Το (1) λέει ότι για οσοδήποτε μικρό $\varepsilon > 0$, αν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, χωρίς να γίνει ίσο με x_0, τότε το $f(x)$ απέχει από το ℓ απόσταση μικρότερη από ε. Το (2) λέει ότι για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$, αν το x είναι αρκετά κοντά στο x_0, χωρίς να γίνει ίσο με x_0, τότε το $f(x)$ είναι μεγαλύτερο από M. Ομοίως το (3).

Παρατήρηση. Στον προηγούμενο ορισμό, το x_0 δεν χρειάζεται να ανήκει στο πεδίο ορισμού τής συνάρτησης. Πρέπει όμως να είναι σημείο συσσώρευσής του. Για παράδειγμα αν μια f είναι ορισμένη στο $(0,1)$ έχει νόημα να μιλήσουμε για το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (αν υπάρχει). Δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για το $\lim\limits_{x\to 1.001} f(x)$.

Ορισμός. *Έστω* $A \subset \mathbb{R}$ *ένα όχι άνω φραγμένο σύνολο,* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση, και* $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \ell$ *σημαίνει ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x > c$ *έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.
(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x > c$ *έχουμε* $f(x) > M$.
(3) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x > c$ *έχουμε* $f(x) < -M$.

Η διαισθητική ερμηνεία των παραπάνω είναι ανάλογη με αυτήν τού ορισμού τής σύγκλισης και τής απόκλισης ακολουθιών.

Παρατήρηση. Αν το πεδίο ορισμού μιας f είναι άνω φραγμένο, δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για το $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

Ορισμός. *Έστω* $A \subset \mathbb{R}$ *ένα όχι κάτω φραγμένο σύνολο,* $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση, και* $\ell \in \mathbb{R}$.

(1) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \ell$ *σημαίνει ότι για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x < -c$ *έχουμε* $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

(2) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x < -c$ *έχουμε* $f(x) > M$.

(3) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ *σημαίνει ότι για κάθε* $M > 0$ *υπάρχει* $c > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $x \in A$ *με* $x < -c$ *έχουμε* $f(x) < -M$.

Στους παραπάνω ορισμούς, το σύμβολο $\lim_{x\to\cdots} f(x) = \cdots$ διαβάζεται «το όριο τής $f(x)$ καθώς το x τείνει στο $\cdots$ είναι $\cdots$» ή «η $f(x)$ τείνει στο $\cdots$ καθώς το x τείνει στο $\cdots$».

Παραδείγματα.

(1) Αν $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0^2$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}, 1\right\}.$$

Τότε για κάθε x με $0 < |x - x_0| < \delta$, έχουμε ότι $|x - x_0| < \varepsilon/(1 + 2|x_0|)$ και $|x| < 1 + |x_0|$. Άρα

$$|f(x) - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \le |x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) < \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|} \cdot (1 + 2|x_0|) = \varepsilon.$$

(2) Έστω $f(x) = 1/x$, $x > 0$. Τότε $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$. Έστω $M > 0$. Θέτουμε $\delta = 1/M$. Τότε για κάθε $x > 0$ με $x < \delta$ έχουμε

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Θεώρημα (Αρχή μεταφοράς)**.** *Έστω* $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *μια συνάρτηση,* x_0 *ένα σημείο συσσώρευσης τού* A *και* $\ell \in \mathbb{R}$. *Τότε* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *αν και μόνο αν* $f(x_n) \to \ell$ *για κάθε ακολουθία* $x_n \in A$ *σημείων διαφορετικών τού* x_0 *τέτοια ώστε* $x_n \to x_0$.

Απόδειξη. Έστω ότι $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ και $x_n \in A$ μια ακολουθία σημείων διαφορετικών από το x_0 τέτοια ώστε $x_n \to x_0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) \to \ell$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ τέτοιο ώστε $0 < |x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Αφού $x_n \to x$ και $x_n \neq x_0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $0 < |x_n - x_0| < \delta$ για κάθε $n \ge n_0$. Επομένως $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $n \ge n_0$. Άρα $f(x_n) \to \ell$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $f(x)$ δεν συγκλίνει στο ℓ καθώς $x \to x_0$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| \ge \varepsilon$. Επομένως, για $\delta = 1/n$ παίρνουμε μια ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ και $|f(x_n) - \ell| \ge \varepsilon$. Δηλαδή η x_n είναι μια ακολουθία σημείων τού A, διαφορετικών από το x_0, τέτοια ώστε $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to \ell$, άτοπο. □

Παρατήρηση. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στην περίπτωση άπειρων ορίων.

Παραδείγματα.

(1) Το όριο τής $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, καθώς $x \to +\infty$, δεν υπάρχει διότι $\lim(2n\pi) = \lim((2n+1)\pi) = +\infty$, αλλά $f(2n\pi) = 1 \to 1$ και $f((2n+1)\pi) = -1 \to -1$.

(2) Το όριο τής $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, καθώς $x \to 0$, δεν υπάρχει διότι $\lim 1/n = \lim(-1/n) = 0$, αλλά $f(1/n) = n \to +\infty$ και $f(-1/n) = -n \to -\infty$. Συγκρίνατε με το παράδειγμα (2) παραπάνω. Οι συναρτήσεις έχουν τον ίδιο τύπο αλλά διαφορετικό πεδίο ορισμού.

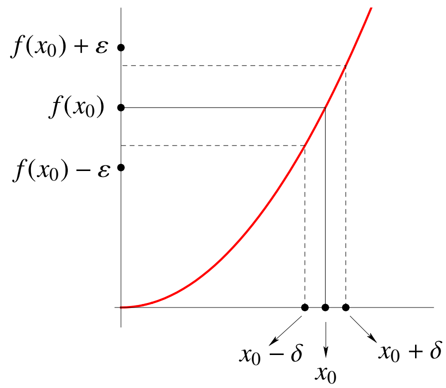
Συνέχεια

Ορισμός. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση και $x_0 \in A$. Η f λέγεται συνεχής στο x_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο τού A τότε λέγεται συνεχής.*

Δηλαδή, αν το x είναι κοντά στο x_0, τότε το $f(x)$ είναι κοντά στο $f(x_0)$.

Παρατηρήσεις.

(1) Ένας ισοδύναμος τρόπος να περιγράψει κανείς τη συνέχεια τής f στο x_0 είναι ο εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$. Δηλαδή για κάθε περιοχή τού $f(x_0)$ υπάρχει περιοχή τού x_0 την οποία η f στέλνει μέσα στην περιοχή τού $f(x_0)$.



(2) Αν ένα σημείο $x_0 \in A$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης τού A τότε η f είναι αυτομάτως συνεχής στο x_0 διότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε το μοναδικό σημείο $x \in A$ με την ιδιότητα $|x - x_0| < \delta$ να είναι το ίδιο το x_0, άρα για τέτοια x έχουμε $|f(x) - f(x_0)| = 0$.

(3) Αν το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης τού A τότε η συνέχεια τής f είναι ισοδύναμη με $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Αυτό προκύπτει άμεσα αν συγκρίνουμε τους ορισμούς.

(4) (Ακολουθιακός χαρακτηρισμός τής συνέχειας.) Η f είναι συνεχής στο x_0 αν και μόνο αν
$$f(x_n) \to f(x_0)$$
για κάθε ακολουθία $x_n \in A$ με $x_n \to x_0$. Η απόδειξη είναι τελείως ανάλογη με την απόδειξη τής αρχής μεταφοράς.

Παραδείγματα.

(1) Μια σταθερή συνάρτηση είναι συνεχής. Σε κάθε σημείο, για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε $\delta > 0$ ικανοποιεί τον ορισμό.

(2) Η συνάρτηση $f(x) = x^{1/k}$, $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, είναι συνεχής γιατί αν $x_n \to x_0$, με $x_n, x_0 \geq 0$, τότε $x_n^{1/k} \to x_0^{1/k}$ από την άσκηση 9 τού 2ου κεφαλαίου.

(3) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής γιατί αν $x_n \to x_0$ τότε
$$|f(x_n) - f(x_0)| = 2\left|\sin\frac{x_n - x_0}{2} \cdot \cos\frac{x_n + x_0}{2}\right| \leq |x_n - x_0| \to 0.$$

(4) Ομοίως, η $\cos x$ είναι συνεχής.

(5) Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
είναι παντού ασυνεχής. Πράγματι, για το τυχόν $x \in \mathbb{R}$, από πυκνότητα ρητών και αρρήτων, υπάρχουν ακολουθίες $r_n \in \mathbb{Q}$ και $\alpha_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ τέτοιες ώστε $r_n \to x$ και $\alpha_n \to x$. Αλλά $f(r_n) = 1 \to 1$ και $f(\alpha_n) = 0 \to 0$, άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο x.

Θεώρημα. *Αν οι $f, g : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $x_0 \in A$ τότε οι $f + g$ και $f \cdot g$ είναι συνεχείς στο x_0. Αν επιπλέον η g δεν μηδενίζεται, τότε η f/g είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση συνέπεια τού ακολουθιακού χαρακτηρισμού τής συνέχειας και των ιδιοτήτων των συγκλινουσών ακολουθιών:

$$\begin{aligned} x_n \to x_0 &\Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \;\&\; g(x_n) \to g(x_0) \\ &\Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to f(x_0) + g(x_0) \;\&\; f(x_n) \cdot g(x_n) \to f(x_0) \cdot g(x_0) \;\&\; \frac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \frac{f(x_0)}{g(x_0)}. \end{aligned}$$

□

Θεώρημα. *Αν η $f : A \to B$ είναι συνεχής στο x_0 και η $g : B \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεση $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.*

Απόδειξη.

$$x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(x_0)).$$

□

Παρατήρηση. Τα δυο προηγούμενα θεωρήματα σε συνδυασμό με τα τέσσερα πρώτα παραδείγματα παραπάνω λένε ότι όλοι οι επιτρεπτοί συνδυασμοί ρητών δυνάμεων και τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι συνεχείς.

Τα βασικά θεωρήματα

Θεώρημα. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in A$. Αν $f(x_0) > 0$ τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f είναι θετική στο $A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ομοίως αν $f(x_0) < 0$.*

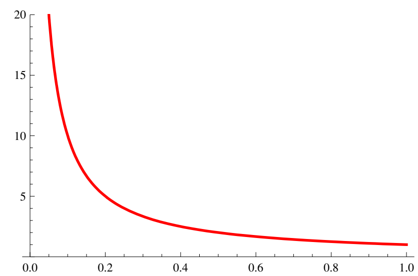
Απόδειξη. Από τον ορισμό τής συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$. Δηλαδή για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $f(x) > f(x_0)/2 > 0$. □

Το προηγούμενο θεώρημα λέει ότι αν μια συνεχής συνάρηση είναι θετική (αρνητική) σε κάποιο σημείο, τότε είναι θετική (αρνητική) και σε κάποια περιοχή τού σημείου. Ανάλογα πράγματα ισχύουν αν το $f(x_0)$ είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από κάποιον αριθμό ξ.

Θεώρημα. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| > n$ για κάθε n. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \to \ell$ για κάποιο $\ell \in [a, b]$. Αφού η f είναι συνεχής έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(\ell)$, άτοπο γιατί $|f(x_{k_n})| > k_n \to +\infty$. □

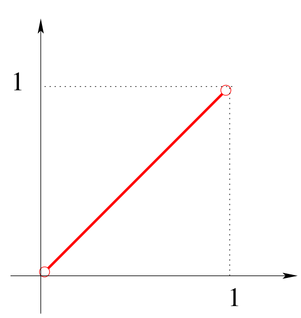
Παρατήρηση. Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ' ένα όχι κλειστό διάστημα δεν είναι κατ' ανάγκη φραγμένη. Για παράδειγμα η $f(x) = 1/x$ στο διάστημα $(0, 1)$.



Θεώρημα (Μέγιστης - ελάχιστης τιμής)**.** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$. Από το προηγούμενο θεώρημα, το A είναι φραγμένο. Θέτουμε $s = \sup A$. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, για κάθε n υπάρχει $x_n \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $s - 1/n < f(x_n) \leq s$. Άρα $f(x_n) \to s$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $x_{k_n} \to \ell$ για κάποιο $\ell \in [a, b]$. Αφού η f είναι συνεχής έχουμε $f(x_{k_n}) \to f(\ell)$. Έτσι $f(x_{k_n}) \to f(\ell)$ και $f(x_{k_n}) \to s$, επομένως, από μοναδικότητα τού ορίου, $f(\ell) = s$. Αυτό σημαίνει ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή στο ℓ. Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι η f παίρνει ελάχιστη τιμή. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα, γενικά, δεν ισχύει αν το διάστημα δεν είναι κλειστό. Για παράδειγμα η $f(x) = x$, $x \in (0, 1)$, είναι φραγμένη αλλά δεν παίρνει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή.

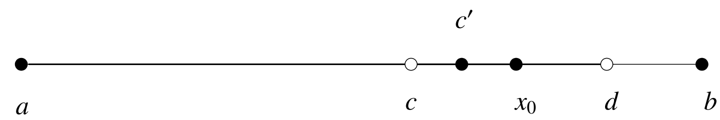


Θεώρημα (Ενδιάμεσης τιμής)**.** *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αν το ξ είναι ένας αριθμός ανάμεσα στα $f(a)$ και $f(b)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \xi$.*

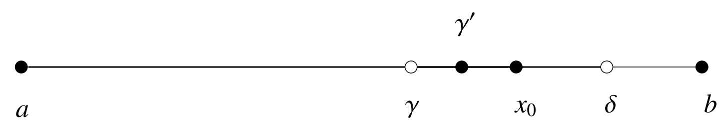
Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(a) < \xi < f(b)$. Θέτουμε

$$A = \{x \in (a,b] : f < \xi \text{ στο } [a,x)\}.$$

Αφού η f είναι συνεχής και $f(a) < \xi$, η f είναι μικρότερη από ξ σε κάποιο διάστημα τής μορφής $[a, a+\delta)$, άρα το A δεν είναι κενό. Επίσης είναι άνω φραγμένο. Θέτουμε $x_0 = \sup A$. Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = \xi$. Αφού $f(b) > \xi$, το x_0 πρέπει να είναι εσωτερικό σημείο τού $[a,b]$. Αν υποθέσουμε ότι $f(x_0) < \xi$ τότε, αφού η f είναι συνεχής, υπάρχει περιοχή $(c,d) \subset [a,b]$ τού x_0 στην οποία η f είναι μικρότερη από ξ. Από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $c' \in (c,d)$ τέτοιο ώστε $f < \xi$ στο $[a,c')$. Αλλά τότε $f < \xi$ στο $[a,d)$. Αυτό σημαίνει ότι $d \in A$, άτοπο αφού $d > x_0$.



Αν τώρα υποθέσουμε ότι $f(x_0) > \xi$, τότε, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει κάποια περιοχή $(\gamma, \delta) \subset [a,b]$ τού x_0 στην οποία η f είναι μεγαλύτερη από ξ. Πάλι από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει $\gamma' \in (\gamma, \delta)$ τέτοιο ώστε $f < \xi$ στο $[a, \gamma')$. Δηλαδή η f είναι ταυτόχρονα μεγαλύτερη και μικρότερη από ξ στο διάστημα (γ, γ'), άτοπο.



□

Παρατηρήσεις.

(1) Στο θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η συνέχεια τής f είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, η ασυνεχής συνάρτηση

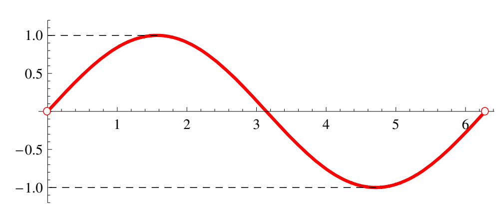
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

δεν παίρνει καμία τιμή ανάμεσα στο 0 και το 1.

(2) Αν το I είναι κάποιο διάστημα και η f μια συνεχής συνάρτηση, τότε το $f(I)$ είναι διάστημα. Πράγματι, αρκεί να δείξουμε ότι αν $x, y \in f(I)$ και $x < z < y$ τότε $z \in f(I)$. Έχουμε $x = f(a)$ και $y = f(b)$ για κάποια $a, b \in I$. Άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει λ ανάμεσα στα a και b τέτοιο ώστε $f(\lambda) = z$. Αυτό σημαίνει ότι $z \in f(I)$.

(3) Αν το I είναι κλειστό διάστημα και η f συνεχής, τότε το $f(I)$ είναι κλειστό διάστημα. Πράγματι, από το (1) το $f(I)$ είναι διάστημα. Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής, η f παίρνει την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή τής σε κάποια σημεία $b, a \in I$. Άρα $f(I) = [f(a), f(b)]$.

(4) Δεν είναι γενικά αλήθεια ότι μια συνεχής συνάρτηση στέλνει ανοιχτά διαστήματα σε ανοιχτά διαστήματα. Για παράδειγμα, αν $f(x) = \sin x$, τότε $f((0, 2\pi)) = [-1, 1]$.



Είναι αλήθεια, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι γνήσια μονότονη.

Θεώρημα. *Έστω I ένα διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ συνεχής και 1-1. Τότε η f είναι (γνήσια) μονότονη.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $a, b \in I$ με $a < b$. Τότε είτε $f(a) < f(b)$ είτε $f(a) > f(b)$. Υποθέτουμε ότι $f(a) < f(b)$ και θα δείξουμε ότι η f είναι (γνήσια) αύξουσα. Έστω λοιπόν τυχόντα $x, y \in I$ με $x < y$. Θεωρούμε τη βοηθητική συνάρτηση $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

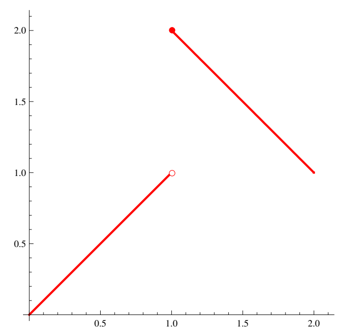
$$g(t) = f((1-t)a + tx) - f((1-t)b + ty).$$

Η g είναι καλά ορισμένη: Αυτό που βρίσκεται στην πρώτη παρένθεση είναι ένα σημείο ανάμεσα στα a και x ενώ αυτό που βρίσκεται στη δεύτερη είναι ένα σημείο ανάμεσα στα b και y. Παρατηρήστε ότι καθώς το t τρέχει από το 0 στο 1, η $g(t)$ μετασχηματίζει τη διαφορά $f(a) - f(b)$ στη διαφορά $f(x) - f(y)$. Η g είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επίσης η g δεν μηδενίζεται πουθενά. Πράγματι, για κάθε t έχουμε $(1-t)a+tx < (1-t)b+ty$, άρα $f((1-t)a + tx) \neq f((1-t)b + ty)$ διότι η f είναι 1-1. Τέλος $g(0) = f(a) - f(b) < 0$. Άρα $g(1) < 0$, διαφορετικά η g από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής κάπου θα μηδενιζόταν. Αλλά $g(1) < 0$ σημαίνει ότι $f(x) < f(y)$. Αφού τα x, y είναι τυχόντα, η f είναι αύξουσα. Ομοίως δείχνουμε ότι αν $f(a) > f(b)$ τότε η f είναι φθίνουσα. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα γενικά δεν ισχύει αν η f δεν είναι συνεχής. Για παράδειγμα, η ασυνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1) \\ 3 - x, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

είναι 1-1 αλλά δεν είναι μονότονη.



Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης)**.** *Έστω I ένα διάστημα και $f : I \to f(I)$ συνεχής και 1-1. Τότε η αντίστροφη $f^{-1} : f(I) \to I$ είναι συνεχής.*

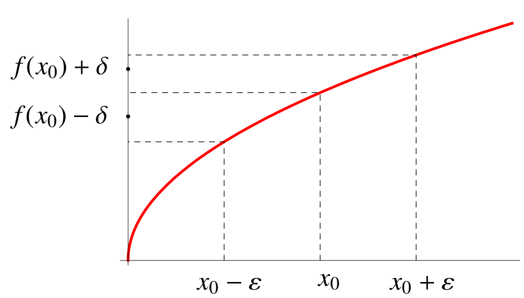
Απόδειξη. Για απλότητα, δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση $I = \mathbb{R}$. Από το προηγούμενο θεώρημα, η f είναι γνήσια μονότονη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι γνήσια αύξουσα. Έστω τώρα $f(x_0) \in f(I)$ τυχόν και $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι γνήσια αύξουσα και συνεχής, έχουμε

$$f((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)) = (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)).$$

Πράγματι, αν $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$ τότε $f(x_0 - \varepsilon) < f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$. Αντίστροφα, αν $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$ τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει x ανάμεσα στα $x_0 - \varepsilon$ και $x_0 + \varepsilon$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$. Επιλέγουμε τώρα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $(f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta) \subset (f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon))$. Τότε

$$f^{-1}((f(x_0) - \delta, f(x_0) + \delta)) \subset f^{-1}((f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)) = f^{-1}(f((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

Αυτό δείχνει ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(x_0)$.



□

Ασκήσεις

4.1. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, και x_0 ένα σημείο συσσώρευσης τού A. Δείξτε ότι αν το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο, τότε η f είναι φραγμένη σε κάποια περιοχή τού x_0.*

Λύση. Θέτουμε $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - \ell| < 1$. Επομένως για όλα αυτά τα x έχουμε $|f(x)| < 1 + |\ell|$. Αν η f ορίζεται στο x_0 τότε έχουμε $|f(x)| \le \max\{1 + |\ell|, |f(x_0)|\}$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. □

4.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια περιοδική συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$, και $T > 0$ τέτοιο ώστε $f(x+T) = f(x)$ για κάθε x. Επιλέγουμε $c > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x > c$. Τώρα σταθεροποιούμε τυχόν y και επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $y + nT > c$. Τότε

$$|f(y) - \ell| = |f(y + T) - \ell| = |f(y + T + T) - \ell| = \cdots = |f(y + nT) - \ell| < \varepsilon.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα $f(y) = \ell$. □

4.3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \to +\infty} f(x) > 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x > c$.*

Λύση. Θέτουμε $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x)$. Τότε υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| < \ell/2$ για κάθε $x > c$. Επομένως για κάθε τέτοιο x έχουμε $f(x) > \ell/2 > 0$. □

4.4. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια αύξουσα συνάρτηση.*

(1) *Αν x_n είναι μια μονότονη και συγκλίνουσα ακολουθία, τότε η ακολουθία $f(x_n)$ συγκλίνει.*
(2) *Ισχύει το (1) αν η x_n δεν είναι μονότονη;*

Λύση.

(1) Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x_n είναι αύξουσα. Θέτουμε $x = \lim x_n$. Τότε $x_n \le x$ για κάθε n. Αφού η f είναι αύξουσα έχουμε ότι η $f(x_n)$ είναι αύξουσα και ότι $f(x_n) \le f(x)$. Δηλαδή η $f(x_n)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει.
(2) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases},$$

και την ακολουθία $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. Τότε $f(x_{2n}) = 1$ και $f(x_{2n+1}) = -1$, άρα η $f(x_n)$ δεν συγκλίνει.

□

4.5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^2$ για κάθε x, y. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Λύση. Έστω $x < y$ τυχόντα. Διαμερίζουμε το $[x, y]$ σε n διαδοχικά υποδιαστήματα μήκους $(y - x)/n$ το καθένα:

$$x = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = y.$$

Τότε

$$|f(x) - f(y)| = \left|\sum_{i=1}^{n} (f(t_i) - f(t_{i-1}))\right| \le \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} |t_i - t_{i-1}|^2 = (y - x)^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{(y - x)^2}{n}.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε n, άρα παίρνοντας όριο ως προς n, έχουμε ότι $f(x) = f(y)$. Αφού τα x, y είναι αυθαίρετα, συμπεραίνουμε ότι η f είναι σταθερή. □

4.6. *Εξετάστε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με*

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ -x, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Λύση. Αν $x \neq 0$, επιλέγουμε μια ακολουθία ρητών q_n και μια ακολουθία άρρητων a_n τέτοιες ώστε

$$\lim q_n = \lim a_n = x.$$

Τότε $f(q_n) = q_n \to x$ και $f(a_n) = -a_n \to -x$, άρα η f δεν είναι συνεχής στο x. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε x με $|x| < \varepsilon$, έχουμε $|f(x) - f(0)| = |f(x)| = |x| < \varepsilon$, άρα η f είναι συνεχής στο 0. □

4.7. *Έστω $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς τέτοιες ώστε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι $f = g$.*

Λύση. Έστω $x \in \mathbb{R}$, και μια ακολουθία ρητών r_n με $r_n \to x$. Τότε, αφού οι συναρτήσεις είναι συνεχείς,

$$f(x) = f(\lim r_n) = \lim f(r_n) = \lim g(r_n) = g(\lim r_n) = g(x).$$

□

4.8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(1) = 1$ και $f(x + y) = f(x) + f(y)$ για κάθε x, y. Δείξτε ότι $f(x) = x$ για κάθε x.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι:

- $f(0) = f(0 + 0) = 2f(0)$, άρα $f(0) = 0$.
- Για κάθε x έχουμε $0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$, άρα $f(-x) = -f(x)$.

Επίσης για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$

- $1 = f(1) = f(n/n) = f(\underbrace{1/n + \cdots + 1/n}_{n \text{ φορές}}) = \underbrace{f(1/n) + \cdots + f(1/n)}_{n \text{ φορές}} = nf(1/n)$, άρα $f(1/n) = 1/n$.
- $f(m/n) = f(\underbrace{1/n + \cdots + 1/n}_{m \text{ φορές}}) = \underbrace{f(1/n) + \cdots + f(1/n)}_{m \text{ φορές}} = mf(1/n) = m/n$.

Άρα $f(x) = x$ για κάθε θετικό ρητό x, άρα και για όλους τους ρητούς αφού $f(-x) = -f(x)$. Επομένως, από την προηγούμενη άσκηση, $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

4.9. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε για κάθε x υπάρχει y με $|f(y)| \leq |f(x)|/2$. Δείξτε ότι υπάρχει ξ με $f(\xi) = 0$.*

Λύση. Έστω $c \in [a, b]$ τυχόν. Τότε υπάρχει x_1 με $|f(x_1)| \leq |f(c)|/2$. Ομοίως υπάρχει x_2 με

$$|f(x_2)| \leq |f(x_1)|/2 \leq |f(c)|/4.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία $x_n \in [a, b]$ τέτοια ώστε

$$|f(x_n)| \leq |f(x_{n-1})|/2 \leq \cdots \leq |f(c)|/2^n \to 0.$$

Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει μια υπακολουθία x_{k_n} και ένα σημείο $\xi \in [a, b]$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to \xi$. Αφού $f(x_n) \to 0$, έχουμε $f(x_{k_n}) \to 0$. Έτσι, από τη συνέχεια τής f παίρνουμε

$$f(\xi) = f(\lim x_{k_n}) = \lim f(x_{k_n}) = 0.$$

□

4.10. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Λύση. Αν η f δεν ήταν σταθερή θα υπήρχαν x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(x_1) \neq f(x_2)$. Επιλέγουμε έναν άρρητο a ανάμεσα στα $f(x_1)$ και $f(x_2)$. Από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει ξ ανάμεσα στα x_1 και x_2 τέτοιο ώστε $f(\xi) = a \notin \mathbb{Q}$, άτοπο. □

4.11. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $t_1, \ldots, t_n \in [a, b]$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε*

$$f(\xi) = \frac{f(t_1) + f(t_2) + \cdots + f(t_n)}{n}.$$

Λύση. Η f παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή σε κάποια σημεία $x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$. Επομένως

$$f(x_{\min}) \le f(t_i) \le f(x_{\max})$$

για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αθροίζοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$nf(x_{\min}) \le f(t_1) + \cdots + f(t_n) \le nf(x_{\max}).$$

Επομένως

$$f(x_{\min}) \le \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n} \le f(x_{\max}).$$

Έτσι από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(t_1) + \cdots + f(t_n)}{n}.$$

□

4.12. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.*

Λύση. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε υπάρχουν μη αρνητικοί ακέραιοι k, ℓ με $\ell < n$ έτσι ώστε $\frac{m}{n} = k + \frac{\ell}{n}$. Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f\left(x + \frac{m}{n}\right) = f\left(x + k + \frac{\ell}{n}\right) = f\Big(x + k + \underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\ell \text{ φορές}}\Big) = f(x+k) = f(x + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ φορές}}) = f(x).$$

Δηλαδή $f(x+q) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε θετικό ρητό q. Ιδιαίτερα $f(q) = f(0)$ και $f(-q) = f(-q+q) = f(0)$ για κάθε θετικό ρητό q, άρα $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Επομένως $f(x) = f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής. □

4.13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|f(x)| = 1$ για κάθε x. Δείξτε ότι η f είναι είτε η σταθερή συνάρτηση 1 είτε η σταθερή συνάρτηση -1.*

Λύση. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι για κάθε x, είτε $f(x) = 1$ είτε $f(x) = -1$ (αυτό, από μόνο του δεν σημαίνει ότι η f είναι σταθερή. Θα μπορούσε να παίρνει την τιμή 1 στο 5 και την τιμή -1 στο 0.004569.) Αν υποθέσουμε ότι η f δεν είναι σταθερή, τότε υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια ώστε $f(x_1) = -1$ και $f(x_2) = 1$. Άρα από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, άτοπο. □

4.14. *Δείξτε ότι η υπόθεση τής συνέχειας είναι απαραίτητη στην προηγούμενη άσκηση.*

Λύση. Η ασυνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

έχει απόλυτη τιμή 1 αλλά δεν είναι σταθερή. □

4.15. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και φθίνουσα. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό ξ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με $g(x) = f(x) - x$. Η g δεν μπορεί να είναι θετική διότι τότε θα είχαμε $f(0) > 0$ και $f(f(0)) > f(0)$, άτοπο αφού η f είναι φθίνουσα. Ομοίως, η g δεν μπορεί να είναι αρνητική. Επομένως υπάρχουν a, b με $g(a) \le 0$ και $g(b) \ge 0$, άρα από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, ισοδύναμα $f(\xi) = \xi$. Τώρα παρατηρούμε ότι η g είναι γνήσια φθίνουσα γιατί αν $x < y$ τότε

$$g(x) = f(x) - x \ge f(y) - x > f(y) - y = g(y).$$

Άρα το ξ είναι μοναδικό (αν υπήρχε κάποιο άλλο ζ με την ίδια ιδιότητα, θα είχαμε $g(\xi) = g(\zeta) = 0$, άτοπο). □

4.16. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και θετική, τέτοια ώστε*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0.$$

Δείξτε ότι η f παίρνει μέγιστη τιμή.

Λύση. Από τον ορισμό των ορίων (για $\varepsilon = f(0)$), έχουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) < f(0)$ για κάθε x με $|x| > M$. Η f είναι συνεχής στο $[-M, M]$, άρα υπάρχει $x_0 \in [-M, M]$ τέτοιο ώστε $f(x) \le f(x_0)$ για κάθε $x \in [-M, M]$. Αν τώρα $x \notin [-M, M]$, τότε $|x| > M$, άρα $f(x) < f(0) \le f(x_0)$, αφού $0 \in [-M, M]$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση $f(x) \le f(x_0)$, άρα η f παίρνει μέγιστη τιμή στο x_0. □

4.17. *Δείξτε ότι το συμπέρασμα στην προηγούμενη άσκηση δεν ισχύει χωρίς την υπόθεση $f > 0$.*

Λύση. Η αρνητική συνάρτηση $f(x) = -e^{-x^2}$ είναι συνεχής, τα δυο όρια είναι μηδέν και δεν παίρνει μέγιστη τιμή. □

4.18. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $f(0) = f(1)$. Δείξτε ότι για κάθε n υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = f\left(\xi + \dfrac{1}{n}\right)$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση

$$g : \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right).$$

Αρκεί να βρούμε ένα ξ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$g(0) + g(1/n) + g(2/n) + \cdots + g((n-1)/n) = f(0) - f(1) = 0.$$

Αν κάποιος από τους όρους στο άθροισμα αυτό, ας πούμε το $g(k/n)$, είναι 0 τότε θέτουμε $\xi = k/n$ και τελειώσαμε. Αν κανένας όρος δεν είναι μηδέν τότε δεν είναι δυνατό να είναι όλοι ομόσημοι γιατί τότε το άθροισμα θα ήταν είτε θετικό είτε αρνητικό. Δηλαδή υπάρχουν i, j έτσι ώστε $g(i/n) < 0$ και $g(j/n) > 0$. Επομένως, από θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, η g μηδενίζεται σε κάποιο ξ ανάμεσα στα i/n και j/n. □

4.19. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και αύξουσα. Δείξτε ότι αν το $A \subset \mathbb{R}$ είναι ένα άνω φραγμένο σύνολο, τότε* $\sup f(A) = f(\sup A)$.

Λύση. Για κάθε $x \in A$ έχουμε $x \le \sup A$, άρα, αφού η f είναι αύξουσα, παίρνουμε $f(x) \le f(\sup A)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(\sup A)$ είναι άνω φράγμα τού συνόλου $f(A)$, επομένως $\sup f(A) \le f(\sup A)$. Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, έστω $x_n \in A$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \to \sup A$. Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε $f(x_n) \to f(\sup A)$. Αλλά $f(x_n) \le \sup f(A)$, άρα $f(\sup A) \le \sup f(A)$. □

4.20. *Ισχύει το συμπέρασμα στην προηγούμενη άσκηση χωρίς την υπόθεση τής συνέχειας;*

Λύση. Όχι. Για παράδειγμα, αν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \ge 0 \end{cases},$$

και $A = (-\infty, 0)$, τότε $f(A) = \{0\}$. Επομένως $f(\sup A) = f(0) = 1$ και $\sup f(A) = 0$. □

4.21. *Έστω $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε το $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ υπάρχει. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Λύση. Αφού το όριο στο 0 υπάρχει, η f είναι φραγμένη σε κάποια περιοχή τού 0 (άσκηση 4.1). Δηλαδή υπάρχει $0 < \delta < 1$ τέτοιο ώστε η f είναι φραγμένη στο $(0, \delta)$. Αλλά η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\delta, 1]$, άρα είναι φραγμένη στο διάστημα αυτό. Επομένως είναι φραγμένη σ' ολόκληρο το $(0, 1]$. □

4.22. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ υπάρχει. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Λύση. Θέτουμε $\ell = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Τότε υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| < 1$ για κάθε $x > c$. Επομένως $|f(x)| < 1 + |\ell|$ για κάθε $x > c$. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι φραγμένη στο $(c, +\infty)$. Απ' την άλλη, η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, c]$, άρα φραγμένη στο διάστημα αυτό. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι φραγμένη σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού της. □

4.23. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Δείξτε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι επί.*

Λύση. Έστω $\xi \in \mathbb{R}$. Αφού $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, υπάρχει $a < 0$ τέτοιο ώστε $f(a) < \xi$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, υπάρχει $b > 0$ τέτοιο ώστε $f(b) > \xi$. Δηλαδή $f(a) < \xi < f(b)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει x_0 ανάμεσα στα a και b τέτοιο ώστε $f(x_0) = \xi$. Αυτό σημαίνει ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. □

4.24. *Δείξτε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστο μια ρίζα.*

Λύση. Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, όπου n περιττός, και $a_n \neq 0$. Για να δείξουμε ότι το p έχει ρίζα, αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^n + \cdots + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_0}{a_n}$$

μηδενίζεται. Αλλά $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, διότι το n είναι περιττός. Έτσι, από την προηγούμενη άσκηση, η f είναι επί, άρα κάπου μηδενίζεται. □

4.25. *Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, δείξτε ότι κάθε θετικός αριθμός έχει n-οστή ρίζα. Δηλαδή, για κάθε $\xi > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $\rho > 0$, τέτοιο ώστε $\rho^n = \xi$.*

Λύση. Θέτουμε $f(x) = x^n$, $x \geq 0$. Αν $\xi < 1$, τότε $f(0) = 0 < \xi < 1 = f(1)$. Αν $\xi \geq 1$, τότε $f(0) = 0 < \xi \leq \xi^n = f(\xi)$. Δηλαδή σε κάθε περίπτωση, το ξ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές τής συνεχούς f. Άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\rho > 0$ τέτοιο ώστε $\rho^n = \xi$. □

4.26. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Σταθεροποιούμε $a, b > 0$ τέτοια ώστε $a + b = 1$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = af(0) + bf(1)$.*

Λύση. Ο αριθμός $af(0) + bf(1)$ είναι ανάμεσα στους $f(0)$ και $f(1)$ διότι αν θέσουμε $m = \min\{f(0), f(1)\}$ και $M = \max\{f(0), f(1)\}$ τότε έχουμε

$$m = am + bm \leq af(0) + bf(1) \leq aM + bM = M.$$

Δηλαδή το $af(0) + bf(1)$ πέφτει ανάμεσα σε δυο τιμές τής f, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής είναι και το ίδιο τιμή τής f. □

4.27. *Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.*

Λύση. Θέτουμε $g(x) = f(x) - x$. Τότε $g(0) = f(0) \geq 0$ και $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$, δηλαδή $f(\xi) = \xi$. □

4.28. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, τέτοιες ώστε $f(a) \geq g(a)$ και $f(b) \leq g(b)$. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.*

Λύση. Θέτουμε $h(x) = f(x) - g(x)$. Τότε η h είναι συνεχής και $h(a) = f(a) - g(a) \geq 0$, $h(b) = f(b) - g(b) \leq 0$, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε $h(\xi) = 0$. Επομένως $f(\xi) = g(\xi)$. □

4.29. *Έστω $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ με $x - y = 1$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$.*

Λύση. Θέτουμε $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $g(t) = f(t+1) - f(t)$. Τότε η g είναι συνεχής και $g(0) = f(1) - f(0)$, $g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1)$. Δηλαδή τα $g(0)$ και $g(1)$ είναι ετερόσημα, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. Επομένως $f(\xi + 1) = f(\xi)$. Έτσι τα ζητούμενα x, y είναι $x = \xi + 1$, $y = \xi$. □

Κεφάλαιο 5

Ομοιόμορφη Συνέχεια

Ορισμός. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται ομοιόμορφα συνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Προφανώς κάθε ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής. Θα δούμε παρακάτω ότι το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει. Η διαφορά είναι ότι το δ στον ορισμό τής ομοιόμορφης συνέχειας εξάρταται μόνο από το ε, ενώ στον ορισμό τής συνέχειας εξαρτάται, γενικά, και από το ε και από το σημείο στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής. Αυτό εξηγεί και τον όρο «ομοιόμορφη»: η επιλογή τού δ είναι ομοιόμορφη για όλα τα σημεία.

(2) Δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για «ομοιόμορφη συνέχεια σε κάποιο σημείο».

Παραδείγματα.

(1) Μια σταθερή συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για κάθε $\varepsilon > 0$, οποιοδήποτε $\delta > 0$ ικανοποιεί τον ορισμό.

(2) Η $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για κάθε $\varepsilon > 0$, η επιλογή $\delta = \varepsilon$ ικανοποιεί τον ορισμό αφού $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

(3) Γενικότερα, αν μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$, για κάποια σταθερά $M > 0$ (τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται Lipschitz), τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$, η επιλογή $\delta = \varepsilon/M$ ικανοποιεί τον ορισμό.

(4) Η συνάρτηση $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι Lipschitz, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(5) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 1$, είναι Lipschitz διότι
$$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$
Επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(6) Γενικότερα, η συνάρτηση $f(x) = x^p$, $x \geq 1$, $0 < p \leq 1$, είναι Lipschitz. Πράγματι, αν πάρουμε $x, y \geq 1$ με $x \neq y$, τότε, από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y τέτοιο ώστε
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(\xi)| = p\xi^{p-1} \leq p.$$
Δηλαδή $|f(x) - f(y)| \leq p|x - y|$ για κάθε $x, y \geq 1$. Επομένως η f είναι Lipschitz.

Θεώρημα (Ο ακολουθιακός χαρακτηρισμός τής ομοιόμορφης συνέχειας)**.** *Μια $f : A \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε ζευγάρι ακολουθιών $x_n, y_n \in A$ με $x_n - y_n \to 0$ έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, και $x_n, y_n \in A$ δυο ακολουθίες τέτοιες ώστε $x_n - y_n \to 0$. Θα δείξουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Αφού $x_n-y_n \to 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n-y_n| < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για κάθε τέτοιο n έχουμε $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι για κάθε ζευγάρι ακολουθιών στο A η διαφορά των οποίων τείνει στο μηδέν έχουμε ότι και η διαφορά των εικόνων τους τείνει στο μηδέν. Θα δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $x, y \in A$ τέτοια ώστε $|x - y| < \delta$ και $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Ιδιαίτερα για $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, παίρνουμε δυο ακολουθίες $x_n, y_n \in A$ με $|x_n - y_n| < 1/n$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$, άτοπο. □

Παραδείγματα.

(1) Η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής διότι για το ζευγάρι $x_n = n$, $y_n = n + 1/n$, έχουμε $x_n - y_n = -1/n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) = -2 - 1/n^2 \to -2 \neq 0$.

(2) Γενικότερα, η $f(x) = x^p$, $x \geq 1$, $p > 1$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, αν θεωρήσουμε το ζευγάρι $x_n = n$, $y_n = n + \dfrac{1}{n^{p-1}}$, τότε $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) \to -p \neq 0$.

(3) Η $f(x) = 1/x$, $x > 0$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί αν θέσουμε $x_n = 1/(n+1)$ και $y_n = 1/n$, τότε $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) = 1$.

Παρατηρήσεις.

(1) Το άθροισμα και η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Αυτό προκύπτει άμεσα από τον ακολουθιακό χαρακτηρισμό τής ομοιόμορφης συνέχειας.

(2) Το γινόμενο δυο ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων δεν είναι κατ' ανάγκη ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, η $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά η f^2 όχι.

(3) Ομοίως με το πηλίκο. Η $f(x) = x$, $x > 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά η $1/f$ δεν είναι.

Θεώρημα. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και $x_n \in A$ μια ακολουθία Cauchy. Τότε η $f(x_n)$ είναι Cauchy. Ισοδύναμα, μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στέλνει συγκλίνουσες ακολουθίες σε συγκλίνουσες ακολουθίες, αφού μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι Cauchy.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Αφού η x_n είναι Cauchy, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x_n - x_m| < \delta$ για κάθε $n, m \geq n_0$. Επομένως για όλα αυτά τα n και m έχουμε $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι η $f(x_n)$ είναι Cauchy. □

Παράδειγμα. Η $f(x) = \cos \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής γιατί η ακολουθία $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$ είναι Cauchy, αλλά η $f(x_n) = (-1)^n$ δεν είναι.

Παρατηρήσεις.

(1) Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, γενικά, δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Παρ' όλα αυτά, στέλνει ακολουθίες Cauchy σε ακολουθίες Cauchy. Πράγματι, αν η x_n είναι Cauchy τότε συγκλίνει σε κάποιο ℓ. Αλλά τότε $f(x_n) = x_n^2 \to \ell^2$. Δηλαδή η $f(x_n)$ συγκλίνει, άρα είναι Cauchy.

(2) Προσέξτε την διαφορά: Μια συνεχής συνάρτηση στέλνει μια ακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο τού πεδίου ορισμού τής συνάρτησης σε μια ακολουθία η οποία συγκλίνει στην εικόνα τού σημείου. Μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση στέλνει οποιαδήποτε συγκλίνουσα ακολουθία σε συγκλίνουσα ακολουθία, ανεξάρτητα από το αν η αρχική ακολουθία συγκλίνει σε σημείο τού πεδίου ορισμού τής συνάρτησης.

Θεώρημα. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Τότε υπάρχουν ακολουθίες $x_n, y_n \in [a, b]$ και ένα $\varepsilon > 0$ έτσι ώστε $x_n - y_n \to 0$ και $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $x \in [a, b]$ έτσι ώστε $x_{k_n} \to x$. Αλλά $x_{k_n} - y_{k_n} \to 0$, άρα $y_{k_n} \to x$. Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε $f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to f(x) - f(x) = 0$, άτοπο διότι $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$. □

Παραδείγματα.

(1) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Πράγματι, η f, όπως είδαμε, είναι Lipschitz στο $[1, +\infty)$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό. Επίσης, είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1]$ από το προηγούμενο θεώρημα. Επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' ολόκληρο το πεδίο ορισμού. Παρατηρήστε ότι η f δεν είναι Lipschitz στο $[0, +\infty)$. Αν ήταν, θα είχαμε

$$|f(x) - f(0)| \leq M|x - 0|$$

για κάποιο $M > 0$ και κάθε $x \geq 0$. Ιδιαίτερα, για $x = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, θα είχαμε $\sqrt{n} \leq M$ για κάθε n, άτοπο.

(2) Γενικότερα, η $f(x) = x^p$, $x \geq 0$, $0 < p \leq 1$, είναι ομοιόμορφα συνεχής αφού είναι Lipschitz στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $[0, 1]$.

Θεώρημα. *Έστω $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν τα $\lim_{x\to a} f(x)$ και $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι τα όρια υπάρχουν. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f^* : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f^*(y) = \begin{cases} \lim_{x\to a} f(x), & \text{αν } y = a \\ f(y), & \text{αν } a < y < b \\ \lim_{x\to b} f(x), & \text{αν } y = b \end{cases}.$$

Τότε η f^* είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αλλά η f^* είναι επέκταση τής f, άρα και η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Θα δείξουμε ότι το όριο στο a υπάρχει. Αρκεί να δείξουμε ότι η f στέλνει όλες τις ακολουθίες τού (a,b) που συγκλίνουν στο a σε ακολουθίες που συγκλίνουν στον ίδιο αριθμό. Έστω λοιπόν $x_n \in (a,b)$ με $x_n \to a$. Τότε η x_n είναι Cauchy. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, η $f(x_n)$ είναι κι' αυτή Cauchy, άρα συγκλίνει σε κάποιο ℓ. Αν τώρα $y_n \in (a,b)$ είναι κάποια άλλη ακολουθία με $y_n \to a$, τότε $x_n - y_n \to 0$, επομένως, από την ομοιόμορφη συνέχεια τής f, έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Αυτό σημαίνει ότι $f(y_n) \to \ell$. Συμπεραίνουμε ότι το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει (και είναι ίσο με ℓ). Ομοίως δείχνουμε ότι το $\lim_{x\to b} f(x)$ υπάρχει. □

Παρατήρηση. Η μια κατεύθυνση τού προηγούμενου θεωρήματος γενικεύεται σε διαστήματα οποιουδήποτε τύπου. Αν μια συνεχής συνάρτηση είναι ορισμένη σε κάποιο αυθαίρετο διάστημα (ανοιχτό, κλειστό, ημιάνοιχτο, φραγμένο, μη φραγμένο), και τα όρια στα άκρα υπάρχουν (και είναι πεπερασμένα), τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής. Οι αποδείξεις δίνονται στις ασκήσεις. Το αντίστροφο, γενικά, δεν ισχύει εκτός κι' αν το διάστημα είναι φραγμένο. Δηλαδή, αν μια συνεχής συνάρτηση είναι ορισμένη σε κάποιο μη φραγμένο διάστημα και το όριο στο $\pm\infty$ δεν υπάρχει ή είναι άπειρο, **δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Για παράδειγμα, οι $f(x) = \sin x$ και $g(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Παρ' όλα αυτά, τα όρια τής f στο $\pm\infty$ δεν υπάρχουν, και τα όρια τής g στο $\pm\infty$ είναι $\pm\infty$.

Παραδείγματα.

(1) Η $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής διότι $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

(2) Η $1/x$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(1,+\infty)$ γιατί τα όρια και στα δυο άκρα υπάρχουν. Δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $(0,+\infty)$ γιατί το όριο στο 0 είναι άπειρο.

Ασκήσεις

5.1. *Έστω $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι η f είναι φραγμένη.*

Λύση. Έχουμε δει στη θεωρία ότι η f επεκτείνεται σε μια συνεχή συνάρτηση $f^* : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η f^* είναι φραγμένη αφού είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα. Άρα και η f είναι φραγμένη.

Δίνουμε και μια άλλη απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι φραγμένη. Τότε υπάρχει μια ακολουθία $x_n \in (a, b)$ τέτοια ώστε $|f(x_n)| > n$ για κάθε n. Η x_n είναι φραγμένη, άρα, από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass, έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω x_{k_n}. Αφού η x_{k_n} συγκλίνει, είναι Cauchy, άρα και η $f(x_{k_n})$ είναι Cauchy διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως και η $f(x_{k_n})$ συγκλίνει. Αυτό είναι άτοπο γιατί $|f(x_{k_n})| > k_n \geq n$. □

5.2. *Έστω I ένα διάστημα, και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Αφού η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε x. Έτσι, από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε x, y με $x \neq y$, έχουμε ότι υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(\xi)| \leq M.$$

Άρα $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. Δηλαδή η f είναι Lipschitz, επομένως είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

5.3. *Έστω $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, όπου a, ℓ σταθερές. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, υπάρχει $c > a$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon/3$ για κάθε $x \geq c$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, c]$ (συνεχής σε κλειστό διάστημα), άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in [a, c]$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$. Τώρα για οποιαδήποτε $x, y \in [a, +\infty)$ με $|x - y| < \delta$, διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- $x, y \leq c$. Τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$.
- $x, y \geq c$. Τότε $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon/3 < \varepsilon$.
- $x \leq c \leq y$. Τότε $|x - c| < \delta$, άρα $|f(x) - f(c)| < \varepsilon/3$, επομένως

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(c)| + |f(c) - \ell| + |\ell - f(y)| < 3\varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Δηλαδή σε κάθε περίπτωση έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Ανάλογα πράγματα ισχύουν αν η f είναι ορισμένη σε κάποιο διάστημα τής μορφής $(-\infty, a]$ και το $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ υπάρχει. □

5.4. *Έστω $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής (a σταθερά). Υποθέτουμε ότι τα όρια $\lim_{x\to a} f(x)$ και $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ υπάρχουν. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Αφού το $\lim_{x\to a} f(x)$ υπάρχει, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα $(a, a + 1]$. Επίσης, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a + 1, +\infty)$ από την προηγούμενη άσκηση. Έτσι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' ολόκληρο το $(a, +\infty)$. □

5.5. *Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:*

(1) $f(x) = 1/x^a$, $x \geq 1$, $a > 0$.
(2) $f(x) = 1/x^a$, $x > 0$, $a > 0$.
(3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
(4) $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.
(5) $f(x) = \ln x$, $x > 0$.
(6) $f(x) = \ln x$, $x \geq 1$.
(7) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x > 0$.
(8) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, $x \geq 0$.
(9) $f(x) = \cos x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση.

(1) Το όριο στο $+\infty$ είναι 0, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(2) Το όριο στο 0 είναι $+\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(3) Τα όρια στο $\pm\infty$ είναι 0, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(4) Θέτουμε $x_n = \ln(n+1)$, $y_n = \ln n$. Τότε $x_n - y_n = \ln \dfrac{n+1}{n} \to 0$, αλλά $f(x_n) - f(y_n) = 1 \not\to 0$. Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(5) Το όριο στο 0 είναι $-\infty$, άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής
(6) Από το θεώρημα μέσης τιμής, έχουμε ότι για κάθε $x, y \geq 1$ με $x \neq y$ υπάρχει ξ ανάμεσα στα x και y τέτοιο ώστε
$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = f'(\xi) = \frac{1}{\xi} \leq 1.$$
Επομένως $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$, άρα η f είναι Lipschitz, συνεπώς είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(7) Το όριο στο 0 είναι 1. Το όριο στο $+\infty$ είναι 0. Άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(8) Η $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, και η $\sqrt{x}$, $x \geq 0$, είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Επομένως η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σαν σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων.
(9) Θέτουμε $x_n = \sqrt{(2n+1)\pi}$, $y_n = \sqrt{2n\pi}$. Τότε $x_n - y_n \to 0$ και $f(x_n) - f(y_n) = -2 \not\to 0$. Άρα η f δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

□

5.6. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και φραγμένη. Δείξτε ότι η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Αφού η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε x. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x, y με $|x-y| < \delta$ έχουμε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/(2M)$. Επομένως για κάθε τέτοια x και y έχουμε
$$|f^2(x) - f^2(y)| = |f(x)-f(y)| \cdot |f(x)+f(y)| < \frac{\varepsilon}{2M}(|f(x)| + |f(y)|) \leq \varepsilon.$$
Άρα η f^2 είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν η f δεν είναι φραγμένη, τότε το συμπέρασμα, γενικά, δεν ισχύει. Για παράδειγμα, η x είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά η x^2 δεν είναι. □

5.7. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > c$ για κάθε x. Δείξτε ότι η $1/f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x, y με $|x-y| < \delta$, έχουμε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon \cdot c^2$. Επομένως για κάθε τέτοια x, y
$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|f(x)| \cdot |f(y)|} < \frac{\varepsilon \cdot c^2}{c^2} = \varepsilon.$$

□

5.8. *Ισχύει το αποτέλεσμα τής προηγούμενης άσκησης χωρίς την υπόθεση $1/f > c$;*

Λύση. Γενικά όχι. Για παράδειγμα η $f(x) = 1/(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ομοιόμορφα συνεχής, αλλά η $1/f(x) = x^2+1$ δεν είναι. □

5.9. *Έστω $A \subset \mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \inf\limits_{y \in A} |x-y|$. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ και κάθε $y \in A$ έχουμε $f(x_1) \leq |x_1-y| \leq |x_1-x_2| + |x_2-y|$, άρα $f(x_1) - |x_1-x_2| \leq |x_2-y|$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $y \in A$, άρα
$$f(x_1) - |x_1-x_2| \leq \inf_{y \in A} |x_2-y| = f(x_2).$$
Συνεπώς $f(x_1) - f(x_2) \leq |x_1-x_2|$. Αφού η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, αλλάζοντας τους ρόλους των x_1 και x_2, παίρνουμε $f(x_2) - f(x_1) \leq |x_1-x_2|$. Έτσι έχουμε $|f(x_1)-f(x_2)| \leq |x_1-x_2|$. Δηλαδή η f είναι Lipschitz, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. □

5.10. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχουν $a, b \geq 0$ τέτοια ώστε*

$$|f(x)| \leq ax + b$$

για κάθε $x \geq 0$.

Λύση. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \geq 0$ με $|x - y| < \delta_0$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < 1$. Σταθεροποιούμε τώρα $\delta > 0$ με $\delta < \delta_0$, παίρνουμε $x \geq 0$ τυχόν, και έστω n ο μοναδικός μη αρνητικός ακέραιος τέτοιος ώστε $n\delta \leq x < (n + 1)\delta$ (δηλαδή το n είναι το ακέραιο μέρος τού x/δ). Τότε

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leq |f(0) - f(x)| + |f(0)| \leq |f(0) - f(\delta)| + |f(\delta) - f(2\delta)| + \cdots + |f(n\delta) - f(x)| + |f(0)| \\ &\leq \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ φορές}} + |f(0)| = n + 1 + |f(0)| \leq \frac{1}{\delta}x + 1 + |f(0)|.\end{aligned}$$

Η άσκηση αυτή λέει ότι μια ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση δεν μπορεί να τείνει στο άπειρο «πιο γρήγορα» από τη γραμμική συνάρτηση. Για παράδειγμα, η $f(x) = e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αν ήταν τότε θα υπήρχαν $a, b \geq 0$ τέτοια ώστε $e^{x^2} \leq ax + b$ για κάθε $x \geq 0$. Δηλαδή $1 \leq \dfrac{ax + b}{e^{x^2}} \to 0$ καθώς $x \to +\infty$, άτοπο. □

5.11. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και περιοδική. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Έστω $T > 0$ η περίοδος τής f, και έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[-T, 2T]$, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο διάστημα αυτό. Επομένως υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in [-T, 2T]$ με $|x - y| < \delta_0$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta = \min\{\delta_0, T\}$. Τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ γράφουμε $x = kT + \theta$, όπου $k \in \mathbb{Z}$, $\theta \in [0, T)$, και παρατηρούμε ότι οι αριθμός $y - kT$ ανήκει στο $[-T, 2T]$ διότι

$$y - kT = y - x + \theta > -\delta + \theta \geq -\delta \geq -T,$$

και

$$y - kT = y - x + \theta < \delta + \theta < T + T = 2T.$$

Επίσης $|(y - kT) - \theta| = |y - x| < \delta \leq \delta_0$. Επομένως $|f(\theta) - f(y - kT)| < \varepsilon$. Αλλά $f(\theta) = f(kT + \theta) = f(x)$ και $f(y - kT) = f(y)$, λόγω περιοδικότητας. Δηλαδή $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, άρα η f είναι ομοιόμορφα συνεχής σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$. □

5.12. *Μια συνάρτηση $s : [0, 1] \to \mathbb{R}$ λέγεται κλιμακωτή, αν υπάρχουν*

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$$

έτσι ώστε η s να είναι σταθερή στα διαστήματα (t_k, t_{k+1}), $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Στα άκρα των διαστημάτων η s μπορεί να πάρει ό,τι τιμές θέλουμε. Δείξτε ότι αν η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κλιμακωτή συνάρτηση s τέτοια ώστε $\sup\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - s(x)| \leq \varepsilon$.

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in [0, 1]$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε τώρα $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $1/n < \delta$ και θεωρούμε τα σημεία

$$0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n} = 1.$$

Ορίζουμε $s : [0, 1] \to \mathbb{R}$ με

$$s(x) = \begin{cases} f(k/n) & \text{αν } x \in [k/n, (k + 1)/n) \text{ για κάποιο } k = 0, 1, \ldots, n - 1 \\ \\ f(1) & \text{αν } x = 1 \end{cases}.$$

Δηλαδή η s σε κάθε υποδιάστημα παίρνει την τιμή τής f στο αριστερό άκρο τού διαστήματος αυτού. Στο 1 παίρνει την τιμή $f(1)$. Έστω τώρα $x \in [0, 1]$ τυχόν. Αν $x = 1$ τότε $|f(x) - s(x)| = 0 < \varepsilon$. Αν $x \in [0, 1)$ τότε υπάρχει μοναδικό k τέτοιο ώστε $x \in [k/n, (k + 1)/n)$. Αλλά τότε $|x - k/n| < 1/n < \delta$, άρα $|f(x) - f(k/n)| < \varepsilon$. Δηλαδή $|f(x) - s(x)| < \varepsilon$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε x, έτσι παίρνουμε το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 6

Παράγωγοι

Ορισμός. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Η f λέγεται παραγωγίσιμη σε κάποιο $x_0 \in I$ αν το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - (x_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του συμβολίζεται με $f'(x_0)$ και ονομάζεται παράγωγος τής f στο x_0. Αν η f παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο τού I, τότε ονομάζεται παραγωγίσιμη.

Ορισμός. *Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο f'. Αν η f' είναι και αυτή παραγωγίσιμη, τότε η παράγωγός της συμβολίζεται με f'' και ονομάζεται δεύτερη παράγωγος τής f. Γενικότερα, αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη, με $n \geq 3$, τότε η n-οστή παράγωγος συμβολίζεται με $f^{(n)}$.*

Υπενθυμίζουμε κάποια γνωστά από τον Απειροστικό Λογισμό αποτελέσματα.

- Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο, τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Αν οι f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε οι $f + g$ και fg είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

  Αν, επιπλέον, $f(x_0) \neq 0$, τότε, λόγω συνέχειας, η f δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού x_0. Στην περιοχή αυτή η $1/f$ ορίζεται, είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}.$$

- Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο x_0 και το x_0 είναι σημείο τοπικού ακρότατου τότε $f'(x_0) = 0$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- (Θεώρημα Μέσης Τιμής) Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο (a, b) τότε υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- Μια παραγωγίσιμη f είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) αν και μόνο αν $f' \geq 0$ (αντίστοιχα $f' \leq 0$). Αν $f' > 0$ (αντίστοιχα $f' < 0$) τότε η f είναι γνήσια αύξουσα (αντίστοιχα γνήσια φθίνουσα). Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- (Θεώρημα τού Taylor) Αν η f είναι n φορές παραγωγίσιμη σε κάποιο διάστημα I, τότε για κάθε ζευγάρι σημείων $a, b \in I$ υπάρχει κάποιο ξ ανάμεσα στα a και b τέτοιο ώστε

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b - a)^n.$$

Θα αποδείξουμε τώρα μια σειρά αποτελεσμάτων τα οποία συνήθως είτε δεν διατυπώνονται, είτε δεν αποδεικνύονται πλήρως στον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας)**.** *Έστω $I, J \subset \mathbb{R}$ δυο ανοιχτά διαστήματα, και $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η g παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$. Τότε η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $G : J \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, & y \neq f(x_0) \\ \\ g'(f(x_0)), & y = f(x_0) \end{cases}.$$

Τότε η G είναι συνεχής στο $f(x_0)$ και $G(y)(y - f(x_0)) = g(y) - g(f(x_0))$ για κάθε $y \in J$. Επομένως

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to G(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0),$$

καθώς $x \to x_0$. □

Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης για παραγώγους)**.** *Έστω $I, J \subset \mathbb{R}$ δυο ανοιχτά διαστήματα, και $f : I \to J$ αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε η f' δεν μηδενίζεται πουθενά. Τότε η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, και για κάθε $x_0 \in I$ έχουμε $(f^{-1})'(f(x_0)) = 1/f'(x_0)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : I \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}, & x \neq x_0 \\ \\ \dfrac{1}{f'(x_0)}, & x = x_0 \end{cases}.$$

Τότε η F είναι συνεχής. Αλλά και η f^{-1} είναι συνεχής, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για συνεχεις συναρτήσεις. Επομένως

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x_0))}{y - f(x_0)} = F(f^{-1}(y)) \to F(f^{-1}(f(x_0)) = F(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)},$$

καθώς $y \to f(x_0)$. □

Παρατήρηση. Η υπόθεση ότι η f' δεν μηδενίζεται είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Για παράδειγμα, η αντίστροφη τής $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, είναι

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^{1/3}, & x \geq 0 \\ -|x|^{1/3}, & x < 0 \end{cases},$$

η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Η παράγωγος μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης δεν είναι κατ' ανάγκη συνεχής. Παρ' όλα αυτά, έχει πάντα την ιδιότητα τής ενδιάμεσης τιμής, την οποία έχουν όλες οι συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα (Darboux)**.** *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Τότε η f' έχει την ιδιότητα τής ενδιάμεσης τιμής, δηλαδή αν το ξ είναι ένας αριθμός ανάμεσα σε δυο τιμές $f'(a)$ και $f'(b)$, τότε υπάρχει x_0 ανάμεσα στα a και b, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \xi$.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, υποθέτουμε ότι $a < b$, $f'(a) < \xi < f'(b)$. Επιλέγουμε ε_0 αρκετά μικρό ώστε $f'(a) + \varepsilon_0 < \xi < f'(b) - \varepsilon_0$. Από τον ορισμό τής παραγώγου, υπάρχει $\delta > 0$ με $a + \delta < b - \delta$ τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \right| < \varepsilon_0, \quad \left| \frac{f(b+h) - f(b)}{h} - f'(b) \right| < \varepsilon_0,$$

για κάθε $0 < |h| < \delta$. Ιδιαίτερα, αν σταθεροποιήσουμε $0 < \delta_1 < \delta$, έχουμε

$$\frac{f(a+\delta_1) - f(a)}{\delta_1} < f'(a) + \varepsilon_0 < \xi, \quad \frac{f(b) - f(b-\delta_1)}{\delta_1} > f'(b) - \varepsilon_0 > \xi.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνεχή συνάρτηση $F : [a, b - \delta_1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x) = \frac{f(x+\delta_1) - f(x)}{\delta_1}.$$

Τότε $F(a) < \xi < F(b-\delta_1)$, άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $x_1 \in (a, b-\delta_1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x_1+\delta_1)-f(x_1)}{\delta_1} = F(x_1) = \xi.$$

Επομένως, από το θώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_1+\delta) \subset (a,b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \xi$. □

Θεώρημα. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, και $f : I \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Για κάθε $x, y, z \in I$ με $x < y < z$ έχουμε*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.$$

(2) *Για κάθε $x, y, z \in I$ με $x < y < z$ έχουμε*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

(3) *Για κάθε $x, y, z \in I$ με $x < y < z$ έχουμε*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

(4) *Για κάθε $a, b \in I$ και κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε*

$$f((1-t)a+tb) \le (1-t)f(a)+tf(b).$$

Απόδειξη.

(1)⇔(2) Για $x < y < z$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} &\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-y) \le (f(z)-f(y))(y-x) \\
&\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x+x-y) \le (f(z)-f(y))(y-x) \\
&\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x) \le (f(z)-f(y))(y-x) + (f(y)-f(x))(y-x) \\
&\Leftrightarrow (f(y)-f(x))(z-x) \le (f(z)-f(x))(y-x) \\
&\Leftrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \frac{f(z)-f(x)}{z-x}.
\end{aligned}$$

(1)⇔(3) Παρόμοια.

(1)⇒(4) Εφαρμόζουμε το (1) για $x = a$, $z = b$ και $y = (1-t)a+tb$.

(4)⇒(1) Εφαρμόζουμε το (4) για $a = x$, $b = z$ και $t = (y-x)/(z-x)$.

□

Ορισμός. *Μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες τού προηγούμενου θεωρήματος ονομάζεται κυρτή. Αν ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες με την αντίστροφη ανισότητα ονομάζεται κοίλη.*

Γεωμετρικά, η f είναι κυρτή αν για κάθε δυο σημεία $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$ στη γραφική παράσταση τής f, το ευθύγραμμο τμήμα AB είναι πάνω από το κομμάτι τής γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί στο διάστημα $[a, b]$. Η f είναι κοίλη αν το AB είναι από κάτω.

Ισοδύναμα, η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη), αν για οποιαδήποτε τρία σημεία $X = (x, f(x))$, $Y = (y, f(y))$, $Z = (z, f(z))$ στη γραφική παράσταση τής f με $x < y < z$, η κλίση τού ευθύγραμμου τμήματος XY είναι μικρότερη (αντίστοιχα μεγαλύτερη) από τις κλίσεις των XZ, YZ.

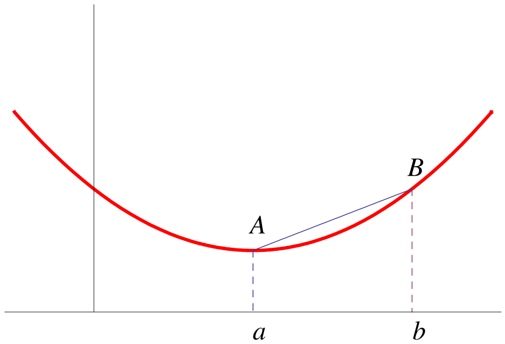
Παρατηρήσεις.

(1) Μια συνάρτηση f είναι κυρτή αν και μόνο αν η $-f$ είναι κοίλη.

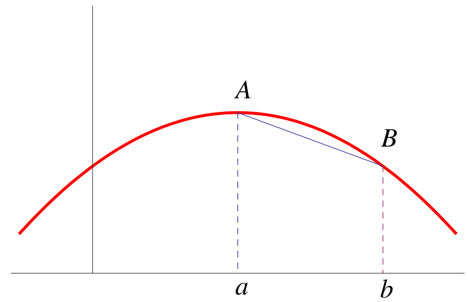
(2) Αν η $f : I \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή, $x_1, \dots, x_n \in I$ τυχόντα σημεία, και $t_1, \dots, t_n$ μη αρνητικοί αριθμοί με άθροισμα 1, τότε

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n) \le t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \cdots + t_nf(x_n).$$

Αν η f είναι κοίλη, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται. Αυτό αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας το (4) τού προηγούμενου θεωρήματος και επαγωγή στο n.



(α΄) Κυρτή



(β΄) Κοίλη

Θεώρημα. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα διάστημα, και $f : I \to \mathbb{R}$ μια κυρτή (ή κοίλη) συνάρτηση. Τότε η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο τού I.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in I$ τυχόν εσωτερικό. Σταθεροποιούμε $a, b \in I$ με $a < x_0 < b$ και θέτουμε

$$M = \max\left\{\left|\frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}\right|, \left|\frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}\right|\right\}.$$

Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε x με $x_0 < x \leq b$ έχουμε

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \leq M.$$

Άρα $f(x) - f(x_0) \leq M|x - x_0|$. Επίσης

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} \geq -M.$$

Επομένως $f(x) - f(x_0) \geq -M|x - x_0|$. Συμπεραίνουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ για κάθε $x \in [x_0, b]$. Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ για κάθε $x \in [a, x_0]$. Συνεπώς $|f(x) - f(x_0)| \leq M|x - x_0|$ για κάθε $x \in [a, b]$. Έτσι, παίρνοντας όρια καθώς $x \to x_0$, έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. □

Θεώρημα. *Έστω $I \subset \mathbb{R}$ ένα ανοιχτό διάστημα και $f : I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Η f είναι κυρτή (αντίστοιχα κοίλη) αν και μόνο αν η f' είναι αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα).*

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι κυρτή. Σταθεροποιούμε $x < w$. Τότε για κάθε y, z με $x < y < z < w$ έχουμε

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(w) - f(z)}{w - z}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $y \to x$ και $z \to w$ έχουμε $f'(x) \leq f'(w)$, άρα η f' είναι αύξουσα. Αντίστροφα, έστω ότι η f' είναι αύξουσα, και έστω $x < y < z$. Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχουν $\xi_1 \in (x, y)$ και $\xi_2 \in (y, z)$, τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}, \quad f'(\xi_2) = \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Αλλά $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$, άρα η f είναι κυρτή. □

Παραδείγματα.

(1) Η e^x, $x \in \mathbb{R}$, είναι κυρτή. Η $\ln x$, $x > 0$, είναι κοίλη. Η x^p, $x > 0$, είναι κυρτή αν $p \geq 1$ ή $p < 0$, κοίλη αν $0 < p \leq 1$.

(2) (Η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου.) Αν $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} \leq \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n}.$$

Αν όλα τα y_i είναι θετικά, τότε αυτό προκύπτει από την παρατήρηση (2) παραπάνω με $f(x) = e^x$, $x_i = \ln y_i$, και $t_i = 1/n$. Αν κάποιο y_i είναι μηδέν, τότε η ανισότητα είναι προφανής.

Ασκήσεις

6.1. *Δείξτε ότι η συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη αλλά η f' δεν είναι συνεχής.

Λύση. Για $x \neq 0$ έχουμε $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}$. Επίσης

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \to 0} \left(x \sin \frac{1}{x^2} \right) = 0.$$

Άρα

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Τώρα, $\lim\limits_{x \to 0} \left(2x \sin \dfrac{1}{x^2} \right) = 0$, αλλά το $\lim\limits_{x \to 0} \left(-\dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2} \right)$ δεν υπάρχει. Επομένως το $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ δεν υπάρχει, άρα η f' δεν είναι συνεχής στο 0. □

6.2. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f' = f$. Δείξτε ότι $f(x) = ce^x$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.*

Λύση. Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^x}.$$

Τότε

$$g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0,$$

άρα $g(x) = c$ για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, και το συμπέρασμα έπεται. □

6.3. *Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

- $f'(0) = 1$.
- $f(x + y) = f(x)f(y)$ *για κάθε x, y.*

Λύση. Προφανώς μια τέτοια συνάρτηση είναι η e^x. Θα δείξουμε ότι είναι η μοναδική. Παραγωγίζοντας τη σχέση $f(x + y) = f(x)f(y)$ ως προς y, παίρνουμε $f'(x + y) = f(x)f'(y)$ για κάθε x, y. Άρα για $y = 0$ έχουμε $f'(x) = f(x)f'(0) = f(x)$ για κάθε x. Επομένως, από την προηγούμενη άσκηση, $f(x) = ce^x$ για κάποια σταθερά c. Έτσι, $ce^2 = f(2) = f(1 + 1) = f(1)f(1) = c^2e^2$. Άρα $c = c^2$. Αυτό σημαίνει ότι είτε $c = 0$ ή $c = 1$. Η περίπτωση $c = 0$ απορρίπτεται γιατί τότε θα είχαμε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση, το οποίο αποκλείεται αφού $f'(0) \neq 0$. Συνεπώς $c = 1$, δηλαδή $f(x) = e^x$. □

6.4. *Δείξτε ότι αν $p > 1$ τότε $(x + 1)^p > x^p + 1$ για κάθε $x > 0$.*

Λύση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x + 1)^p - x^p - 1$, $x \geq 0$. Τότε

$$f'(x) = p \left((x + 1)^{p-1} - x^{p-1} \right) > 0$$

για κάθε $x > 0$ (διότι $p - 1 > 0$). Άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και συνεχής στο $[0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$0 = f(0) < f(x) = (x + 1)^p - x^p - 1 \Rightarrow (x + 1)^p > x^p + 1.$$

□

6.5. *Δείξτε ότι αν $p > 1$ τότε $(a + b)^p > a^p + b^p$ για κάθε $a, b > 0$.*

Λύση. Στην προηγούμενη άσκηση θέτουμε $x = \dfrac{a}{b}$ και παίρνουμε

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p > \left(\frac{a}{b}\right)^p + 1 \Rightarrow (a+b)^p > a^p + b^p.$$

Γενικότερα, αν $a_1, \ldots, a_n > 0$, $n \geq 2$, τότε $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^p > a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p$. Η απόδειξη είναι επαγωγική. Μόλις δείξαμε ότι η ανισότητα ισχύει για το άθροισμα 2 αριθμών. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει για το άθροισμα n αριθμών, τότε δείχνουμε ότι ισχύει για το άθροισμα $n+1$ αριθμών.

$$(a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1})^p > (a_1 + \cdots + a_n)^p + a_{n+1}^p > a_1^p + \cdots + a_n^p + a_{n+1}^p.$$

□

6.6. *Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, $0 < p < q$. Δείξτε ότι*

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k^q\right)^{1/q} < \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}.$$

Λύση. Έχουμε ότι $q/p > 1$, άρα από την προηγούμενη άσκηση παίρνουμε

$$\sum_{k=1}^n x_k^q = \sum_{k=1}^n \left(x_k^p\right)^{q/p} < \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{q/p} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n x_k^q\right)^{1/q} < \left(\sum_{k=1}^n x_k^p\right)^{1/p}.$$

Η άσκηση λέει ότι αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$f(t) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^t\right)^{1/t}, \ t > 0,$$

τότε η f είναι γνήσια φθίνουσα. □

6.7. *Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα.*

(1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$, $x \neq 1$.

(2) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n}$.

Λύση.

(1) Παραγωγίζουμε τη σχέση

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}, \ x \neq 1$$

ως προς x και παίρνουμε

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{(n+1)x^n \cdot (x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$$

(2) Παραγωγίζουμε τη σχέση

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^k = (x+1)^n$$

ως προς x και παίρνουμε

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(x+1)^{n-1}.$$

Θέτουμε $x = 1$ και έχουμε ότι

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

□

6.8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $x \leq f(x) \leq x + x^2$ για κάθε x. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και υπολογίστε την $f'(0)$.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι $0 \leq f(0) \leq 0 + 0^2 = 0$, άρα $f(0) = 0$. Τώρα, για $x > 0$ έχουμε
$$x \leq f(x) \leq x + x^2 \Rightarrow 1 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + x.$$
Επομένως
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1.$$
Ομοίως
$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$
Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και $f'(0) = 1$. □

6.9. *Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση f της μορφής*
$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}, \ x \neq 0,$$
τέτοια ώστε $f'(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \neq 0$.

Λύση. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει τέτοια f. Τότε
$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + a_1 - \frac{b_1}{x^2} - \frac{2b_2}{x^3} - \cdots - \frac{m b_m}{x^{m+1}} = \frac{1}{x}.$$
Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με x^{m+1} και παίρνουμε
$$n a_n x^{n+m} + \cdots + a_1 x^{m+1} - b_1 x^{m-1} - 2b_2 x^{m-2} - \cdots - m b_m = x^m.$$
Δηλαδή
$$n a_n x^{n+m} + \cdots + a_1 x^{m+1} - x^m - b_1 x^{m-1} - 2b_2 x^{m-2} - \cdots - m b_m = 0,$$
για κάθε $x \neq 0$. Αυτό είναι άτοπο γιατί το πολυώνυμο στο αριστερά μέλος είναι μη μηδενικό (ο συντελεστής του x^m είναι -1).

□

6.10. *Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx, \ x \in \mathbb{R}$, και υποθέτουμε ότι $|f(x)| \leq |\sin x|$ για κάθε x. Δείξτε ότι $|a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n| \leq 1$.*

Λύση. Παρατηρούμε ότι $f'(x) = a_1 \cos x + 2a_2 \cos 2x + \cdots + n a_n \cos nx$, άρα $f'(0) = a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n$. Επίσης για $x \neq 0$ έχουμε
$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|.$$
Έτσι, παίρνοντας όρια στην προηγούμενη ανισότητα έχουμε
$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + n a_n| = |f'(0)| = \left| \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \lim_{x \to 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = 1.$$

□

6.11. *Θέτουμε $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Βρείτε την $f^{(k)}$ για $k = 1, 2, \ldots$ και υπολογίστε το άθροισμα*
$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}.$$

Λύση. Έχουμε
$$\begin{aligned} f'(x) &= n x^{n-1} \\ f''(x) &= n(n-1) x^{n-2} \\ f^{(3)}(x) &= n(n-1)(n-2) x^{n-3} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= n! \\
f^{(n+1)}(x) &= 0 \\
f^{(n+2)}(x) &= 0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Επομένως για $k = 1, 2, \ldots, n$, παίρνουμε $f^{(k)}(1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Άρα

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = 2^n.$$

□

6.12. *Έστω $f(x) = x^{-1}$, $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Υπολογίστε το όριο $\lim_{n\to\infty} |f^{(n)}(x)|$ για κάθε $x \neq 0$.*

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -x^{-2} \\
f''(x) &= 2 \cdot x^{-3} \\
f^{(3)}(x) &= -2 \cdot 3 \cdot x^{-4} \\
f^{(4)}(x) &= 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot x^{-5} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-n-1}.
\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε το όριο χρησιμοποιούμε το κριτήριο λόγου.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n)}(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{|x|} = \infty.$$

Άρα $\lim_{n\to\infty} |f^{(n)}(x)| = \infty$. □

6.13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Δείξτε ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε η συνάρτηση $g(x) = x + \varepsilon f(x)$ είναι 1-1.*

Λύση. Έστω $M > 0$ ένα φράγμα τής f'. Τότε για $\varepsilon < 1/M$, η g είναι 1-1, διαφορετικά, από το θεώρημα μέσης τιμής, θα υπήρχε ξ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$. Αλλά $g'(x) = 1 + \varepsilon f'(x)$, άρα $|f'(\xi)| = 1/\varepsilon > M$, άτοπο. □

6.14. *Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $f' \geq 1$. Δείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.*

Λύση. Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[0, x]$ και παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \geq 1.$$

Επομένως $f(x) \geq x + f(0)$ και το συμπέρασμα έπεται. □

6.15. *Έστω $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Υποθέτουμε ότι $f(0) = 0$ και ότι η f' είναι αύξουσα. Δείξτε ότι η $g(x) = f(x)/x$, $x > 0$, είναι αύξουσα.*

Λύση. Από το θεώρημα μέσης τιμής, για κάθε $x > 0$, υπάρχει $0 < \xi < x$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi) \leq f'(x).$$

Άρα

$$g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

6.16. *Έστω f, g συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b). Υποθέτουμε ότι η g' δεν μηδενίζεται πουθενά. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Παρατηρήστε ότι ο παρανομαστής δεν μηδενίζεται γιατί αν μηδενιζόταν, τότε από το θεώρημα μέσης τιμής, η παράγωγος τής g θα μηδενιζόταν σε κάποιο σημείο.

Λύση. Θέτουμε $H(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Τότε $H(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = H(b)$, άρα από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $H'(\xi) = 0$, δηλαδή $f'(\xi)(g(b)-g(a))-g'(\xi)(f(b)-f(a)) = 0$, το οποίο είναι ισοδύναμο με το ζητούμενο. Το θεώρημα μέσης τιμής είναι ειδική περίπτωση της άσκησης αυτής (παίρνουμε $g(x) = x$). □

6.17. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a, b). Υποθέτουμε ότι $f(a) = 0$ και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f'(x)| \leq M|f(x)|$ για κάθε $x \in (a, b)$. Δείξτε ότι $f = 0$.*

Λύση. Ισχυριζόμαστε κατ' αρχάς ότι υπάρχει $x \in (a, b]$ τέτοιο ώστε $f = 0$ στο $[a, x]$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει τότε για κάθε $x \in (a, b]$, επιλέγουμε $\xi_x \in [a, x]$ τέτοιο ώστε

$$|f(\xi_x)| = \max\{|f(t)| : t \in [a, x]\} > 0.$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής, υπάρχει $\zeta_x \in (a, \xi_x)$ τέτοιο ώστε

$$|f(\xi_x)| = |f(\xi_x) - f(a)| = |f'(\zeta_x)| \cdot |\xi_x - a| \leq M|f(\zeta_x)| \cdot |\xi_x - a| \leq M|f(\xi_x)| \cdot |x - a|.$$

Δηλαδή $1 \leq M|x - a|$ για κάθε $x \in (a, b]$, άτοπο. Θέτουμε τώρα

$$s = \sup\{x \in (a, b] : \text{Η } f \text{ μηδενίζεται στο } [a, x]\},$$

και παρατηρούμε ότι $s = b$, διαφορετικά, το προηγούμενο επιχειρήμα θα μας έδινε ότι η f θα μηδενιζόταν σε κάποιο διάστημα $[s, s']$, άρα και στο $[a, s']$, άτοπο από τον ορισμό τού s. □

6.18. *Έστω $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη. Θέτουμε*

$$M_0 = \sup\{|f(x)| : x > 0\}, \quad M_1 = \{|f'(x)| : x > 0\}, \quad M_2 = \sup\{|f''(x)| : x > 0\}.$$

Υποθέτουμε ότι $M_2 > 0$. Δείξτε ότι $M_1^2 \leq 4M_0M_2$.

Λύση. Για κάθε $x > 0$ και κάθε $t > 0$, από το θεώρημα τού Taylor, υπάρχει $\xi \in (x, x + t)$ τέτοιο ώστε

$$f(x + t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(\xi)}{2}t^2.$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{1}{t}(f(x + t) - f(t)) - \frac{f''(\xi)}{2}t.$$

Επομένως

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{t}(|f(x + t)| + |f(t)|) + \frac{t}{2}|f''(\xi)| \leq \frac{2}{t}M_0 + \frac{t}{2}M_2.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$M_1 \leq \frac{2}{t}M_0 + \frac{t}{2}M_2.$$

Θέτουμε $t = \sqrt{M_0/M_2}$ και παίρνουμε το ζητούμενο (αν $M_0 = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). □

6.19. *Έστω $p > 1$.*

(1) *Δείξτε ότι $px^{p-1} < (x + 1)^p - x^p < p(x + 1)^{p-1}$ για κάθε $x \geq 0$.*
(2) *Υπολογίστε το όριο τής ακολουθίας*

$$\frac{1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p}.$$

Λύση.

(1) Θέτουμε $f(t) = t^p$, $t \geq 0$, και εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής στο διάστημα $[x, x+1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi_x \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε

$$(x+1)^p - x^p = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(\xi_x) = p\xi_x^{p-1}.$$

Αλλά

$$x < \xi_x < x+1 \Rightarrow px^{p-1} < p\xi_x^{p-1} < p(x+1)^{p-1} \Rightarrow px^{p-1} < f'(\xi_x) < p(x+1)^{p-1}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

(2) Εφαρμόζουμε την πρώτη ανισότητα τού πρώτου υποερωτήματος για $x = 1, 2, \ldots, n$ και παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{rcl} p \cdot 1^{p-1} & < & 2^p - 1^p \\ p \cdot 2^{p-1} & < & 3^p - 2^p \\ & \vdots & \\ p \cdot n^{p-1} & < & (n+1)^p - n^p \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} p\left(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right) < (n+1)^p - 1.$$

Εφαρμόζουμε τώρα τη δεύτερη ανισότητα τού πρώτου υποερωτήματος για $x = 0, 1, \ldots, n-1$ και παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{rcl} 1^p & < & p \cdot 1^{p-1} \\ 2^p - 1^p & < & p \cdot 2^{p-1} \\ & \vdots & \\ n^p - (n-1)^p & < & p \cdot n^{p-1} \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} n^p < p\left(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right).$$

Έτσι έχουμε

$$n^p < p\left(1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right) < (n+1)^p - 1,$$

άρα

$$\frac{1}{p} < \frac{1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}}{n^p} < \frac{1}{p}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - \frac{1}{n^p}\right].$$

Συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία συγκλίνει στο $1/p$.

□

6.20. *Δείξτε ότι αν $p \geq 1$ τότε $(x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p)$ για κάθε $x, y \geq 0$.*

Λύση. Η συνάρτηση t^p, $p \geq 1$, είναι κυρτή, άρα

$$\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^p \leq \frac{1}{2}x^p + \frac{1}{2}y^p \Rightarrow (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p + y^p).$$

□

6.21.

(1) *Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$, είναι κυρτή.*

(2) *Δείξτε ότι*

$$(x+y) \ln \frac{x+y}{a+b} \leq x \ln \frac{x}{a} + y \ln \frac{y}{b},$$

για κάθε $x, y, a, b > 0$.

Λύση.

(1) $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, άρα η f' είναι αύξουσα, επομένως η f είναι κυρτή.

(2) Αφού f κυρτή έχουμε

$$\begin{aligned}(x+y) \ln \frac{x+y}{a+b} &= (a+b)\left(\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b}\right) \ln\left(\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b}\right) \\ &= (a+b) f\left(\frac{a}{a+b} \cdot \frac{x}{a} + \frac{b}{a+b} \cdot \frac{y}{b}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\le (a+b)\left[\frac{a}{a+b}f\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{b}{a+b}f\left(\frac{y}{b}\right)\right]\\&= x\ln\frac{x}{a}+y\ln\frac{y}{b}.\end{aligned}$$

□

6.22. *Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής. Σταθεροποιούμε x_0 και υποθέτουμε ότι για κάθε ακολουθία μη μηδενικών ρητών αριθμών η οποία συγκλίνει στο μηδέν έχουμε*

$$\frac{f(x_0+q_n)-f(x_0)}{q_n}\to a.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ότι $f'(x_0)=a$.

Λύση. Έστω h_n τυχούσα ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε $h_n\to 0$. Για κάθε n η f είναι συνεχής στο x_0+h_n, άρα υπάρχει $\delta_n>0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με $|x-(x_0+h_n)|<\delta_n$ έχουμε

$$|f(x)-f(x_0+h_n)|<\frac{|h_n|}{n}.$$

Επιλέγουμε τώρα ένα μη μηδενικό ρητό q_n τέτοιο ώστε

$$|q_n-h_n|<\min\left\{\delta_n,\frac{|h_n|}{n}\right\}.$$

Τότε $|(x_0+h_n)-(x_0+q_n)|<\delta_n$. Άρα

$$|f(x_0+h_n)-f(x_0+q_n)|<\frac{|h_n|}{n}\Rightarrow\left|\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0+q_n)}{h_n}\right|\to 0.$$

Επίσης

$$|q_n-h_n|<\frac{|h_n|}{n}\Rightarrow\left|\frac{q_n}{h_n}-1\right|<\frac{1}{n}\Rightarrow\frac{q_n}{h_n}\to 1.$$

Τέλος, η q_n συγκλίνει στο 0 διότι $|q_n|\le|q_n-h_n|+|h_n|\le|h_n|/n+|h_n|\to 0$. Επομένως

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0+q_n)}{h_n}+\frac{q_n}{h_n}\cdot\frac{f(x_0+q_n)-f(x_0)}{q_n}\to 0+1\cdot a=a.$$

Αφού η h_n είναι τυχούσα, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a.$$

□

Κεφάλαιο 7

Το Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός. *Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Ένα σύνολο τής μορφής*

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

ονομάζεται διαμέριση τού $[a, b]$.

Ορισμός. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, και*

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$$

μια διαμέριση τού $[a, b]$. Θέτουμε

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \sup f([t_k, t_{k+1}])$$

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \inf f([t_k, t_{k+1}]).$$

Τα $\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$ και $\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$ ονομάζονται άνω και κάτω, αντίστοιχα, αθροίσματα τής f ως προς τη διαμέριση $\mathcal{P}$.

Παρατήρηση. Προφανώς, $\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P})$. Επίσης, αν θέσουμε $m = \inf f([a, b])$ και $M = \sup f([a, b])$, τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \sup f([t_k, t_{k+1}]) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) M = M \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \\ &= M(t_1 - t_0 + t_2 - t_1 + \cdots + t_n - t_{n-1}) = M(t_n - t_0) = M(b - a).\end{aligned}$$

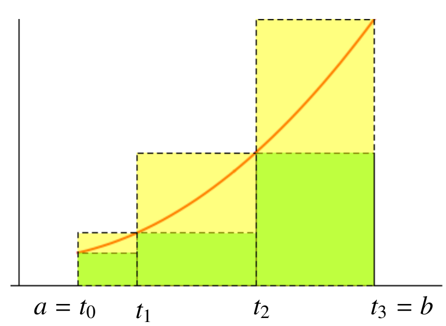
Ομοίως

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \cdot \inf f([t_k, t_{k+1}]) \geq \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) m = m \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = m(b - a).$$

Δηλαδή

$$m(b - a) \leq \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}) \leq M(b - a).$$

Η ποσότητα $(t_{k+1} - t_k) \cdot \sup f([t_k, t_{k+1}])$ εκφράζει το (προσεσημασμένο) εμβαδό τού ορθογωνίου με βάση $[t_k, t_{k+1}]$ και ύψος $\sup f([t_k, t_{k+1}])$. Επομένως το άνω άθροισμα είναι το άθροισμα όλων αυτών των εμβαδών. Ομοίως με το κάτω άθροισμα. Διαισθητικά, τα $\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$ και $\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$ προσεγγίζουν από πάνω και από κάτω αντίστοιχα, το εμβαδό ανάμεσα στη γραφική παράσταση τής f και τον οριζόντιο άξονα. Η παρατήρηση αυτή δεν έχει, φυσικά, μαθηματικό νόημα, αφού δεν έχουμε ορίσει αυστηρά την έννοια τού εμβαδού. Στο σχήμα φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία τού άνω και τού κάτω αθροίσματος που αντιστοιχούν σε μια διαμέριση τεσσάρων σημείων.



Θεώρημα. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ δυο διαμερίσεις τού $[a,b]$ τέτοιες ώστε $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2$. Τότε*

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) \leq \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1).$$

Δηλαδή, αν η διαμέριση μεγαλώσει το κάτω άθροισμα θα μεγαλώσει και το άνω άθροισμα θα μικρύνει.

Απόδειξη. Δείχνουμε μόνο την τρίτη ανισότητα. Η απόδειξη τής πρώτης είναι ανάλογη. Η δεύτερη είναι προφανής. Αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση όπου $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1 \cup \{c\}$, για κάποιο $c \in [a,b]$ με $c \notin \mathcal{P}_1$. Δηλαδή όταν η $\mathcal{P}_2$ έχει ένα μόνο σημείο παραπάνω από την $\mathcal{P}_1$. Η γενική περίπτωση αποδεικνύεται τότε με επαγωγή. Έστω ότι

$$\mathcal{P}_1 = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}.$$

Τότε $c \in (t_i, t_{i+1})$ για κάποιο $0 \leq i \leq n-1$. Δηλαδή

$$\mathcal{P}_2 = \{a = t_0 < \cdots < t_i < c < t_{i+1} < \cdots < t_n = b\}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) &= (t_{i+i}-t_i)\cdot \sup f([t_i,t_{i+1}]) + \sum_{k\neq i}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) \\
&= (t_{i+i}-c)\cdot \sup f([t_i,t_{i+1}]) + (c-t_i)\cdot \sup f([t_i,t_{i+1}]) + \sum_{k\neq i}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) \\
&\geq (t_{i+i}-c)\cdot \sup f([c,t_{i+1}]) + (c-t_i)\cdot \sup f([t_i,c]) + \sum_{k\neq i}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) \\
&= \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2),
\end{aligned}$$

όπου στην δεύτερη ισότητα απομονώσαμε τον όρο τού αθροίσματος που αντιστοιχεί στο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$, δηλαδή στο διάστημα που περιέχει το c, και στην τρίτη ισότητα απλά γράψαμε

$$t_{i+1} - t_i = (t_{i+1} - c) + (c - t_i).$$

□

Θεώρημα. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ δυο διαμερίσεις τού $[a,b]$. Τότε*

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) \leq U(f,\mathcal{P}_2).$$

Δηλαδή, οποιοδήποτε κάτω άθροισμα είναι μικρότερο από ή ίσο με οποιοδήποτε άνω άθροισμα.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) \leq \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2) \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2).$$

□

Ορισμός. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Τα σύνολα*

$$\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}, \quad \{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}$$

είναι φραγμένα. Θέτουμε

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}.$$

Οι δυο αυτοί αριθμοί λέγονται άνω ολοκλήρωμα τής f και κάτω ολοκλήρωμα τής f αντίστοιχα.

Παρατήρηση. Αφού $\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2)$ για κάθε δυο διαμερίσεις τού $[a,b]$, έχουμε ότι κάθε στοιχείο τού συνόλου
$$\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}$$
είναι μικρότερο από ή ίσο με κάθε στοιχείο τού συνόλου
$$\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}.$$
Επομένως
$$\sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\} \le \inf\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}.$$
Δηλαδή το κάτω ολοκλήρωμα είναι πάντα μικρότερο από ή ίσο με το άνω ολοκλήρωμα.

Ορισμός. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f λέγεται (Riemann) ολοκληρώσιμη, αν το άνω και το κάτω ολοκλήρωμα είναι ίσα. Στην περίπτωση αυτή η κοινή τους τιμή ονομάζεται ολοκλήρωμα τής f και συμβολίζεται με*
$$\int_a^b f \quad \text{ή} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Η έκφραση $f(x)\,dx$ είναι απλά ένα σύμβολο. Δεν έχει από μόνη της νόημα, ούτε παριστάνει κάποιον πολλαπλασιασμό. Κάνουμε επίσης τις συμβάσεις
$$\int_b^a f = -\int_a^b f, \quad \int_\xi^\xi f = 0,$$
για κάθε $\xi \in [a,b]$.

Παραδείγματα.

(1) Η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $x \in [a,b]$, είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι ίσο με $c(b-a)$. Πράγματι, έστω
$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$
τυχούσα διαμέριση τού $[a,b]$. Τότε
$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)c = c(b-a),$$
$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \inf f([t_k,t_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)c = c(b-a),$$
Επομένως
$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = c(b-a).$$

(2) Η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$
δεν είναι ολοκληρώσιμη διότι αν
$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$
είναι οποιαδήποτε διαμέριση τού $[a,b]$, τότε, αφού σε κάθε διάστημα $[t_k, t_{k+1}]$ υπάρχουν και ρητοί και άρρητοι, έχουμε
$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot 1 = 1,$$

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \inf f([t_k,t_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot 0 = 0.$$

Άρα

$$\overline{\int_a^b} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_a^b} f.$$

(3) Η συνάρτηση $f(x) = x$, $x \in [0,1]$, είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είνα ίσο με $1/2$. Πράγματι, για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση

$$\mathcal{P}_n = \left\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1\right\}.$$

Τότε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\cdot \sup f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k+1}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(k+1) = \frac{n(n+1)}{2n^2},$$

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right)\cdot \inf f\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}k = \frac{(n-1)n}{2n^2},$$

Επομένως

$$\frac{n-1}{2n} = \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n) = \frac{n+1}{2n}.$$

Παίρνοντας όρια ως προς n στην παραπάνω σχέση έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \frac{1}{2}.$$

Θεώρημα (Κριτήριο Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η συνθήκη τού θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, δηλαδή το άνω και το κάτω ολοκλήρωμα είναι ίσα. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$. Επομένως

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, και έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$I = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f.$$

Έχουμε

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\right\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\},$$

άρα, από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού infimum, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_1$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ομοίως, από την χαρακτηριστική ιδιότητα τού supremum, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}_2$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2) > I - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ και παίρνουμε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2) < I + \frac{\varepsilon}{2} - (I - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

□

Θεώρημα. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Riemann. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in [a,b]$ με $|x-y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(b-a)$. Θεωρούμε τώρα μια διαμέριση

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

τέτοια ώστε το μήκος κάθε διαστήματος $[t_k, t_{k+1}]$ να είναι μικρότερο από δ. Αφού η f είναι συνεχής στο $[t_k, t_{k+1}]$, υπάρχουν $\xi_k, \zeta_k \in [t_k, t_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$\sup f([t_k, t_{k+1}]) = f(\xi_k), \quad \inf f([t_k, t_{k+1}]) = f(\zeta_k).$$

Τα ξ_k, ζ_k είναι σημεία τού $[t_k, t_{k+1}]$ και το μήκος τού διαστήματος αυτού είναι μικρότερο από δ. Επομένως $|\xi_k - \zeta_k| < \delta$, συνεπώς $f(\xi_k) - f(\zeta_k) < \varepsilon/(b-a)$. Άρα

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) &= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot \sup f([t_k, t_{k+1}]) - \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot \inf f([t_k, t_{k+1}]) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot f(\xi_k) - \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot f(\zeta_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)\cdot (f(\xi_k) - f(\zeta_k)) < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k) = \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο τού $[a,b]$ εκτός από κάποιο $c \in [a,b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Για απλότητα, ας υποθέσουμε ότι $c = a$. Έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει κάποιο $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \le M$ για κάθε x. Επιλέγουμε τώρα ένα $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο ώστε $x_0 - a < \varepsilon/(4M)$. Η f είναι συνεχής στο $[x_0, b]$, άρα είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, από το κριτήριο Riemann, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[x_0, b]$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τώρα τη διαμέριση $\mathcal{P}' = \{a\} \cup \mathcal{P}$ τού $[a,b]$ και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f,\mathcal{P}') - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}') &= \left[(x_0 - a)\cdot \sup f([a,x_0]) + \mathcal{U}(f,\mathcal{P})\right] - \left[(x_0 - a)\cdot \inf f([a,x_0]) + \mathcal{L}(f,\mathcal{P})\right] \\
&= (x_0 - a)\cdot \left[\sup f([a,x_0]) - \inf f([a,x_0])\right] + \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \\
&< \frac{\varepsilon}{4M}\cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο Riemann συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι αν η f έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών τότε είναι ολοκληρώσιμη. Το παράδειγμα αυτό λέει ότι η κλάση των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ευρύτερη αυτής των συνεχών.

Δίνουμε τώρα τις βασικές ιδιότητες τού ολοκληρώματος.

Θεώρημα. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες τέτοιες ώστε $f(x) \le g(x)$ για κάθε x. Τότε*

$$\int_a^b f \le \int_a^b g.$$

Απόδειξη. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[a,b]$ έχουμε

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \le \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) \le \int_a^b g.$$

Δηλαδή το $\int_a^b g$ είναι άνω φράγμα τού συνόλου

$$\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\}.$$

Επομένως

$$\int_a^b f = \sup\{\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ διαμέριση τού } [a,b]\} \le \int_a^b g.$$

□

Θεώρημα. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $c \in (a,b)$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Riemann για να δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη σ' ολόκληρο το $[a,b]$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα, έτσι ώστε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε η $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$ είναι διαμέριση τού $[a,b]$ και έχουμε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) + \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. Παρατηρούμε τώρα ότι οι ποσότητες

$$\int_a^b f \quad \text{και} \quad \int_a^c f + \int_c^b f$$

είναι ανάμεσα στους αριθμούς $\mathcal{L}(f,\mathcal{P})$ και $\mathcal{U}(f,\mathcal{P})$. Επομένως

$$\left| \int_a^b f - \int_a^c f - \int_c^b f \right| \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Αντίστροφα, έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση

$$\mathcal{P}' = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

τού $[a,b]$ τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}') - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}') < \varepsilon$. Το σημείο c πέφτει σε κάποιο διάστημα $[t_i, t_{i+1}]$. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το c δεν είναι άκρο τού $[t_i, t_{i+1}]$. Έτσι οι

$$\mathcal{P}_1' = \{a = t_0 < \cdots < t_i < c\} \quad \text{και} \quad \mathcal{P}_2' = \{c < t_{i+1} < \cdots < t_n = b\}$$

είναι διαμερίσεις των $[a,c]$ και $[c,b]$ αντίστοιχα. Επομένως

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1') - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1') &= [\mathcal{U}(f,\mathcal{P}' \cup \{c\}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}' \cup \{c\})] - [\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_2') - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_2')] \\ &\le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}' \cup \{c\}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}' \cup \{c\}) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}') - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}') < \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, από το κριτήριο Riemann η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,c]$. Ομοίως δείχνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,b]$. □

Θεώρημα. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε*

(1) *Η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$

(2) *Η λf είναι ολοκληρώσιμη και* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f) = \lambda \cdot \int_a^b f.$

Απόδειξη.

(1) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

είναι μια διαμέριση τού $[a,b]$ τότε

$$\mathcal{U}(f+g,\mathcal{P}) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{U}(g,\mathcal{P}), \quad \mathcal{L}(f+g,\mathcal{P}) \ge \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{L}(g,\mathcal{P}).$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το ότι για κάθε $t \in [t_k, t_{k+1}]$ έχουμε

$$f(t) + g(t) \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) + \sup g([t_k,t_{k+1}]), \quad f(t) + g(t) \ge \inf f([t_k,t_{k+1}]) + \inf g([t_k,t_{k+1}]).$$

Άρα

$$\begin{aligned} \sup(f+g)([t_k,t_{k+1}]) &\le \sup f([t_k,t_{k+1}]) + \sup g([t_k,t_{k+1}]), \\ \inf(f+g)([t_k,t_{k+1}]) &\ge \inf f([t_k,t_{k+1}]) + \inf g([t_k,t_{k+1}]). \end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, υπάρχουν διαμερίσεις $\mathcal{P}_1$ και $\mathcal{P}_2$ τού $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_1) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathcal{U}(g,\mathcal{P}_2) - \mathcal{L}(g,\mathcal{P}_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Άρα, αν θέσουμε $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$, έχουμε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mathcal{U}(g,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τις σχέσεις αυτές συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b f < \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b g < \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) + \frac{\varepsilon}{2},$$

και

$$\int_a^b f > \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \int_a^b g > \mathcal{U}(g,\mathcal{P}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δυο πρώτες ανισότητες παίρνουμε

$$\int_a^b f + \int_a^b g < \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \mathcal{L}(g,\mathcal{P}) + \varepsilon \le \mathcal{L}(f+g,\mathcal{P}) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b}(f+g) + \varepsilon.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \underline{\int_a^b}(f+g).$$

Ομοίως, προσθέτοντας κατά μέλη τις άλλες δυο ανισότητες παίρνουμε

$$\int_a^b f + \int_a^b g \geq \overline{\int_a^b}(f+g).$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{\int_a^b}(f+g) = \underline{\int_a^b}(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

(2) Αν $\lambda = 0$, τότε αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\lambda \neq 0$, και παρατηρούμε ότι για οποιαδήποτε διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[a,b]$, έχουμε

$$\mathcal{U}(\lambda f, \mathcal{P}) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathcal{U}(f,\mathcal{P}), & \text{αν } \lambda > 0 \\ \lambda \cdot \mathcal{L}(f,\mathcal{P}), & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}, \quad \mathcal{L}(\lambda f, \mathcal{P}) = \begin{cases} \lambda \cdot \mathcal{L}(f,\mathcal{P}), & \text{αν } \lambda > 0 \\ \lambda \cdot \mathcal{U}(f,\mathcal{P}), & \text{αν } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση

$$\mathcal{U}(\lambda f, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(\lambda f, \mathcal{P}) = |\lambda| \cdot \left[\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P})\right].$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει διαμέριση $\mathcal{R}$ τού $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{R}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{R}) < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Άρα

$$\mathcal{U}(\lambda f,\mathcal{R}) - \mathcal{L}(\lambda f,\mathcal{R}) = |\lambda| \cdot \left[\mathcal{U}(f,\mathcal{R}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{R})\right] < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι η λf είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης, αν $\lambda > 0$, τότε

$$\int_a^b (\lambda f) < \mathcal{L}(\lambda f, \mathcal{R}) + \varepsilon = \lambda \cdot \mathcal{L}(f,\mathcal{R}) + \varepsilon \leq \lambda \cdot \int_a^b f + \varepsilon.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_a^b (\lambda f) \leq \lambda \cdot \int_a^b f.$$

Ομοίως

$$\int_a^b (\lambda f) \geq \lambda \cdot \int_a^b f.$$

Άρα

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \cdot \int_a^b f.$$

Η περίπτωση $\lambda < 0$ αντιμετωπίζεται ανάλογα.

□

Θεώρημα (Το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε*

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f = f(\xi).$$

Απόδειξη. Αφού η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a,b]$ τέτοια ώστε $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$ για κάθε x. Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση παίρνουμε

$$f(x_1)(b-a) \le \int_a^b f \le f(x_2)(b-a).$$

Ισοδύναμα

$$f(x_1) \le \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f \le f(x_2).$$

Έτσι το $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f$ είναι ανάμεσα σε δυο τιμές τής συνεχούς f. Άρα, από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, είναι και το ίδιο τιμή τής f. Δηλαδή υπάρχει $\xi \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f = f(\xi).$$

□

Θα δούμε τώρα τη σχέση ανάμεσα σε ολοκλήρωμα και παράγωγο.

Θεώρημα (Το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο*

$$F(x) = \int_a^x f.$$

Αν το x_0 είναι κάποιο σημείο συνέχειας τής f, τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $F'(x_0) = f(x_0)$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο τού $[a,b]$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Η f είναι συνεχής στο x_0, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in [a,b]$ με $|x - x_0| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Τότε για κάθε $0 < h < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| &= \frac{1}{h}\left|\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f - hf(x_0)\right| = \frac{1}{h}\left|\int_a^{x_0+h} f - \int_a^{x_0} f - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\right| \\ &= \frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h} (f - f(x_0))\right| \le \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(x) - f(x_0)|\,dx < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι αν το x είναι στο διάστημα $[x_0, x_0+h]$, τότε απέχει από το x_0 απόσταση μικρότερη από δ, άρα $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Με το ίδιο ακριβώς επιχείρημα δείχνουμε ότι αν $-\delta < h < 0$, τότε πάλι

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Επομένως αποδείξαμε ότι αν $0 < |h| < \delta$, τότε

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι
$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$
Δηλαδή $F'(x_0)=f(x_0)$. □

Παρατήρηση. Η υπόθεση τής συνέχειας είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε την ασυνεχή (στο 0) συνάρτηση
$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{αν } -1\le x\le 0\\ 1, & \text{αν } 0<x\le 1\end{cases},$$
τότε $F(x)=|x|-1$, η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Θεώρημα (Το 2ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού)**.** *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο. Τότε*
$$\int_a^b f'=f(b)-f(a).$$

Απόδειξη. Θέτουμε
$$F(x)=\int_a^x f',\quad x\in[a,b].$$
Από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού, έχουμε ότι $F'=f'$. Άρα $F=f+c$, όπου c σταθερά. Τότε
$$\int_a^b f'=F(b)=f(b)+c.$$
Αλλά $c=F(a)-f(a)=-f(a)$. □

Παραδείγματα.

(1) Θέτουμε $f(x)=x^{n+1}/(n+1)$, $x\in[a,b]$. Τότε $f'(x)=x^n$, άρα, από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού,
$$\int_a^b x^n\,dx=\int_a^b f'=f(b)-f(a)=\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}.$$

(2) (Τύπος αλλαγής μεταβλητής σε ολοκλήρωμα.) Έστω $g:[a,b]\to[g(a),g(b)]$ αύξουσα, παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, και $f:[g(a),g(b)]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Τότε
$$\int_a^b (f\circ g)\cdot g'=\int_{g(a)}^{g(b)} f.$$
Η απόδειξη είναι ως εξής. Θέτουμε
$$F(x)=\int_{g(a)}^{g(x)} f,\quad x\in[a,b].$$
Τότε, από τον κανόνα τής αλυσίδας και το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού, έχουμε ότι $F'=(f\circ g)\cdot g'$. Επομένως, από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού,
$$\int_a^b (f\circ g)\cdot g'=\int_a^b F'=F(b)-F(a)=\int_{g(a)}^{g(b)} f.$$

(3) (Ο αυστηρός ορισμός τής λογαριθμικής συνάρτησης.) Θέτουμε

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad x > 0.$$

Τότε

(α') Η συνάρτηση ln είναι παραγωγίσιμη και $\ln'(x) = 1/x$ για κάθε $x > 0$.

(β') $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ για κάθε $x, y > 0$.

(γ') Η ln είναι γνήσια αύξουσα και επί τού $\mathbb{R}$.

Απόδειξη.

(α') Αυτό προκύπτει άμεσα από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού.

(β') Σταθεροποιούμε $y > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $f_y(x) = \ln(xy)$, $x > 0$. Τότε, από τον κανόνα τής αλυσίδας, έχουμε $f_y'(x) = 1/x = \ln'(x)$, άρα $f_y(x) = \ln(x) + c$, όπου c σταθερά. Για $x = 1$ παίρνουμε $c = f_y(1) = \ln(y)$.

(γ') Η ln έχει θετική παράγωγο, άρα είναι γνήσια αύξουσα. Επίσης δεν είναι ούτε άνω ούτε κάτω φραγμένη αφού παίρνει αυθαίρετα μεγάλες θετικές τιμές ($\ln(2^n) = n \ln 2$), και αυθαίρετα μικρές αρνητικές τιμές ($\ln(2^{-n}) = -n \ln 2$). Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, έχουμε ότι η f παίρνει όλες τις πραγματικές τιμές. Παρατηρήστε επίσης ότι αφού η ln είναι γνήσια αύξουσα και όχι άνω, όχι κάτω φραγμένη, το όριό της στο 0 είναι $-\infty$ και το όριό της στο $+\infty$ είναι $+\infty$.

□

(4) (Η εκθετική συνάρτηση.) Η αντίστροφη τής ln, δηλαδή η $\ln^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ συμβολίζεται με exp. Παρατηρήστε ότι

$$\exp(x + y) = \exp[\ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y))] = \exp[\ln(\exp(x) \cdot \exp(y))] = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Επίσης, αν, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θεωρήσουμε την ακολουθία

$$x_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

τότε $x_n \to \exp(x)$. Πράγματι, αν $x = 0$, τότε $x_n = 1 = \exp(0)$, αφού $\ln(1) = 0$. Αν τώρα $x \neq 0$, τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $1 + x/n > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως για όλα αυτά τα n έχουμε

$$\ln(x_n) = \ln\left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right] = n \cdot \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \ln(1)}{\frac{x}{n}} \to x \cdot \ln'(1) = x.$$

Άρα, $x_n \to \exp(x)$, διότι η exp είναι συνεχής ως αντίστροφη συνεχούς συνάρτησης. Τώρα, ο αριθμός e, ορίζεται, συνήθως, να είναι το όριο τής ακολουθίας $(1 + 1/n)^n$. Επομένως $\exp(1) = e$. Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $\exp(n/m) = e^{n/m}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$. Δηλαδή $\exp(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$. Αυτό μας οδηγεί να **ορίσουμε** το e^x σαν $\exp(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Γενικότερα, αν $a > 0$ και $x \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $a^x = \exp(x \cdot \ln(a))$. Τέλος, παρατηρήστε ότι, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για παραγώγους, η e^x είναι παραγωγίσιμη και $(e^x)' = e^x$ για κάθε x.

Ασκήσεις

7.1. *Θεωρούμε τη συνάρτηση* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *με τύπο*

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{αν } x=0\\ 0, & \text{αν } 0<x\le 1\end{cases}.$$

Δείξτε με τον ορισμό ότι η f *είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.*

Λύση. Για κάθε $0<\varepsilon<1$ θεωρούμε τη διαμέριση $\mathcal{P}_\varepsilon=\{0<\varepsilon<1\}$. Τότε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_\varepsilon)=\varepsilon\cdot\sup f([0,\varepsilon])+(1-\varepsilon)\cdot\sup f([\varepsilon,1])=\varepsilon,$$

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_\varepsilon)=\varepsilon\cdot\inf f([0,\varepsilon])+(1-\varepsilon)\cdot\inf f([\varepsilon,1])=0.$$

Επομένως

$$0=\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_\varepsilon)\le\underline{\int_0^1} f\le\overline{\int_0^1} f\le\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_\varepsilon)=\varepsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\underline{\int_0^1} f=\overline{\int_0^1} f=0.$$

Δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη και το ολοκλήρωμά της είναι ίσο με 0. □

7.2. *Δείξτε με τον ορισμό ότι η συνάρτηση* $f(x)=e^x$, $x\in[0,1]$, *είναι ολοκληρώσιμη και υπολογίστε το ολοκλήρωμά της.*

Λύση. Για κάθε n θεωρούμε τη διαμέριση

$$\mathcal{P}_n=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1\right\}.$$

Τότε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\cdot\sup f\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{k+1}=\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k=\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1},$$

όπου στην τελευταία ισότητα αθροίσαμε γεωμετρική πρόοδο. Ομοίως

$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}_n)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\cdot\inf f\left(\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]\right)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\cdot\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{k}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^k=\frac{1}{n}\cdot\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}.$$

Επομένως

$$\frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}\le\underline{\int_0^1} f\le\overline{\int_0^1} f\le e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}.$$

Τώρα, το όριο τής ακολουθίας $n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ είναι ίσο με την παράγωγο τής e^x στο 0, δηλαδή είναι ίσο με 1. Άρα, αν πάρουμε όρια ως προς n στην τελευταία ανισότητα, έχουμε

$$\underline{\int_0^1} f=\overline{\int_0^1} f=e-1.$$

□

7.3. *Έστω* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *μονότονη. Δείξτε ότι η* f *είναι ολοκληρώσιμη.*

Λύση. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Riemann. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μια διαμέριση

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

τέτοια ώστε το μήκος κάθε διαστήματος $[t_k, t_{k+1}]$ να είναι μικρότερο από ε. Τότε

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) &= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot \inf f([t_k,t_{k+1}]) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot f(t_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot f(t_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1}-t_k)\cdot (f(t_{k+1})-f(t_k)) < \varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{n-1}(f(t_{k+1})-f(t_k)) = \varepsilon\cdot(f(b)-f(a)).\end{aligned}$$

□

7.4. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι*

(1) *Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.*
(2) *Η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*
(3) *Αν $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το κριτήριο Riemann, υπάρχει διαμέριση

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

τέτοια ώστε $\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$.

(1) Ισχυριζόμαστε ότι

$$\sup |f|([t_k,t_{k+1}]) - \inf |f|([t_k,t_{k+1}]) \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]).$$

[Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in [t_k, t_{k+1}]$ έχουμε

$$f(x) - f(y) \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]), \quad f(y) - f(x) \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$|f(x) - f(y)| \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]).$$

Άρα

$$|f(x)| - |f(y)| \le |f(x) - f(y)| \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]).$$

Επομένως

$$|f(x)| \le \sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}]) + |f(y)|.$$

Παίρνοντας supremum ως προς x και μετά infimum ως προς y έχουμε το ζητούμενο.]

Από τον ισχυρισμό συνεπάγεται ότι

$$\mathcal{U}(|f|,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(|f|,\mathcal{P}) \le \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon,$$

άρα, από το κριτήριο Riemann, η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

(2) Αφού η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f| < M$. Ισχυριζόμαστε ότι

$$\sup f^2([t_k,t_{k+1}]) - \inf f^2([t_k,t_{k+1}]) \le 2M\left[\sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}])\right].$$

[Απόδειξη: Για κάθε $x, y \in [t_k, t_{k+1}]$ έχουμε

$$\begin{aligned}f^2(x) - f^2(y) &= (f(x) - f(y))\cdot(f(x)+f(y)) \le |f(x)+f(y)|\cdot|f(x)-f(y)| \\ &\le 2M\left[\sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}])\right]\end{aligned}$$

Άρα

$$f^2(x) \le 2M\left[\sup f([t_k,t_{k+1}]) - \inf f([t_k,t_{k+1}])\right] + f^2(y).$$

Παίρνοντας supremum ως προς x και μετά infimum ως προς y έχουμε το ζητούμενο.]

Έτσι, όπως πριν, έχουμε

$$\mathcal{U}(f^2,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f^2,\mathcal{P})\leq 2M(\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P}))<2M\varepsilon,$$

άρα η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.

(3) Παρατηρούμε ότι

$$fg=\frac{1}{4}\left((f+g)^2-(f-g)^2\right).$$

Το συμπέρασμα έπεται από το (2).

□

7.5. *Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι*

$$\left|\int_a^b f\right|\leq\int_a^b |f|.$$

Λύση. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη από την προηγούμενη άσκηση. Επίσης, $-|f|\leq f\leq |f|$. Άρα

$$-\int_a^b |f|\leq\int_a^b f\leq\int_a^b |f|,$$

Από το οποίο συνεπάγεται το ζητούμενο. □

7.6. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση Lipschitz. Δείξτε ότι*

$$\lim_n\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)=\int_0^1 f.$$

(Η f είναι ολοκληρώσιμη διότι κάθε συνάρτηση Lipschitz είναι συνεχής.)

Λύση. Αφού η f είναι Lipschitz, υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|$ για κάθε $x,y\in[0,1]$. Τώρα έχουμε

$$\left|\int_0^1 f-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right|=\left|\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f-\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|dx$$

$$\leq\sum_{k=1}^n\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\frac{M}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{M}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)=\sum_{k=1}^n\frac{M}{n^2}=n\cdot\frac{M}{n^2}=\frac{M}{n}\to 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι αν $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, τότε $\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\leq M\left|x-\frac{k}{n}\right|\leq\frac{M}{n}$. □

7.7. *Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένη τέτοια ώστε για κάθε a με $0<a<1$, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, και ότι*

$$\lim_{a\to 0}\int_a^1 f=\int_0^1 f.$$

Λύση. Αφού η f είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|f(x)|\leq M$ για κάθε $x\in[0,1]$. Έστω τώρα $\varepsilon>0$ με $\varepsilon<1$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[\varepsilon,1]$, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[\varepsilon,1]$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P})<\varepsilon.$$

Θέτουμε $\mathcal{Q}=\{0\}\cup\mathcal{P}$. Τότε η $\mathcal{Q}$ είναι μια διαμέριση τού $[0,1]$ για την οποία έχουμε

$$\mathcal{U}(f,\mathcal{Q})-\mathcal{L}(f,\mathcal{Q})=\varepsilon\cdot[\sup f([0,\varepsilon])-\inf f([0,\varepsilon])]+\mathcal{U}(f,\mathcal{P})-\mathcal{L}(f,\mathcal{P})\leq 2M\varepsilon+\varepsilon=(2M+1)\varepsilon.$$

Άρα, από το κριτήριο Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη. Τώρα

$$\left|\int_0^1 f - \int_a^1 f\right| = \left|\int_0^a f\right| \leq \int_0^a |f| \leq Ma.$$

Το δεξιά μέλος τείνει στο 0 καθώς $a \to 0$, και έτσι παίρνουμε το ζητούμενο. □

7.8. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι αν αλλάξουμε τις τιμές τής f σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, τότε η f παραμένει ολοκληρώσιμη και η τιμή τού ολοκληρώματος δεν αλλάζει.*

Λύση. Αρκεί να κάνουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου αλλάζουμε την τιμή τής συνάρτησης σε ένα μόνο σημείο, έστω στο 0. Θεωρούμε λοιπόν μια $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$g(x) = \begin{cases} \xi, & \text{αν } x = 0 \\ f(x), & \text{αν } 0 < x \leq 1 \end{cases},$$

όπου $\xi \in \mathbb{R}$ αυθαίρετο. Από την προηγούμενη άσκηση η g είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_0^1 g = \lim_{a\to 0} \int_a^1 g = \lim_{a\to 0} \int_a^1 f = \int_0^1 f.$$

□

7.9. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και μη αρνητική. Δείξτε ότι αν το ολοκλήρωμα τής f είναι μηδέν, τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.*

Λύση. Έστω ότι $f(x_0) > 0$ για κάποιο x_0. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το x_0 είναι εσωτερικό σημείο τού $[a,b]$. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Επομένως, αν σταθεροποιήσουμε $\delta_0 < \delta$, έχουμε $f(x) > f(x_0)/2$ για κάθε $x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0]$. Άρα

$$\int_a^b f = \int_a^{x_0-\delta_0} f + \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f + \int_{x_0+\delta_0}^{b} f \geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} f \geq \int_{x_0-\delta_0}^{x_0+\delta_0} \frac{f(x_0)}{2} = \delta_0 f(x_0) > 0,$$

άτοπο. Η υπόθεση τής συνέχειας είναι απαραίτητη. □

7.10. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) = 0$ για κάθε ρητό x στο $[0,1]$. Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα τής f είναι μηδέν*

Λύση. Για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ τού $[0,1]$ έχουμε $\mathcal{L}(|f|, \mathcal{P}) = 0$ διότι σε κάθε διάστημα υπάρχουν ρητοί αριθμοί. Αλλά το ολοκλήρωμα τής $|f|$ είναι το supremum των κάτω αθροισμάτων. Επομένως

$$\int_0^1 |f| = 0,$$

άρα

$$\int_0^1 f = 0.$$

□

7.11. *Έστω $f, g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f \leq g \leq h$. Δείξτε ότι αν οι f και h είναι ολοκληρώσιμες και τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα, τότε η g είναι ολοκληρώσιμη.*

Λύση. Έχουμε
$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} g \leq \overline{\int_a^b} h = \int_a^b h.$$
Δηλαδή το άνω και το κάτω ολοκλήρωμα τής g είναι ίσα, άρα η g είναι ολοκληρώσιμη. □

7.12. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, και $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η $g : [a-c, b-c] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+c)$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι*
$$\int_a^b f = \int_{a-c}^{b-c} g.$$

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση
$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$
τέτοια ώστε
$$\mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$
Θεωρούμε την διαμέριση
$$\mathcal{Q} = \{a - c = t_0 - c < \cdots < t_n - c = b - c\}$$
τού $[a-c, b-c]$. Τότε
$$\mathcal{U}(g,\mathcal{Q}) = \mathcal{U}(f,\mathcal{P}), \quad \mathcal{L}(g,\mathcal{Q}) = \mathcal{L}(f,\mathcal{P}).$$
Επομένως
$$\mathcal{U}(g,\mathcal{Q}) - \mathcal{L}(g,\mathcal{Q}) < \varepsilon.$$
Άρα από το κριτήριο Riemann, η g είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης
$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P})$$
$$\mathcal{L}(f,\mathcal{P}) = \mathcal{L}(g,\mathcal{Q}) \leq \int_{a-c}^{b-c} f \leq \mathcal{U}(g,\mathcal{Q}) = \mathcal{U}(f,\mathcal{P}).$$
Συνεπώς
$$\left| \int_a^b f - \int_{a-c}^{b-c} g \right| \leq \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$
Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα
$$\int_a^b f = \int_{a-c}^{b-c} g.$$
□

7.13. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, και $c > 0$. Δείξτε ότι η $g : [a/c, b/c] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(cx)$ είναι ολοκληρώσιμη και ότι*
$$\int_a^b f = c \int_{a/c}^{b/c} g.$$
Αν $c < 0$, τότε η $g : [b/c, a/c] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(cx)$, είναι ολοκληρώσιμη και
$$\int_a^b f = -c \int_{b/c}^{a/c} g.$$

Λύση. Υποθέτουμε ότι $c > 0$. Αν $c < 0$, η απόδειξη είναι ανάλογη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση

$$\mathcal{P} = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$$

τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Θέτουμε

$$\mathcal{Q} = \{a/c = t_0/c < \cdots < t_n/c = b/c\}.$$

Τότε

$$\mathcal{U}(g, \mathcal{Q}) = c^{-1}\mathcal{U}(f, \mathcal{P}), \quad \mathcal{L}(g, \mathcal{Q}) = c^{-1}\mathcal{L}(f, \mathcal{P}).$$

Επομένως

$$\mathcal{U}(g, \mathcal{Q}) - \mathcal{L}(g, \mathcal{Q}) < \varepsilon/c.$$

Άρα από το κριτήριο Riemann, η g είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P})$$

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) = c\mathcal{L}(g, \mathcal{Q}) \leq c\int_{a/c}^{b/c} f \leq c\mathcal{U}(g, \mathcal{Q}) = \mathcal{U}(f, \mathcal{P}).$$

Συνεπώς

$$\left|\int_a^b f - c\int_{a/c}^{b/c} g\right| \leq \mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_a^b f = c\int_{a/c}^{b/c} g.$$

□

7.14. *Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-1, 1]$. Δείξτε ότι*

$$\int_{-1}^{1} f = 0.$$

Λύση. Από την άσκηση 7.13 έχουμε

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(-x)\,dx = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx.$$

Άρα

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

□

7.15. *Έστω $p > 0$. Δείξτε ότι η ακολουθία*

$$x_n = \int_0^{2\pi n} |\sin x|^p\,dx$$

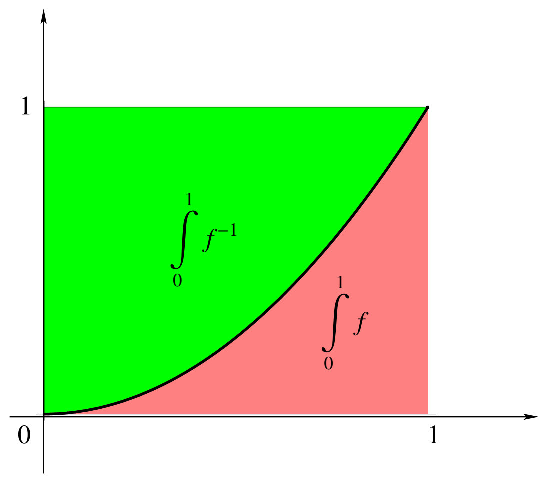
τείνει στο $+\infty$

Λύση. Θέτουμε $c = \int_0^{2\pi} |\sin x|^p \, dx$. Τότε $c > 0$, διαφορετικά το $\sin x$ θα ήταν ταυτοτικά ίσο με 0 (άσκηση 7.9). Έτσι έχουμε

$$x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2\pi k}^{2\pi k + 2\pi} |\sin x|^p \, dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} |\sin(x + 2\pi k)|^p \, dx = cn \to +\infty.$$

Στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την άσκηση 7.12. □

7.16. *Έστω $f : [0,1] \to [0,1]$ συνεχής και γνήσια αύξουσα με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f + \int_0^1 f^{-1} = 1$. Η γεωμετρική ερμηνεία τής σχέσης αυτής φαίνεται στο παρακάτω σχήμα*



Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε μια διαμέριση $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \cdots < t_n = 1\}$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 f < \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) + \varepsilon, \quad \int_0^1 f > \mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \varepsilon,$$

θέτουμε

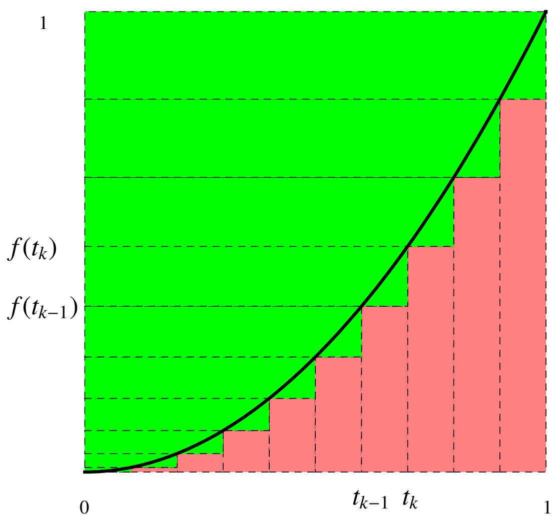
$$\mathcal{P}^{-1} = \{0 = f(t_0) < \cdots < f(t_n) = 1\}$$

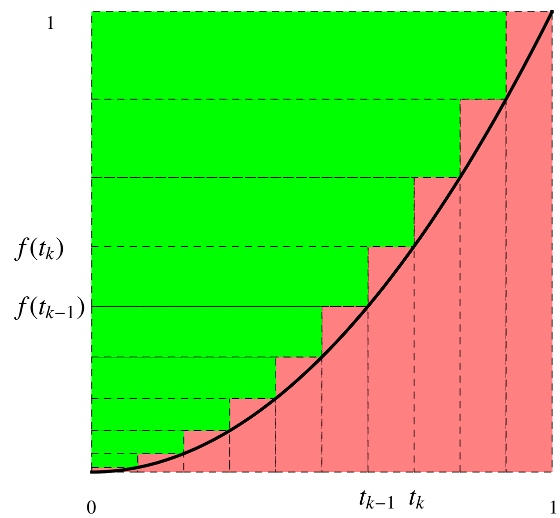
και παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) + \mathcal{L}(f^{-1}, \mathcal{P}^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(t_k) + \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) t_{k-1} = \sum_{k=1}^{n} t_k f(t_k) - \sum_{k=1}^{n} t_{k-1} f(t_{k-1}) = 1,$$

$$\mathcal{L}(f, \mathcal{P}) + \mathcal{U}(f^{-1}, \mathcal{P}^{-1}) = \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} (f(t_k) - f(t_{k-1})) t_k = \sum_{k=1}^{n} t_k f(t_k) - \sum_{k=1}^{n} t_{k-1} f(t_{k-1}) = 1.$$

Στο σχήμα αριστερά, τα ροζ ορθογώνια αντιστοιχούν στο $\mathcal{L}(f, \mathcal{P})$, ενώ τα πράσινα στο $\mathcal{U}(f^{-1}, \mathcal{P}^{-1})$. Τα ορθογώνια καλύπτουν πλήρως το μοναδιαίο τετράγωνο, άρα το συνολικό τους εμβαδό είναι 1. Ομοίως με το $\mathcal{U}(f, \mathcal{P})$ και το $\mathcal{L}(f^{-1}, \mathcal{P}^{-1})$ στο σχήμα δεξιά.





Επομένως

$$1-\varepsilon = \mathcal{U}(f,\mathcal{P}) - \varepsilon + \mathcal{L}(f^{-1},\mathcal{P}^{-1}) < \int_0^1 f + \int_0^1 f^{-1} < \mathcal{L}(f,\mathcal{P}) + \varepsilon + \mathcal{U}(f^{-1},\mathcal{P}^{-1}) = 1+\varepsilon,$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

7.17. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}.$$

Δείξτε ότι η x_n συγκλίνει.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι η x_n είναι Cauchy. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $1/n_0 < \varepsilon$. Τότε για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $n > m \geq n_0$ έχουμε

$$|x_n - x_m| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} - \int_m^n \frac{dx}{x} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k} - \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x} \right|$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} \int_{k-1}^{k} \left| \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right| dx \leq \sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

□

7.18. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Θέτουμε*

$$F(x) = \int_a^x f, \quad a \leq x \leq b.$$

(1) *Δείξτε ότι η F είναι ομοιόμορφα συνεχής.*
(2) *Αν, επιπλέον $f \geq 0$, τότε η F είναι αύξουσα.*

Λύση.

(1) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη. Άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επομένως, για $x \leq y$ έχουμε

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_x^y |f| \leq M|x-y|.$$

Δηλαδή η F είναι Lipschitz, άρα ομοιόμορφα συνεχής.

(2) Έστω $x, y \in [a, b]$ με $x \leq y$. Τότε

$$F(y) = \int_a^y f = \int_a^x f + \int_x^y f \geq \int_a^x f = F(x).$$

□

7.19. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε*

$$\int_a^\xi f = \int_\xi^b f.$$

Λύση. Θέτουμε

$$G(x) = \int_a^x f - \int_x^b f, \quad a \leq x \leq b.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in [a, b]$ τέτοιο ώστε $G(\xi) = 0$. Από την προηγούμενη άσκηση η G είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. Επίσης

$$G(a)G(b) = -\left(\int_a^b f\right)^2 \leq 0.$$

Αν $G(a)G(b) = 0$, τότε $\int_a^b f = 0$, άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\xi = a$. Αν $G(a)G(b) < 0$, τότε από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $G(\xi) = 0$. □

7.20. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε*

$$\int_a^x f = \int_x^b f$$

για κάθε $x \in [a, b]$. Δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Παραγωγίζουμε ως προς x τη σχέση

$$\int_a^x f = \int_x^b f$$

και παίρνουμε ότι $f(x) = -f(x)$ για κάθε x. □

7.21. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα, τέτοια ώστε*

$$f(x) = \int_0^x f,$$

για κάθε x. Δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Από την άσκηση 1, η f είναι συνεχής, επομένως, από το 1ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού, η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = f$. Επομένως αν θέσουμε $g(x) = f(x)/e^x$, έχουμε ότι $g' = 0$, άρα $f(x) = ce^x$ για κάποια σταθερά c. Αλλά $c = f(0) = 0$, συνεπώς $f = 0$. □

7.22. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε*

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\, dt$$

για κάθε $x \in [0, 1]$. Δείξτε ότι $f = 0$.

Λύση. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε $x \in [0,1]$. Επομένως

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x M\,dt = Mx.$$

Άρα

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x Mt\,dt = M\frac{x^2}{2}.$$

Επαναλαμβάνοντας άλλη μια φορά την ίδια διαδικασία

$$|f(x)| \leq \int_0^x |f(t)|\,dt \leq \int_0^x M\frac{t^2}{2}\,dt = M\frac{x^3}{2\cdot 3}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε ότι

$$|f(x)| \leq M\frac{x^n}{n!} \leq \frac{M}{n!} \leq \frac{M}{n} \to 0$$

καθώς $n \to +\infty$, για κάθε x. Άρα $f = 0$. □

7.23. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\xi_n \in [0,1]$ τέτοιο ώστε*

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \frac{f(\xi_n)}{n+1}.$$

Λύση. Η f είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε κάποια σημεία $b, a \in [0,1]$. Επομένως $f(a)x^n \leq x^n f(x) \leq f(b)x^n$, για κάθε $x \in [0,1]$. Ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή ως προς x παίρνουμε

$$f(a) \leq (n+1)\cdot \int_0^1 x^n f(x)\,dx \leq f(b).$$

Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $\xi_n \in [0,1]$ τέτοιο ώστε

$$(n+1)\cdot \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(\xi_n).$$

□

7.24. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα τού $[0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f = +\infty.$$

Λύση. Θέτουμε $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Τότε υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) > \ell/2$ για κάθε $x \geq c$. Επομένως για όλα αυτά τα x έχουμε

$$\int_0^x f = \int_0^c f + \int_c^x f \geq \int_0^c f + \int_c^x \frac{\ell}{2} = \frac{(x-c)\cdot\ell}{2} + \int_0^c f \to +\infty,$$

καθώς $x \to +\infty$. □

7.25. *Έστω $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα τού $[0,+\infty)$. Υποθέτουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$. Δείξτε ότι*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\cdot \int_0^x f = \ell.$$

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $c_1 > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \geq c_1$. Επίσης, υπάρχει $c_2 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{x} \cdot \int_0^{c_1} |f - \ell| < \varepsilon,$$

για κάθε $x \geq c_2$. Επομένως για κάθε $x \geq \max\{c_1, c_2\}$, έχουμε

$$\left| \frac{1}{x} \cdot \int_0^x f - \ell \right| = \frac{1}{x} \cdot \left| \int_0^x (f - \ell) \right| \leq \frac{1}{x} \cdot \int_0^{c_1} |f - \ell| + \frac{1}{x} \cdot \int_{c_1}^x |f - \ell| \leq \varepsilon + \frac{x - c_1}{x} \cdot \varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

□

7.26 (Η ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες. Δείξτε ότι*

$$\int_a^b fg \leq \sqrt{\left(\int_a^b f^2\right) \cdot \left(\int_a^b g^2\right)}.$$

Λύση. Θέτουμε

$$P(\lambda) = \int_a^b (\lambda f - g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 - 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2.$$

Έχουμε ότι $P(\lambda) \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, άρα η διακρίνουσα τού P δεν είναι θετική. Δηλαδή

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \leq 0,$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο □

7.27. *Δείξτε ότι αν η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$ τότε*

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2}.$$

Λύση. Για κάθε $x \in [0, 1]$, από το 2ο θεμελιώδες θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, έχουμε

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left| \int_0^x f' \right| \leq \int_0^x 1 \cdot |f'| \leq \left(\int_0^x 1\right)^{1/2} \left(\int_0^x |f'|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |f'|^2\right)^{1/2}.$$

Παίρνουμε supremum ως προς x και τελειώσαμε. □

7.28. *Έστω $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Θέτουμε*

$$x_n = \int_0^1 f(x^n)\, dx.$$

Δείξτε ότι $x_n \to 0$.

Λύση. Έστω $M > 0$ ένα φράγμα τής f και έστω $0 < \varepsilon < 1$ τυχόν. Αφού η f είναι συνεχής και $f(0) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με $0 \leq x < \delta$, έχουμε $|f(x)| < \varepsilon$. Αφού $(1 - \varepsilon)^n \to 0$, καθώς $n \to +\infty$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $(1 - \varepsilon)^n < \delta$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως, για κάθε τέτοιο n και κάθε x με $0 \leq x \leq 1 - \varepsilon$, έχουμε $|f(x^n)| < \varepsilon$. Συνεπώς

$$|x_n| \leq \int_0^{1-\varepsilon} |f(x^n)|\, dx + \int_{1-\varepsilon}^1 |f(x^n)|\, dx \leq (1 - \varepsilon)\varepsilon + M\varepsilon.$$

Συμπεραίνουμε ότι $x_n \to 0$. $\square$

Κεφάλαιο 8

Ακολουθίες Συναρτήσεων

Σε αυτό και στο επόμενο κεφάλαιο, με I θα συμβολίζουμε κάποιο διάστημα τού $\mathbb{R}$ (οποιουδήποτε τύπου). Επίσης, αν $A \subset \mathbb{R}$ τότε με χ_A θα συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση τού A δηλαδή τη συνάρτηση

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}.$$

Κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός. *Έστω $f, g : I \to \mathbb{R}$. Θέτουμε*

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|.$$

Η ποσότητα αυτή (μπορεί να είναι άπειρη) ονομάζεται απόσταση των f και g.

Παραδείγματα.

(1) Αν $f(x) = \sin x$, $g(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, τότε $\rho(f, g) = 1$.
(2) Αν $f(x) = 1/x$, $g(x) = 0$, $x > 0$, τότε $\rho(f, g) = +\infty$.

Ορισμός. *Έστω f_n μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : I \to \mathbb{R}$ και $f : I \to \mathbb{R}$.*

(1) *Λέμε ότι η f_n συγκλίνει κατά σημείο στην f ($f_n \to f$ κατά σημείο), αν για κάθε $x \in I$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Ισοδύναμα:
Για κάθε $x \in I$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

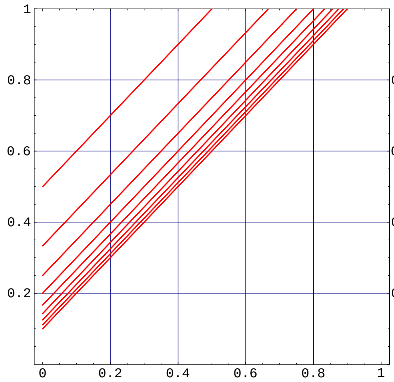
(2) *Λέμε ότι η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f ($f_n \to f$ ομοιόμορφα), αν $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$. Ισοδύναμα:*
Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Παρατηρήσεις.

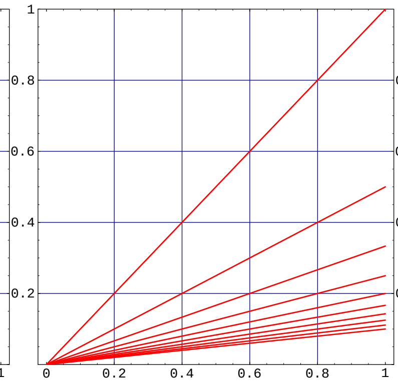
(1) Η διαφορά ανάμεσα στους δύο ορισμούς είναι η εξής. Στην κατά σημείο σύγκλιση το n_0 εξαρτάται και από το ε και από το x. Στην ομοιόμορφη σύγκλιση το n_0 εξαρτάται μόνο από το ε. Έτσι η απαίτηση να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ισχυρότερη από την απαίτηση να έχουμε κατά σημείο σύγκλιση.
(2) Γεωμετρικά, η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ η γραφική παράσταση τής f_n βρίσκεται σε μια λωρίδα πλάτους 2ε γύρω από τη γραφική παράσταση τής f.

Παραδείγματα.

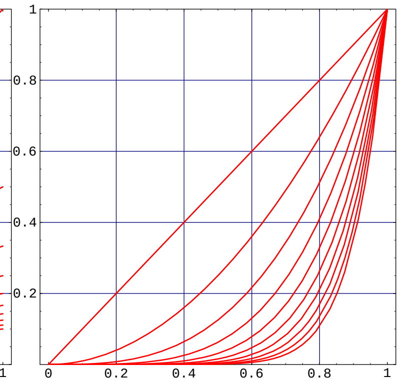
(1) Η ακολουθία $f_n(x) = x + 1/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο και ομοιόμορφα στην $f(x) = x$.
(2) Η ακολουθία $f_n(x) = x/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση. Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα διότι $\rho(f_n, 0) = +\infty$. Αν όμως περιορίσουμε το πεδίο ορισμού των f_n στο διάστημα $[0, 1]$, τότε έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση διότι $\rho(f_n, 0) = 1/n \to 0$.
(3) Η ακολουθία f_n με $f_n(x) = x^n$, $x \in (0, 1)$, συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση διότι $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Η ακολουθία δεν συγκλίνει ομοιόμορφα διότι $\rho(f_n, 0) = 1 \nrightarrow 0$.
(4) Η ακολουθία f_n με $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$ συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση διότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $f_n(x) = 0$. Η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση διότι $\rho(f_n, 0) = n \nrightarrow 0$.



(Α΄) $f_n(x) = x + 1/n$

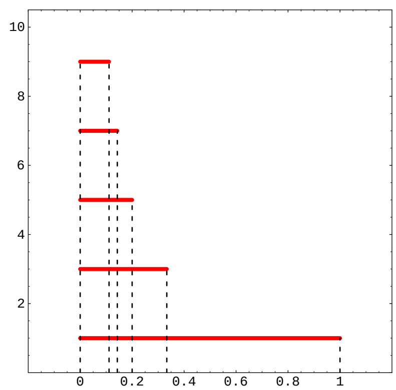


(Β΄) $f_n(x) = x/n$

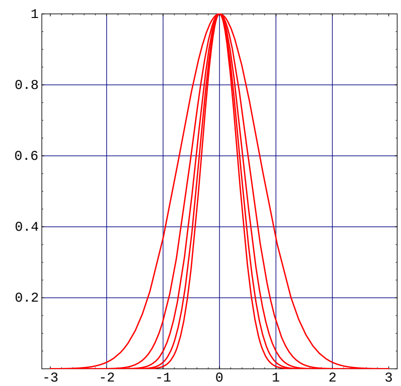


(Γ΄) $f_n(x) = x^n$

(5) Η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση $\chi_{\{0\}}$ (παντού μηδέν εκτός από το σημείο 0 στο οποίο παίρνει την τιμή 1). Θα δούμε παρακάτω ότι όταν συμβαίνει αυτό η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.



(Α΄) $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$



(Β΄) $f_n(x) = e^{-nx^2}$

Θεώρημα. *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε $f_n \to f$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Έπεται άμεσα από τους ορισμούς. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο τού προηγούμενου θεωρήματος, όπως είδαμε στα προηγούμενα παραδείγματα, **δεν** ισχύει.

Θεώρημα. *Έστω $f_n, g_n : I \to \mathbb{R}$ ακολουθίες συναρτήσεων. Έστω επίσης $f, g : I \to \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο τότε $af_n + bg_n \to af + bg$ και $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in I$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} (af_n(x) + bg_n(x)) = af(x) + bg(x)$ και $\lim_{n\to\infty} f_n(x) g_n(x) = f(x) g(x)$. □

Θεώρημα. *Έστω $f_n, g_n : I \to \mathbb{R}$ ακολουθίες συναρτήσεων. Έστω επίσης $f, g : I \to \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$.*

(1) *Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα τότε $af_n + bg_n \to af + bg$.*
(2) *Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα και επιπλέον οι f, g είναι φραγμένες, τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα.*

Απόδειξη.

(1) Έχουμε

$$|(af_n(x) + bg_n(x)) - (af(x) + bg(x))| \leq |a| |f_n(x) - f(x)| + |b| |g_n(x) - g(x)|$$

για κάθε $x \in I$. Επομένως

$$\sup_{x\in I}|(af_n(x)+bg_n(x))-(af(x)+bg(x))| \le |a|\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|+|b|\sup_{x\in I}|g_n(x)-g(x)| \to 0.$$

Άρα $af_n + bg_n \to af + bg$ ομοιόμορφα.

(2) Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι οι f και g είναι φραγμένες, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $x \in I$ έχουμε $|f(x)| \le M$ και $|g(x)| \le M$. Εφόσον $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε για κάθε n με $n \ge n_0$ και κάθε $x \in I$ έχουμε $|f_n(x) - f(x)| < M$ και άρα $|f_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \le 2M$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| &= |f_n(x)g_n(x)-f_n(x)g(x)+f_n(x)g(x)-f(x)g(x)| \\ &\le |f_n(x)|\,|g_n(x)-g(x)|+|g(x)|\,|f_n(x)-f(x)| \\ &\le 2M\,|g_n(x)-g(x)|+M\,|f_n(x)-f(x)|\end{aligned}$$

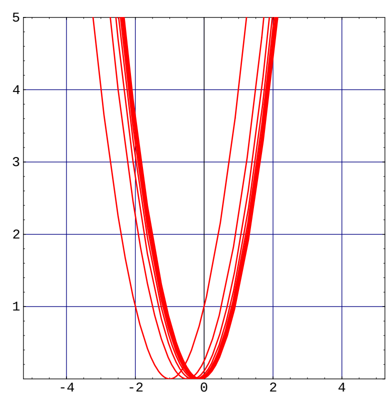
για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \ge n_0$. Επομένως για $n \ge n_0$ έχουμε

$$\sup_{x\in I}|f_n(x)g_n(x)-f(x)g(x)| \le 2M\sup_{x\in I}|g_n(x)-g(x)|+M\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)| \to 0.$$

Άρα $f_ng_n \to fg$ ομοιόμορφα.

□

Παρατήρηση. Στο (2) τού προηγούμενου θεωρήματος, η υπόθεση ότι οι f και g είναι φραγμένες είναι απαραίτητη. Πράγματι, η ακολουθία $f_n(x) = x + 1/n$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = x$ διότι $\rho(f_n, f) = 1/n \to 0$, αλλά η f_n^2 δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στην f^2 διότι $\rho(f_n^2, f^2) = +\infty$.



Συνέχεια, ολοκληρωσιμότητα και διαφορισιμότητα ορίων ακολουθιών συναρτήσεων

Θεώρημα. *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων, και $f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι συνεχής.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x_0 \in I$. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sup\limits_{t\in I}\left|f_{n_0}(t) - f(t)\right| < \varepsilon$. Αφού f_{n_0} συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ να ισχύει $\left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| < \varepsilon$. Επομένως για κάθε τέτοιο x έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \le \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)\right| + \left|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\right| < 3\varepsilon.$$

□

Παρατήρηση. Η υπόθεση τής ομοιόμορφης σύγκλισης είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Πράγματι, η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει κατά σημείο στην ασυνεχή συνάρτηση $\chi_{\{0\}}$, άρα η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα. *Έστω $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία (Riemann) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η f είναι φραγμένη, διότι

$$|f(x)| \le \rho(f_n, f) + \sup_{t\in[a,b]} |f_n(t)|,$$

για κάθε x. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sup\limits_{a\le t\le b}\left|f_{n_0}(t) - f(t)\right| < \varepsilon$. Αφού η f_{n_0} είναι ολοκληρώσιμη, υπάρχει διαμέριση $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b\}$ τέτοια ώστε

$$\mathcal{U}(f_{n_0}, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f_{n_0}, \mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}) &= (\mathcal{U}(f, \mathcal{P}) - \mathcal{U}(f_{n_0}, \mathcal{P})) + (\mathcal{U}(f_{n_0}, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f_{n_0}, \mathcal{P})) + (\mathcal{L}(f_{n_0}, \mathcal{P}) - \mathcal{L}(f, \mathcal{P}))\\
&\le \sum_{k=1}^{N}\left(\sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t) - \sup_{t_{k-1}\le t\le t_k} f_{n_0}(t)\right)(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^{N}\left(\inf_{t_{k-1}\le t\le t_k} f(t) - \inf_{t_{k-1}\le t\le t_k} f_{n_0}(t)\right)(t_k - t_{k-1})\\
&\le \sum_{k=1}^{N}\sup_{t_{k-1}\le t\le t_k}\left|f(t) - f_{n_0}(t)\right|(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon + \sum_{k=1}^{N}\sup_{t_{k-1}\le t\le t_k}\left|f(t) - f_{n_0}(t)\right|(t_k - t_{k-1})\\
&\le 2\sup_{a\le t\le b}\left|f_{n_0}(t) - f(t)\right|\sum_{k=1}^{N}(t_k - t_{k-1}) + \varepsilon < \varepsilon(2(b-a) + 1).
\end{aligned}$$

Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη. Επίσης έχουμε

$$\left|\int_a^b f_n(t) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \le \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \le \sup_{a\le t\le b}|f_n(t) - f(t)|\,(b-a) \to 0.$$

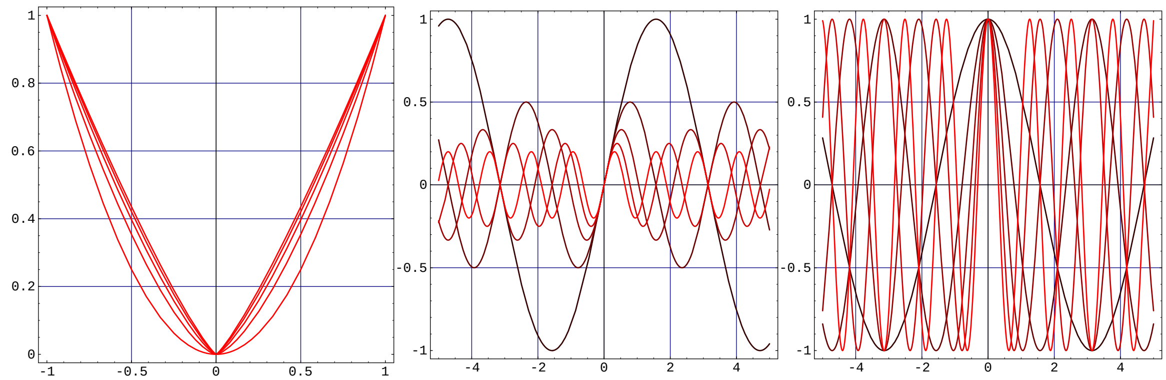
□

Παρατήρηση. Η υπόθεση τής ομοιόμορφης σύγκλισης είναι απαραίτητη στο προηγούμενο θεώρημα. Πράγματι, έστω $\{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών στο $[0, 1]$. Τότε η $f_n = \chi_{\{q_1,\dots,q_n\}}$ είναι μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η ακολουθία $f_n = n\chi_{(0,1/n]}$. Η f_n είναι μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο $[0, 1]$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στη μηδενική συνάρτηση. Αλλά

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = 1 \nrightarrow 0.$$

Είδαμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση διατηρεί τη συνέχεια και την ολοκληρωσιμότητα. Η ομοιόμορφη σύγκλιση, γενικά, **δεν** διατηρεί τη διαφορισιμότητα.

Παραδείγματα.



(α΄) $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ (β΄) $g_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ (γ΄) $g_n'(x) = \cos(nx)$

(1) Η ακολουθία $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$, $-1 \leq x \leq 1$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην μη διαφορίσιμη συνάρτηση $|x|$.

(2) Η ακολουθία $g_n(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$, $x \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στην μηδενική συνάρτηση. Αλλά η ακολουθία των παραγώγων $g_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει ούτε κατά σημείο.

Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με το ακόλουθο αποτέλεσμα τού οποίου η απόδειξη παραλείπεται.

Θεώρημα (Weierstrass)**.** *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $P : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\rho(f,P) < \varepsilon$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Από το θεώρημα τού Weierstrass έπεται άμεσα ότι αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων $P_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $P_n \to f$ ομοιόμορφα.

(2) Το θεώρημα δεν ισχύει αν το διάστημα δεν είναι κλειστό και φραγμένο. Για παράδειγμα, η εκθετική συνάρτηση δεν μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από πολυώνυμα ούτε στο $[0,+\infty)$ (τείνει στο άπειρο γρηγορότερα από κάθε πολυώνυμο), ούτε στο $(-\infty,0]$ (είναι φραγμένη). Ομοίως, η $1/x$ δεν μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από πολυώνυμα, ούτε στο $(0,1)$ (δεν είναι φραγμένη) ούτε στο $(1,+\infty)$ (είναι φραγμένη).

Ασκήσεις

8.1. *Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων.*

(1) $f_n(t) = \dfrac{t}{1+nt}$, $t \geq 0$.

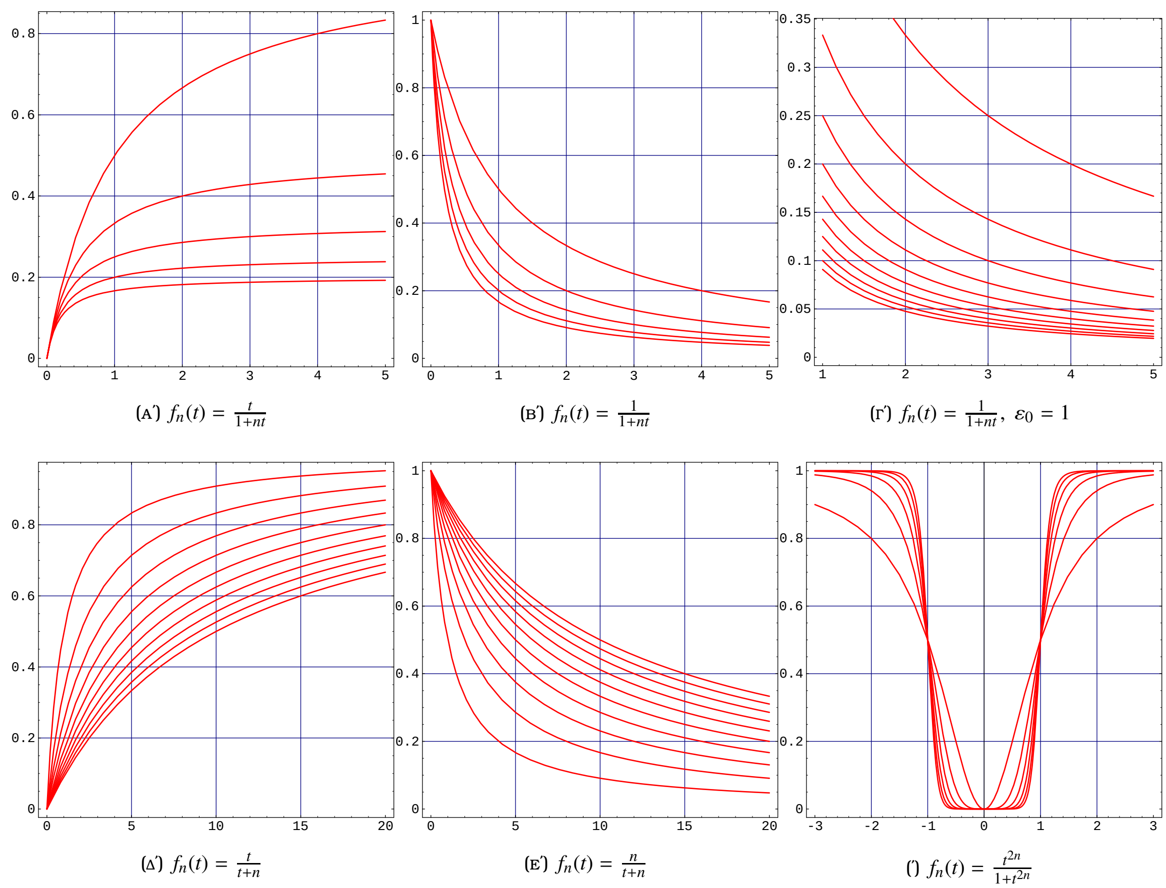
(2) $f_n(t) = \dfrac{1}{1+nt}$, $t > 0$.

(3) $f_n(t) = \dfrac{1}{1+nt}$, $t \geq \varepsilon_0$, *όπου* ε_0 *σταθερός θετικός αριθμός.*

(4) $f_n(t) = \dfrac{t}{t+n}$, $t \geq 0$.

(5) $f_n(t) = \dfrac{n}{t+n}$, $t \geq 0$.

(6) $f_n(t) = \dfrac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$, $t \in \mathbb{R}$.



(Α΄) $f_n(t) = \frac{t}{1+nt}$ (Β΄) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$ (Γ΄) $f_n(t) = \frac{1}{1+nt}$, $\varepsilon_0 = 1$

(Δ΄) $f_n(t) = \frac{t}{t+n}$ (Ε΄) $f_n(t) = \frac{n}{t+n}$ (΄) $f_n(t) = \frac{t^{2n}}{1+t^{2n}}$

Λύση.

(1) Για κάθε n η συνάρτηση f_n είναι αύξουσα, άρα

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{t\geq 0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t\geq 0} \frac{t}{1+nt} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{1+nt} = \frac{1}{n} \to 0, \text{ καθώς } n \to \infty.$$

Επομένως η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, και άρα κατά σημείο, στη μηδενική συνάρτηση.

(2) Για κάθε $t > 0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$, άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο. Επίσης, για κάθε n η f_n είναι φθίνουσα, άρα

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{t>0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t>0} \frac{1}{1+nt} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+nt} = 1 \nrightarrow 0.$$

Επομένως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(3) Αφού η f_n είναι φθίνουσα έχουμε

$$\sup_{t\geq\varepsilon_0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t\geq\varepsilon_0} \frac{1}{1+nt} = \frac{1}{1+n\varepsilon_0} \to 0, \text{ καθώς } n\to\infty.$$

Επομένως η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα, και άρα κατά σημείο, στη μηδενική συνάρτηση.

(4) Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$, άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο. Επίσης, για κάθε n η f_n είναι αύξουσα, άρα

$$\sup_{t\geq 0} |f_n(t) - 0| = \sup_{t\geq 0} \frac{t}{t+n} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t}{t+n} = 1.$$

Δηλαδή $\sup_{t\geq 0} |f_n(t) - 0| \nrightarrow 0$, επομένως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη.

(5) Έχουμε $f_n(t) = 1 - \frac{t}{t+n}$, άρα από το προηγούμενο ερώτημα, η f_n συγκλίνει κατά σημείο, και όχι ομοιόμορφα, στη σταθερή συνάρτηση 1.

(6) Αν $|t| > 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} t^{2n} = +\infty$, άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t^{-2n}+1} = 1$.
Αν $|t| < 1$ τότε $\lim_{n\to\infty} t^{2n} = 0$, άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = 0$.
Αν $|t| = 1$ τότε $t^{2n} = 1$ άρα $f_n(t) = 1/2$.
Επομένως η f_n συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση

$$f(t) = \begin{cases} 0, & |t| < 1 \\ 1, & |t| > 1 \\ 1/2, & |t| = 1 \end{cases}.$$

Αφού οι f_n είναι συνεχείς και η f ασυνεχής, η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

□

8.2. *Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, τέτοιες ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα. Έστω επίσης x_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $x_n \to x$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.*

Λύση. Αφού f_n συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \to 0.$$

Αφού f συνεχής, έχουμε $f(x_n) \to f(x)$. Άρα

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| + |f(x_n) - f(x)| \to 0.$$

□

8.3. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Θέτουμε $f_n(x) = f(x + 1/n)$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.*

Λύση. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού f ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $|x - y| < \delta$ έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $|(x+1/n)-x| < \delta$ και άρα $|f(x+1/n)-f(x)| < \varepsilon$. Συνεπώς $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, επομένως $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

8.4. *Θέτουμε $f_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$, και έστω $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $g(1) = 0$. Δείξτε ότι $f_n g \to 0$ ομοιόμορφα.*

Λύση. Η g είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο διάστημα, άρα φραγμένη. Δηλαδή υπάρχει $M > 1$ τέτοιο ώστε $|g(t)| \leq M$ για κάθε $t \in [0, 1]$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Αφού η g είναι συνεχής και $g(1) = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|g(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in (1 - \delta, 1]$. Παρατηρούμε ότι $(1 - \delta)^n \to 0$, άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $(1 - \delta)^n < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι, γι' αυτά τα n έχουμε ότι:
Αν $t \in [0, 1 - \delta]$ τότε $|f_n(t)g(t)| \leq M(1 - \delta)^n < M\varepsilon$.
Αν $t \in (1 - \delta, 1]$ τότε $|f_n(t)g(t)| < \varepsilon < M\varepsilon$.
Άρα για κάθε $t \in [0, 1]$ και κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $|f_n(t)g(t)| < M\varepsilon$. Δηλαδή $\sup\limits_{t\in[0,1]} |f_n(t)g(t)| \leq M\varepsilon$. Επομένως $f_n g \to 0$ ομοιόμορφα. □

8.5. *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων οι οποίες δεν μηδενίζονται πουθενά. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, και ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \geq M$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι $\dfrac{1}{f_n} \to \dfrac{1}{f}$ ομοιόμορφα.*

Λύση. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\rho(f_n, f) \leq M/2$ για κάθε $n \geq n_0$. Επομένως γι'αυτά τα n και κάθε $x \in I$ έχουμε

$$M \leq |f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \rho(f_n, f) + |f_n(x)| \leq M/2 + |f_n(x)|.$$

Άρα $|f_n(x)| \geq M/2$. Επομένως

$$\left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{|f_n(x) - f(x)|}{|f_n(x)||f(x)|} \leq \frac{2\rho(f_n, f)}{M^2}.$$

Παίρνοντας sup ως προς x έχουμε

$$\rho\left(\frac{1}{f_n}, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{2\rho(f_n, f)}{M^2} \to 0.$$

Άρα $\dfrac{1}{f_n} \to \dfrac{1}{f}$ ομοιόμορφα. □

8.6. *Στην προηγούμενη άσκηση, δείξτε ότι η υπόθεση $|f(x)| \geq M$ $(M > 0)$ για κάθε x, είναι απαραίτητη.*

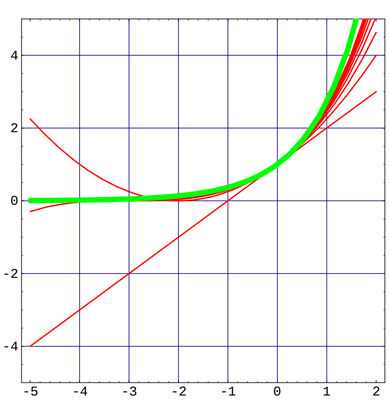
Λύση. Θέτουμε $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$, $x \in (0, 1)$. Τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$. Αλλά

$$\sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{1}{f_n(x)} - \frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{n} \sup_{x\in(0,1)} \frac{1}{x\left(x + \frac{1}{n}\right)} = +\infty.$$

□

8.7. *Θέτουμε $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε την f_n ως προς την κατά σημείο σύγκλιση σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$, και ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση στα διαστήματα $(-\infty, a)$ και $(a, +\infty)$, όπου a τυχόντας πραγματικός αριθμός.*

Λύση. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$.



Άρα $f_n \to f$ κατά σημείο (σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$), όπου $f(x) = e^x$. Τώρα

$$\sup_{x>a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>a} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = \sup_{x>a} \left(e^x \left| 1 - \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{e^x} \right| \right) \geq \lim_{x\to+\infty} \left(e^x \left| 1 - \frac{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{e^x} \right| \right) = +\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ και για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0$ (εφαρμόζουμε διαδοχικά L' Hôpital, τόσες φορές όσες και ο βαθμός τού πολυωνύμου). Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$ ομοιόμορφα στο $(a, +\infty)$. Επίσης,

$$\sup_{x<a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x<a} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| \geq \lim_{x\to-\infty} \left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| = +\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και για κάθε πολυώνυμο $p(x)$ έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} |p(x)| = +\infty$. Άρα $f_n \not\rightrightarrows f$ ομοιόμορφα στο $(-\infty, a)$. □

8.8. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε η f'' είναι φραγμένη. Θέτουμε $f_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x))$, $x \in \mathbb{R}$. Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση την ακολουθία f_n.*

Λύση. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f''(x)| \leq M$ για κάθε x. Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x).$$

Άρα $f_n \to f'$ κατά σημείο. Τώρα, από το θεώρημα μέσης τιμής έχουμε

$$f_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x + a_{n,x})$$

για κάποιο $0 < a_{n,x} < 1/n$. Πάλι από το θεώρημα μέσης τιμής

$$\frac{f'(x + a_{n,x}) - f'(x)}{a_{n,x}} = f''(x + b_{n,x})$$

για κάποιο $0 < b_{n,x} < a_{n,x}$. Άρα

$$|f_n(x) - f'(x)| = |f'(x + a_{n,x}) - f'(x)| = a_{n,x}|f''(x + b_{n,x})| \leq \frac{M}{n}.$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε x, επομένως

$$\rho(f_n, f') \leq \frac{M}{n} \to 0.$$

Άρα $f_n \to f'$ ομοιόμορφα. □

8.9. *Βρείτε μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων f_n τέτοια ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα, όπου f παραγωγίσιμη, $f_n' \to g$ κατά σημείο, αλλά $f' \neq g$.*

Λύση. Θέτουμε $f_n(x) = \dfrac{1}{n+1} x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$. Τότε

$$\sup_{x\in[0,1]} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{1}{n+1} \to 0,$$

άρα $f_n \to 0 = f$ ομοιόμορφα. Αλλά

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases} = g(x).$$

Προφανώς $f' \neq g$. □

8.10. *Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση και a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τότε θέτουμε $f_{a_n}(x) = f(x + a_n)$. Δείξτε ότι αν για κάθε μηδενική ακολουθία a_n έχουμε $f_{a_n} \to f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

Λύση. Από Ανάλυση Ι, για να δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι αν x_n, y_n είναι δυο ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $x_n - y_n \to 0$, τότε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Έχουμε

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |f(x_n) - f(x_n + (y_n - x_n))| \leq \rho(f, f_{y_n - x_n}) \to 0,$$

διότι η $y_n - x_n$ είναι μηδενική. □

8.11. *Έστω $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$, $x \in [0,1]$. Εξετάστε την f_n ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση.*

Λύση. Για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Άρα $f_n \to 0$ κατά σημείο. Αν η σύγκλιση ήταν ομοιόμορφη θα είχαμε

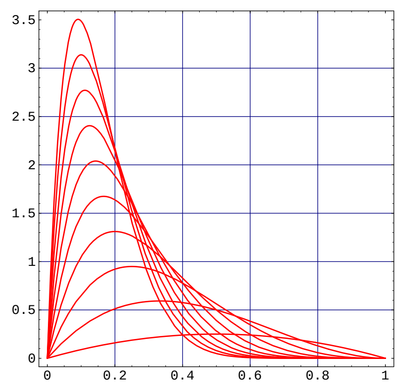
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = 0.$$

Αλλά

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n^2 \int_0^1 x(1-x)^n\,dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_0^1 = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1.$$

Εναλλακτικά, η συνάρτηση $x(1-x)^n$, $0 \leq x \leq 1$, έχει μέγιστο στο $\frac{1}{n+1}$. Επομένως

$$\rho(f_n, 0) = \sup_{x\in[0,1]} \left(n^2 x(1-x)^n\right) = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n^2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty.$$



□

8.12. *Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα, για κάποια f. Δείξτε ότι*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{1/n}^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Λύση. Αφού f_n συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, άρα φραγμένη. Επομένως υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq M$ για κάθε x. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_{1/n}^1 f_n(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\right| &= \left|\int_{1/n}^1 f_n(x)\,dx - \int_{1/n}^1 f(x)\,dx - \int_0^{1/n} f(x)\,dx\right| \\ &\leq \int_{1/n}^1 |f_n(x) - f(x)|\,dx + \int_0^{1/n} |f(x)|\,dx \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)\rho(f_n, f) + \frac{1}{n}M \to 0.\end{aligned}$$

□

8.13. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφο όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων οι οποίες είναι ασυνεχείς σε κάθε σημείο.*

Λύση. Θέτουμε

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) - 1/n, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ f(x) + 1/n, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Οι f_n είναι ασυνεχείς σε κάθε x διότι αν πάρουμε μια ακολουθία ρητών q_k και μια ακολουθία άρρητων α_k τέτοιες ώστε $\lim\limits_{k\to\infty} q_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = x$, τότε

$$\lim_{k\to\infty} f_n(q_k) = \lim_{k\to\infty}(f(q_k) - 1/n) = f(x) - 1/n$$

και

$$\lim_{k\to\infty} f_n(\alpha_k) = \lim_{k\to\infty}(f(\alpha_k) + 1/n) = f(x) + 1/n.$$

Επίσης για κάθε x έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(x) - 1/n - f(x)|, & x \in \mathbb{Q} \\ \\ |f(x) + 1/n - f(x)|, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = \frac{1}{n}.$$

Άρα $\rho(f_n, f) = 1/n \to 0$. Επομένως $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

8.14. *Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τέτοια ώστε $\displaystyle\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$. Δείξτε ότι $f = 0$.*

Λύση. Αφού ένα πολυώνυμο είναι γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων τού x, έχουμε ότι $\displaystyle\int_0^1 P \cdot f = 0$ για κάθε πολυώνυμο P. Από το θεώρημα τού Weierstrass, υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n στο $[0,1]$ τέτοια ώστε $P_n \to f$ ομοιόμορφα. Επομένως

$$0 \le \int_0^1 f^2 = \int_0^1 f \cdot f = \int_0^1 (f - P_n + P_n) \cdot f = \int_0^1 (f - P_n) \cdot f \le \rho(P_n, f) \int_0^1 |f| \to 0.$$

Επομένως $\int_0^1 f^2 = 0$. Αφού η f είναι συνεχής έχουμε ότι $f^2 = 0$ (αν το ολοκλήρωμα μιας μη αρνητικής συνεχούς συνάρτησης είναι 0 τότε η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν). Άρα $f = 0$. □

Σειρές Συναρτήσεων

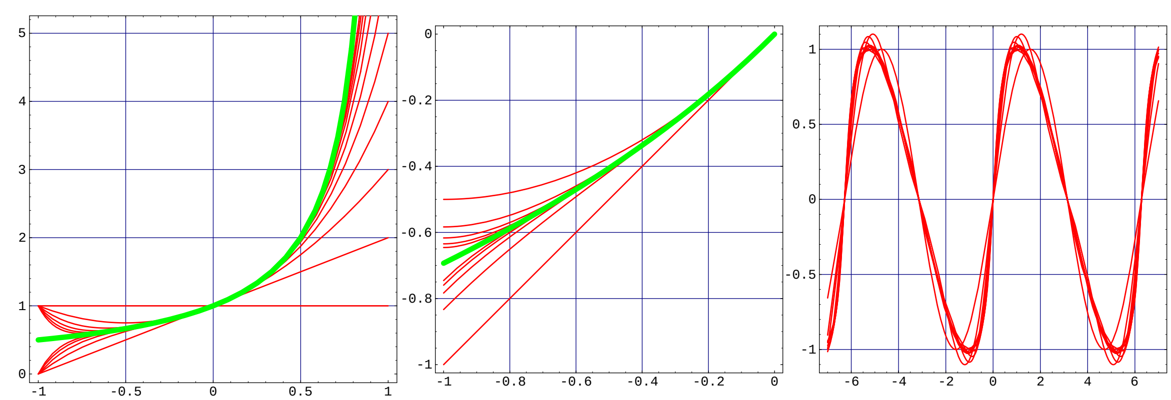
Γενικά

Ορισμός. *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων και $f : I \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων s_n με $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. Αν $s_n \to f$ κατά σημείο τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο στην f και γράφουμε:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{κατά σημείο.}$$

Αν $s_n \to f$ ομοιόμορφα τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f και γράφουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f \quad \text{ομοιόμορφα.}$$



(α') $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$

(β') $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

(γ') $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$

Παραδείγματα.

(1) Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ συγκλίνει κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ στο διάστημα $(-1, 1)$. Πράγματι, αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων, τότε

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \to \frac{1}{1-x} = f(x) \quad \text{καθώς } n \to \infty$$

$$\rho(s_n, f) = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \sum_{k=0}^{n} x^k - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x\in(-1,1)} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right| = +\infty.$$

Η σειρά δεν συγκλίνει για κανένα x έξω από το διάστημα $(-1, 1)$.

(2) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in [-1, 0]$, συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f(x) = -\ln(1-x)$. Πράγματι, σταθεροποιούμε τυχόν $x \in [-1, 0]$, ολοκληρώνουμε τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{1-t^n}{1-t}$$

από x ως 0 και παίρνουμε

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \ln(1-x) - \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Επομένως, αν s_n είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων τής σειράς, τότε

$$|s_n(x) - f(x)| = \left| \int_x^0 \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \int_x^0 \frac{|t|^n}{|1-t|} dt \leq \int_x^0 |t|^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Παίρνοντας sup ως προς x έχουμε $\rho(s_n, f) \leq 1/n \to 0$, άρα η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη. Παρατηρήστε ότι για $x = -1$ έχουμε

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = -f(-1) = \ln 2,$$

δηλαδή υπολογίσαμε το όριο τής εναλλάσουσας σειράς.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν οι f_n είναι συνεχείς και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι συνεχής γιατί η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις.

(2) Αν οι $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη διότι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων αποτελείται από ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Επίσης

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \int_a^b \lim_n \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right) dt = \lim_n \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t) \right) dt = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(t)\, dt.$$

Θεώρημα (Κριτήριο Weierstrass)**.** *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία M_n μη αρνητικών αριθμών τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ συγκλίνει και $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in I$ και κάθε n. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο I.*

Απόδειξη. Για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα από κριτήριο σύγκρισης. Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ ομοιόμορφα. Για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k.$$

Άρα $\sup_{x \in I} \left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - f(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Επομένως $\sum_{k=1}^{n} f_k \to f$ ομοιόμορφα. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν υποθέσουμε ότι $|f_n(x)| \leq M_n$ για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \geq n_0$, όπου n_0 δεδομένος φυσικός αριθμός.

Παράδειγμα. Η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ διότι $\displaystyle\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε x, και η $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει. Στο σχήμα (γ') φαίνονται οι 10 πρώτοι όροι τής ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων τής σειράς.

Δυναμοσειρές

Ορισμός. *Έστω a_n μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Μια σειρά συναρτήσεων τής μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο* 0.

Παρατήρηση. Μια δυναμοσειρά συγκλίνει τουλάχιστο για $x = 0$.

Ορισμός. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά. Θέτουμε*

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}$$

κάνοντας τη σύμβαση $\frac{1}{0} = +\infty$ και $\frac{1}{+\infty} = 0$. Το R λέγεται ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς. Αν $R > 0$ τότε το διάστημα $(-R, R)$ λέγεται διάστημα σύγκλισης τής δυναμοσειράς.

Θεώρημα. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης R. Τότε:*

(1) *Αν $R > 0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα $[-a, a] \subset (-R, R)$ με $0 < a < R$, επομένως συγκλίνει απόλυτα κατά σημείο σ' ολόκληρο το $(-R, R)$.*
(2) *Αν $R < +\infty$ τότε η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει για κανένα $|x| > R$.*

Απόδειξη.

(1) Επιλέγουμε $b > 0$ έτσι ώστε $a < b < R$. Τότε $\limsup_n |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R} < \frac{1}{b}$. Επομένως υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|a_n|^{1/n} < \frac{1}{b}$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα $|a_n x^n| < \left(\frac{|x|}{b}\right)^n \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n$ για κάθε $n \geq n_0$ και κάθε $x \in [-a, a]$. Αλλά η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n$ συγκλίνει διότι $0 < \frac{a}{b} < 1$. Το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο Weierstrass.
(2) Αν $|x| > R$, τότε $\limsup_n |a_n x^n|^{1/n} = \frac{|x|}{R} > 1$. Επομένως υπάρχουν $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ έτσι ώστε $|a_{k_n} x^{k_n}| > 1$. Άρα η ακολουθία $a_n x^n$ δεν είναι μηδενική, επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλείεται να συγκλίνει.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Από το προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε ότι μια δυναμοσειρά συγκλίνει **κατά σημείο σ' ολόκληρο** το διάστημα σύγκλισης και **ομοιόμορφα** σε κάθε **κλειστό** υποδιάστημα τού διαστήματος σύγκλισης. **Δεν** μπορούμε να συμπεράνουμε ότι συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το διάστημα σύγκλισης. Στα άκρα τού διαστήματος σύγκλισης, δηλαδή για $x = \pm R$, η σειρά μπορεί είτε να συγκλίνει ή να μην συγκλίνει.
(2) Αν για μια δυναμοσειρά έχουμε ότι, για κάποιο r, συγκλίνει για κάθε x με $|x| < r$ και δεν συγκλίνει για κάθε x με $|x| > r$, τότε το r είναι η ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς.
(3) Αν μια δυναμοσειρά έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, τότε συγκλίνει μόνο για $x = 0$ και για κανένα άλλο x.
(4) Κάθε δυναμοσειρά είναι συνεχής συνάρτηση σ' ολόκληρο το διάστημα σύγκλισης.
(5) Μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό υποδιάστημα $[a, b]$ τού διαστήματος σύγκλισης και ισχύει

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

Θεώρημα. *Έστω a_n μια ακολουθία μη μηδενικών αριθμών τέτοια ώστε*

$$\lim\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R.$$

Τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης R.

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη για $0 < R < +\infty$. Οι περιπτώσεις $R = 0$ και $R = +\infty$ αποδεικνύονται ανάλογα. Για $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \frac{|x|}{R}$ το οποίο είναι $\begin{cases} < 1, & \text{αν } |x| < R \\ > 1, & \text{αν } |x| > R \end{cases}$. Από κριτήριο λόγου, η $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ συγκλίνει αν $|x| < R$ και δεν συγκλίνει αν $|x| > R$. Αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς είναι ακριβώς R.

□

Παραδείγματα.

(1) Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης, άρα συγκλίνει κατά σημείο σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ και ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα. Η σειρά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$ γιατί

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right| \geq \sup_{x\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = +\infty.$$

(2) Η $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ έχει μηδενική ακτίνα σύγκλισης, άρα συγκλίνει μόνο για $x = 0$.

(3) Η $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Άρα συγκλίνει κατά σημείο στη συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ στο διάστημα $(-1,1)$. Συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα τού $(-1,1)$ αλλά όχι σ' ολόκληρο το $(-1,1)$ (από το πρώτο παράδειγμα τής προηγούμενης ενότητας). Για $x = \pm 1$ η σειρά δεν συγκλίνει.

(4) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Για $x = 1$ παίρνουμε την αρμονική σειρά η οποία δεν συγκλίνει, ενώ για $x = -1$ παίρνουμε την εναλλάσουσα $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet. Όπως είδαμε στο δεύτερο παράδειγμα τής προηγούμενης ενότητας, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[-1,0]$, άρα σε κάθε διάστημα τής μορφής $[-1,a]$, με $-1 < a < 1$. Δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κανένα διάστημα τής μορφής $(a,1)$.

(5) Η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει και στα δυο άκρα τού διαστήματος σύγκλισης. Επίσης, από κριτήριο Weierstrass συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-1,1]$.

(6) Η $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n}$, από κριτήριο λόγου ή ρίζας, συγκλίνει αν $|x| < 2$. Δεν συγκλίνει αν $|x| > 2$. Επομένως η ακτίνα σύγκλισης είναι 2 και όχι 4, όπως θα έλεγε κανείς αν εφάρμοζε απρόσεκτα τον ορισμό.

Θεώρημα. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Θέτουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R,R)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη και*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, επομένως συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδιάστημα τού $(-R, R)$. Θέτουμε

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R).$$

Θα δείξουμε ότι $f' = g$. Για $x \in (-R, R)$ έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + \int_0^x \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k t^k\right) dt = a_0 + \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}\right) dt \ (*).$$

Αλλά $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1} = g(t)$ ομοιόμορφα στο $[0, x]$. Άρα παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στην $(*)$ έχουμε $f(x) = a_0 + \int_0^x g(t)dt$. Από το θεμελιώδες θεώρημα τού απειροστικού λογισμού, η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. □

Παράδειγμα (Η εκθετική συνάρτηση)**.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (η δυναμοσειρά είδαμε ότι έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης). Και παρατηρούμε ότι $f'(x) = f(x)$ διότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

Επομένως

$$\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = 0.$$

Συνεπώς $f(x) = ce^x$, για κάποια σταθερά c. Αλλά $f(0) = 1$, άρα $c = 1$. Δηλαδή δείξαμε ότι η f είναι η εκθετική συνάρτηση.

Θεώρημα (Abel)**.** *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $0 < R < \infty$. Αν η σειρά συγκλίνει σε κάποιο άκρο τού $(-R, R)$, τότε το διάστημα στο οποίο η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα περιλαμβάνει το άκρο αυτό.*

Απόδειξη. Για απλότητα στις πράξεις, δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου $R = 1$ και η σειρά συγκλίνει για $x = 1$. Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k,$$

όπου $x \in (-1, 1]$. Θα δείξουμε ότι $s_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[0, 1)$, άρα σε οποιοδήποτε κλειστό υποδιάστημα τής μορφής $[a, 1] \subset (-1, 1]$, διότι γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην f σε κάθε κλειστό υποδιάστημα τού $(-1, 1)$ και, επιπλέον, κατά σημείο στο δεξί άκρο. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|r_n| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Έτσι για όλα αυτά τα n και κάθε $x \in [0, 1)$ έχουμε

$$\begin{aligned}|s_n(x) - f(x)| &= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} (r_k - r_{k+1}) x^k\right| = \left|r_{n+1} x^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} r_k (x^k - x^{k-1})\right| \\ &\leq \varepsilon + (1-x)\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα

$$\rho(s_n, f) = \sup_{x\in[0,1)} |s_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$$

για κάθε $n \geq n_0$. □

Παράδειγμα. Το θεώρημα τού Abel μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δοθεί μια απ' ευθείας απόδειξη των παραδειγμάτων (4) και (5) παραπάνω.

Ορισμός. *Μια σειρά τής μορφής* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, *όπου* $x_0 \in \mathbb{R}$ *σταθερό, λέγεται δυναμοσειρά με κέντρο* x_0.

Η ακτίνα σύγκλισης R τέτοιων σειρών ορίζεται από τον ίδιο τύπο και το διάστημα σύγκλισης ορίζεται να είναι $(x_0 - R, x_0 + R)$. Η υπόλοιπη θεωρία είναι τελείως ανάλογη.

Ασκήσεις

9.1. *Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά* $\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ *στο διάστημα* $[0,1]$.

Λύση. Για $0 \leq x < 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n = (1-x)\frac{1}{1-x} = 1.$$

Για $x = 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n = 0.$$

Δηλαδή η σειρά συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, άρα η σύγκλιση αποκλείεται να είναι ομοιόμορφη. ◻

9.2. *Εξετάστε ως προς την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ *στο* $[-a,a]$, $a>0$. *Συγκλίνει η σειρά απόλυτα για κάποιο* x*;*

Λύση. Έχουμε

$$(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2} = (-1)^n\frac{x^2}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n} = f_n(x) + a_n.$$

Η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα ως σειρά σταθερών συναρτήσεων. Επίσης

$$|f_n(x)| \leq \frac{a^2}{n^2}.$$

Αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass, η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Επομένως η

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα ως άθροισμα ομοιόμορφα συγκλινουσών σειρών. Απόλυτη σύγκλιση δεν έχουμε σε κανένα σημείο διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2+n}{n^2} \geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

◻

9.3. *Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τη σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}$, $x>0$.

Λύση. Η σειρά συγκλίνει κατά σημείο διότι για κάθε $x>0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2} < \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty.$$

Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2x^2}, \quad s_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2x^2}, \ x>0.$$

Τότε

$$\rho(s_n,f) = \sup_{x>0}\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k^2x^2}\right| = \sup_{x>0}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2} \geq \sup_{x>0}\frac{1}{1+(n+1)^2x^2} = 1.$$

Άρα η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη. Παρά ταύτα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα τής μορφής $[a, +\infty)$, $a > 0$, από κριτήριο Weierstrass. □

9.4. *Έστω f το κατά σημείο όριο τής σειράς τής προηγούμενης άσκησης. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής, όχι φραγμένη.*

Λύση. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε διάστημα τής μορφής $[a, +\infty)$, $a > 0$, επομένως η f είναι συνεχής σε κάθε τέτοιο διάστημα, άρα σ' ολόκληρο το $(0, +\infty)$. Τώρα, για κάθε $t > 0$ και κάθε $N \in \mathbb{N}$ παρατηρούμε ότι

$$\int_0^{N+1} \frac{dx}{1+t^2x^2} = \sum_{k=0}^{N} \int_k^{k+1} \frac{dx}{1+t^2x^2} \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{1+k^2t^2}.$$

Παίρνοντας όρια καθώς $N \to \infty$ έχουμε

$$\frac{1}{t} \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+t^2x^2} \leq 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2t^2} = 1 + f(t).$$

Άρα η f δεν είναι φραγμένη. □

9.5. *Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα τής μορφής $[-a, a]$, $a > 0$.*

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right) &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[\cos 1 \cdot \sin\frac{x}{n} + \sin 1 \cdot \cos\frac{x}{n}\right] \\
&= \cos 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \sin\frac{x}{n} + \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \left[\cos\frac{x}{n} - 1\right] + \sin 1 \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \\
&= \cos 1 \cdot f_n(x) + \sin 1 \cdot g_n(x) + \sin 1 \cdot a_n.
\end{aligned}$$

Έχουμε

$$|f_n(x)| \leq \frac{|x|}{n^{3/2}} \leq \frac{a}{n^{3/2}}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Επίσης

$$|g_n(x)| \leq \frac{|x|^2}{n^{5/2}} \leq \frac{a^2}{n^{5/2}}.$$

Αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ συγκλίνει, άρα από κριτήριο Weierstrass η $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Τέλος, η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει από κριτήριο Dirichlet, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα ως σειρά σταθερών συναρτήσεων. Επομένως η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sin\left(1 + \frac{x}{n}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα ως άθροισμα ομοιόμορφα συγκλινουσών σειρών. □

9.6. *Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση τη δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^a x^n$, όπου $a \in \mathbb{R}$.*

Λύση. Η ακτίνα σύγκλισης είναι 1 γιατί $\sqrt[n]{n^a} \to 1$, άρα το διάστημα σύγκλισης είναι $(-1, 1)$. Για $x = 1$ η σειρά συγκλίνει αν $a < -1$. Αποκλίνει αν $a \geq -1$. Για $x = -1$ η σειρά συγκλίνει αν $a < 0$ από το κριτήριο Dirichlet. Δεν συγκλίνει αν $a \geq 0$. Παρατηρήστε ότι αν $a < -1$, τότε, από το κριτήριο Weierstrass, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[-1, 1]$. □

9.7. *Έστω ότι η ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *είναι* R. *Υπολογίστε τις ακτίνες σύγκλισης των* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x^n$ *και* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn}$, *όπου* $m \in \mathbb{N}$ *σταθερά.*

Λύση. Έχουμε

$$\limsup |a_n^m|^{1/n} = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^m = \frac{1}{R^m}.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης τής πρώτης σειράς είναι R^m. Τώρα

$$|x| < R^{1/m} \Rightarrow |x^m| < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{mn}| < \infty$$

και

$$|x| > R^{1/m} \Rightarrow |x^m| > R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^{mn}| = \infty.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης τής δεύτερης σειράς είναι $R^{1/m}$. Αν για τον υπολογισμό τής ακτίνας σύγκλισης τής δεύτερης σειράς θέλαμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό, θα έπρεπε να παρατηρήσουμε ότι η ακολουθία των συντελεστών τής σειράς δεν είναι η a_n, αλλά η ακολουθία

$$b_n = \begin{cases} a_{n/m}, & \text{αν το } n \text{ είναι πολλαπλάσιο τού } m \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases},$$

δηλαδή η ακολουθία

$$(a_0, 0, \ldots, 0, a_1, 0, \ldots, 0, a_2, 0, \ldots, 0, a_3, 0, \ldots),$$

όπου το a_k εμφανίζεται στην km-θέση. Επομένως η $|b_n|^{1/n}$ είναι η

$$(|a_0|, 0, \ldots, 0, |a_1|^{\frac{1}{m}}, 0, \ldots, 0, |a_2|^{\frac{1}{2m}}, 0, \ldots, 0, |a_3|^{\frac{1}{3m}}, 0, \ldots),$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\limsup |b_n|^{1/n} = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{1/m}$. □

9.8. *Έστω* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με θετική ακτίνα σύγκλισης. Δείξτε ότι* $a_m = \dfrac{f^{(m)}(0)}{m!}$.

Λύση. Παραγωγίζουμε m φορές τη σχέση

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

και παίρνουμε

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n x^{n-m}.$$

Θέτουμε $x = 0$ και έχουμε το ζητούμενο. □

9.9. *Έστω* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Υποθέτουμε ότι* $f(x) = 0$ *για κάθε* x *σε κάποιο ανοιχτό διάστημα* I *με κέντρο το* 0. *Δείξτε ότι* $f = 0$ *σ' ολόκληρο το* $\mathbb{R}$.

Λύση. Αφού η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο I, έχουμε ότι όλες οι παράγωγοι $f^{(m)}$ είναι ταυτοτικά ίσες με μηδέν στο I. Ιδιαίτερα, $f^{(m)}(0) = 0$, άρα, από την άσκηση 9.8, $a_m = 0$ για κάθε m. Δηλαδή, όλοι οι συντελεστές τής σειράς είναι μηδέν, επομένως η συνάρτηση είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. □

9.10. *Έστω* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *μια δυναμοσειρά με άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Υποθέτουμε ότι* $f(1/k) = 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Δείξτε ότι* $f = 0$ *ταυτοτικά. Η άσκηση αυτή γενικεύει την προηγούμενη.*

Λύση. Άς υποθέσουμε ότι η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν. Τότε δεν είναι δυνατόν όλα τα a_n να είναι μηδέν. Έστω m ο ελάχιστος δείκτης τέτοιος ώστε $a_m \neq 0$. Τότε

$$f(x) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+m} x^n = x^m g(x),$$

όπου g συνεχής και $g(0) = a_m \neq 0$. Αλλά τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$. Επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ με $1/k \in (-\delta, \delta)$ και παίρνουμε ότι $0 = f(1/k) = (1/k)^m g(1/k)$, άτοπο. □

9.11. *Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα τής εκθετικής απεικόνισης σε δυναμοσειρά, επαληθεύστε την σχέση* $e^{x+y} = e^x e^y$.

Λύση. Το γινόμενο δυο απόλυτα συγκλινουσών σειρών (γινόμενο Cauchy) δίνεται από τον τύπο

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Επομένως

$$e^x e^y = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}.$$

□

9.12. *Βρείτε το όριο τής δυναμοσειράς*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Λύση. Η ακτίνα σύγκλισης είναι 1. Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

για $x \in (-1, 1)$. Τότε

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Συνεπώς $f(x) = \arctan x + c$. Αλλά $f(0) = \arctan 0 = 0$, άρα $c = 0$. □

9.13. *Δείξτε ότι*

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Λύση. Κατ' αρχάς, η σειρά συγκλίνει (υπό συνθήκη) από το κριτήριο Dirichlet. Επομένως, από το θεώρημα τού Abel, η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

τής προηγούμενης άσκησης συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$. Θέτουμε

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

για $x \in [0, 1]$. Αφού η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη, η f είναι συνεχής. Αλλά από την προηγούμενη άσκηση, $f(x) = \arctan x$, για $-1 < x < 1$. Επομένως

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

□