Σημειώσεις Συναρτησιακής Ανάλυσης

Θέμης Μήτσης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Κρητης

Περιεχόμενα

1. Το θεώρημα κατηγορίας του Baire

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου λέγεται πουθενά πυκνό αν $\left(\overline{A}\right)^{\circ} = \emptyset$. Ένα σύνολο λέγεται 1ης κατηγορίας αν είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων.*

Θεώρημα. *Έστω (X, ρ) πλήρης μετρικός χώρος και $G_n \subset X$ μια ακολουθία ανοιχτών και πυκνών συνόλων. Τότε η τομή $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω D τυχόντας ανοιχτός δίσκος. Αρκεί να δείξουμε ότι $A \cap D \neq \emptyset$. Αφού τα G_n είναι ανοιχτά και πυκνά, μπορούμε να επιλέξουμε επαγωγικά μια ακολουθία ανοιχτών δίσκων D_n τέτοια ώστε

$$D_1 \subset D,\ \overline{D}_{n+1} \subset D_n,\ D_n \subset G_n,\ \operatorname{diam}(D_n) < \frac{1}{n}.$$

Τότε

$$B := \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n \subset A \text{ και } B \subset D.$$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $B \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_n \in D_n$. Τότε η x_n είναι Cauchy διότι για $n \geq m$ έχουμε

$$\rho(x_n, x_m) \leq \operatorname{diam}(D_m) < \frac{1}{m}.$$

Αφού ο X είναι πλήρης, έχουμε ότι $x_n \to x$ για κάποιο x. Αλλά $x_m \in D_n$ για κάθε $m \geq n$ άρα $x \in \overline{D}_n$ για κάθε n. Όμως $\overline{D}_{n+1} \subset D_n$, συνεπώς $x \in B$. □

Θεώρημα (Baire)**.** *Ένας πλήρης μετρικός χώρος δεν είναι 1ης κατηγορίας.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι πλήρης και ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου τα A_n είναι πουθενά πυκνά. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\overline{A}_n\right)^{\complement} = \emptyset$ και τα $\left(\overline{A}_n\right)^{\complement}$ είναι ανοιχτά και πυκνά, άτοπο από το προηγούμενο θεώρημα. □

Παράδειγμα. Το $\mathbb{Q}$ είναι 1ης κατηγορίας, το $\mathbb{R}$ είναι πλήρης χώρος, άρα $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. Άλλη μια απόδειξη ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί.

Παράδειγμα. Αν $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in J$, είναι μια οικογένεια κατά σημείο φραγμένων συνεχών συναρτήσεων, τότε υπάρχει ένα διάστημα πάνω στο οποίο οι f_j είναι ομοιόμορφα φραγμένες. Πράγματι έχουμε ότι

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j \in J} \{x : |f_j(x)| \leq n\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Αφού οι f_j είναι συνεχείς, τα A_n είναι κλειστά. Από το θεώρημα του Baire, το $\mathbb{R}$ δεν είναι 1ης κατηγορίας, άρα κάποιο από τα A_n έχει μη κενό εσωτερικό, επομένως περιέχει ένα διάστημα. Πάνω σ'αυτό το διάστημα οι f_j είναι ομοιόμορφα φραγμένες.

2. Χώροι Banach

Ορισμός. *Ένας χώρος με νόρμα είναι ένα ζευγάρι $(X, \|\cdot\|)$, όπου X είναι ένας γραμμικός χώρος, και*

$$\|\cdot\| : X \to [0, \infty)$$

μια απεικόνιση (η νόρμα) έτσι ώστε για κάθε $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$, έχουμε:

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ένας χώρος με νόρμα είναι μετρικός χώρος μέσω της μετρικής $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχείς απεικονίσεις. Σύγκλιση ως προς τη νόρμα μιας ακολουθίας x_n σε κάποιο x σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Ορισμός. *Ένας πλήρης χώρος με νόρμα λέγεται χώρος Banach.*

Κάθε κλειστός (γραμμικός) υπόχωρος ενός χώρου Banach είναι χώρος Banach.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο X είναι Banach αν και μόνο αν:*
Για κάθε ακολουθία x_n στον X έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty \Rightarrow \text{η σειρά } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ συγκλίνει (ως προς τη νόρμα).}$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι Banach και ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Τότε για $n > m$ έχουμε

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|.$$

Άρα η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι Cauchy, επομένως η σειρά συγκλίνει.

Αντίστροφα, αν x_n είναι μια ακολουθία Cauchy, τότε μπορούμε επαγωγικά να επιλέξουμε μια υπακολουθία x_{k_n} τέτοια ώστε $\|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| \leq 2^{-n}$, άρα $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k_{n+1}} - x_{k_n}\| < \infty$. Επομένως, από υπόθεση, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{k_{n+1}} - x_{k_n})$ συγκλίνει. Αλλά η σειρά αυτή είναι τηλεσκοπική: η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι η ακολουθία $x_{k_{n+1}} - x_{k_1}$. Άρα η x_{k_n} συγκλίνει. Συνεπώς και η x_n συγκλίνει (αν μια ακολουθία Cauchy έχει συγκλίνουσα υπακολουθία τότε συγκλίνει). □

Παράδειγμα. Έστω $C([-1, 1])$ ο χώρος των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο $[-1, 1]$ με νόρμα

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx.$$

Τότε ο $(C([-1, 1]), \|\cdot\|_1)$ δεν είναι χώρος Banach διότι η ακολουθία

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 1, & 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

είναι Cauchy αλλά δεν συγκλίνει σε συνεχή συνάρτηση (αν συνέκλινε, το όριο της θα ήταν ταυτοτικά 0 στο $[-1, 0]$ και ταυτοτικά 1 στο $(0, 1]$).

Παράδειγμα (Ο χώρος των φραγμένων συνεχών συναρτήσεων)**.** Έστω X μετρικός χώρος. Θέτουμε

$$C_b(X) = \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ συνεχής και φραγμένη}\},$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|, \; f \in C_b(X).$$

Τότε ο $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Πράγματι, αν f_n είναι μια ακολουθία Cauchy ως προς τη νόρμα, τότε η f_n είναι ομοιόμορφα Cauchy, άρα συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια φραγμένη συνεχή συνάρτηση f, επομένως $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

Παράδειγμα (Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που «μηδενίζονται στο άπειρο»)**.** Έστω X μετρικός χώρος. Θέτουμε

$$C_0(X) = \{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ συνεχής και για κάθε } \varepsilon > 0, \text{ το σύνολο } \{x : |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ είναι συμπαγές}\}.$$

Τότε ο $C_0(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$, άρα είναι χώρος Banach. Πράγματι, το ότι ο $C_0(X)$ αποτελείται από φραγμένες συναρτήσεις προκύπτει από το ότι μια συνεχής συνάρτηση είναι φραγμένη σ'ένα συμπαγές σύνολο. Το ότι ο $C_0(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος προκύπτει από τις σχέσεις

$$\{x : |f(x) + g(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f(x)| \geq \varepsilon/2\} \cup \{x : |g(x)| \geq \varepsilon/2\},$$

$$\{x : |\lambda f(x)| \geq \varepsilon\} = \{x : |f(x)| \geq \varepsilon/|\lambda|\} \ (\lambda \neq 0).$$

Τέλος, αν $f_n \in C_0(X)$ με $f_n \to f$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Άρα

$$\{x : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subset \{x : |f_{n_0}(x)| \geq \varepsilon/2\}.$$

Συνεπώς $f \in C_0(X)$, το οποίο σημαίνει ότι ο $C_0(X)$ είναι κλειστός.

Παράδειγμα (Ο χώρος όλων των μιγαδικών μέτρων σε μια σ-άλγεβρα)**.** Έστω X ένα σύνολο, και $\mathscr{A}$ μια σ-άλγεβρα στο X. Θέτουμε

$$M(X, \mathscr{A}) = \text{το σύνολο όλων των μιγαδικών μέτρων στην } \mathscr{A}$$

$$|\mu|(A) = \sup\left\{\sum_{i=1}^\infty |\mu(A_i)| : \{A_i\}_{i=1}^\infty \text{ μετρήσιμη διαμέριση του } A\right\} \quad \text{για } A \in \mathscr{A},\ \mu \in M(X, \mathscr{A})$$

$$\|\mu\| = |\mu|(X).$$

Τότε ο $(M(X, \mathscr{A}), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach. Αρκεί να δείξουμε ότι αν μ_n είναι μια ακολουθία μέτρων με $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty$, τότε η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mu_n$ συγκλίνει ως προς τη νόρμα. Για κάθε $A \in \mathscr{A}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^\infty |\mu_n(A)| \leq \sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty,$$

άρα η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mu_n(A)$ συγκλίνει απόλυτα. Θέτουμε λοιπόν $\mu(A) = \displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mu_n(A)$. Θα δείξουμε ότι το μ είναι μιγαδικό μέτρο και ότι $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \mu_n = \mu$. Έστω A_i μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων. Τότε

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty \mu_n(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{n=1}^\infty \mu_n(A_i) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Στη διπλή σειρά μπορέσαμε να αλλάξουμε τη σειρά της άθροισης διότι

$$\sum_{n=1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |\mu_n(A_i)| \leq \sum_{n=1}^\infty |\mu_n|\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \|\mu_n\| < \infty.$$

Άρα το μ είναι μιγαδικό μέτρο. Τέλος για κάθε $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ μετρήσιμη διαμέριση του X έχουμε

$$\sum_{i=1}^\infty \left|\left(\sum_{k=1}^n \mu_k - \mu\right)(A_i)\right| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \sum_{i=1}^\infty |\mu_k(A_i)| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|\mu_k\| < \infty.$$

Παίρνοντας supremum ως προς όλες τις μετρήσιμες διαμερίσεις

$$\left\|\sum_{k=1}^n \mu_k - \mu\right\| \leq \sum_{k=n+1}^\infty \|\mu_k\| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$.

Παράδειγμα (Οι χώροι L^p, $p \geq 1$)**.** Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου, και $p \geq 1$. Θέτουμε

$$L^p(X, \mathscr{A}, \mu) = \left\{f : X \to \mathbb{F} \mid f \text{ μετρήσιμη και } \int |f|^p < \infty\right\}$$

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{1/p}.$$

Τότε ο $(L^p(X,\mathscr{A},\mu),\|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach (ταυτίζουμε συναρτήσεις που συμφωνούν σχεδόν παντού). Πράγματι, έστω f_n μια ακολουθία στον L^p με $\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p<\infty$. Θέτουμε

$$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(x)|.$$

Τότε από θεώρημα μονότονης σύγκλισης και ανισότητα Minkowski παίρνουμε

$$\left(\int g^p\right)^{1/p}\le\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_p<\infty.$$

Άρα η g ανήκει στον L^p και επομένως είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ συγκλίνει απόλυτα για σχεδόν όλα τα x. Θέτουμε λοιπόν $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$. Τότε $f\in L^p$ και από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης και ανισότητα Minkowski

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n}f_k\right\|_p\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\|f_k\|_p\to 0$$

καθώς $n\to\infty$.

Ο χώρος $L^p(\mathbb{R}^n)$ (μέτρο Lebesgue) είναι διαχωρίσιμος διότι αν θέσουμε

$$\mathscr{R}=\{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]:a_1<b_1,\dots,a_n<b_n \text{ ρητοί}\}$$
$$D=\{\chi_R:R\in\mathscr{R}\}$$

τότε το D είναι αριθμήσιμο και $\overline{\langle D\rangle}=L^p(\mathbb{R}^n)$.

Παράδειγμα (Ο χώρος L^∞)**.** Έστω $(X,\mathscr{A},\mu)$ χώρος θετικού μέτρου. Θέτουμε

$$L^\infty(X,\mathscr{A},\mu)=\{f:X\to\mathbb{F}\mid f \text{ μετρήσιμη και ουσιωδώς φραγμένη}\}$$
$$\|f\|_\infty=\inf\{M>0:\mu(\{x:|f(x)|>M\})=0\}.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, ο L^∞ είναι χώρος Banach. Σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, ο $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ δεν είναι διαχωρίσιμος, διότι αν θέσουμε

$$\mathscr{R}=\{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]:a_1<b_1,\dots,a_n<b_n \text{ πραγματικοί}\}$$
$$D=\{\chi_R:R\in\mathscr{R}\}$$

τότε το D είναι υπεραριθμήσιμο και τα στοιχεία του έχουν ανά δύο απόσταση 1.

Ειδικές περιπτώσεις των προηγούμενων χώρων είναι οι κλασικοί ακολουθιακοί χώροι:

- $c_0=\left\{x\in\mathbb{F}^{\mathbb{N}}:\lim_n x(n)=0\right\}$, $\|x\|_\infty=\sup_n|x(n)|$
  ($c_0=C_0(\mathbb{N})$, όπου το $\mathbb{N}$ έχει τη διακριτή μετρική)
- $\ell^p=\left\{x\in\mathbb{F}^{\mathbb{N}}:\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p<\infty\right\}$, $\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x(n)|^p\right)^{1/p}$
  ($\ell^p=L^p(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}),\mu)$, όπου το μ είναι το αριθμητικό μέτρο $\mu(A)=\mathrm{card}(A)$)
- $\ell^\infty=\left\{x\in\mathbb{F}^{\mathbb{N}}:\sup_n|x(n)|<\infty\right\}$, $\|x\|_\infty=\sup_n|x(n)|$
  ($\ell^\infty=L^\infty(\mathbb{N},\mathscr{P}(\mathbb{N}),\mu)$, όπως πριν)

Οι χώροι c_0 και ℓ^p, $1\le p<\infty$ είναι διαχωρίσιμοι διότι η γραμμική θήκη του συνόλου

$$\{e_n:n\in\mathbb{N}\},\ \text{όπου } e_n(k)=0 \text{ αν } n\neq k \text{ και } e_n(n)=1,$$

είναι πυκνή στους χώρους αυτούς. Αντίθετα, ο ℓ^∞ δεν είναι διαχωρίσιμος, διότι το σύνολο

$$\{\chi_A:A\subset\mathbb{N}\}$$

είναι υπεραριθμήσιμο και τα στοιχεία του έχουν ανά δύο απόσταση 1.

3. Φραγμένοι γραμμικοί τελεστές

Ορισμός. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής (τελεστής = απεικόνιση) $T : X \to Y$ λέγεται φραγμένος αν υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(x)\| \leq M\|x\|$ για κάθε $x \in X$. Το infimum αυτών των M λέγεται νόρμα του τελεστή και συμβολίζεται με $\|T\|$.*

Παρατηρήσεις.

- Αν ο T είναι φραγμένος, τότε $\|T(x)\| \leq \|T\|\cdot\|x\|$ για κάθε x, διότι για $\varepsilon > 0$ αυθαίρετο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $M < \|T\| + \varepsilon$ και $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. Αλλά τότε $\|T(x)\| < (\|T\| + \varepsilon)\|x\|$, άρα $\|T(x)\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$.
- Αν ο T είναι φραγμένος, τότε
$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|.$$
Πράγματι, αν M_1 είναι το πρώτο supremum στην παραπάνω σχέση και M_2 το δεύτερο, τότε προφανώς $M_1 \leq M_2 \leq \|T\|$. Τώρα, για $x \neq 0$ έχουμε
$$\left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M_1,$$
άρα $\|T(x)\| \leq M_1\|x\|$. Επομένως $\|T\| \leq M_1$.
- Ένας τελεστής T είναι φραγμένος αν και μόνο είναι συνεχής. Πράγματι, αν ο T είναι συνεχής, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\| < \delta \Rightarrow \|T(x)\| < 1$. Επομένως για $x \neq 0$
$$\left\| T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|}\right) \right\| < 1.$$
Άρα $\|T(x)\| < 2\delta^{-1}\|x\|$ και έτσι ο τελεστής είναι φραγμένος.
Αντίστροφα, αν ο T είναι φραγμένος, τότε $\|T(x) - T(y)\| \leq \|T\| \cdot \|x - y\|$ για κάθε x, y, άρα ο T είναι (ομοιόμορφα) συνεχής.

Αν X, Y είναι χώροι με νόρμα τότε θέτουμε
$$B(X, Y) = \{T : X \to Y \mid T \text{ φραγμένος γραμμικός τελεστής}\}.$$
Ο $B(X, Y)$ είναι χώρος με νόρμα διότι για $T_1, T_2 \in B(X, Y)$, $\lambda \in \mathbb{F}$
$$\sup_{\|x\|=1} \|T_1(x) + T_2(x)\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|,$$
$$\sup_{\|x\|=1} \|\lambda T_1(x)\| = |\lambda| \cdot \|T_1\|.$$

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, Y χώρος Banach. Τότε ο $B(X, Y)$ είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Έστω μια ακολουθία φραγμένων τελεστών T_n τέτοια ώστε $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty$. Τότε για κάθε $x \in X$ έχουμε
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_n(x)\| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\| < \infty.$$
Αφού ο Y είναι χώρος Banach, η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)$ συγκλίνει. Θέτουμε $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)$. Τότε ο T είναι φραγμένος και $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ διότι για $\|x\| \leq 1$ έχουμε
$$\|T(x)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|T_n\|$$
και
$$\left\| T - \sum_{k=1}^{n} T_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|T_k\| \to 0$$
καθώς $n \to \infty$. □

Παράδειγμα. Ο τελεστής $T : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ με $T(f) = f'$ δεν είναι φραγμένος διότι η ακολουθία $f_n(x) = e^{-nx}$ είναι φραγμένη, αλλά η f_n' όχι.

Παράδειγμα. Έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης (δηλ. $p^{-1} + q^{-1} = 1$). Σταθεροποιούμε $g \in L^q$ και ορίζουμε $T_g : L^p \to L^1$ με $T_g(f) = fg$. Τότε ο T_g είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και $\|T_g\| = \|g\|_q$. Πράγματι από την ανισότητα Hölder έχουμε $\|T_g(f)\|_1 \leq \|g\|_q \|f\|_p$ για κάθε $f \in L^p$, άρα $\|T_g\| \leq \|g\|_q$. Έστω τώρα f μια μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $|g| = ge^{if}$ (i είναι η φανταστική μονάδα). Τότε $\|e^{if}|g|^{q-1}\|_p = \|g\|_q^{q/p}$. Άρα

$$\|g\|_q^q = \|T_g(e^{if}|g|^{q-1})\|_1 \leq \|T_g\| \cdot \|e^{if}|g|^{q-1}\|_p = \|T_g\| \cdot \|g\|_q^{q/p}.$$

Επομένως $\|T_g\| \geq \|g\|_q$.

Ορισμός. *Έστω X, Y χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής.*

- *Αν ο T είναι φραγμένος, αντιστρέψιμος, με φραγμένο αντίστροφο (ισοδύναμα, αν ο T είναι επί και υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε $M_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq M_2\|x\|$ για κάθε $x \in X$), τότε λέμε ότι ο T είναι ισομορφισμός και οι X, Y ισομορφικοί (γράφουμε $X \sim Y$).*
- *Αν $\|T(x)\| = \|x\|$ για κάθε x, τότε λέμε ότι ο T είναι ισομετρία και ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον Y (γράφουμε $X \hookrightarrow Y$).*
- *Αν ο T είναι ισομετρία και επί, τότε λέμε ότι οι X και Y είναι ισομετρικοί (γράφουμε $X \cong Y$).*

Ορισμός. *Έστω X χώρος με νόρμα. Δυο νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ στον X λέγονται ισοδύναμες, αν η ταυτοτική απεικόνιση*

$$\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$$

είναι ισομορφισμός. Ισοδύναμα, αν υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ έτσι ώστε $M_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M_2\|x\|_1$ για κάθε x.

Παράδειγμα. $M(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})) \cong \ell^1$, μέσω της ισομετρίας $T : M(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})) \to \ell^1$, $T(\mu)(n) = \mu(\{n\})$.

Παράδειγμα. $L^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$ μέσω της ισομετρίας

$$T(f)(A) = \int_A f(x)\,dx, \quad A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n).$$

Η T δεν είναι επί (για παράδειγμα, ένα μέτρο Dirac δεν ανήκει στην εικόνα της T).

4. Χώροι πεπερασμένης διάστασης

Θεώρημα. *Έστω X γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης. Τότε όλες οι νόρμες στον X είναι ισοδύναμες.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ μια αλγεβρική βάση του X. Τότε κάθε $x \in X$ έχει μοναδική αναπαράσταση $x = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) e_k$, όπου $f_k(x) \in \mathbb{F}$. Ορίζουμε μια νόρμα $\|\cdot\|_2$ στον X ως εξής

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

Τότε $(X, \|\cdot\|_2) \cong \mathbb{F}^n$ μέσω της ισομετρίας $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ (το $\mathbb{F}^n$ εννοείται ότι έχει τη συνηθισμένη Ευκλείδεια νόρμα). Έστω τώρα $\|\cdot\|$ μια τυχούσα νόρμα στον X. Θα δείξουμε ότι είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_2$. Παρατηρούμε ότι η μοναδιαία σφαίρα $S_{\|\cdot\|_2}(0,1) = \{y \in X : \|y\|_2 = 1\}$ είναι $\|\cdot\|_2$-συμπαγές σύνολο και θεωρούμε τη συνάρτηση $\Phi : S_{\|\cdot\|_2}(0,1) \to \mathbb{R}$ με $\Phi(x) = \|x\|$. Τότε η Φ είναι $\|\cdot\|_2$-συνεχής διότι

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq \|x - y\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} f_k(x-y) e_k \right\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\| \sum_{k=1}^{n} |f_k(x-y)| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\| \sqrt{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k(x-y)|^2 \right)^{1/2}$$
$$= \max_{1 \leq k \leq n} \|e_k\| \sqrt{n} \|x - y\|_2.$$

Επίσης $\Phi(x) > 0$ για κάθε $x \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$. Επομένως λόγω συμπάγειας υπάρχουν $A, B > 0$ έτσι ώστε $A \leq \|x\| \leq B$ για κάθε $x \in S_{\|\cdot\|_2}(0,1)$. Άρα για κάθε x έχουμε $A\|x\|_2 \leq \|x\| \leq B\|x\|_2$. □

Θεώρημα. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, $(Y, \|\cdot\|')$ τυχόντας χώρος με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι φραγμένος.*

Απόδειξη. Έστω $\{e_1, \ldots e_n\}$ μια αλγεβρική βάση του X. Όπως στην προηγούμενη απόδειξη, ορίζουμε

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)|.$$

Οι $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|_1$ είναι ισοδύναμες, άρα αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι φραγμένος ως προς την $\|\cdot\|_1$. Έχουμε

$$\|T(x)\|' \leq \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \cdot \|T(e_k)\|' \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|' \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| = \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|' \|x\|_1.$$

□

Πορίσματα.

- Έστω X, Y χώροι με νόρμα τέτοιοι ώστε $\dim X = \dim Y < \infty$. Τότε $X \sim Y$.
- Κάθε χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης είναι χώρος Banach.
- Κάθε υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου με νόρμα είναι κλειστός.

Θεώρημα. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε η διάσταση του X είναι υπεραριθμήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπήρχε ακολουθία $e_n \in X$ τέτοια ώστε $X = \langle e_n : n \in \mathbb{N} \rangle$. Τότε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$. Οι υπόχωροι στην προηγούμενη ένωση είναι πεπερασμένης διάστασης, άρα είναι κλειστοί. Επομένως, από το θεώρημα Baire, κάποιος από αυτούς έχει μη κενό εσωτερικό και συνεπώς ταυτίζεται με ολόκληρο το χώρο. Αυτό είναι άτοπο αφού υποθέσαμε ότι ο X είναι απειροδιάστατος. □

Θεώρημα. *Ένας χώρος με νόρμα X είναι τοπικά συμπαγής αν και μόνο αν έχει πεπερασμένη διάσταση.*

Απόδειξη. Αν ο X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε είναι ισομορφικός με τον $\mathbb{F}^n$ ο οποίος είναι τοπικά συμπαγής. Αντίστροφα, αν ένας χώρος με νόρμα είναι τοπικά συμπαγής, τότε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές, ιδιαίτερα η σφαίρα $S(0,1)$ είναι συμπαγής. Έστω ότι ο X δεν είναι πεπερασμένης διάστασης. Επιλέγουμε e_1, με $\|e_1\| = 1$. Αφού ο X είναι απειροδιάστατος, υπάρχει $x \notin \langle e_1 \rangle$. Το $\langle e_1 \rangle$ είναι κλειστό, άρα $\delta := \operatorname{dist}(x, \langle e_1 \rangle) > 0$. Επομένως υπάρχει $y \in \langle e_1 \rangle$ τέτοιο ώστε $0 < \|x - y\| < 2\delta$. Θέτουμε $e_2 = \dfrac{x - y}{\|x - y\|}$. Τότε $\|e_2\| = 1$ και $\operatorname{dist}(e_2, \langle e_1 \rangle) \geq 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία σημείων e_n πάνω στη μοναδιαία σφαίρα τέτοια ώστε $\operatorname{dist}(e_n, \langle e_k : k < n \rangle) \geq 1/2$. Επομένως τα σημεία της ακολουθίας απέχουν ανά δύο απόσταση τουλάχιστο $1/2$. Άρα η ακολουθία δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο διότι η σφαίρα είναι συμπαγές σύνολο. □

5. Ο χώρος πηλίκο

Έστω X γραμμικός χώρος και $Y \subset X$ γραμμικός υπόχωρος. Θέτουμε

$$X/Y = \{x + Y : x \in X\}.$$

Το X/Y ονομάζεται σύνολο πηλίκο και τα στοιχεία του σύμπλοκα. Το X/Y γίνεται γραμμικός χώρος με πράξεις

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y, \quad x_1, x_2 \in X,$$

$$\lambda(x + Y) = \lambda x + Y, \quad x \in X, \lambda \in \mathbb{F}.$$

Το ουδέτερο στοιχείο είναι το σύμπλοκο Y. Η διάσταση του X/Y είναι η συνδιάσταση του Y. Αν επιπλέον ο X είναι χώρος με νόρμα και ο Y κλειστός υπόχωρος, τότε ορίζουμε

$$\|x + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y).$$

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα και $Y \subset X$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος. Τότε*

(1) *Ο $(X/Y, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα.*
(2) *Η φυσική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$ με $Q(x) = x + Y$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.*
(3) *Αν ο X είναι χώρος Banach, τότε και ο X/Y είναι χώρος Banach.*
(4) *Αν ο Y και ο X/Y είναι χώροι Banach τότε και ο X είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη.

(1) Αν $\|x + Y\| = 0$ τότε $\operatorname{dist}(x, Y) = 0$, άρα $x \in Y$ αφού Y κλειστός. Επομένως, $x + Y = Y$. Επίσης, για $x_1, x_2 \in X$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$ έχουμε

$$\|(x_1 + x_2) + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x_1 + x_2 + y\| \leq \|x_1 + x_2 + y_1 + y_2\| \leq \|x_1 + y_1\| + \|x_2 + y_2\|,$$

για κάθε $y_1, y_2 \in Y$. Παίρνοντας inf ως προς y_1 και y_2 στην προηγούμενη σχέση, έχουμε την τριγωνική ανισότητα. Τέλος

$$\|\lambda(x_1 + Y)\| = |\lambda| \inf_{y \in Y} \left\| x_1 + \frac{y}{\lambda} \right\| = |\lambda| \inf_{y \in Y} \|x_1 + y\| = |\lambda| \|x_1 + Y\|.$$

(2) $\|Q(x)\| = \|x + Y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| \leq \|x\|$. Άρα Q φραγμένος και μάλιστα $\|Q\| \leq 1$.

(3) Έστω $x_n + Y \in X/Y$ τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + Y\| < \infty$. Επιλέγουμε $y_n \in Y$ τέτοια ώστε $\|x_n + y_n\| < 2\|x_n + Y\|$. Τότε $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\| < \infty$. Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = x$. Αφού η Q είναι συνεχής έχουμε

$$x + Y = Q(x) = Q\left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} Q(x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n + Y) = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n + Y).$$

(4) Έστω x_n μια ακολουθία Cauchy στον X. Τότε η $x_n + Y$ είναι Cauchy στον X/Y άρα υπάρχει $x + Y \in X/Y$ τέτοιο ώστε $(x_n + Y) - (x + Y) \to 0$. Επομένως υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} με $\|(x_{k_n} - x) + Y\| < 1/n$. Άρα υπάρχουν $y_n \in Y$ με $\|x_{k_n} + y_n - x\| < 1/n$. Τότε η y_n είναι Cauchy διότι

$$\|y_n - y_m\| \leq \|x_{k_n} + y_n - x\| + \|x_{k_n} - x_{k_m}\| + \|x_{x_m} + y_m - x\| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \|x_{k_n} - x_{k_m}\|.$$

Αφού ο Y είναι χώρος Banach, $y_n \to y$ για κάποιο $y \in Y$. Αλλά $x_{k_n} + y_n - x \to 0$, άρα $x_{k_n} \to x - y$. Δηλαδή η x_n είναι Cauchy και έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, επομένως συγκλίνει.

□

Παράδειγμα. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, ο $Y \subset X$ κλειστός υπόχωρος και ο $Z \subset X$ υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης, τότε ο $Y + Z$ είναι κλειστός. Πράγματι, ο $Q(Z)$ είναι υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης του X/Y, άρα κλειστός. Επομένως η αντίστροφη εικόνα $Q^{-1}(Q(Z))$ είναι κλειστό σύνολο. Αλλά $Q^{-1}(Q(Z)) = Y + Z$.

Παράδειγμα. Θέτουμε

$$A = \{x \in \ell^2 : \forall k \in \mathbb{N}\ x(2k) = 0\},$$
$$B = \{x \in \ell^2 : \forall k \in \mathbb{N}\ x(2k-1) = 0\}.$$

Τότε A, B κλειστοί υπόχωροι, $\ell^2 = A \oplus B$ και $\ell^2/A \cong B$, $\ell^2/B \cong A$, μέσω των ισομετριών

$$b \mapsto b + A,\ b \in B, \quad \text{και} \quad a \mapsto a + B,\ a \in A$$

αντίστοιχα.

6. Φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή - Ο δυϊκός χώρος

Αν ο X είναι γραμμικός χώρος, τότε μια γραμμική απεικόνιση $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ λέγεται γραμμικό συναρτησοειδές. Ο πυρήνας ενός μη τετριμμένου συναρτησοειδούς έχει πάντα συνδιάσταση 1. Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, θέτουμε $X^* = B(X, \mathbb{F})$. Ο X^* λέγεται (τοπολογικός) δυϊκός του X και είναι πάντα χώρος Banach αφού το $\mathbb{F}$ είναι χώρος Banach.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα και $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ μη τετριμμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, $\Lambda \in X^*$ αν και μόνο αν ο πυρήνας* $\ker\Lambda$ *είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Αν $\Lambda \in X^*$ τότε ο $\ker\Lambda = \Lambda^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό σύνολο σαν αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ορίζουμε τον τελεστή $T : X/\ker\Lambda \to \mathbb{F}$ με $T(x + \ker\Lambda) = \Lambda(x)$ και παρατηρούμε ότι το ακόλουθο διάγραμμα (όπου Q είναι η φυσική απεικόνιση)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "\Lambda"'] & X/\ker\Lambda \arrow[d, "T"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλαδή $\Lambda = T \circ Q$. Αλλά Q φραγμένος. Επίσης T φραγμένος διότι $\dim(X/\ker\Lambda) = 1$. Άρα T φραγμένος. □

Παράδειγμα. Αν ο X είναι απειροδιάστατος χώρος με νόρμα, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές Λ το οποίο δεν είναι φραγμένο. Πράγματι, έστω $e_n \in X$ μια ακολουθία από γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία. Επεκτείνουμε το σύνολο $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ σε μια αλγεβρική βάση του X, έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{f_i : i \in I\}$, και ορίζουμε το Λ ως εξής:

$$\Lambda(e_n) = n\|e_n\|, \ \Lambda(f_i) = 0.$$

Το Λ δεν είναι φραγμένο διότι

$$\sup_{\|x\|=1} |\Lambda(x)| \geq \left|\Lambda\left(\frac{e_n}{\|e_n\|}\right)\right| = n$$

για κάθε n.

Παράδειγμα. $(\mathbb{F}^n)^* \sim \mathbb{F}^n$, διότι $\dim \mathbb{F}^n = \dim(\mathbb{F}^n)^* = n < \infty$.

Παράδειγμα (Το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz)**.** Έστω X τοπικά συμπαγής μετρικός χώρος τέτοιος ώστε κάθε ανοιχτό σύνολο είναι αριθμήσιμη ένωση συμπαγών συνόλων. Τότε $C_0(X)^* \cong M(X, \mathscr{B}(X))$ μέσω της ισομετρίας

$$T : M(X, \mathscr{B}(X)) \to C_0(X)^*$$
$$T(\mu)(f) = \int f \, d\mu.$$

Σαν ειδική περίπτωση έχουμε ότι $c_0^* \cong \ell^1$ μέσω της ισομετρίας

$$T : \ell^1 \to c_0^*$$
$$T(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n).$$

Αυτό προκύπτει από το ότι $c_0 = C_0(\mathbb{N})$ και το ότι $M(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})) \cong \ell^1$, μέσω της ισομετρίας

$$M(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N})) \ni \mu \mapsto (\mu(\{n\}))_{n=1}^{\infty} \in \ell^1.$$

Παράδειγμα. Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος θετικού μέτρου και $1 < p < \infty$. Τότε $(L^p(X, \mathscr{A}, \mu))^* \cong L^q(X, \mathscr{A}, \mu)$, μέσω της ισομετρίας

$$T : L^q(X, \mathscr{A}, \mu) \to (L^p(X, \mathscr{A}, \mu))^*$$
$$T(g) = \Lambda_g,$$

όπου $\Lambda_g(f) = \displaystyle\int fg$ και q ο συζυγής εκθέτης. Για απλότητα θα δώσουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου $\mu(X) < \infty$. Η T είναι καλά ορισμένη από την ανισότητα Hölder, η οποία επίσης μας δίνει ότι $\|T(g)\| \leq \|g\|_q$. Απ'την άλλη, για κατάλληλη πραγματική συνάρτηση f έχουμε

$$\|g\|_q^q = \int |g|^q = \int g e^{if}|g|^{q-1} = |\Lambda_g(e^{if}|g|^{q-1})| \leq \|T(g)\| \cdot \|e^{if}|g|^{q-1}\|_p = \|T(g)\| \cdot \|g\|_q^{q/p}.$$

Επομένως $\|g\|_q \leq \|T(g)\|$, άρα η T είναι ισομετρία. Δείχνουμε τώρα ότι η T είναι επί, δηλαδή αν $\Lambda \in (L^p)^*$ τότε υπάρχει $g \in L^q$ τέτοιο ώστε $\Lambda = \Lambda_g$. Θέτουμε $\nu(A) = \Lambda(\chi_A)$ για κάθε A μετρήσιμο. Τότε το ν είναι μέτρο διότι αν A_n είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων, τότε

$$\chi_{\bigcup_{n=1}^\infty A_n} = \sum_{n=1}^\infty \chi_{A_n}$$

(ως προς την $\|\cdot\|_p$), άρα

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \Lambda(A_n) = \sum_{n=1}^\infty \nu(A_n)$$

διότι η Λ είναι συνεχής. Επίσης το ν είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ διότι αν $\mu(A) = 0$ τότε $\chi_A = 0$ (με την έννοια των L^p χώρων), άρα $\nu(A) = \Lambda(0) = 0$. Επομένως, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει g ολοκληρώσιμη τέτοια ώστε

$$\nu(A) = \int_A g\, d\mu.$$

Από αυτό συνεπάγεται ότι

$$\Lambda(s) = \int gs$$

για κάθε s απλή. Δείχνουμε τώρα ότι $g \in L^q$. Σταθεροποιούμε $M > 0$, θέτουμε $A = \{|g| \leq M\}$ και γράφουμε όπως πριν $|g| = e^{if}g$ για κατάλληλη πραγματική f. Τότε η συνάρτηση $e^{if}|g|^{q-1}\chi_A$ ανήκει στον L^p επομένως για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει απλή συνάρτηση s με $\|s - e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p < \varepsilon$. Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_A |g|^q &\leq \int_A |g| \cdot |e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s| + \left|\int gs\chi_A\right| \leq M(\mu(X))^{1/q}\|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s\|_p + |\Lambda(s\chi_A)| \\
&\leq M(\mu(X))^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\| \cdot \|s\|_p \leq M(\mu(X)^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\|(\|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A - s\|_p + \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p) \\
&\leq M(\mu(X))^{1/q}\varepsilon + \|\Lambda\|(\varepsilon + \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p).
\end{aligned}$$

Η προηγούμενη σχέση ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, άρα

$$\int_A |g|^q \leq \|\Lambda\| \cdot \|e^{if}|g|^{q-1}\chi_A\|_p = \|\Lambda\|\left(\int_A |g|^q\right)^{1/p}.$$

Επομένως

$$\left(\int_{\{|g|\leq M\}} |g|^q\right)^{1/q} \leq \|\Lambda\|$$

για κάθε $M > 0$, άρα $g \in L^q$. Συμπεραίνουμε ότι $\Lambda(s) = \Lambda_g(s)$ για κάθε s απλή, άρα $\Lambda = \Lambda_g$, αφού Λ, Λ_g συνεχείς και το σύνολο των απλών συναρτήσεων είναι πυκνό στον L^p.

Ειδική περίπτωση αυτού του αποτελέσματος είναι το ότι $(\ell^p)^* \cong \ell^q$ μέσω της ισομετρίας

$$T : \ell^q \to (\ell^p)^*$$
$$T(x)(y) = \sum_{n=1}^\infty x(n)y(n).$$

Παράδειγμα (Απόδειξη παρόμοια με την προηγούμενη)**.** Έστω $(X, \mathscr{A}, \mu)$ χώρος θετικού σ-πεπερασμένου μέτρου. Τότε $(L^1(X, \mathscr{A}, \mu))^* \cong L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu)$, μέσω της ισομετρίας

$$T : L^\infty(X, \mathscr{A}, \mu) \to (L^1(X, \mathscr{A}, \mu))^*$$
$$T(g)(f) = \int fg.$$

Ειδική περίπτωση: $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ μέσω της ισομετρίας

$$T : \ell^\infty \to (\ell^1)^*$$
$$T(x)(y) = \sum_{n=1}^\infty x(n)y(n).$$

Η υπόθεση ότι το μέτρο πρέπει να είναι σ-πεπερασμένο είναι απαραίτητη (σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, όπου το αποτέλεσμα ισχύει για αυθαίρετα μέτρα).

7. Το θεώρημα Hahn-Banach

Ορισμός. *Έστω X γραμμικός χώρος.*

- *Μια απεικόνιση $q : X \to \mathbb{R}$ λέγεται υπογραμμικό συναρτησοειδές αν*
  (1) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, *για κάθε* $x, y \in X$.
  (2) $q(\lambda x) = \lambda q(x)$, *για κάθε* $x \in X$, $\lambda \geq 0$.
- *Μια απεικόνιση $p : X \to [0, \infty)$ λέγεται ημινόρμα αν*
  (1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, *για κάθε* $x, y \in X$.
  (2) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, *για κάθε* $x \in X$, $\lambda \in \mathbb{F}$.

Μια νόρμα είναι ημινόρμα και μια ημινόρμα είναι υπογραμμικό συναρτησοειδές.

Θεώρημα. *Έστω X ένας $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος, $q : X \to \mathbb{R}$ ένα υπογραμμικό συναρτησοειδές, και $Y \subset X$ ένας γραμμικός υπόχωρος με $\dim(X/Y) = 1$. Αν $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $\varphi(y) \leq q(y)$ για κάθε $y \in Y$, τότε υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές $F : X \to \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F|_Y = \varphi$ και $F \leq q$ (δηλαδή το φ έχει φραγμένη γραμμική επέκταση σ'ολόκληρο το χώρο).*

Απόδειξη. Αφού ο Y έχει συνδιάσταση 1, υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε

$$X = Y \oplus \langle x_0 \rangle = \{y + tx_0 : y \in Y,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Επομένως για να προσδιορίσουμε το F αρκεί να προσδιορίσουμε το $F(x_0)$. Ας υποθέσουμε υπάρχει μια τέτοια επέκταση F και ας θέσουμε $a_0 = F(x_0)$. Θα βρούμε ποιές συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί το a_0 ώστε $F \leq q$ και στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αυτές οι συνθήκες όντως ικανοποιούνται από κάποιον αριθμό.

Έστω $t > 0$. Τότε για κάθε $y_1 \in Y$ έχουμε

$$F(y_1 + tx_0) = \varphi(y_1) + ta_0 \leq q(y_1 + tx_0)$$

ισοδύναμα

$$a_0 \leq -\varphi\left(\frac{y_1}{t}\right) + q\left(x_0 + \frac{y_1}{t}\right).$$

Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $y_1 \in Y$, άρα είναι ισοδύναμη με

$$a_0 \leq -\varphi(y_1) + q(x_0 + y_1), \tag{*}$$

για κάθε $y_1 \in Y$. Το ίδιο επιχείρημα για $t < 0$ δίνει ότι

$$a_0 \geq \varphi(y_2) - q(-x_0 + y_2), \tag{**}$$

για κάθε $y_2 \in Y$. Δηλαδή αν το a_0 ικανοποιεί τις $(*)$ και $(**)$, τότε $F \leq q$. Τώρα, για να υπάρχει τέτοιο a_0 θα πρέπει $\varphi(y_2) - q(-x_0 + y_2) \leq -\varphi(y_1) + q(x_0 + y_1)$ για κάθε $y_1, y_2 \in Y$. Αλλά αυτό ισχύει διότι

$$\varphi(y_1) + \varphi(y_2) = \varphi(y_1 + y_2) \leq q(y_1 + y_2) \leq q(x_0 + y_1) + q(-x_0 + y_2).$$

Συνεπώς αν επιλέξουμε a_0 τέτοιο ώστε

$$\sup_{y \in Y}[\varphi(y) - q(-x_0 + y)] \leq a_0 \leq \inf_{y \in Y}[-\varphi(y) + q(x_0 + y)]$$

τότε η $F(y + tx_0) = \varphi(y) + ta_0$ είναι η ζητούμενη επέκταση. □

Θεώρημα. *Το προηγούμενο θεώρημα ισχύει για κάθε γραμμικό υπόχωρο $Y \subset X$.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$\mathscr{A} = \{(Z, f) \mid Y \subset Z \subset X$ γραμμ. υπόχωρος, $f : Z \to \mathbb{R}$ γραμμ. συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $f|_Y = \varphi,\ f \leq q\}$.

Ορίζουμε μια μερική διάταξη $\leq$ στο $\mathscr{A}$ ως εξής: $(Z_1, f_1) \leq (Z_2, f_2)$ αν και μόνο αν $Z_1 \subset Z_2$ και $f_2|_{Z_1} = f_1$. Έστω τώρα $(Z_i, f_i)_{i \in I}$ μια αλυσίδα στο $\mathscr{A}$. Θέτουμε $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ και ορίζουμε $f : Z \to \mathbb{R}$ με $f(z) = f_i(z)$ αν $z \in Z_i$. Τότε το (Z, f) είναι άνω φράγμα της αλυσίδας στο $\mathscr{A}$, άρα από το λήμμα του Zorn, το $\mathscr{A}$ έχει maximal στοιχείο, έστω (Z_0, f_0). Αλλά $Z_0 = X$ διότι αν υπήρχε $x_0 \notin Z_0$, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα υπήρχε γραμμική επέκταση $\widetilde{f_0}$ του f_0 στον υπόχωρο $Z_0 \oplus \langle x_0 \rangle$ τέτοια ώστε $\widetilde{f_0} \leq q$. Άρα $(Z_0, f_0) \lneqq \left(Z_0 \oplus \langle x_0 \rangle, \widetilde{f_0}\right)$, άτοπο γιατί το (Z_0, f_0) είναι maximal. Επομένως η $f_0 : X \to \mathbb{R}$ είναι η ζητούμενη επέκταση. □

Θεώρημα (Hahn-Banach). *Έστω X ένας $\mathbb{F}$-γραμμικός χώρος με νόρμα, $Y \subset X$ γραμμικός υπόχωρος και p μια ημινόρμα στον X. Αν $f : Y \to \mathbb{F}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές τέτοιο ώστε $|f| \leq p$, τότε το f έχει μια γραμμική επέκταση $F : X \to \mathbb{F}$ τέτοια ώστε $|F| \leq p$.*

Απόδειξη.

(1) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, τότε από το προηγούμενο θεώρημα, το f έχει γραμμική επέκταση $F : X \to \mathbb{R}$ με $F \leq p$. Αλλά τότε $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$, άρα $|F| \leq p$.
(2) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, τότε θέτουμε $u = \mathrm{Re}f$ και βλέπουμε το u σαν $\mathbb{R}$-γραμμικό. Έτσι, από το (1), το u έχει $\mathbb{R}$-γραμμική επέκταση $U : X \to \mathbb{R}$ με $|U| \leq p$. Θέτουμε $F(x) = U(x) - iU(ix)$. Τότε το F είναι $\mathbb{C}$-γραμμικό διότι $F(ix) = iF(x)$. Επίσης το F επεκτείνει το f αφού για $y \in Y$ έχουμε
$$F(y) = \mathrm{Re}f(y) - i\mathrm{Re}(if(y)) = \mathrm{Re}f(y) + i\mathrm{Im}f(y) = f(y).$$
Τέλος για κάθε x υπάρχει θ τέτοιο ώστε
$$|F(x)| = e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x) = U(e^{i\theta}x) \leq p(e^{i\theta}x) = p(x).$$

□

Πορίσματα.

(1) Αν ο X είναι χώρος με νόρμα, $Y \subset X$ γραμμικός υπόχωρος και $y^* \in Y^*$, τότε υπάρχει $x^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $x^*|_Y = y^*$ και $\|x^*\| = \|y^*\|$. Αυτό προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα αν θέσουμε $p(x) = \|y^*\| \cdot \|x\|$.
(2) Έστω X χώρος με νόρμα, Y κλειστός γραμμικός υπόχωρος, και $x_0 \notin Y$. Τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x_0^*|_Y = 0$ και $x^*(x_0) = \mathrm{dist}(x_0, Y) =: d$. Αυτό φαίνεται ως εξής: Θέτουμε $Z = Y \oplus \langle x_o \rangle$ και ορίζουμε $z^* : Z \to \mathbb{F}$ με $z^*(y + \lambda x_0) = \lambda d$, $y \in Y$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Τότε
$$\sup_{\|z\|=1} |z^*(z)| = \sup_{z \neq 0} \frac{|z^*(z)|}{\|z\|} = \sup_{y \in Y,\ \lambda \neq 0} \frac{|\lambda| d}{\|y + \lambda x_0\|} = \sup_{y \in Y} \frac{d}{\|y + x_0\|} = \frac{d}{\inf_{y \in Y} \|y + x_0\|} = 1.$$
Άρα $z^* \in Z^*$ και $\|z^*\| = 1$. Από το πόρισμα (1) υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| = \|z^*\| = 1$, $x_0^*|_Y = z^*|_Y = 0$, και $x_0^*(x_0) = z^*(x_0) = d$.
(3) Έστω X χώρος με νόρμα και $x_0 \neq 0$. Τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $\|x_0^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x_0^*(x_0) = \|x_0\|$. Αυτό προκύπτει από το πόρισμα (2) με $Y = \{0\}$.
(4) Άμεση συνέπεια του (3) είναι ότι για κάθε x έχουμε
$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)|,$$
και μάλιστα το sup είναι max. Παρατηρήστε ότι η προηγούμενη σχέση προκύπτει από ένα μη προφανές θεώρημα, ενώ η «δυϊκή» σχέση
$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} |x^*(x)|$$
είναι τετριμμένη συνέπεια του ορισμού της νόρμας ενός συναρτησοειδούς.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα. Αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος, τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του X^*. Για κάθε n επιλέγουμε $x_n \in X$ στη μοναδιαία σφαίρα του X έτσι ώστε $|x_n^*(x_n)| > 1/2$ και θέτουμε $Y = \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$. Τότε $Y = X$, διαφορετικά, από Hahn-Banach, θα υπήρχε $x^* \in X^*$ με νόρμα 1 τέτοιο ώστε $x^*|_Y = 0$. Επιλέγουμε τώρα x_n^* με $\|x_n^* - x^*\| < 1/2$. Τότε $1/2 < |x_n^*(x_n)| = |(x_n^* - x^*)(x_n)| \leq \|x_n^* - x^*\| < 1/2$, άτοπο. □

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Ο ℓ^1 είναι διαχωρίσιμος, αλλά ο δυϊκός του είναι ισομετρικός με τον ℓ^∞ ο οποίος δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός. *Έστω X χώρος με νόρμα. Ο δυϊκός του X^* λέγεται δεύτερος δυϊκός και συμβολίζεται με X^{**}. Ορίζουμε τώρα μια απεικόνιση $J : X \to X^{**}$ με $J(x)(x^*) = x^*(x)$. Η J ονομάζεται κανονική εμφύτευση και είναι ισομετρία διότι*
$$\|J(x)\| = \sup_{\|x^*\|=1} |J(x)(x^*)| = \sup_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| = \|x\|.$$
Αν επιπλέον η J είναι επί τότε ο X λέγεται αυτοπαθής (reflexive).

Η J μας επιτρέπει να δούμε τον X σαν υπόχωρο του X^{**} ($X \hookrightarrow X^{**}$) και να γράφουμε (καταχρηστικά) $x(x^*)$ (θεωρώντας το x συναρτησοειδές που δρα πάνω στον πρώτο δυϊκό, δηλαδή στοιχείο του δεύτερου δυϊκού). Η έκφραση $x(x^*)$ πάντα θα σημαίνει $J(x)(x^*)$.

Παράδειγμα. Ο c_0 δεν είναι αυτοπαθής διότι είναι διαχωρίσιμος, ενώ ο c_0^{**} είναι ισομετρικός με τον ℓ^∞ ο οποίος δεν είναι διαχωρίσιμος. Ομοίως ο ℓ^1 δεν είναι αυτοπαθής διότι αν ήταν τότε ο $(\ell^1)^{**}$ θα ήταν διαχωρίσιμος, άρα και ο $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ θα ήταν διαχωρίσιμος.

Παράδειγμα. Έστω $1 < p < \infty$. Τότε ο ℓ^p είναι αυτοπαθής. Πράγματι, θεωρούμε τις ισομετρίες

$$S : \ell^p \to (\ell^q)^*, \quad S(x)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n),$$
$$T : \ell^q \to (\ell^p)^*, \quad T(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)y(n),$$
$$R : (\ell^q)^* \to (\ell^p)^{**}, \quad R(y^*) = y^* \circ T^{-1}.$$

Οι τρεις αυτές απεικονίσεις είναι επί και το παρακάτω διάγραμμα μεταθετικό (δηλαδή $J = R \circ S$).

$$\begin{tikzcd}
\ell^p \arrow[r, "S"] \arrow[dr, "J"'] & (\ell^q)^* \arrow[d, "R"] \\
 & (\ell^p)^{**}
\end{tikzcd}$$

Επομένως η J είναι επί, άρα ο ℓ^p είναι αυτοπαθής.

8. Ο δυϊκός ενός υπόχωρου και ο δυϊκός του χώρου πηλίκο

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $Y \subset X$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος. Θέτουμε*

$$Y^\perp = \{x^* \in X^* : x^*|_Y = 0\}.$$

Τότε

(1) $Y^* \cong X^*/Y^\perp$.
(2) $(X/Y)^* \cong Y^\perp$.

Απόδειξη.

(1) Από θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $y^* \in Y^*$, υπάρχει επέκταση $l_{y^*} \in X^*$ (δηλαδή $l_{y^*}|_Y = y^*$), με $\|l_{y^*}\| = \|y^*\|$. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$T : Y^* \to X^*/Y^\perp, \quad T(y^*) = l_{y^*} + Y^\perp.$$

Η T είναι καλά ορισμένη διότι αν $x_1^*, x_2^* \in X^*$ είναι δύο επεκτάσεις του y^* τότε $(x_1^* - x_2^*)|_Y = 0$, άρα $x_1^* + Y^\perp = x_2^* + Y^\perp$. Προφανώς, η T είναι επί. Τέλος, η T είναι ισομετρία. Πράγματι, για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε $\|T(y^*)\| = \|l_{y^*} + Y^\perp\| \leq \|l_{y^*}\| = \|y^*\|$. Απ'την άλλη, για κάθε $x_0^* \in Y^\perp$, έχουμε $(l_{y^*} + x_0^*)|_Y = y^*$, άρα $\|y^*\| \leq \|l_{y^*} + x_0^*\|$. Επομένως $\|y^*\| \leq \|l_{y^*} + Y^\perp\| = \|T(y^*)\|$.

(2) Θεωρούμε την απεικόνιση

$$S : (X/Y)^* \to Y^\perp, \quad S(\Lambda) = \Lambda \circ Q,$$

όπου Q είναι η φυσική απεικόνιση $Q : X \to X/Y$, $Q(x) = x + Y$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "S(\Lambda)=\Lambda\circ Q"'] & X/Y \arrow[d, "\Lambda"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

Η S είναι καλά ορισμένη διότι $S(\Lambda)|_Y = 0$. Η S είναι επί γιατί αν $x_0^* \in Y^\perp$, και θέσουμε

$$\Lambda_0 : X/Y \to \mathbb{F}, \quad \Lambda_0(x + Y) = x_0^*(x).$$

τότε Λ_0 καλά ορισμένη, $\Lambda_0 \in (X/Y)^*$, και $S(\Lambda_0) = x_0^*$. Τέλος, η S είναι ισομετρία διότι για κάθε $\Lambda \in (X/Y)^*$, έχουμε $\|S(\Lambda)\| = \|\Lambda \circ Q\| \leq \|\Lambda\| \cdot \|Q\| \leq \|\Lambda\|$. Επίσης, για κάθε $x + Y \in X/Y$ και κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$|\Lambda(x + Y)| = |\Lambda(x + y + Y)| = |\Lambda(Q(x + y))| \leq \|S(\Lambda)\| \cdot \|x + y\|.$$

Επομένως, $|\Lambda(x + Y)| \leq \|S(\Lambda)\| \cdot \|x + Y\|$. Άρα, $\|\Lambda\| \leq \|S(\Lambda)\|$.

□

9. Τα θεωρήματα ανοιχτής απεικόνισης, κλειστού γραφήματος και ομοιόμορφου φράγματος

Θεώρημα (Ανοιχτής απεικόνισης)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος και επί γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση (στέλνει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα).*

Απόδειξη. Ισχυριζόμαστε κατ'αρχάς ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D_Y(0,\delta) \subset T(D_X(0,\varepsilon))$. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kD_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right),$$

επομένως

$$Y = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)\right).$$

Ο Y είναι χώρος Banach, άρα από το θεώρημα Baire, υπάρχει k_n τέτοιο ώστε

$$\left[\overline{k_n T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)\right)}\right]^\circ \neq \emptyset,$$

άρα

$$\left[\overline{T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)\right)}\right]^\circ \neq \emptyset.$$

συνεπώς υπάρχουν $y_0 \in Y$ και $0 < \delta_n < 1/n$ τέτοια ώστε

$$D_Y(y_0, \delta_n) \subset \overline{T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)\right)}.$$

Τότε

$$D_Y(0, \delta_n) \subset \overline{T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n}\right)\right)}.$$

Πράγματι, αν $y \in D_Y(0,\delta_n)$, τότε $y + y_0 \in \overline{T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)\right)}$, άρα υπάρχει ακολουθία $x_i \in D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)$ τέτοια ώστε $T(x_i) \to y + y_0$. Επίσης, υπάρχει $x_i' \in D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n-1}\right)$ τέτοια ώστε $T(x_i') \to y_0$. Επομένως $T(x_i - x_i') \to y$. Αλλά $x_i - x_i' \in D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n}\right)$, άρα $y \in \overline{T\left(D_X\left(0, \varepsilon 2^{-n}\right)\right)}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι $D_Y(0,\delta_1) \subset T(D_X(0,\varepsilon))$, από το οποίο προκύπτει ο ισχυρισμός. Έστω $y \in D_Y(0,\delta_1)$. Τότε υπάρχει $x_1 \in X$ με $\|x_1\| < \varepsilon/2$ τέτοιο ώστε $\|y - T(x_1)\| < \delta_2$, άρα υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| < \varepsilon/4$ τέτοιο ώστε $\|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \delta_3$. Παίρνουμε έτσι μια ακολουθία σημείων $x_n \in X$ με $\|x_n\| < \varepsilon 2^{-n}$ και

$$\|y - T\left(x_1 + \cdots + x_n\right)\| < \delta_{n+1}.$$

Αφού ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| < \varepsilon$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$. Αλλά

$$\|y - T\left(x_1 + \cdots + x_n\right)\| \to 0$$

καθώς $n \to \infty$, άρα $y = T(x)$. Επομένως $y \in T(D_X(0,\varepsilon))$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, θα δείξουμε ότι αν το $U \subset X$ είναι ανοιχτό, τότε το $T(U)$ είναι ανοιχτό. Έστω $y \in T(U)$, τότε υπάρχουν $x \in U$ και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε $y = T(x)$ και $D_X(x,\varepsilon) \subset U$. Επομένως $T(D_X(0,\varepsilon)) \subset -y + T(U)$. Αλλά από τα προηγούμενα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $D_Y(0,\delta) \subset T(D_X(0,\varepsilon))$. Άρα $D_Y(y,\delta) \subset T(U)$, συνεπώς το $T(U)$ είναι ανοιχτό. □

Θεώρημα (Αντίστροφης απεικόνισης)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ 1-1 & επί φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Από θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, ο T είναι ανοιχτή απεικόνιση, άρα ο T^{-1} είναι συνεχής. □

Ορισμός. *Αν X_n είναι μια ακολουθία χώρων με νόρμα και $1 \leq p \leq \infty$, τότε θέτουμε*

$$\bigoplus_p X_n = \left\{ x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \|x(n)\|^p < \infty \right\}, \ \text{αν } 1 \leq p < \infty,$$

$$\bigoplus_p X_n = \left\{ x \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n \ : \ \sup_n \|x(n)\| < \infty \right\}, \ \text{αν } p = \infty.$$

Το $\bigoplus_p X_n$ ονομάζεται p-άθροισμα της ακολουθίας X_n. Για κάθε $x \in \bigoplus_p X_n$ θέτουμε

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \ \text{αν } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|x\|_p = \sup_n \|x(n)\|, \ \ \text{αν } p = \infty.$$

Το p-άθροισμα γενικεύει τους ℓ^p χώρους (όπου $X_n = \mathbb{F}$). Παρατηρήστε ότι το p-άθροισμα μιας ακολουθίας χώρων Banach είναι χώρος Banach.

Θεώρημα (Κλειστού γραφήματος). *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε το γράφημα*

$$\mathrm{Gr}(T) := \{(x, T(x)) : x \in X\}$$

είναι κλειστός υπόχωρος του $X \bigoplus_1 Y$. Τότε ο T είναι φραγμένος.

Απόδειξη. Ο $X \bigoplus_1 Y$ είναι χώρος Banach, άρα το $\mathrm{Gr}(T)$ είναι χώρος Banach. Θεωρούμε τις προβολές

$$P_1 : \mathrm{Gr}(T) \to X, \ P_1(x, T(x)) = x,$$

$$P_2 : \mathrm{Gr}(T) \to Y, \ P_2(x, T(x)) = T(x).$$

Οι P_1, P_2 είναι προφανώς συνεχείς. Επίσης, η P_1 είναι 1-1 & επί, άρα από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, η P_1^{-1} είναι συνεχής. Αλλά $T = P_2 \circ P_1^{-1}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "P_1^{-1}"] \arrow[dr, "T"'] & \mathrm{Gr}(T) \arrow[d, "P_2"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Επομένως η T είναι συνεχής. □

Η υπόθεση της πληρότητας στο θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης είναι απαραίτητη, όπως φαίνεται από τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή

$$I : (C([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (C([0,1]), \|\cdot\|_1), \ I(f) = f$$

($\|\cdot\|_\infty$ είναι η supremum νόρμα, και $\|f\|_1 = \int |f|$). Ο I είναι φραγμένος, 1-1 & επί αλλά δεν είναι ανοιχτή απεικόνιση διότι τότε θα ήταν ισομορφισμός, άτοπο αφού ο $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$ δεν είναι χώρος Banach.

Παράδειγμα. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας απειροδιάστατος, διαχωρίσιμος χώρος Banach, και $\{e_i : i \in \mathscr{I}\}$ μια αλγεβρική βάση του X με $\|e_i\| = 1$ για κάθε i. Αφού ο X είναι χώρος Banach, το $\mathscr{I}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Κάθε $x \in X$ έχει μια μοναδική αναπαράσταση

$$x = \sum_{i \in \mathscr{I}} f_i(x) e_i, \quad f_i(x) \in \mathbb{F}$$

(στο παραπάνω άθροισμα, το πολύ πεπερασμένοι το πλήθος όροι είναι μη μηδενικοί). Ορίζουμε μια άλλη νόρμα $\|.\|_1$ στον X ως εξής:

$$\|x\|_1 = \sum_{i \in \mathscr{I}} |f_i(x)|.$$

Τότε η ταυτοτική απεικόνιση

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|), \quad I(x) = x$$

είναι 1-1 & επί φραγμένος γραμμικός τελεστής, αλλά όχι ανοιχτή, διότι αν ήταν, θα είχαμε $(X, \|\cdot\|_1) \sim (X, \|\cdot\|)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο $(X, \|\cdot\|_1)$ δεν είναι διαχωρίσιμος αφού η βάση είναι υπεραριθμήσιμη και τα στοιχεία της έχουν απόσταση ανά δυο ίση με 2.

Θεώρημα (Αρχή ομοιόμορφου φράγματος). *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_i : X \to Y$, $i \in I$, μια οικογένεια φραγμένων γραμμικών τελεστών τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ έχουμε*

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty.$$

Τότε υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \le M.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i \in I} \{x \in X : \|T_i(x)\| \leq n\} =: \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Τα σύνολα A_n είναι κλειστά διότι οι T_i είναι φραγμένοι, άρα από το θεώρημα Baire, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $A_{n_0}^{\circ} \neq \emptyset$. Επομένως, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $\delta > 0$ τέτοια ώστε $D(x_0, \delta) \subset A_{n_0}$. Έστω τώρα $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Τότε

$$\|T_i(x)\| \leq \frac{2}{\delta} \left(\left\| T_i \left(x_0 + \frac{\delta}{2} x \right) \right\| + \|T_i(x_0)\| \right) \leq \frac{4n_0}{\delta},$$

για κάθε i. Άρα

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{4n_0}{\delta}.$$

□

Θεώρημα (Banach-Steinhaus)**.** *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και $T_n : X \to Y$ μια ακολουθία φραγμένων γραμμικών τελεστών τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ το $\lim T_n(x)$ υπάρχει. Τότε ο τελεστής $T(x) := \lim T_n(x)$ είναι φραγμένος. Δηλαδή, το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας φραγμένων τελεστών είναι φραγμένος τελεστής.*

Απόδειξη. Η ακολουθία $T_n(x)$ είναι φραγμένη για κάθε x (αφού συγκλίνει). Από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\sup_n \|T_n\| \leq M$. Αλλά τότε

$$\|T(x)\| = \lim_n \|T_n(x)\| \leq M\|x\|,$$

για κάθε x. □

10. Στοιχεία γενικής τοπολογίας

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός χώρος είναι ένα ζευγάρι $(X, \mathscr{T})$, όπου X είναι ένα σύνολο και $\mathscr{T}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X τέτοια ώστε:*

- $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.
- *Η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις: αν $G_i \in \mathscr{T}$, $i \in I$, για οποιοδήποτε σύνολο δεικτών I, τότε*
$$\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathscr{T}.$$
- *Η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές: αν $G_1, \dots, G_n \in \mathscr{T}$, τότε $\bigcap_{k=1}^{n} G_k \in \mathscr{T}$.*

Η $\mathscr{T}$ ονομάζεται τοπολογία, και τα στοιχεία της ανοιχτά σύνολα. Ο X λέγεται χώρος Hausdorff, αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά τέτοια ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

Παράδειγμα. Αν ο X είναι ένας μετρικός χώρος, τότε η οικογένεια των ανοιχτών (ως προς τη μετρική!) υποσυνόλων του X είναι μια τοπολογία. Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται μετρικοποιήσιμος αν η τοπολογία του επάγεται από κάποια μετρική.

Παράδειγμα. Αν X είναι ένα σύνολο, τότε οι οικογένειες $\{\emptyset, X\}$ και $\mathscr{P}(X)$ είναι τοπολογίες (τετριμμένη και διακριτή αντίστοιχα).

Παράδειγμα. Αν X είναι ένα άπειρο σύνολο, τότε η οικογένεια $\{A \subset X : \mathrm{card}(X \setminus A) < \infty\}$ είναι μια τοπολογία (η οποία δεν είναι Hausdorff διότι κάθε δυο μη κενά ανοιχτά σύνολα τέμνονται).

Ορισμός. *Έστω $(X, \mathscr{T})$ τοπολογικός χώρος. Μια οικογένεια $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ λέγεται βάση για την τοπολογία, αν κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση συνόλων της $\mathscr{B}$.*

Παράδειγμα. Σ'ένα μετρικό χώρο, η οικογένεια όλων των ανοιχτών δίσκων είναι μια βάση για την τοπολογία που επάγει η μετρική.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, και $x \in X$.*

- *Ένα σύνολο $N \subset X$ λέγεται περιοχή του x αν υπάρχει G ανοιχτό τέτοιο ώστε $x \in G \subset N$. Η οικογένεια όλων των περιοχών του x ονομάζεται σύστημα περιοχών του x.*
- *Μια υποοικογένεια $\mathscr{B}$ του συστήματος περιοχών του x λέγεται βάση περιοχών του x, αν για κάθε περιοχή N του x υπάρχει $B \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset N$.*

Παράδειγμα. Σ'ένα μετρικό χώρο η οικογένεια $\{D(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση περιοχών του x.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, και $A \subset X$.*

- *Το A λέγεται κλειστό, αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.*
- *Το A λέγεται συμπαγές, αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του A έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.*
- *Θέτουμε $\overline{A} = \mathrm{clA} = \bigcap\{\mathrm{F} : \mathrm{A} \subset \mathrm{F},\ F \text{ κλειστό}\}$ (κλειστότητα του A).*
- *Θέτουμε $A^\circ = \mathrm{intA} = \bigcup\{\mathrm{G} : \mathrm{G} \subset \mathrm{A},\ G \text{ ανοιχτό}\}$ (εσωτερικό του A).*

Ορισμός. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, και $x \in X$. Η f λέγεται συνεχής στο x, αν για κάθε περιοχή $V \subset Y$ του $f(x)$ υπάρχει περιοχή $U \subset X$ του x τέτοια ώστε $f(U) \subset V$. Αν η f είναι αντιστρέψιμη, συνεχής σ'ολόκληρο το X, και η f^{-1} είναι συνεχής σ'ολόκληρο το Y, τότε η f λέγεται ομοιομορφισμός.*

Θυμίζουμε ότι ένα κατευθυνόμενο σύνολο είναι ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ τέτοιο ώστε για κάθε $a, b \in \Lambda$ υπάρχει $c \in \Lambda$ με $a \leq c$ και $b \leq c$. Αν τώρα το X είναι κάποιο σύνολο, τότε μια συνάρτηση $x : \Lambda \to X$ ονομάζεται δίκτυο στο X. Όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών (των οποίων γενίκευση αποτελούν τα δίκτυα) χρησιμοποιούμε το συμβολισμό x_λ αντί $x(\lambda)$ (για $\lambda \in \Lambda$).

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στο X, και $x \in X$. Λέμε ότι το x_λ συγκλίνει στο x ($x_\lambda \to x$, $\lim_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x$), αν για κάθε περιοχή N του x, υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in N$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.*

Παρατηρήστε ότι σ'ένα χώρο Hausdorff το όριο ενός δικτύου είναι μοναδικό. Τα δίκτυα παίζουν στους τοπολογικούς χώρους τον ρόλο που παίζουν οι ακολουθίες στους μετρικούς χώρους. Για παράδειγμα, αν το A είναι υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου και x κάποιο σημείο, τότε $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο σημείων του A το οποίο συγκλίνει στο x. Ομοίως, μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο x_λ με $x_\lambda \to x$, έχουμε $f(x_\lambda) \to f(x)$.

Έστω τώρα X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, και έστω

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

το καρτεσιανό τους γινόμενο. Η μικρότερη τοπολογία στο X ως προς την οποία οι προβολές

$$\pi_i : X \to X_i, \quad \pi_i(x) = x(i)$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις, ονομάζεται τοπολογία γινόμενο. Αν το $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ είναι ένα δίκτυο στο X και $x \in X$, τότε $x_\lambda \to x$ αν και μόνο αν $\pi_i(x_\lambda) \to \pi_i(x)$ για κάθε $i \in I$ (δηλαδή το δίκτυο συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη). Μια βάση για την τοπολογία γινόμενο είναι όλα τα σύνολα της μορφής

$$\bigcap_{k=1}^{n} \pi_{i_k}^{-1}\left(G_{i_k}\right),$$

όπου $n = 1, 2, \ldots$, και $G_{i_k} \subset X_{i_k}$ ανοιχτό. Ισοδύναμα, μια βάση αποτελείται από όλα τα «ορθογώνια»

$$\prod_{i \in I} G_i,$$

όπου $G_i = X_i$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένα το πλήθος $i_1, \ldots, i_n$ για τα οποία το G_{i_k} είναι κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του X_{i_k}.

Παράδειγμα. Έστω $f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Τότε, αν ταυτίσουμε τις συναρτήσεις από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με τα σημεία του χώρου $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, έχουμε ότι $f_n \to f$ ως προς την τοπολογία γινόμενο. Παρατηρήστε ότι ο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμος διότι κανένα σημείο του δεν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών. Έτσι έχουμε ένα παράδειγμα «φυσιολογικής» σύγκλισης η οποία δεν μπορεί να περιγραφεί μέσω κάποιας μετρικής.

Θεώρημα. *Το καρτεσιανό γινόμενο χώρων Hausdorff είναι χώρος Hausdorff.*

Θεώρημα. *Το καρτεσιανό γινόμενο μιας αριθμήσιμης οικογένειας μετρικοποιήσιμων χώρων είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.*

Θεώρημα (Tychonoff)**.** *Το καρτεσιανό γινόμενο συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.*

11. Τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι και τοπικά κυρτοί χώροι

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός διανυσματικός χώρος ή TVS (Topological Vector Space) είναι ένας γραμμικός χώρος X με μια τοπολογία τέτοια ώστε το $\{0\}$ είναι κλειστό, και οι πράξεις της πρόσθεσης*

$$X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$$

και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού

$$\mathbb{F} \times X \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda x \in X$$

είναι συνεχείς (τα $X \times X$ και $\mathbb{F} \times X$ έχουν την τοπολογία γινόμενο).

Παρατήρηση. Για κάθε $x_0 \in X$ και $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ με $\lambda_0 \neq 0$, οι απεικονίσεις

$$T_{x_0} : X \to X, \quad T_{x_0}(x) = x_0 + x$$

και

$$M_{\lambda_0} : X \to X, \quad M_{\lambda_0}(x) = \lambda_0 x$$

είναι ομοιομορφισμοί.

Παρατήρηση. Το N είναι περιοχή του 0 αν και μόνο αν το $x + N$ είναι περιοχή του x. Δηλαδή οι περιοχές οποιουδήποτε σημείου καθορίζονται από τις περιοχές του μηδενός. Επίσης, το N είναι περιοχή του 0 αν και μόνο αν το λN είναι περιοχή του 0 για κάθε μη μηδενικό βαθμωτό λ. Τέλος, κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό. (Όλα αυτά προκύπτουν από το ότι οι απεικονίσεις της προηγούμενης παρατήρησης είναι ομοιομορφισμοί.)

Παρατήρηση. Ένας TVS X είναι χώρος Hausdorff. Πράγματι, έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε το $\{x - y\}$ είναι κλειστό και $0 \notin \{x - y\}$, άρα υπάρχει V περιοχή του 0 τέτοια ώστε $x - y \notin V$. Από τη συνέχεια της πρόσθεσης, υπάρχει U περιοχή του 0 τέτοια ώστε $U + U \subset V$. Επομένως $(x - U) \cap (y + U) = \emptyset$.

Παράδειγμα. Έστω X γραμμικός χώρος και $\mathscr{P}$ μια οικογένεια ημινορμών στο X τέτοια ώστε

$$\bigcap_{p \in \mathscr{P}} \{x : p(x) = 0\} = \{0\}.$$

Για κάθε $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}$, $n \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$V_{x, p_1, \dots, p_n, \varepsilon} = \bigcap_{i=1}^{n} \{y : p_i(x - y) < \varepsilon\}.$$

Η $\mathscr{P}$ καθορίζει μια τοπολογία στο X ως εξής: Για κάθε $x \in X$, μια βάση περιοχών για το x είναι η οικογένεια

$$\mathscr{B}_x = \left\{ V_{x, p_1, \dots, p_n, \varepsilon} : \varepsilon > 0, p_1, \dots, p_n \in \mathscr{P}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Δηλαδή, ορίζουμε ένα σύνολο $G \subset X$ να είναι ανοιχτό αν και μονο αν για κάθε $x \in G$ υπάρχει $V \in \mathscr{B}_x$ τέτοιο ώστε $V \subset G$. Με αυτήν την τοπολογία, ο X είναι TVS. Πράγματι, κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι ένα δίκτυο z_γ στο X συγκλίνει σε κάποιο $z \in X$ αν και μόνο αν $p(z_\gamma - z) \to 0$ για κάθε $p \in \mathscr{P}$. Επομένως, αν (x_α, y_α) είναι ένα δίκτυο στο $X \times X$ με $(x_\alpha, y_\alpha) \to (x, y)$ και (λ_β, w_β) είναι ένα δίκτυο στο $\mathbb{F} \times X$ με $(\lambda_\beta, w_\beta) \to (\lambda, w)$, τότε η συνέχεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού προκύπτει από τις ανισότητες

$$p((x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)) \leq p(x_\alpha - x) + p(y_\alpha - y),$$

και

$$p(\lambda_\beta w_\beta - \lambda w) \leq |\lambda_\beta - \lambda| p(w_\beta) + |\lambda| p(w_\beta - w).$$

Τέλος, αν $x \notin \{0\}$, τότε υπάρχει ημινόρμα $p \in \mathscr{P}$ τέτοια ώστε $p(x) > 0$. Άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ με

$$0 \notin \{y : p(x - y) < \varepsilon\}.$$

Επομένως το $\{0\}$ είναι κλειστό.

Ορισμός. *Ένας τοπικά κυρτός χώρος ή LCS (Locally Convex Space) είναι ένας TVS η τοπολογία του οποίου καθορίζεται από μια οικογένεια ημινορμών ακριβώς όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.*

Παράδειγμα. Έστω X μετρικός χώρος. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $C(X)$ όλων των συνεχών συναρτήσεων από το X στο $\mathbb{F}$. Για κάθε $K \subset X$ συμπαγές, και $f \in C(X)$ θέτουμε

$$p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| = \|f|_K\|_\infty.$$

Τότε η τοπολογία που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών $\{p_K : K \subset X$ συμπαγές$\}$ κάνει τον $C(X)$ LCS. Παρατηρήστε ότι ένα δίκτυο f_ξ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση f ως προς την τοπολογία αυτή, αν και μόνο αν $f_\xi \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του X (αυτό ΔΕΝ σημαίνει ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σ'ολόκληρο το X).

Παράδειγμα. Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $H(\Omega)$ όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω. Η τοπολογία που καθορίζει η οικογένεια ημινορμών του προηγούμενου παραδείγματος κάνει τον $H(\Omega)$ LCS.

Παράδειγμα. Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$, $x^* \in X^*$ θέτουμε $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$. Η τοπολογία που καθορίζει στον X η οικογένεια ημινορμών $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ ονομάζεται ασθενής τοπολογία (w-τοπολογία) και κάνει τον X LCS. Πρέπει να ελέγξουμε ότι

$$\bigcap_{x^* \in X^*} \{x : |x^*(x)| = 0\} = \{0\}.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το θεώρημα Hahn-Banach: αν $x_0 \neq 0$ τότε υπάρχει $x_0^* \in X^*$ με $x_0^*(x_0) \neq 0$, άρα το x_0 δεν ανήκει στην παραπάνω τομή.

Παρατηρήστε ότι ένα δίκτυο x_δ συγκλίνει ασθενώς σε κάποιο x ($x_\delta \xrightarrow{w} x$) αν και μόνο αν $x^*(x_\delta) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$. Η w-τοπολογία είναι ασθενέστερη (δηλ. μικρότερη) από την $\|\cdot\|$-τοπολογία (τη συνηθισμένη τοπολογία που επάγει η νόρμα στον X), αφού, προφανώς, οι ασθενείς περιοχές

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x : |x_k^*(x)| < \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0,\ x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*,\ n \in \mathbb{N},$$

είναι $\|\cdot\|$-ανοιχτά σύνολα. Έτσι, αν ένα δίκτυο συγκλίνει ως προς τη νόρμα, τότε συγκλίνει ασθενώς.

Παράδειγμα. Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $x \in X$, $x^* \in X^*$ θέτουμε $p_x(x^*) = |x^*(x)|$. Η τοπολογία που καθορίζει στον X^* η οικογένεια ημινορμών $\{p_x : x \in X\}$ ονομάζεται ασθενής-$*$ τοπολογία (w^*-τοπολογία) και κάνει τον X^* LCS (σε αντίθεση με το προηγούμενο παράδειγμα, το ότι

$$\bigcap_{x \in X} \{x^* : |x^*(x)| = 0\} = \{0\},$$

είναι τετριμμένο).

Σε ό,τι αφορά τη σύγκλιση δικτύων έχουμε

$$x_\theta^* \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow x_\theta^*(x) \to x^*(x), \quad \text{για κάθε } x \in X.$$

Παρατηρήστε ότι στον X^* έχουμε τρεις τοπολογίες: την συνηθισμένη τοπολογία που επάγει η νόρμα, την w-τοπολογία του προηγούμενου παραδείγματος (η οποία επάγεται από τον X^{**}), και την w^*-τοπολογία που επάγεται από τον X. Κάθε μια είναι ασθενέστερη από την προηγούμενη όπως φαίνεται από την ακόλουθη σειρά συνεπαγωγών:

$$x_\xi^* \xrightarrow{\|\cdot\|} x^* \Rightarrow x_\xi^* \xrightarrow{w} x^* \Rightarrow x_\xi^* \xrightarrow{w^*} x^*.$$

Η δεύτερη συνεπαγωγή προκύπτει μέσω της κανονικής εμφύτευσης $J : X \to X^{**}$. Αν $x_\xi^* \to x^*$ ασθενώς, τότε $x^{**}(x_\xi^*) \to x^{**}(x)$ για κάθε $x^{**} \in X^{**}$. Ιδιαίτερα $J(x)(x_\xi^*) \to J(x)(x^*)$ για κάθε $x \in X$. Άρα $x_\xi^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$, επομένως $x_\xi^* \to x^*$ ασθενώς-$*$.

Ορισμός. *Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subset X$.*

- *Το A λέγεται κυρτό, αν για κάθε $x, y \in A$, και κάθε $t \in [0, 1]$, έχουμε $(1 - t)x + ty \in A$.*
- *Η κυρτή θήκη του A είναι το μικρότερο κυρτό υπερσύνολο του A:*

$$\mathrm{co}A = \bigcap \{C \subset X : A \subset C,\ C \text{ κυρτό}\}.$$

- *Αν επιπλέον ο X είναι TVS, τότε η κλειστή κυρτή θήκη του A είναι το μικρότερο κυρτό και κλειστό υπερσύνολο του A:*

$$\overline{\mathrm{co}}A = \bigcap \{C \subset X : A \subset C,\ C \text{ κυρτό \& κλειστό}\}.$$

Θεώρημα. *Έστω X TVS, και $A \subset X$.*

(1) *Αν το A είναι κυρτό, τότε τα $\overline{A}$ και A° είναι κυρτά.*
(2) $\overline{\mathrm{co}}A = \overline{\mathrm{co}A}$.

Απόδειξη.

(1) Για $0 < t < 1$ έχουμε

$$(1-t)\overline{A} + t\overline{A} = \overline{(1-t)A} + \overline{tA} \subset \overline{(1-t)A + tA} \subset \overline{A}.$$

Άρα, $\overline{A}$ κυρτό. Επίσης, $(1-t)A^\circ + tA^\circ \subset A$. Αλλά $(1-t)A^\circ + tA^\circ$ ανοιχτό, επομένως

$$(1-t)A^\circ + tA^\circ \subset A^\circ.$$

Συνεπώς A° κυρτό.

(2) $\mathrm{co}A \subset \overline{\mathrm{co}}A$, άρα $\overline{\mathrm{co}A} \subset \overline{\mathrm{co}}A$. Αλλά, από το (1), το $\overline{\mathrm{co}A}$ είναι κλειστό και κυρτό υπερσύνολο του A, επομένως $\overline{\mathrm{co}A} \supset \overline{\mathrm{co}}A$

□

Ορισμός. *Έστω X γραμμικός χώρος, και $A \subset X$.*

- *Το A λέγεται απορροφούν (absorbing), αν για κάθε $x \in X$, υπάρχει $t > 0$ τέτοιο ώστε $tx \in A$.*
- *Το A λέγεται ισορροπημένο (balanced), αν για κάθε $x \in A$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda| \leq 1$, έχουμε $\lambda x \in A$.*
- *Αν επιπλέον ο X είναι TVS, το A λέγεται φραγμένο, αν για κάθε περιοχή U του 0, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\varepsilon A \subset U$.*

Παρατηρήσεις. Έστω X TVS. Τότε:

(1) Αν $A \subset X$ ισορροπημένο, τότε $\overline{A}$ ισορροπημένο. Αν επιπλέον $0 \in A^\circ$, τότε A° ισορροπημένο.

(2) Αν V περιοχή του μηδενός, τότε υπάρχει μια ισορροπημένη περιοχή U του μηδενός τέτοια ώστε $U \subset V$. Πράγματι, από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού στο $(0,0) \in \mathbb{F} \times X$, υπάρχει $\delta > 0$ και μια περιοχή W του 0 ώστε για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda| < \delta$ έχουμε $\lambda W \subset V$. Θέτουμε

$$U = \bigcup_{|\lambda|<\delta} \lambda W.$$

(3) Αν V κυρτή περιοχή του 0, τότε υπάρχει κυρτή και ισορροπημένη περιοχή U του 0 τέτοια ώστε $U \subset V$. Πράγματι, από το (2), υπάρχει ισορροπημένη περιοχή W του 0 με $W \subset V$. Θέτουμε $U = (\mathrm{co}W)^\circ$.

Ορισμός. *Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subset X$ απορροφούν. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε*

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : x \in tA\}.$$

Το p_A είναι καλά ορισμένο διότι το A είναι απορροφούν, και ονομάζεται συναρτησοειδές Minkowski.

Θεώρημα. *Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subset X$ κυρτό και απορροφούν.*

(1) *Το p_A είναι υπογραμμικό.*

(2) $\{x : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x : p_A(x) \leq 1\}$.

(3) *Αν επιπλέον το A είναι ισορροπημένο, τότε το p_A είναι ημινόρμα.*

Απόδειξη.

(1) Έστω $x, y \in X$. Τότε για κάθε $t_1, t_2 > 0$ με $x \in t_1A$ και $y \in t_2A$ έχουμε

$$x + y \in t_1A + t_2A = (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}A + \frac{t_2}{t_1+t_2}A\right) \subset (t_1 + t_2)A.$$

Επομένως $p_A(x + y) \leq t_1 + t_2$, άρα $p_A(x + y) \leq p_A(x) + p_A(y)$. Η θετική ομογένεια του p_A ($p_A(sx) = sp_A(x)$, για $s \geq 0$) είναι προφανής.

(2) Αν $x \in A$ τότε $p_A(x) \leq 1$ από τον ορισμό του p_A. Αν $p_A(x) < 1$, τότε υπάρχει $0 < t < 1$ τέτοιο ώστε $x \in tA \subset tA + (1-t)A \subset A$.

(3) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$, με $\lambda \neq 0$, έχουμε

$$p_A(\lambda x) = \inf\{t > 0 : \lambda x \in tA\} = \inf\left\{t > 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}\frac{|\lambda|}{\lambda}A\right\} = \inf\left\{t > 0 : x \in \frac{t}{|\lambda|}A\right\} = |\lambda| p_A(x).$$

□

Θεώρημα. *Έστω X TVS και $U \subset X$ ανοιχτό και κυρτό με $0 \in U$. Τότε:*

(1) *Το U είναι απορροφούν, επομένως το p_U ορίζεται.*

(2) $U = \{x : p_U(x) < 1\}$.

Απόδειξη.

(1) Έστω $x \in X$. Από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού στο $(0, x)$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta x \in U$.

(2) Έστω $x \in U$. Από τη συνέχεια του πολλαπλασιασμού στο $(1,x)$, υπάρχει $\delta > 1$ τέτοιο ώστε $\delta x \in U$. Άρα $x \in \delta^{-1}U$, επομένως $p_U(x) \leq \delta^{-1} < 1$.

□

Θεώρημα. *Έστω X TVS. Ο X είναι LCS αν και μόνο αν το 0 έχει μια βάση περιοχών που αποτελείται από ανοιχτά και κυρτά σύνολα.*

Απόδειξη. Η κατεύθυνση ($\Rightarrow$) είναι προφανής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $\mathscr{T}$ η τοπολογία του X. Από υπόθεση, το 0 έχει μια βάση περιοχών που αποτελείται από ανοιχτά και κυρτά σύνολα. Τότε το 0 έχει μια βάση περιοχών $\mathscr{B}$ που αποτελείται από ανοιχτά, κυρτά και ισορροπημένα σύνολα (από την παρατήρηση (3) παραπάνω). Άρα για κάθε $U \in \mathscr{B}$, το συναρτησοειδές Minkowski p_U είναι ημινόρμα. Παρατηρούμε ότι η τοπολογία που καθορίζει η οικογένεια $\{p_U : U \in \mathscr{B}\}$ ταυτίζεται με την $\mathscr{T}$ διότι $U = \{x : p_U(x) < 1\}$ για κάθε $U \in \mathscr{B}$ (κάθε περιοχή του 0 ως προς τη μια τοπολογία είναι περιοχή του 0 ως προς την άλλη). Τέλος

$$\bigcap_{U\in\mathscr{B}}\{x : p_U(x) = 0\} \subset \bigcap_{U\in\mathscr{B}}\{x : p_U(x) < 1\} = \bigcap_{U\in\mathscr{B}} U = \{0\}$$

διότι η $\mathscr{T}$ είναι Hausdorff. Επομένως ο X είναι LCS. □

Θεώρημα. *Έστω X LCS. Ο X είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν η τοπολογία του καθορίζεται από μια αριθμήσιμη οικογένεια ημινορμών.*

Απόδειξη. Έστω ότι η τοπολογία $\mathscr{T}$ του X καθορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ με

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x : p_n(x) = 0\} = \{0\}.$$

Ορίζουμε μια μετρική d στο X ως εξής

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}.$$

Έστω $\mathscr{T}_d$ η τοπολογία που επάγει η d. Η d είναι αναλλοίωτη στις μεταθέσεις, επομένως για να συγκρίνουμε τις δυο τοπολογίες, αρκεί να συγκρίνουμε περιοχές του 0. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Τότε

$$\bigcap_{n=1}^{n_0}\left\{x : p_n(x) < \frac{\varepsilon}{2n_0}\right\} \subset D_d(0,\varepsilon),$$

άρα $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}$. Επίσης, για κάθε n έχουμε

$$D_d\left(0, \frac{\varepsilon}{2^n(1+\varepsilon)}\right) \subset \{x : p_n(x) < \varepsilon\},$$

άρα $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_d$.

Αντίστροφα, έστω ότι η $\mathscr{T}$ καθορίζεται από μια οκογένεια ημινορμών $\mathscr{P}$. Υποθέτουμε ότι η $\mathscr{T}$ επάγεται από κάποια μετρική ρ. Τότε για κάθε n υπάρχουν ημινόρμες $p_1^n, \ldots, p_{k_n}^n \in \mathscr{P}$ και $\varepsilon_n > 0$ έτσι ώστε

$$\bigcap_{i=1}^{k_n}\{x : p_i^n(x) < \varepsilon_n\} \subset D_\rho(0, 1/n).$$

Θέτουμε $\mathscr{Q} = \{p_i^n : i = 1, \ldots, k_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Τότε η τοπολογία που καθορίζει η $\mathscr{Q}$ ταυτίζεται με την $\mathscr{T}$. □

Παράδειγμα. Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $H(\Omega)$ ο χώρος των αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω με την τοπολογία που καθορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_K : K \subset \Omega \text{ συμπαγές}\}$, όπου $p_K(f) = \|f|_K\|_\infty$. Τότε ο $H(\Omega)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$K_n = \{z \in \Omega : |z| \leq n \ \&\ \mathrm{dist}(z, \mathbb{C}\setminus\Omega) \geq 1/n\},$$

και παρατηρούμε ότι η τοπολογία του $H(\Omega)$ καθορίζεται από την οικογένεια $\{p_{K_n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Θεώρημα. *Έστω X LCS. Η τοπολογία του X επάγεται από νόρμα αν και μόνο αν ο X έχει ένα μη κενό, ανοιχτό και φραγμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έστω $U \subset X$ μη κενό, ανοιχτό και φραγμένο. Μπορούμε να υποθέσουμε (κάνοντας μια μετάθεση) ότι $0 \in U$. Αφού ο X είναι LCS, υπάρχει V ανοιχτό, κυρτό και ισορροπημένο, τέτοιο ώστε $0 \in V \subset U$. Έστω p_V το συναρτησοειδές Minkowski. Ισχυριζόμαστε ότι το p_V είναι νόρμα και επάγει την τοπολογία του X. Πράγματι, έστω $x \neq 0$. Τότε υπάρχουν περιοχές W_0 και W_x του 0 και του x αντίστοιχα, τέτοιες ώστε $W_0 \cap W_x = \emptyset$. Αφού U φραγμένο, υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε $W_0 \supset \varepsilon_0 U \supset \varepsilon_0 V$. Αλλά $\varepsilon_0 V = \varepsilon_0\{y : p_V(y) < 1\} = \{y : p_V(y) < \varepsilon_0\}$. Άρα $p_V(x) \geq \varepsilon_0$, δηλαδή το p_V είναι νόρμα. Τώρα, αφού $\varepsilon V = \{x : p_V(x) < \varepsilon\}$, η τοπολογία που επάγει η νόρμα είναι μικρότερη από ή ίση με την τοπολογία του X. Απ'την άλλη, έστω $\varepsilon > 0$ και p μια από τις ημινόρμες που καθορίζουν την τοπολογία του X. Το $\{x : p(x) < \varepsilon\}$ είναι περιοχή του 0, και το U είναι φραγμένο. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\{x : p(x) < \varepsilon\} \supset \delta U \supset \delta V = \{x : p_V(x) < \delta\}.$$

Επομένως, η τοπολογία του X είναι μικρότερη από ή ίση με την τοπολογία που επάγει η νόρμα. □

12. Ο δυϊκός ενός TVS - Η γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach

Ορισμός. *Έστω X TVS. Το σύνολο όλων των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στον X ονομάζεται δυϊκός χώρος και συμβολίζεται με X^*.*

Θεώρημα. *Έστω X TVS, και $\Lambda : X \to \mathbb{F}$ μη μηδενικό γραμμικό συναρτησοειδές. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) Λ *συνεχές.*
(2) $\ker\Lambda$ *κλειστός.*
(3) $\ker\Lambda$ *όχι πυκνός.*
(4) Λ *φραγμένο (με τη συνηθισμένη έννοια) σε κάποια περιοχή του 0.*

Απόδειξη. $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$ προφανείς.

$(3) \Rightarrow (4)$. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι υπάρχουν $x_0 \in X$ και U ισορροπημένη περιοχή του 0 τέτοια ώστε $(x_0 + U) \cap \ker\Lambda = \emptyset$. Το $\Lambda(U)$ είναι ισορροπημένο υποσύνολο του $\mathbb{F}$, άρα είτε $\Lambda(U)$ φραγμένο, είτε $\Lambda(U) = \mathbb{F}$. Αλλά αν $\Lambda(U) = \mathbb{F}$, τότε υπάρχει $x \in U$ τέτοιο ώστε $\Lambda(x) = -\Lambda(x_0)$, επομένως $\Lambda(x_0 + x) = 0$, δηλαδή $x_0 + x \in \ker\Lambda$, άτοπο.

$(4) \Rightarrow (1)$. Αφού το Λ είναι γραμμική απεικόνιση, αρκεί να δείξουμε ότι είναι συνεχές στο 0. Από υπόθεση, υπάρχουν $M > 0$ και U περιοχή του 0, τέτοια ώστε $\Lambda(U) \subset D(0, M)$. Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\Lambda(\varepsilon M^{-1}U) \subset D(0, \varepsilon)$. Επομένως Λ συνεχές στο 0. □

Παράδειγμα (Ο χώρος του Schwartz και ο χώρος των κατανομών)**.** Για κάθε πολυδείκτη $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$
$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$
$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|}\varphi}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n},$$
$$\mathscr{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < \infty, \text{για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \right\}.$$

Ο $\mathscr{S}$ λέγεται χώρος του Schwartz και γίνεται (μετρικοποιήσιμος) LCS μέσω της οικογένειας ημινορμών $\{p_{\alpha,\beta} : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$, όπου

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) = \sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi(x)|.$$

Ο δυϊκός $\mathscr{S}^*$ λέγεται χώρος των κατανομών. Κάθε $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, επάγει μια κατανομή $\Lambda_f(\varphi) = \int f\varphi$, $\varphi \in \mathscr{S}$. Ομοίως, κάθε μιγαδικό μέτρο Borel μ επάγει μια κατανομή $\Lambda_\mu(\varphi) = \int \varphi \, d\mu$. Αν $f \in L^p$, και $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, τότε η (ασθενής) παράγωγος της f (ή η παράγωγος με την έννοια των κατανομών - distributional derivative) είναι η κατανομή

$$\Lambda_f^\alpha(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) D^\alpha \varphi(x) \, dx = (-1)^{|\alpha|} \Lambda_f(D^\alpha \varphi).$$

Για παράδειγμα, αν $\psi \in \mathscr{S}$, τότε $\Lambda_\psi^\alpha(\varphi) = \Lambda_{D^\alpha \psi}(\varphi)$, δηλαδή στην περίπτωση αυτή, η παράγωγος με την έννοια των κατανομών «συμφωνεί» με τη συνηθισμένη παράγωγο (είναι η κατανομή που επάγεται από τη συνηθισμένη παράγωγο). Αν τώρα $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση Heaviside $h(x) = 0$ για $x < 0$, $h(x) = 1$ για $x \ge 0$, τότε $\Lambda_h^{(1)}(\varphi) = \phi(0) = \Lambda_{\delta_0}(\varphi)$, όπου δ_0 είναι το μέτρο Dirac στο 0. Επομένως, με την έννοια των κατανομών, η παράγωγος της (μη παραγωγίσιμης με τη συνηθισμένη έννοια) συνάρτησης h είναι ένα μέτρο. Γενικότερα, αν $\Lambda \in (\mathscr{S})^*$, τότε ορίζουμε την παράγωγο $\Lambda^\alpha \in (\mathscr{S})^*$ μέσω της σχέσης

$$\Lambda^\alpha(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \varphi).$$

Σε αντίθεση με την περίπτωση των χώρων με νόρμα, δεν είναι αλήθεια ότι ο δυϊκός ενός αυθαίρετου TVS είναι πάντα μη τετριμμένος, όπως φαίνεται από το ακόλουθο:

Παράδειγμα (Οι χώροι L^p, $0 < p < 1$)**.** Έστω $0 < p < 1$, και $f : [0,1] \to \mathbb{F}$ Lebesgue μετρήσιμη. Θέτουμε

$$\rho(f) = \int |f|^p, \quad L^p = \{f \mid \rho(f) < \infty\}, \quad d(f,g) = \rho(f - g).$$

Τότε ο (L^p, d) είναι μετρικός χώρος, τέτοιος ώστε η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός είναι συνεχείς. Άρα ο (L^p, d) είναι TVS. Θα δείξουμε κατ'αρχάς ότι ο L^p δεν έχει μη τετριμμένα ανοιχτά και κυρτά σύνολα. Έστω λοιπόν $G \subset X$ μη κενό, ανοιχτό και κυρτό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in G$. Τότε υπάρχει $r > 0$ με $D(0,r) \subset G$. Έστω τώρα $f \in L^p$. Επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n^{p-1}\rho(f) < r$. Από τη συνέχεια του ολοκληρώματος υπάρχει διαμέριση $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ τέτοια ώστε

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f|^p = \frac{\rho(f)}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Θέτουμε $g_i = nf\chi_{[t_{i-1},t_i)}$. Τότε $\rho(g_i) = n^{p-1}\rho(f) < r$, επομένως $g_i \in D(0,r) \subset G$. Αλλά το G είναι κυρτό, άρα

$$f = \frac{g_1 + \cdots + g_n}{n} \in G.$$

Συνεπώς $G = L^p$. Τώρα, έστω $\Lambda \in (L^p)^*$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $\Lambda^{-1}(D_{\mathbb{F}}(0,1/n))$ είναι μη κενό, ανοιχτό και κυρτό, άρα ταυτίζεται με ολόκληρο τον χώρο. Επομένως

$$\ker\Lambda = \Lambda^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Lambda^{-1}(D_{\mathbb{F}}(0,1/n)) = L^p.$$

Συνεπώς $(L^p)^* = \{0\}$.

Αν όμως ο χώρος είναι τοπικά κυρτός, τότε ο δυϊκός του είναι πάντα μη τετριμμένος:

Θεώρημα (Η γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn-Banach)**.** *Έστω X TVS και $A, B \subset X$ μη κενά, κυρτά και ξένα. Τότε:*

(1) *Αν το A είναι ανοιχτό, τότε υπάρχουν $\Lambda \in X^*$, και $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Re}\Lambda(a) < \lambda_0 \leq \mathrm{Re}\Lambda(b),$$

για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

(2) *Αν ο X είναι LCS, το A συμπαγές, και το B κλειστό, τότε υπάρχουν $\Lambda \in X^*$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Re}\Lambda(a) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\Lambda(b),$$

για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι επί του $\mathbb{R}$.

(1) Σταθεροποιούμε $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ και θέτουμε $x_0 = b_0 - a_0$, $U = x_0 + A - B$. Τότε το U είναι ανοιχτή και κυρτή περιοχή του 0, επομένως το συναρτησοειδές Minkowski p_U είναι υπογραμμικό, και $U = \{x : p_U(x) < 1\}$. Ιδιαίτερα $p_U(x_0) \geq 1$, αφού $x_0 \notin U$. Ορίζουμε τώρα $f : \langle x_0 \rangle \to \mathbb{R}$ με $f(tx_0) = t$. Τότε:
   - Για $t \geq 0$ έχουμε $f(tx_0) = t \leq tp_U(x_0) = p_U(tx_0)$.
   - Για $t < 0$ έχουμε $f(tx_0) = t < p_U(tx_0)$.

   Άρα $f \leq p_U$ στο $\langle x_0 \rangle$. Επομένως, από Hahn-Banach, η f έχει γραμμική επέκταση $\Lambda : X \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\Lambda \leq p_U$. Τώρα, για κάθε $x \in U$ έχουμε $\Lambda(x) \leq p_U(x) < 1$. Επίσης

   $$\Lambda(-x) = -\Lambda(x) > -p_U(x) > -1.$$

   Άρα $|\Lambda(x)| < 1$ για κάθε $x \in U \cap (-U)$. Δηλαδή το Λ είναι φραγμένο στην περιοχή $U \cap (-U)$ του 0, συνεπώς $\Lambda \in X^*$. Τέλος, για κάθε $a \in A$, $b \in B$ έχουμε

   $$\Lambda(a) - \Lambda(b) + 1 = \Lambda(a) - \Lambda(b) + \Lambda(x_0) = \Lambda(a - b + x_0) \leq p_U(a - b + x_0) < 1,$$

   επομένως $\Lambda(a) < \Lambda(b)$. Αλλά το $\Lambda(A)$ είναι ανοιχτό και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι ένα ανοιχτό διάστημα, έστω I_1. Ομοίως το $\Lambda(B)$ είναι κάποιο διάστημα, έστω I_2. Αφού κάθε στοιχείο του I_1 είναι μικρότερο από κάθε στοιχείο του I_2, αν θέσουμε λ_0 να είναι το αριστερό άκρο του I_2, θα πάρουμε

   $$\Lambda(a) < \lambda_0 \leq \Lambda(b),$$

   για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

(2) Αφού ο X είναι τοπικά κυρτός, το A συμπαγές, το B κλειστό, και $A \cap B = \emptyset$, υπάρχει V ανοιχτή και κυρτή περιοχή του 0, τέτοια ώστε $(A + V) \cap B = \emptyset$.

   [Απόδειξη: Για κάθε $x \in A$ υπάρχει περιοχή U_x του 0,τέτοια ώστε $(x + U_x) \cap B = \emptyset$. Από τοπική κυρτότητα και συνέχεια της πρόσθεσης στο $(0,0)$, υπάρχει V_x ανοιχτή και κυρτή περιοχή του 0, τέτοια ώστε $V_x + V_x \subset U_x$. Η $\{x + V_x\}_{x\in A}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του συμπαγούς A, άρα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, έστω $\{x_k + V_{x_k}\}_{k=1}^n$. Θέτουμε $V = \bigcap_{k=1}^n V_{x_k}$.]

Από το (1), υπάρχει $\Lambda \in X^*$, έτσι ώστε το ανοιχτό διάστημα $\Lambda(A+V)$ να βρίσκεται αριστερά του διαστήματος $\Lambda(B)$. Αφού το $\Lambda(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\Lambda(A+V)$, έχει θετική απόσταση από το δεξί άκρο του $\Lambda(A+V)$ και επομένως μπορούμε να επιλέξουμε λ_1, λ_2, τέτοια ώστε

$$\Lambda(a) < \lambda_1 < \lambda_2 < \Lambda(b),$$

για κάθε $a \in A$, $b \in B$.

$\square$

Πορίσματα.

(1) Έστω X LCS. Τότε ο X^* διαχωρίζει τα σημεία του X διότι αν $x, y \in X$ με $x \neq y$, τότε εφαρμόζοντας το γεωμετρικό Hahn-Banach στα σύνολα $\{x\}$, $\{y\}$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\Lambda \in X^*$ με $\Lambda(x) \neq \Lambda(y)$.

(2) Έστω X LCS, $Y \subset X$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος, και $x_0 \notin Y$. Τότε υπάρχει $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε $\Lambda|_Y = 0$ και $\Lambda(x_0) \neq 0$. Πράγματι, από Hahn-Banach για τα σύνολα $\{x_0\}$ και Y, υπάρχει $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε τα σύνολα $\Lambda(\{x_0\})$ και $\Lambda(Y)$ είναι ξένα. Άρα, ο $\Lambda(Y)$ είναι γνήσιος γραμμικός υπόχωρος του $\mathbb{F}$, επομένως $\Lambda(Y) = \{0\}$. Συνεπώς $\Lambda|_Y = 0$.

(3) Έστω X LCS, Y γραμμικός υπόχωρος, και $f \in Y^*$. Τότε υπάρχει $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε $\Lambda|_Y = f$. Πράγματι, υποθέτουμε ότι $f \neq 0$ και επιλέγουμε $x_0 \in Y$ με $f(x_0) = 1$. Αφού $f \in Y^*$, ο $\ker f$ είναι Y-κλειστός, δηλαδή $\mathrm{cl}_Y \ker f = \ker f$. Επομένως, $x_0 \notin \mathrm{cl}_Y \ker f = Y \cap \mathrm{cl}_X \ker f$. Άρα $x_0 \notin \mathrm{cl}_X \ker f$. Από το προηγούμενο πόρισμα, υπάρχει $\Lambda \in X^*$ με $\Lambda(x_0) = 1$ και $\Lambda|_{\ker f} = 0$. Τώρα, αν $y \in Y$, τότε $y = \lambda x_0 + z$, για κάποια $\lambda \in \mathbb{F}$ και $z \in \ker f$. Επομένως $\Lambda(y) = \lambda = f(\lambda x_0 + z) = f(y)$.

13. Ασθενείς τοπολογίες σε χώρους με νόρμα

Υπενθυμίζουμε ότι αν ο X είναι χώρος με νόρμα, τότε

- Η w-τοπολογία στον X έχει για βάση περιοχών του 0 όλα τα σύνολα της μορφής
$$\bigcap_{k=1}^{n}\{x : |x_k^*(x)| < \varepsilon\}, \quad x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*,\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$
Επίσης, $x_\xi \xrightarrow{w} x$ αν και μόνο αν $x^*(x_\xi) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.
- Η w^*-τοπολογία στον X^* έχει για βάση περιοχών του 0 όλα τα σύνολα της μορφής
$$\bigcap_{k=1}^{n}\{x^* : |x^*(x_k)| < \varepsilon\}, \quad x_1, \dots, x_n \in X,\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}.$$
Επίσης, $x_\xi^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_\xi^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.

Παρατηρήσεις.

(1) $(X, \|\cdot\|)$ σημαίνει ότι ο X έχει την τοπολογία της νόρμας. (X, w) σημαίνει ότι ο X έχει την ασθενή τοπολογία. Ομοίως με (X^*, w), (X^*, w^*), (X^{**}, w^*),...

(2) Όταν γράφουμε $(X, w) = (J(X), w^*)$ και $(X, w) \subset (X^{**}, w^*)$, εννοούμε ότι η κανονική εμφύτευση $J : (X, w) \to (J(X), w^*)$ είναι ομοιομορφισμός (βλέπουμε δηλαδή τον X με την ασθενή τοπολογία σαν υπόχωρο του X^{**} με την ασθενή-$*$ τοπολογία, ακριβώς όπως μπορούμε να δούμε τον X με την $\|\cdot\|$-τοπολογία σαν υπόχωρο του X^{**} με την $\|\cdot\|$-τοπολογία). Το ότι η J είναι ομοιομορφισμός (επί της εικόνας της) προκύπτει από τις ακόλουθες ισοδυναμίες:
$$x_\xi \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow (\forall x^* \in X^*)(x^*(x_\xi) \to x^*(x)) \Leftrightarrow (\forall x^* \in X^*)(J(x_\xi)(x^*) \to J(x)(x^*)) \Leftrightarrow J(x_\xi) \xrightarrow{w^*} J(x).$$

(3) Με τη σύμβαση του (2), ο X είναι αυτοπαθής αν και μόνο αν $(X, w) = (X^{**}, w^*)$.

(4) Αν η $x_n \in X$ συγκλίνει ασθενώς, τότε είναι $\|\cdot\|$-φραγμένη, διότι $\sup_n |J(x_n)(x^*)| < \infty$ για κάθε $x^* \in X^*$, άρα από αρχή ομοιόμορφου φράγματος, $\sup_n \|x_n\| = \sup_n \|J(x_n)\| < \infty$.

(5) Αν η $x_n^* \in X^*$ συγκλίνει ασθενώς-$*$ και ο X είναι χώρος Banach, τότε η x_n^* είναι $\|\cdot\|$-φραγμένη. Αυτό προκύπτει άμεσα από την αρχή ομοιόμορφου φράγματος, αφού έχουμε $\sup_n |x_n^*(x)| < \infty$ για κάθε $x \in X$.

Παράδειγμα. Έστω $f_j, f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Τότε $f_j \xrightarrow{w} f$ αν και μόνο αν
$$\int f_j \, d\mu \to \int f \, d\mu,$$
για κάθε μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα. Έστω $\mu_j, \mu \in M(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}(\mathbb{R}^n))$. Τότε $\mu_j \xrightarrow{w^*} \mu$ αν και μόνο αν
$$\int f \, d\mu_j \to \int f \, d\mu,$$
για κάθε $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Παράδειγμα. Στους χώρους ℓ^p, $1 < p < \infty$, η ακολουθία e_n με $e_n(k) = 0$ αν $n \neq k$, και $e_n(n) = 1$, συγκλίνει ασθενώς στο 0, αλλά δεν συγκλίνει ως προς τη νόρμα.

Παράδειγμα (Η ιδιότητα Schur)**.** Στον ℓ^1, μια ακολουθία συγκλίνει ασθενώς αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς τη νόρμα. Πράγματι, η μια κατεύθυνση είναι προφανής, για την άλλη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ασθενώς μηδενική ακολουθία $x_n \in \ell^1$, τέτοια ώστε $\|x_n\|_1 \not\to 0$. Περνώντας, αν χρειάζεται, σε μια υπακολουθία και κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\|_1 = 1$. Παρατηρήστε ότι από την ασθενή σύγκλιση της ακολουθίας στο 0 συνεπάγεται κατά συντεταγμένη σύγκλιση στο 0. Επιλέγουμε τώρα επαγωγικά μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ και $N_0 < N_1 < \cdots < N_k < \cdots$ έτσι ώστε
$$\sum_{j=1}^{N_{k-1}} |x_{n_k}(j)| < \frac{1}{100}, \qquad \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_{n_k}(j)| \geq \frac{9}{10}. \tag{$R(k)$}$$
Ο αλγόριθμος είναι ο εξής: Θέτουμε $N_0 = 0$, $n_1 = 1$ και επιλέγουμε N_1 ώστε η δεύτερη από τις $R(1)$ να ισχύει (το πρώτο άθροισμα στην $R(1)$ είναι κενό). Στη συνέχεια επιλέγουμε n_2 ώστε η πρώτη από τις $R(2)$ να ισχύει και αμέσως μετά N_2 ώστε η δεύτερη από τις $R(2)$ να ικανοποιείται. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Στην

επιλογή των n_k χρησιμοποιούμε ότι η ακολουθία συγκλίνει κατά συντεταγμένη στο 0, ενώ στην επιλογή των N_k χρησιμοποιούμε ότι $\|x_{n_k}\|_1 = 1$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία $y \in \ell^\infty = (\ell^1)^*$ με $y(j) = \mathrm{sgn}(x_{n_k}(j))$ για $N_{k-1}+1 \leq j \leq N_k$, $k = 1, 2, \dots$ (δηλαδή η y στις θέσεις από $N_{k-1}+1$ μέχρι N_k, έχει για όρους τα πρόσημα των αντίστοιχων όρων της x_{n_k}). Τότε

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_k}(j)y(j) = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} \pm x_{n_k}(j) + \sum_{j=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_{n_k}(j)| + \sum_{j=N_k+1}^{\infty} \pm x_{n_k}(j) \geq \frac{9}{10} - \frac{1}{100} - \frac{1}{10},$$

άτοπο διότι η x_{n_k} είναι ασθενώς μηδενική.

Θεώρημα (Γραμμική άλγεβρα). *Έστω X γραμμικός χώρος, και $\Lambda, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n : X \to \mathbb{F}$ γραμμικά συναρτησοειδή, τέτοια ώστε*

$$\bigcap_{k=1}^{n} \ker\Lambda_k \subset \ker\Lambda.$$

Τότε το Λ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\pi : X \to \mathbb{F}^n, \quad \pi(x) = (\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)),$$

και

$$f : \pi(X) \to \mathbb{F}, \quad f(\pi(x)) = \Lambda(x).$$

Η f είναι καλά ορισμένη και έχει μια γραμμική επέκταση $\widetilde{f}$ σ'ολόκληρο το $\mathbb{F}^n$, άρα υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε

$$\widetilde{f}(u_1, \dots, u_n) = a_1u_1 + \cdots + a_nu_n.$$

Επομένως

$$\Lambda(x) = f(\pi(x)) = \widetilde{f}(\pi(x)) = \widetilde{f}(\Lambda_1(x), \dots, \Lambda_n(x)) = a_1\Lambda_1(x) + \cdots + a_n\Lambda_n(x).$$

□

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε:*

(1) $(X, \|\cdot\|)^* = (X, w)^*$.
(2) $(X^*, w^*)^* = X$.

Απόδειξη.

(1) $(X, w)^* \subset (X, \|\cdot\|)^*$ διότι η w-τοπολογία είναι ασθενέστερη της $\|\cdot\|$-τοπολογίας. Αν τώρα $\Lambda \in (X, \|\cdot\|)^*$ και x_ξ είναι ένα δίκτυο στο X με $x_\xi \xrightarrow{w} 0$, τότε $\Lambda(x_\xi) \to 0$, άρα $\Lambda \in (X, w)^*$.

(2) Έστω $x \in X$ και $x^*_\xi \in X^*$ δίκτυο με $x^*_\xi \xrightarrow{w^*} 0$. Τότε $x^*_\xi(x) \to 0$, άρα $x(x^*_\xi) \to 0$, επομένως $x \in (X^*, w^*)^*$. Αντίστροφα, έστω $\Lambda \in (X^*, w^*)^*$. Τότε υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$, και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$x^* \in \bigcap_{k=1}^{n} \{y^* : |x_k(y^*)| < \varepsilon\} \Rightarrow |\Lambda(x^*)| < 1.$$

Αν τώρα $x^* \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker x_k$ τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$mx^* \in \bigcap_{k=1}^{n} \ker x_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} \{y^* : |x_k(y^*) < \varepsilon\}.$$

Άρα $|\Lambda(x^*)| < 1/m$, για κάθε m, επομένως $x^* \in \ker\Lambda$. Συνεπώς, από το προηγούμενο θεώρημα, το Λ είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1, \dots, x_n$, και άρα ανήκει στον X.

□

Θεώρημα (Mazur). *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subset X$ κυρτό. Τότε $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|}A = \mathrm{cl}_w A$.*

Απόδειξη. Προφανώς $\mathrm{cl}_{\|\cdot\|}A \subset \mathrm{cl}_w A$. Έστω ότι υπήρχε $x_0 \in \mathrm{cl}_w A \setminus \mathrm{cl}_{\|\cdot\|}A$. Τότε από Hahn-Banach, θα υπήρχαν $x^*_0 \in (X, \|\cdot\|)^*$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\mathrm{Re}\, x^*_0(x_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\, x^*_0(x),$$

για κάθε $x \in \mathrm{cl}_{\|\cdot\|}A$. Αλλά $(X, \|\cdot\|)^* = (X, w)^*$, άρα το σύνολο $U = \{x : \mathrm{Re}\, x^*_0(x) < \lambda_1\}$ θα ήταν w-περιοχή του x_0 τέτοια ώστε $U \cap A = \emptyset$, άτοπο. □

Θεώρημα (Alaoglou). *Έστω X χώρος με νόρμα. Τότε η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$ είναι w^*-συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο

$$\Pi = \prod_{x\in X} B_{\mathbb{F}}(0, \|x\|)$$

με την τοπολογία γινόμενο, και την απεικόνιση

$$G : B_{X^*} \longrightarrow \Pi, \quad G(x^*) = (x^*(x))_{x\in X}.$$

Η G είναι καλά ορισμένη και 1-1. Επίσης, για κάθε δίκτυο $x^*_\xi \in B_{X^*}$ και $x^* \in B_{X^*}$ έχουμε

$$x^*_\xi \xrightarrow{w^*} x^* \Leftrightarrow (\forall x \in X)(x^*_\xi(x) \to x^*(x)) \Leftrightarrow G(x_\xi) \to G(x).$$

Άρα η $G : (B_{X^*}, w^*) \to G(B_{X^*})$ είναι ομοιομορφισμός. Από το θώρημα Tychonoff, ο Π είναι συμπαγής, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $G(B_{X^*})$ είναι κλειστό. Έστω $\Lambda = (\Lambda_x)_{x\in X} \in \overline{G(B_{X^*})}$. Τότε υπάρχει δίκτυο $x^*_i \in B_{X^*}$ με $G(x^*_i) \to \Lambda$. Επομένως, για κάθε $x, y \in X$, έχουμε $x^*_i(x) \to \Lambda_x$, $x^*_i(y) \to \Lambda_y$, $x^*_i(x+y) \to \Lambda_{x+y}$. Αφού το $\mathbb{F}$ είναι χώρος Hausdorff, τα όρια είναι μοναδικά, άρα $\Lambda_{x+y} = \Lambda_x + \Lambda_y$. Ομοίως $\Lambda_{\lambda x} = \lambda\Lambda_x$ για κάθε βαθμωτό λ. Τέλος $|\Lambda_x| \le \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Επομένως, αν θέσουμε $x^*(x) = \Lambda_x$, τότε $x^* \in B_{X^*}$ και $G(x^*) = \Lambda$. Άρα $G(B_{X^*})$ κλειστό. □

Θεώρημα (Goldstine)**.** *Έστω X χώρος με νόρμα. Θέτουμε*

$$B_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}, \quad B_{X^{**}} = \{x^{**} \in X^{**} : \|x^{**}\| = 1\}.$$

Τότε $\mathrm{cl}_{w^*} B_X = B_{X^{**}}$.

Απόδειξη. Έχουμε $B_X \subset B_{X^{**}}$, άρα $\mathrm{cl}_{w^*} B_X \subset \mathrm{cl}_{w^*} B_{X^{**}} = B_{X^{**}}$. Έστω ότι υπήρχε $x^{**}_0 \in B_{X^{**}} \setminus \mathrm{cl}_{w^*} B_X$. Από θεώρημα Alaoglou, το $B_{X^{**}}$ είναι w^*-συμπαγές, άρα και το $\mathrm{cl}_{w^*} B_X$ είναι w^*-συμπαγές. Από θεώρημα Hahn-Banach, υπάρχουν $x^*_0 \in (X^{**}, w^*)^* = X^*$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Re}\, x^*_0(x^{**}) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\, x^*_0(x^{**}_0)$, για κάθε $x^{**} \in \mathrm{cl}_{w^*} B_X$. Άρα $\mathrm{Re}\, x^{**}(x^*_0) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\, x^{**}_0(x^*_0)$, για κάθε $x^{**} \in B_X$. Επομένως

$$\mathrm{Re}\, x^*_0(x) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mathrm{Re}\, x^{**}_0(x^*_0),$$

για κάθε $x \in B_X$. Έτσι για κάθε x με $\|x\| = 1$ έχουμε $|x^*_0(x)| = e^{i\theta(x)} x^*_0(x) = x^*_0(e^{i\theta(x)}x) < \lambda_1$. Συνεπώς $\|x^*_0\| \le \lambda_1$. Αλλά $\lambda_2 < \mathrm{Re}\, x^{**}_0(x^*_0) \le |x^{**}_0(x^*_0)| \le \|x^{**}_0\| \cdot \|x^*_0\| \le \|x^*_0\|$, άτοπο □

Θεώρημα. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε ο (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ αριθμήσιμο και $\|\cdot\|$-πυκνό υποσύνολο του X. Θεωρούμε τον χώρο

$$\Pi = \prod_{n=1}^{\infty} B_{\mathbb{F}}(0, \|x_n\|)$$

με την τοπολογία γινόμενο. Τότε ο Π είναι μετρικοποιήσιμος, με μετρική

$$d(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}|a(n) - b(n)|}{1 + |a(n) - b(n)|}.$$

Ορίζουμε μια απεικόνιση $G : (B_{X^*}, w^*) \to \Pi$, με $G(x^*) = (x^*(x_n))_n$. Τότε η G είναι καλά ορισμένη, ένα-προς-ένα (διότι το D είναι πυκνό), και συνεχής. Επίσης, αν το $A \subset B_{X^*}$ είναι w^*-κλειστό, τότε, από θεώρημα Alaoglou, είναι w^*-συμπαγές, άρα το $G(A)$ είναι συμπαγές, επομένως το $G(A)$ είναι κλειστό. Συνεπώς, η $G : (B_{X^*}, w^*) \to G(B_{X^*})$ είναι ομοιομορφισμός, άρα ο (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, τέτοιος ώστε ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Τότε ο (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμος.*

Απόδειξη. Αφού X^* διαχωρίσιμος, από το προηγούμενο θεώρημα, ο $(B_{X^{**}}, w^*)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Αλλά $(B_X, w) \subset (B_{X^{**}}, w^*)$, άρα (B_X, w) μετρικοποιήσιμος. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε ο (X, w) είναι μετρικοποίησιμος. Τότε ο X είναι πεπερασμένης διάστασης.*

Απόδειξη. Η w-τοπολογία καθορίζεται από την οικογένεια ημινορμών $\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$, όπου $p^*(x) = |x^*(x)|$. Αφού ο (X, w) είναι μετρικοποιήσιμος, υπάρχει $D \subset X^*$ αριθμήσιμο, τέτοιο ώστε η οικογένεια $\{p_{x^*} : x^* \in D\}$ καθορίζει την w-τοπολογία του X. Έστω τώρα $x^* \in X^*$. Τότε υπάρχουν $x^*_1, \dots, x^*_n \in D$, και $\varepsilon > 0$ τέτοια ώστε

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{x : |x^*_k(x)| < \varepsilon\} \subset \{x : |x^*(x)| < 1\}.$$

Άρα $\bigcap_{k=1}^n \ker x_k^* \subset \ker x^*$. Επομένως το x^* είναι γραμμικός συνδυασμός των $x_1^*, \ldots, x_n^*$. Δηλαδή $X^* = \langle D \rangle$. Αφού ο X^* είναι χώρος Banach, δεν μπορεί να έχει άπειρη αριθμήσιμη διάσταση, άρα $\dim X^* < \infty$, συνεπώς $\dim X < \infty$. □

Ένα τελείως ανάλογο (δυϊκό) επιχείρημα, μας δίνει το ακόλουθο:

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα τέτοιος ώστε ο (X^*, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος. Τότε η διάσταση του X είναι το πολύ αριθμήσιμη.*

14. Αυτοπάθεια και ασθενής συμπάγεια

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο X είναι αυτοπαθής.*
(2) *Ο X^* είναι αυτοπαθής.*
(3) $(X^*, w) = (X^*, w^*)$.
(4) (B_X, w) *συμπαγής.*

Απόδειξη. (1) ⇒ (3). Η w^*-τοπολογία είναι ασθενέστερη της w-τοπολογίας, άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε δίκτυο $x_i^* \in X^*$ με $x_i^* \xrightarrow{w^*} 0$ έχουμε $x_i^* \xrightarrow{w} 0$. Έστω $x^{**} \in X^{**}$. Αφού ο X είναι αυτοπαθής, έχουμε ότι $x^{**} = x$ για κάποιο $x \in X$. Επομένως $x^{**}(x_i^*) = x(x_i^*) = x_i^*(x) \to 0$.

(1) ⇒ (4). Αφού X αυτοπαθής, έχουμε $(X, w) = (X^{**}, w^*)$, άρα $(B_X, w) = (B_{X^{**}}, w^*)$. Αλλά από θεώρημα Alaoglou, το $(B_{X^{**}}, w^*)$ είναι συμπαγές.

(4) ⇒ (1). Αφού το B_X είναι w-συμπαγές στο X, έχουμε ότι είναι w^*-συμπαγές και άρα w^*-κλειστό υποσύνολο του $B_{X^{**}}$. Αλλά από θεώρημα Goldstine, $\mathrm{cl}_{w^*} B_X = B_{X^{**}}$, επομένως $B_X = B_{X^{**}}$. Συνεπώς $X = X^{**}$.

(3) ⇒ (2). Αφού $(X^*, w) = (X^*, w^*)$, έχουμε $(B_{X^*}, w) = (B_{X^*}, w^*)$. Από θεώρημα Alaoglou, το (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγές, άρα και το (B_{X^*}, w). Επομένως, από τη συνεπαγωγή (4) ⇒ (1), ο X^* είναι αυτοπαθής.

(2) ⇒ (1). Αφού X^* αυτοπαθής, από τη συνεπαγωγή (1) ⇒ (3), έχουμε $(X^{**}, w) = (X^{**}, w^*)$. Τώρα η B_X είναι $\|\cdot\|$-κλειστή στον X^{**}, άρα, αφού είναι κυρτό σύνολο, από θεώρημα Mazur, είναι w-κλειστή στον X^{**}. Αλλά, τότε από υπόθεση είναι w^*-κλειστή στον X^{**}. Όμως από θεώρημα Goldstine, $\mathrm{cl}_{w^*} B_X = B_{X^{**}}$. Επομένως $B_X = B_{X^{**}}$, άρα $X = X^{**}$. □

Πόρισμα. Αν ο X είναι αυτοπαθής και ο Y κλειστός υπόχωρος, τότε και ο Y είναι αυτοπαθής. Πράγματι, από θεώρημα Mazur, ο Y είναι w-κλειστός. Αφού ο X είναι αυτοπαθής, το B_X είναι w-συμπαγές. Άρα το $B_Y = Y \cap B_X$ είναι w-συμπαγές, επομένως ο Y είναι αυτοπαθής.

Πόρισμα. Αν ο X είναι αυτοπαθής, και $x^* \in X^*$, τότε υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0\| = 1$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| = |x^*(x_0)|$ (δηλαδή η νόρμα του συναρτησοειδούς υλοποιείται από το συναρτησοειδές σε κάποιο σημείο της μοναδιαίας σφαίρας). Πράγματι το x^* είναι w-συνεχές, και η μπάλα B_X w-συμπαγής αφού ο X είναι αυτοπαθής. Άρα υπάρχει $x_0 \in B_X$ τέτοιο ώστε

$$|x^*(x_0)| = \sup\{|x^*(x)| : \|x\| \le 1\} = \|x^*\|.$$

Αλλά $\|x^*\| = |x^*(x_0)| \le \|x^*\| \cdot \|x_0\|$, επομένως $\|x_0\| = 1$.

Παρατήρηση. Η υπόθεση της αυτοπάθειας είναι απαραίτητη στο προηγούμενο πόρισμα, όπως φαίνεται από το συναρτησοειδές $\Lambda : c_0 \to \mathbb{F}$, με $\Lambda(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$.

Θεώρημα. *Έστω X αυτοπαθής, και $A \subset X$. Τότε το A είναι w-συμπαγές αν και μόνο αν είναι w-κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Αν το A είναι w-συμπαγές τότε είναι w-κλειστό. Τώρα για κάθε $x^* \in X^*$, το x^* είναι w-συνεχές. Αφού το A είναι w-συμπαγές, έχουμε $\sup_{x \in A} |x^*(x)| < \infty$, άρα $\sup_{x \in A} |x(x^*)| < \infty$. Επομένως, από αρχή ομοιόμορφου φράγματος, $\sup_{x \in A} \|x\| < \infty$.

Αντίστροφα, αφού το A είναι φραγμένο, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $A \subset B(0, M)$. Αλλά ο X είναι αυτοπαθής, άρα το B_X είναι w-συμπαγές. Επομένως και το $B(0, M)$ είναι w-συμπαγές. Δηλαδή το A είναι w-κλειστό υποσύνολο ενός w-συμπαγούς συνόλου, άρα είναι w-συμπαγές. □

Θεώρημα. *Έστω X αυτοπαθής, και $A \subset X$ κυρτό. Τότε το A είναι w-ακολουθιακά συμπαγές αν και μόνο αν είναι $\|\cdot\|$-κλειστό και φραγμένο (w-ακολουθιακή συμπάγεια σημαίνει ότι κάθε ακολουθία στο A έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία στο A).*

Απόδειξη. (⇒). Έστω $x \in \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A$. Τότε υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Αφού A w-ακολουθιακά συμπαγές, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $y \in A$ έτσι ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} y$. Άρα $x = y \in A$, επομένως το A είναι $\|\cdot\|$-κλειστό. Έστω τώρα ότι το A δεν είναι φραγμένο. Τότε υπάρχει ακολουθία $a_n \in A$ με $\|a_n\| \ge n$. Από w-ακολουθιακή συμπάγεια, η a_n έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία a_{k_n}. Αλλά τότε η a_{k_n} είναι φραγμένη, άτοπο.

($\Leftarrow$). Έστω $x_n \in A$. Θέτουμε $Y = \overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle}$. Ο Y είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του X, άρα είναι αυτοπαθής, δηλαδή $Y = Y^{**}$. Ο Y είναι διαχωρίσιμος, άρα ο Y^{**} είναι διαχωρίσιμος, συνεπώς ο Y^* είναι διαχωρίσιμος, επομένως ο (B_Y, w) είναι μετρικοποιήσιμος. Απ'την άλλη, ο (B_Y, w) είναι συμπαγής, διότι ο Y είναι αυτοπαθής. Δηλαδή, ο (B_Y, w) είναι συμπαγής μετρικός χώρος. Αφού η x_n είναι φραγμένη, υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $Mx_n \in B_Y$. Άρα υπάρχει υπακολουθία x_{k_n} και $x \in Y$ έτσι ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$. Επομένως $x \in \mathrm{cl}_w A$. Αλλά, από θεώρημα Mazur, $\mathrm{cl}_w A = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} A = A$. Συνεπώς $x \in A$. □

Πόρισμα. Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε κάθε φραγμένη ακολουθία έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία (ιδιαίτερα, αυτό ισχύει στους χώρους L^p για $1 < p < \infty$). Αυτή είναι η «έκδοση» του θεωρήματος Bolzano-Weierstrass για χώρους Banach.

15. Προσεγγισιμότητα και ομοιόμορφη κυρτότητα

Ορισμός. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $A \subset X$ κλειστό. Το A λέγεται προσεγγίσιμο, αν για κάθε $x_0 \notin A$ υπάρχει $x \in A$, τέτοιο ώστε $\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x_0, A)$.*

Θεώρημα. *Έστω X αυτοπαθής, και $A \subset X$ κλειστό και κυρτό. Τότε το A είναι προσεγγίσιμο.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \notin A$. Θέτουμε $d = \operatorname{dist}(x_0, A)$ και επιλέγουμε $x_n \in A$ με $\|x_0 - x_n\| \to d$. Αφού ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει υπακολουθία x_{k_n}, και $x \in X$, τέτοια ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$. Άρα $x \in \mathrm{cl}_w A$. Επομένως, από θεώρημα Mazur, $x \in A$. Επιλέγουμε τώρα $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)|$. Τότε

$$\|x - x_0\| = |x^*(x - x_0)| \le |x^*(x - x_{k_n})| + |x^*(x_{k_n} - x_0)| \le |x^*(x - x_{k_n})| + \|x_{k_n} - x_0\|.$$

Παίρνοντας όρια, έχουμε $\|x - x_0\| \le d$. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος με νόρμα, και $x^* \in X^*$ μη μηδενικό συναρτησοειδές. Τότε ο $\ker x^*$ είναι προσεγγίσιμος αν και μόνο αν υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x^*\|$.*

Απόδειξη. ($\Rightarrow$). Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\Lambda : X/\ker x^* \to \mathbb{F}, \quad \Lambda(x + \ker x^*) = x^*(x).$$

Τότε $\Lambda \in (X/\ker x^*)^*$ και $\|\Lambda\| = \|x^*\|$. Αφού $\dim(X/\ker x^*) = 1$, υπάρχει $x_0 \in X$ με $\|x_0 + \ker x^*\| = 1$ και $|\Lambda(x_0 + \ker x^*)| = \|\Lambda\|$. Αφού ο $\ker x^*$ είναι ποσεγγίσιμος, υπάρχει $y \in \ker x^*$, τέτοιο ώστε

$$\|x_0 - y\| = \operatorname{dist}(x_0, \ker x^*) = \|x_0 + \ker x^*\| = 1.$$

Αλλά τότε $|x^*(x_0 - y)| = |x^*(x_0)| = |\Lambda(x_0 + \ker x^*)| = \|\Lambda\| = \|x^*\|$.

($\Leftarrow$). Έστω $x_0 \notin \ker x^*$. Από υπόθεση, υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, τέτοιο ώστε $|x^*(x)| = \|x^*\|$. Αφού $\dim(X/\ker x^*) = 1$, υπάρχουν $y \in \ker x^*$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, $\lambda \neq 0$, έτσι ώστε $x = y + \lambda x_0$. Τώρα για κάθε $z \in \ker x^*$, έχουμε

$$\|z - x_0\| \ge \frac{|x^*(z - x_0)|}{\|x^*\|} = \frac{|x^*(x_0)|}{\|x^*\|} = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{|x^*(y + \lambda x_0)|}{\|x^*\|} = \frac{1}{|\lambda|} = \|\lambda^{-1} y + x_0\|.$$

Επομένως $\operatorname{dist}(x_0, \ker x^*) \ge \|\lambda^{-1} y + x_0\|$, συνεπώς ο $\ker x^*$ είναι προσεγγίσιμος. □

Παράδειγμα. Ο πυρήνας του σναρτησοειδούς $\Lambda : c_0 \to \mathbb{F}$, με $\Lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$ δεν είναι προσεγγίσιμος, διότι η νόρμα του Λ δεν υλοποιείται από το Λ σε κανένα σημείο της μοναδιαίας σφαίρας.

Ορισμός. *Ένας χώρος με νόρμα X λέγεται ομοιόμορφα κυρτός αν για κάθε $x_n, y_n \in B_X$ με $\|x_n + y_n\| \to 2$ έχουμε $\|x_n - y_n\| \to 0$. Ισοδύναμα, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x, y \in B_X$ με $\|x + y\| > 2 - \delta$ έχουμε $\|x - y\| < \varepsilon$.*

Θεώρημα. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός, και $x_n \in X$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$. Τότε $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.*

Απόδειξη. Κανονικοποιώντας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\| = \|x\| = 1$. Από Hahn-Banach, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x^*(x) = \|x\| = 1$. Τότε

$$2 \ge \|x_n + x\| \ge |x^*(x_n + x)| = |x^*(x_n) + 1|.$$

Παίρνοντας όριο ως προς n έχουμε $\|x_n + x\| \to 2$, άρα $\|x_n - x\| \to 0$. □

Παράδειγμα. Ο ℓ^1 έχει την ιδιότητα του προηγούμενου θεωρήματος (έχει την ιδιότητα Schur η οποία είναι ισχυρότερη), αλλά δεν είναι ομοιόμορφα κυρτός γιατί αν $e_n(k) = \delta_{n,k}$ τότε για $n \neq m$ έχουμε $\|e_n + e_m\|_1 = \|e_n - e_m\|_1 = 2$

Παράδειγμα. Ο $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ δεν έχει την ιδιότητα του προηγούμενου θεωρήματος (άρα δεν είναι ομοιόμορφα κυρτός). Αν θέσουμε

$$f_n(t) = \begin{cases} n\left(\frac{1}{n} - t\right), & 0 \le t \le 1/n \\ n\left(t - \frac{1}{n}\right), & 1/n \le t \le 2/n \\ 1, & 2/n \le t \le 1 \end{cases}$$

τότε $f_n \xrightarrow{w} \mathbf{1}$ και $\|f_n\|_\infty = 1$, αλλά $\|f_n - \mathbf{1}\|_\infty = 1$.

Θεώρημα (Clarkson). *Αν $1 < p < \infty$, τότε ο L^p είναι ομοιόμορφα κυρτός.*

Απόδειξη. (Για $p \geq 2$) Θα δείξουμε ότι για κάθε $f, g \in L^p$ έχουμε

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_p^p + \|g\|_p^p).$$

Η ομοιόμορφη κυρτότητα προκύπτει άμεσα από τη σχέση αυτή. Θέτουμε $\psi(t) = (1+t^2)^{p/2} - t^p - 1$, $t \geq 0$. Τότε η ψ είναι αύξουσα και $\psi(0) \geq 0$. Επομένως για $x \neq y$ έχουμε $\psi\left(\left|\frac{x+y}{x-y}\right|\right) \geq 0$, από το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}(|x|^p + |y|^p).$$

□

Θεώρημα (Milman-Pettis)**.** *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Τότε ο X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. Έστω $x^{**} \in X^{**}$ με $\|x^{**}\| = 1$. Αφού το B_X είναι $\|\cdot\|$-κλειστό στο X^{**}, αρκεί να δείξουμε ότι $x^{**} \in \mathrm{cl}_{\|\cdot\|} B_X$. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Από ομοιόμορφη κυρτότητα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $a, b \in B_X$ με $\|a+b\| > 2-\delta$ έχουμε $\|a-b\| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$ τέτοιο ώστε $x^{**}(x^*) > \|x^{**}\| - \delta/2 = 1-\delta/2$, και θέτουμε

$$U = \{y^{**} : \mathrm{Re}\ y^{**}(x^*) > 1 - \delta/2\}.$$

Τότε το U είναι w^*-περιοχή του x^{**}. Επομένως, από θεώρημα Goldstine, έχουμε ότι υπάρχει $x \in U \cap B_X$, και ότι $x^{**} \in U \cap \mathrm{cl}_{w^*} B_X \subset \mathrm{cl}_{w^*}(U \cap B_X)$. Τώρα για κάθε $y \in B_X$ έχουμε

$$\|x+y\| \geq |x^*(x+y)| \geq \mathrm{Re}\ x^*(x) + \mathrm{Re}\ x^*(y) > 2 - \delta.$$

Άρα $\|x-y\| < \varepsilon$. Δηλαδή $y \in x + \varepsilon B_X$. Επομένως $U \cap B_X \subset x + \varepsilon B_X$. Συνεπώς $\mathrm{cl}_{w^*}(U \cap B_X) \subset x + \varepsilon B_{X^{**}}$. Ιδιαίτερα, $x^{**} \in x + \varepsilon B_{X^{**}}$, το οποίο σημαίνει ότι $\|x - x^{**}\| \leq \varepsilon$. □

Παρατηρήστε ότι από το προηγούμενο θεώρημα, η αυτοπάθεια των L^p, $1 < p < \infty$, προκύπτει χωρίς να χρειαστεί να υπολογιστούν οι δυϊκοί τους. Αυτό στην πραγματικότητα μας δίνει μια εναλλακτική απόδειξη του δυϊσμού $(L^p)^* = L^q$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ισομετρία

$$L^q \ni g \mapsto \Lambda_g \in (L^p)^*, \quad \Lambda_g(f) = \int fg$$

είναι επί. Αν δεν ήταν, τότε το σύνολο $X = \{\Lambda_g : g \in L^q\}$ θα ήταν γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $(L^p)^*$, άρα από Hahn-Banach θα υπήρχε μη μηδενικό $\Phi \in (L^p)^{**}$ τέτοιο ώστε $\Phi|_X = 0$. Αλλά $(L^p)^{**} = J(L^p)$, άρα $\Phi = J(f)$ για κάποια $f \in L^p$. Τότε όμως $\int fg = 0$ για κάθε $g \in L^q$, άρα $f = 0$, άτοπο.

Θεώρημα. *Έστω X ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach, $A \subset X$ κλειστό και κυρτό, και $x_0 \notin A$. Τότε υπάρχει μοναδικό $x \in A$ τέτοιο ώστε $\|x - x_0\| = \mathrm{dist}(x_0, A)$.*

Απόδειξη. Η ύπαρξη προκύπτει από το ότι ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος είναι αυτοπαθής, άρα το A είναι προσεγγίσιμο. Για τη μοναδικότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0 = 0$ και $\mathrm{dist}(x_0, A) = 1$. Αν $x' \in A$ και $\|x'\| = 1$, τότε $(x+x')/2 \in A$ και $\|x + x'\| \leq 2$, άρα $\|x + x'\| = 2$. Επομένως, από ομοιόμορφη κυρτότητα, $\|x - x'\| = 0$. □

16. Συμπαγή κυρτά σύνολα - Το θεώρημα Krein-Milman

Θεώρημα.

(1) *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε το $\mathrm{co}K$ είναι συμπαγές.*

(2) *Έστω X χώρος Banach και $K \subset X$ συμπαγές. Τότε το $\overline{\mathrm{co}}K$ είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό S_m για το $(m-1)$-διάστατο simplex

$$\left\{(t_1, \dots, t_m) \in [0,1]^m : \sum_{i=1}^{m} t_i = 1\right\}.$$

Το S_m είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

(1) Κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι αν το $x \in \mathbb{R}^n$ είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων σημείων, τότε είναι κυρτός συνδυασμός το πολύ $n+1$ το πλήθος από αυτά.

[Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $k > n$ αν $x = \sum_{i=1}^{k+1} t_i x_i$, με $x_i \in \mathbb{R}^n$, $t_i > 0$ και $\sum_{i=1}^{k+1} t_i = 1$, τότε το x είναι κυρτός συνδυασμός k το πλήθος από τα x_i. Πράγματι, η γραμμική απεικόνιση

$$\mathbb{R}^{k+1} \ni (a_1, \dots, a_{k+1}) \mapsto \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i x_i, \sum_{i=1}^{k+1} a_i\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

έχει μη τετριμμένο πυρήνα διότι $k > n$. Έστω λοιπόν $(a_1, \dots, a_{k+1})$ μη μηδενικό στοιχείο του πυρήνα. Θέτουμε $|a_{i_0}|/t_{i_0} = \max_i |a_i|/t_i > 0$, επιλέγουμε λ τέτοιο ώστε $\lambda a_{i_0} = t_{i_0}$, και θέτουμε $c_i = t_i - \lambda a_i$. Τότε $c_i \geq 0$, $\sum_i c_i = 1$, $x = \sum_i c_i x_i$ και $c_{i_0} = 0$.]

Έτσι, η απεικόνιση

$$S_{n+1} \times K^{n+1} \ni (t_1, \dots, t_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} t_i x_i \in \mathrm{co}K$$

είναι συνεχής και επί, άρα το $\mathrm{co}K$ είναι συμπαγές.

(2) Αφού ο X είναι πλήρης και το $\overline{\mathrm{co}}K$ κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι το $\overline{\mathrm{co}}K$ είναι ολικά φραγμένο (σε πλήρη μετρικό χώρο, A συμπαγές $\Leftrightarrow$ A κλειστό και ολικά φραγμένο). Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Αφού το K είναι συμπαγές, υπάρχει $F \subset K$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $K \subset F + \varepsilon B_X$. Άρα $\mathrm{co}K \subset \mathrm{co}F + \varepsilon B_X$. Αλλά $\overline{\mathrm{co}}K \subset \mathrm{co}K + \varepsilon B_X$, επομένως $\overline{\mathrm{co}}K \subset \mathrm{co}F + 2\varepsilon B_X$. Αν $F = \{x_1, \dots, x_N\}$, τότε η απεικόνιση

$$S_N \ni (t_1, \dots, t_N) \mapsto \sum_{i=1}^{N} t_i x_i \in \mathrm{co}F$$

είναι συνεχής και επί, άρα το $\mathrm{co}F$ είναι συμπαγές. Επομένως υπάρχει $\widetilde{F} \subset \mathrm{co}F$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $\mathrm{co}F \subset \widetilde{F} + \varepsilon B_X$. Άρα $\overline{\mathrm{co}}K \subset \widetilde{F} + 3\varepsilon B_X$. Δηλαδή το $\overline{\mathrm{co}}K$ είναι ολικά φραγμένο.

□

Παρατήρηση. Η υπόθεση της πληρότητας είναι απαραίτητη στο (2). Αν X είναι ο χώρος των τελικά ίσων με 0 ακολουθιών με την supremum νόρμα, $e_n(k) = \delta_{n,k}$, $x_n = n^{-1} e_n$, και $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, τότε το K είναι συμπαγές, αλλά το $\overline{\mathrm{co}}K$ δεν είναι, διότι αν a_n είναι μια ακολουθία θετικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ και θέσουμε $t_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, τότε η ακολουθία

$$y_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + t_n x_{n+1} \in \mathrm{co}K, \quad n \in \mathbb{N},$$

δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (αν είχε, το όριο της θα ήταν $(a_1, a_2/2, a_3/3, \dots) \notin X$).

Το ίδιο παράδειγμα, αν δούμε το K σαν υποσύνολο του ℓ^2, δείχνει ότι ακόμα και σε ένα χώρο Hilbert, η κυρτή θήκη ενός συμπαγούς συνόλου δεν είναι κατ'ανάγκη συμπαγές.

Ορισμός. *Έστω X γραμμικός χώρος και $A \subset X$ κυρτό. Ένα σημείο $x \in A$ λέγεται ακραίο, αν το x δεν είναι γνήσιος κυρτός συνδυασμός δυο άλλων σημείων του A, δηλαδή αν $x = ty + (1-t)z$ για κάποια $0 < t < 1$ και $y, z \in A$, τότε $x = y = z$. Το σύνολο των ακραίων σημείων του A συμβολίζεται με $\mathrm{ex}(A)$.*

Παρατήρηση. Γενικά, σ'ένα χώρο με νόρμα έχουμε $\mathrm{ex}(B_X) \subset S_X$, γιατί αν $\|x\| < 1$ τότε

$$x = \frac{1-\varepsilon}{2}x + \frac{1+\varepsilon}{2}x,$$

και $\|(1-\varepsilon)x\| < 1$, $\|(1+\varepsilon)x\| < 1$ για $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό.

Παράδειγμα. Στον $\mathbb{R}^n$, το σύνολο των ακραίων σημείων ενός κυρτού πολυέδρου είναι το σύνολο των κορυφών του. Τα ακραία σημεία μιας κλειστής μπάλας είναι όλα τα σημεία της αντίστοιχης σφαίρας.

Παράδειγμα. Αν $X = L^1([0,1])$, τότε $\mathrm{ex}(B_X) = \emptyset$ διότι για κάθε $f \in S_X$ υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\int_0^{x_0} |f| = 1/2$. Άρα αν θέσουμε $g = 2f\chi_{[0,x_0)}$, $h = 2f\chi_{[x_0,1]}$, τότε $\|g\|_1 = \|h\|_1 = 1$ και $f = g/2 + h/2$.

Παράδειγμα. $\mathrm{ex}(B_{c_0}) = \emptyset$. Πράγματι, έστω $x \in S_{c_0}$. Αφού η x είναι μηδενική, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|x(n_0)| < 1/4$. Επομένως αν θέσουμε

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \neq n_0 \\ x(n) - 1/4, & n = n_0 \end{cases}, \quad z(n) = \begin{cases} x(n), & n \neq n_0 \\ x(n) + 1/4, & n = n_0 \end{cases},$$

τότε $\|y\|_\infty = \|z\|_\infty = 1$ και $x = y/2 + z/2$.

Παράδειγμα. $\mathrm{ex}(B_{\ell^1}) = \{\lambda e_n : |\lambda| = 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Παράδειγμα. Αν $1 < p < \infty$, τότε $\mathrm{ex}(B_{\ell^p}) = S_{\ell^p}$, διότι αν υποθέσουμε ότι έχουμε $x = ty + (1-t)z$ για $0 < t < 1$ και $\|x\|_p = \|y\|_p = \|z\|_p = 1$, τότε $\|ty + (1-t)z\|_p = \|ty\|_p + \|(1-t)z\|_p$, άρα $(1-t)z = \lambda ty$ για κάποιο $\lambda \geq 0$ (περίπτωση ισότητας στην ανισότητα Minkowski). Αλλά τότε $1 - t = \lambda t$, επομένως $y = z$.

Παράδειγμα. $\mathrm{ex}(B_{\ell^\infty}) = \{x : |x(n)| = 1 \text{ για κάθε } n\}$.

Θεώρημα (Krein-Milman). *Έστω X LCS, και $K \subset X$ μη κενό, συμπαγές και κυρτό. Τότε $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K)) = K$.*

Απόδειξη. (X επί του $\mathbb{R}$.) Δείχνουμε κατ'αρχάς ότι $\mathrm{ex}(K) \neq \emptyset$. Λέμε ότι ένα κυρτό υποσύνολο $A \subset K$ είναι ακραίο, αν $(1-t)x + ty \in A$ για κάποια $0 < t < 1$, $x, y \in K$, συνεπάγεται ότι $x, y \in A$. Παρατηρήστε ότι αν το A είναι ακραίο τότε $\mathrm{ex}(A) \subset \mathrm{ex}(K)$. Επίσης, ένα μονοσύνολο $\{s\}$ είναι ακραίο αν και μόνο αν $s \in \mathrm{ex}(K)$. Έτσι αρκεί να δείξουμε ότι το K περιέχει ακραίο μονοσύνολο. Έστω λοιπόν $\mathscr{A}$ η οικογένεια όλων των ακραίων και συμπαγών υποσυνόλων του K. Η $\mathscr{A}$ είναι μη κενή αφού το ίδιο το K είναι προφανώς ακραίο. Έστω τώρα $\{A_i\}_{i \in I}$ μια αλυσίδα (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) στην $\mathscr{A}$. Τότε $\emptyset \neq \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathscr{A}$, επομένως από το λήμμα Zorn, η $\mathscr{A}$ έχει minimal στοιχείο έστω $\widetilde{A}$. Αν το $\widetilde{A}$ δεν ήταν μονοσύνολο, τότε θα υπήρχαν $x_1, x_2 \in \widetilde{A}$ με $x_1 \neq x_2$, άρα από Hahn-Banach, θα υπήρχε $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε $\Lambda(x_1) < \Lambda(x_2)$. Έτσι αν θέσουμε

$$\widetilde{A}_\Lambda = \left\{ x \in \widetilde{A} : \Lambda(x) = \max_{y \in \widetilde{A}} \Lambda(y) \right\},$$

τότε $\widetilde{A}_\Lambda \in \mathscr{A}$ και $\widetilde{A}_\Lambda \subsetneq \widetilde{A}$ διότι $x_1 \notin \widetilde{A}_\Lambda$, άτοπο αφού το $\widetilde{A}$ είναι minimal. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι κάθε μη κενό, συμπαγές και κυρτό σύνολο έχει ακραία σημεία. Προφανώς $\overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K)) \subset K$. Έστω ότι υπήρχε $x_0 \in K \setminus \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K))$. Επιλέγουμε $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε $\Lambda(x) < \Lambda(x_0)$ για κάθε $x \in \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K))$ και θέτουμε

$$K_\Lambda = \left\{ x \in K : \Lambda(x) = \max_{y \in K} \Lambda(y) \right\}.$$

Τότε $K_\Lambda \cap \overline{\mathrm{co}}(\mathrm{ex}(K)) = \emptyset$. Επίσης το K_Λ είναι ακραίο και συμπαγές, άρα το $\mathrm{ex}(K_\Lambda)$ είναι μη κενό και $\mathrm{ex}(K_\Lambda) \subset \mathrm{ex}(K)$, άτοπο. □

Πόρισμα. Αν ο X είναι δυϊκός κάποιου χώρου με νόρμα τότε το B_X είναι κυρτό και w^*-συμπαγές, άρα έχει ακραία σημεία. Επομένως οι χώροι $L^1([0,1])$ και c_0 δεν είναι δυϊκοί. (Στην πραγματικότητα, δεν υπάρχει τοπικά κυρτή τοπολογία στους χώρους αυτούς ως προς την οποία οι μπάλες είναι συμπαγή σύνολα.)

Θεώρημα (Stone-Weierstrass). *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $\mathscr{A} \subset C(X)$ κλειστός γραμμικός υπόχωρος τέτοιος ώστε*

- *Για κάθε $f, g \in \mathscr{A}$ έχουμε $fg \in \mathscr{A}$.*
- *$\mathbf{1} \in \mathscr{A}$.*
- *Για κάθε $x_1, x_2 \in X$ με $x_1 \neq x_2$, υπάρχει $f \in \mathscr{A}$ με $f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *Για κάθε $f \in \mathscr{A}$ έχουμε $\overline{f} \in \mathscr{A}$.*

Τότε $\mathscr{A} = C(X)$.

Απόδειξη. (de Branges) Θέτουμε

$$\mathscr{N} = \left\{ \mu \in M(X, \mathscr{B}(X)) : \int g \, d\mu = 0 \text{ για κάθε } g \in \mathscr{A} \right\}.$$

Από θεώρημα Hahn-Banach αρκεί να δείξουμε ότι $\mathscr{N} = \{0\}$. Αν το $\mathscr{N}$ δεν ήταν τετριμμένο, τότε από θεώρημα Alaoglou, η μπάλα $B_{\mathscr{N}}$ θα ήταν w^*-συμπαγής, άρα από θεώρημα Krein-Milman θα υπήρχε ακραίο σημείο $\mu \in \mathscr{N}$ με $\|\mu\| = 1$. Έστω K ο φορέας του μ. Αν υποθέσουμε ότι το K περιέχει δυο διακεκριμένα σημεία x_1, x_2, τότε επιλέγουμε $F \in \mathscr{A}$ η οποία τα διαχωρίζει και θέτουμε

$$f = \frac{|F - F(x_1)|^2 + \|F - F(x_1)\|_\infty^2}{1 + 2\|F - F(x_1)\|_\infty^2} \in \mathscr{A}.$$

Τότε $0 < f < 1$, $f(x_1) \neq f(x_2)$, $f\mu \in \mathscr{N}$, $(1-f)\mu \in \mathscr{N}$, $\|(1-f)\mu\| = 1 - \|f\mu\|$ και $0 < \|f\mu\| < 1$.

Έτσι, το μ γράφεται σαν γνήσιος κυρτός συνδυασμός στοιχείων της $B_{\mathscr{N}}$:

$$\mu = \|f\mu\| \frac{f\mu}{\|f\mu\|} + (1 - \|f\mu\|) \frac{(1-f)\mu}{\|(1-f)\mu\|}.$$

Αφού το μ είναι ακραίο, έχουμε $f\mu = \|f\mu\|\mu$, άρα $f = \|f\mu\|$ $|\mu|$-σχεδόν παντού. Αλλά η f είναι συνεχής, επομένως $f = \|f\mu\|$ στο K. Δηλαδή η f είναι σταθερή στο K, άτοπο αφού $f(x_1) \neq f(x_2)$. Συνεπώς το K είναι μονοσύνολο, άρα $\mu = \lambda\delta_{x_0}$ για κάποιο $x_0 \in X$ και κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$ με $|\lambda| = 1$. Αλλά τότε $0 = \int \mathbf{1} d\mu = \lambda$, άτοπο. $\square$

Παράδειγμα. Θέτουμε $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Τότε από θεώρημα Stone-Weierstrass $\overline{\langle z^n : n \in \mathbb{Z}\rangle} = C(\mathbb{T})$. Έτσι αν θεωρήσουμε την ισομετρία $\Phi : C(\mathbb{T}) \to C([0, 2\pi])$, $\Phi(f)(t) = f(e^{it})$, έχουμε ότι

$$\mathrm{cl}_{\|\cdot\|_\infty} \left\langle e^{int} : n \in \mathbb{Z} \right\rangle = \{g \in C([0, 2\pi]) : g(0) = g(2\pi)\} =: A.$$

Αλλά το A είναι πυκνό σε όλους τους $L^p([0, 2\pi])$, $1 \leq p < \infty$. Ιδιαίτερα, έχουμε ότι το σύνολο $\{e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ με εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\overline{g}.$$

17. Ο συζυγής ενός τελεστή - Το θεώρημα κλειστής εικόνας

Ορισμός. *Έστω X χώρος Banach, $M \subset X$ και $N \subset X^*$ γραμμικοί υπόχωροι. Θέτουμε*

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in M\},$$

$$^\perp N = \{x \in X : x^*(x) = 0 \text{ για κάθε } x^* \in N\}.$$

Τα παραπάνω σύνολα λέγονται μηδενιστές των M και N.

Θεώρημα. *Αν X, M, N όπως στον ορισμό τότε*

(1) *$M \subset {}^\perp(M^\perp)$ και $N \subset ({}^\perp N)^\perp$.*
(2) *Το $M^\perp$ είναι w^*-κλειστό και το ${}^\perp N$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστό.*
(3) *$({}^\perp N)^\perp = \mathrm{cl}_{w^*} N$ και ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.*

Απόδειξη.

(1) Ταυτολογία.
(2) Προφανές.
(3) Αν υπήρχε $x_0^* \in ({}^\perp N)^\perp \setminus \mathrm{cl}_{w^*} N$, τότε από Hahn-Banach, θα υπήρχε $x_0 \in (X^*, w^*)^* = X$ τέτοιο ώστε $x_0^*(x_0) \neq 0$ και $x^*(x_0) = 0$ για κάθε $x^* \in N$. Δηλαδή $x_0 \in {}^\perp N$ και $x_0^*(x_0) \neq 0$, άρα $x_0^* \notin ({}^\perp N)^\perp$, άτοπο. Η δεύτερη σχέση αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Ορισμός. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : Y^* \to X^*$ με $T^*(y^*) = y^* \circ T$. Ο T^* ονομάζεται συζυγής του T.*

Παρατηρήσεις.

(1) Ο T^* είναι φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$ διότι

$$\sup_{\|y^*\|=1} \|T^*(y^*)\| = \sup_{\|y^*\|=1} \sup_{\|x\|=1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|y^*\|=1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \|T\|.$$

(2) $\ker T = {}^\perp T^*(Y^*)$ και $\ker T^* = T(X)^\perp$.

Παράδειγμα. Έστω $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int |K(x,y)| dx \le C \quad y\text{-σχεδόν παντού.}$$

$$\int |K(x,y)| dy \le C \quad x\text{-σχεδόν παντού.}$$

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $T_K : L^p \to L^p$, $1 \le p < \infty$, με

$$T_K(f)(x) = \int K(x,y) f(y)\, dy.$$

Τότε ο συζυγής τελεστής $T_K^* : L^q \to L^q$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$, είναι ο ολοκληρωτικός τελεστής $T_{\widetilde{K}}$, όπου

$$\widetilde{K}(x,y) = K(y,x).$$

Θεώρημα. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε*

(1) *Ο T^* είναι 1-1 αν και μόνο αν $\overline{T(X)} = Y$.*
(2) *Ο T είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T^* είναι επί.*
(3) *Ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση αν και μόνο αν ο T είναι επί.*

Απόδειξη.

(1) ($\Rightarrow$) Αν ο $T(X)$ δεν είναι πυκνός, τότε, από Hahn-Banach, υπάρχει μη μηδενικό $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*|_{T(X)} = 0$. Δηλαδή $T^*(y^*) = 0$, άτοπο διότι ο T^* είναι 1-1.
($\Leftarrow$) Αν $T^*(y^*) = 0$, τότε $y^*|_{T(X)} = 0$, άρα $y^* = 0$, αφού $T(X)$ πυκνός.

(2) ($\Rightarrow$) Έστω $x^* \in X^*$. Ορίζουμε $\Lambda : T(X) \to \mathbb{F}$ με $\Lambda(T(x)) = x^*(x)$. Το Λ είναι καλά ορισμένο διότι ο T είναι 1-1. Επίσης, αφού ο T είναι ισομορφική εμφύτευση, υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\|x\| \leq c\|T(x)\|$ για κάθε x. Επομένως $|\Lambda(T(x))| \leq \|x^*\| \cdot \|x\| \leq c\|x^*\| \cdot \|T(x)\|$, άρα $\Lambda \in T(X)^*$. Έτσι, από Hahn-Banach, υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*|_{T(X)} = \Lambda$. Τότε $T^*(y^*) = x^*$.

($\Leftarrow$) Αφού ο T^* είναι επί, από θεώρημα ανοιχτής απεικόνισης, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\delta B_{X^*} \subset T^*(B_{Y^*}).$$

Επομένως

$$\|T(x)\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |y^*(T(x))| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |T^*(y^*)(x)| \geq \sup_{\|x^*\|\leq \delta} |x^*(x)| = \delta\|x\|.$$

(3) ($\Rightarrow$) Αφού ο T^* είναι ισομορφική εμφύτευση, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta\|y^*\| \leq \|T^*(y^*)\|$. Ισχυριζόμαστε ότι $\delta B_Y \subset \overline{T(B_X)}$. Πράγματι, αν $y \notin \overline{T(B_X)}$, τότε, από Hahn-Banach, υπάρχουν $y^* \in Y^*$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Re}\, y^*(T(x)) < \lambda < \mathrm{Re}\, y^*(y)$ για κάθε $x \in B_X$. Επομένως, για $x \in B_X$ και θ κατάλληλο, έχουμε $|T^*(y^*)(x)| = y^*(T(e^{i\theta}x)) < \lambda$, άρα $\|T^*(y^*)\| \leq \lambda$. Συνεπώς

$$\delta\lambda < \delta \mathrm{Re}\, y^*(y) \leq \delta|y^*(y)| \leq \delta\|y^*\| \cdot \|y\| \leq \|T^*(y^*)\| \cdot \|y\| \leq \lambda\|y\|.$$

Άρα $y \notin \delta B_Y$. Έχουμε στην πραγματικότητα δείξει ότι το $r\overline{T(B_X)}$ είναι περιοχή του 0 για κάθε $r > 0$. Παρατηρούμε τώρα ότι $\overline{T(B_X)} \subset 2T(B_X)$.

[Απόδειξη: Έστω $y \in \overline{T(B_X)}$. Αφού το $2^{-1}\overline{T(B_X)}$ είναι περιοχή του 0, έχουμε ότι

$$(y + 2^{-1}\overline{T(B_X)}) \cap T(B_X) \neq \emptyset,$$

άρα υπάρχει $x_1 \in B_X$ τέτοιο ώστε $y - T(x_1) \in 2^{-1}\overline{T(B_X)}$. Ομοίως, αφού το $2^{-2}\overline{T(B_X)}$ είναι περιοχή του 0, έχουμε ότι

$$(y - T(x_1) + 2^{-2}\overline{T(B_X)}) \cap 2^{-1}T(B_X) \neq \emptyset,$$

άρα υπάρχει $x_2 \in 2^{-1}B_X$ τέτοιο ώστε $y - T(x_1) - T(x_2) \in 2^{-2}\overline{T(B_X)}$. Παίρνουμε έτσι μια ακολουθία $x_n \in 2^{-n+1}B_X$ τέτοια ώστε

$$y - T(x_1 + \cdots + x_n) \in 2^{-n}\overline{T(B_X)} \subset 2^{-n}\|T\|B_Y.$$

Αφού $\sum_n \|x_n\| \leq 2$ και ο X είναι χώρος Banach, υπάρχει $x \in 2B_X$ τέτοιο ώστε $x = \sum_n x_n$. Αλλά $\|y - T(x_1 + \cdots + x_n)\| \leq 2^{-n}\|T\|$, άρα $T(x) = y$.]

Επομένως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\delta n B_Y \subset 2nT(B_X)$, από το οποίο συνεπάγεται, παίρνοντας ενώσεις ως προς n, ότι $T(X) = Y$.

($\Leftarrow$) Η απόδειξη είναι τελείως ανάλογη με την απόδειξη της αντίστοιχης κατεύθυνσης στο (2).

$\square$

Θεώρημα (Κλειστής εικόνας). *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο $T(X)$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός.*
(2) *Ο $T^*(Y^*)$ είναι w^*-κλειστός.*
(3) *Ο $T^*(Y^*)$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός.*

Απόδειξη.
(1)$\Rightarrow$(2) Έχουμε ότι $\mathrm{cl}_{w^*} T^*(Y^*) = ({}^{\perp}T^*(Y^*))^{\perp} = (\ker T)^{\perp}$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $(\ker T)^{\perp} \subset T^*(Y^*)$. Έστω $x^* \in (\ker T)^{\perp}$. Ορίζουμε $\Lambda : T(X) \to \mathbb{F}$ με $\Lambda(T(x)) = x^*(x)$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $y \in T(X)$ υπάρχει $x_1 \in X$ με $T(x_1) = y$ και $c\|y\| \geq \|x_1\|$.

[Απόδειξη: Ο $T(X)$ είναι κλειστός, άρα είναι χώρος Banach, επομένως η $T : X \to T(X)$ είναι ανοιχτή απεικόνιση. Έτσι, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $\delta B_{T(X)} \subset T(B_X)$. Αν τώρα $y \in T(X)$, $y \neq 0$, τότε $\delta\|y\|^{-1}y \in \delta B_{T(X)}$, άρα υπάρχει $x_0 \in B_X$, τέτοιο ώστε $T(x_0) = \delta\|y\|^{-1}y$. Θέτουμε $x_1 = \delta^{-1}\|y\|x_0$.]

Ιδιαίτερα, αν $x \in X$ τότε υπάρχει $x_1 \in X$ με $T(x_1) = T(x)$ και $c\|T(x)\| \geq \|x_1\|$. Άρα

$$|\Lambda(T(x))| = |\Lambda(T(x_1))| = |x^*(x_1)| \leq \|x^*\| \cdot \|x_1\| \leq c\|x^*\| \cdot \|T(x)\|.$$

Επομένως $\Lambda \in (T(X))^*$, έτσι, από Hahn-Banach, υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*|_{T(X)} = \Lambda$, το οποίο σημαίνει ότι $T^*(y^*) = x^*$.

(2)$\Rightarrow$(3) Προφανές.

(3)$\Rightarrow$(1) Θεωρούμε τον τελεστή $S : X \to \overline{T(X)}$ με $S(x) = T(x)$. Τότε, από το προηγούμενο θεώρημα, ο $S^* : \left(\overline{T(X)}\right)^* \to X^*$ είναι 1-1. Ισχυριζόμαστε ότι $S^*\left(\left(\overline{T(X)}\right)^*\right) = T^*(Y^*)$.

[Απόδειξη: Έστω $\Lambda \in \left(\overline{T(X)}\right)^*$, από Hahn-Banach, υπάρχει $y^* \in Y^*$ τέτοιο ώστε $y^*|_{\overline{T(X)}} = \Lambda$. Τότε $S^*(\Lambda) = T^*(y^*)$. Αντίστροφα, αν $y^* \in Y^*$ τότε $S^*\left(y^*|_{\overline{T(X)}}\right) = T^*(y^*)$.]

Έτσι, αφού ο $T^*(Y^*)$ είναι κλειστός, ο S^* είναι 1-1 και έχει κλειστή εικόνα, επομένως, από το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, είναι ισομορφική εμφύτευση. Άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, ο S είναι επί, δηλαδή $T(X) = S(X) = \overline{T(X)}$, συνεπώς ο $T(X)$ είναι κλειστός. □

18. Βάσεις Schauder

Ορισμός. *Μια ακολουθία e_n σ'ένα χώρο Banach X λέγεται βάση Schauder αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μοναδική ακολουθία βαθμωτών $e_n^*(x)$ τέτοια ώστε*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n.$$

Οι τελεστές

$$P_n : X \to \langle e_1, \dots, e_n \rangle, \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k$$

ονομάζονται προβολές μερικών αθροισμάτων.

Παράδειγμα. Η ακολουθία e_n με $e_n(k) = \delta_{n,k}$ είναι βάση Schauder στον c_0 και τους ℓ^p, $1 \leq p < \infty$.

Παράδειγμα. Μια ορθοκανονική βάση σ'ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert είναι βάση Schauder.

Παρατήρηση. Οι προβολές μερικών αθροισμάτων έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

(1) $P_n(x) \to x$ για κάθε x.
(2) $\dim(P_n(X)) = n$.
(3) $P_n P_m = P_{\min\{m,n\}}$.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder e_n. Τότε οι P_n είναι φραγμένοι και* $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\|x\|_\infty = \sup_k \|P_k(x)\|$. Τότε ο $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Πράγματι, έστω x_n μια $\|\cdot\|_\infty$-Cauchy ακολουθία. Τότε η $(P_k(x_n))_n$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy στον χώρο Banach $\langle e_1, \dots, e_k \rangle$ ομοιόμορφα ως προς k. Επομένως υπάρχει $y_k \in \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ τέτοιο ώστε

$$\lim_n \sup_k \|P_k(x_n) - y_k\| = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η y_k είναι $\|\cdot\|$-Cauchy.

[Απόδειξη: Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\sup_k \|P_k(x_{n_0}) - y_k\| < \varepsilon$. Αφού τώρα η $(P_k(x_{n_0}))_k$ συγκλίνει (στο x_{n_0}), υπάρχει k_0 τέτοιο ώστε $\|P_k(x_{n_0}) - P_\ell(x_{n_0})\| < \varepsilon$ για κάθε $k, \ell \geq k_0$. Έτσι για όλα αυτά τα k, ℓ έχουμε

$$\|y_k - y_\ell\| \leq \|y_k - P_k(x_{n_0})\| + \|P_k(x_{n_0}) - P_\ell(x_{n_0})\| + \|P_\ell(x_{n_0}) - y_\ell\| < 3\varepsilon.]$$

Επομένως υπάρχει $y \in X$ τέτοιο ώστε $\|y_k - y\| \to 0$. Αφού ο P_k είναι συνεχής σε κάθε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης, έχουμε ότι για $k \leq \ell$

$$P_k(y_\ell) = P_k(\lim_n P_\ell(x_n)) = \lim_n P_k(P_\ell(x_n)) = \lim_n P_k(x_n) = y_k.$$

Έτσι, από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος ως προς τη βάση, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία βαθμωτών λ_i τέτοια ώστε $y_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i$. Άρα $y = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^\infty e_i^*(y) e_i$. Συνεπώς $P_k(y) = y_k$. Επομένως

$$\|y - x_n\|_\infty \leq \sup_k \|y_k - P_k(x_n)\| \to 0 \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Έχουμε λοιπόν ότι $\|x\| \leq \|x\|_\infty$ και ότι οι χώροι $(X, \|\cdot\|)$, $(X, \|\cdot\|_\infty)$ είναι Banach. Άρα οι δύο νόρμες είναι ισοδύναμες (θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης για τον ταυτοτικό τελεστή), δηλαδή υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε

$$\sup_n \|P_n(x)\| = \|x\|_\infty \leq C\|x\|$$

το οποίο σημαίνει ότι οι τελεστές P_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. □

Πόρισμα. Τα συναρτησοειδή e_n^* στον ορισμό της βάσης Schauder είναι φραγμένα.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία τελεστών $P_n : X \to X$ τέτοια ώστε:*

(1) $P_n(x) \to x$ *για κάθε* x.
(2) $\dim(P_n(X)) = n$.
(3) $P_n P_m = P_{\min\{m,n\}}$.

Τότε ο X έχει βάση Schauder.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\dim(P_1(X)) = \dim(P_k(X) \cap \ker P_{k-1}) = 1$, $k \geq 2$, άρα υπάρχει μια ακολουθία $e_n \in X$ τέτοια ώστε $P_1(X) = \langle e_1 \rangle$ και $P_k(X) \cap \ker P_{k-1} = \langle e_k \rangle$, $k \geq 2$. Τώρα για κάθε x έχουμε

$$x = \lim_n P_n(x) = P_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (P_k(x) - P_{k-1}(x)).$$

Αλλά $P_k(x) - P_{k-1}(x) \in P_k(X) \cap \ker P_{k-1}$, επομένως υπάρχει ακολουθία $\lambda_n \in \mathbb{F}$ τέτοια ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Η μοναδικότητα των λ_n στην παραπάνω αναπαράσταση προκύπτει από το ότι για κάθε $i < j$ έχουμε $P_i(e_i) = e_i$ και $P_i(e_j) = 0$. □

Παράδειγμα. Ο $L^p([0,1])$, $1 \leq p < \infty$ έχει βάση Schauder. Αρκεί να βρούμε μια ακολουθία προβολών η οποία να ικανοποιεί τις συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος. Θεωρούμε τις ακόλουθες οικογένειες δυαδικών διαστημάτων:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_1 &= \{(0,1)\} \\
\mathscr{D}_2 &= \{(0,1/2),(1/2,1)\} \\
\mathscr{D}_3 &= \{(0,1/4),(1/4,1/2),(1/2,1)\} \\
\mathscr{D}_4 &= \{(0,1/4),(1/4,1/2),(1/2,3/4),(3/4,1)\} \\
\mathscr{D}_5 &= \{(0,1/8),(1/8,1/4),(1/4,1/2),(1/2,3/4),(3/4,1)\}
\end{aligned}$$

....

Ακριβώς ένα διάστημα της $\mathscr{D}_k$ διχοτομείται για να δώσει δυο διαδοχικά διαστήματα της $\mathscr{D}_{k+1}$. Επίσης η $\mathscr{D}_{2^k}$ αποτελείται από 2^k διαστήματα ίσου μήκους.

Θέτουμε τώρα $\mathscr{F}_n = \langle \chi_I : I \in \mathscr{D}_n \rangle$ και παρατηρούμε ότι η ένωση των $\mathscr{F}_n$ (κλιμακωτές συναρτήσεις πάνω σε διαστήματα με δυαδικά άκρα) είναι πυκνή στον L^p. Τέλος, ορίζουμε $P_n : L^p \to \mathscr{F}_n$ με

$$P_n(f) = \sum_{I \in \mathscr{D}_n} f_I \chi_I,$$

όπου f_I είναι η μέση τιμή της f πάνω στο I:

$$f_I = \frac{1}{|I|} \int_I f.$$

Οι προβολές P_n προφανώς ικανοποιούν τα (2) και (3) του προηγούμενου θεωρήματος. Για να δείξουμε το (1) κατ'αρχάς παρατηρούμε ότι οι P_n είναι ομοιόμορφα φραγμένες διότι

$$\|P_n(f)\|_p^p = \int \left| \sum_{I \in \mathscr{D}_n} f_I \chi_I \right|^p = \sum_{I \in \mathscr{D}_n} |I| \cdot |f_I|^p = \sum_{I \in \mathscr{D}_n} |I|^{1-p} \left| \int_I f \right|^p \leq \sum_{I \in \mathscr{D}_n} |I|^{1-p} \cdot |I|^{p/q} \int_I |f|^p = \|f\|_p^p.$$

Έστω τώρα $f \in L^p$ και $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει n_0 και $s \in \mathscr{F}_{n_0}$ τέτοια ώστε $\|f - s\|_p < \varepsilon$. Έτσι για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $P_n(s) = s$, άρα

$$\|P_n(f) - f\|_p \leq \|P_n(f - s)\|_p + \|s - f\|_p \leq 2\|f - s\|_p < 2\varepsilon.$$

Αν επιλέξουμε $h_n \in P_n(X) \cap \ker P_{n-1}$ με $|h_n| = 1$ παίρνουμε τη λεγόμενη βάση Haar.

Παράδειγμα. Ο $C([0,1])$ έχει βάση Schauder. Έστω t_n μια πυκνή ακολουθία στο $[0,1]$ με $t_1 = 0$ και $t_2 = 1$. Θεωρούμε τις προβολές $P_n : C([0,1]) \to C([0,1])$ με $P_1(f) = f(0)$ και για $n \geq 2$, $P_n(f)$ να είναι η κατά τμήματα γραμμική συνάρτηση με κόμβους τα σημεία $t_1, \ldots, t_n$ και τιμές στους κόμβους αυτούς $f(t_1), \ldots, f(t_n)$. Οι P_n ικανοποιούν τα (1), (2), (3) του προηγούμενου θεωρήματος. Αν t_n είναι η ακολουθία των δυαδικών αριθμών (με τη φυσιολογική αρίθμηση) και θέσουμε

$$\varphi_n(x) = \int_0^x h_n(t)\, dt,$$

όπου h_n είναι οι συναρτήσεις Haar του προηγούμενου παραδείγματος, τότε παίρνουμε τη βάση Faber-Schauder.

19. Συμπαγείς τελεστές

Ορισμός. *Έστω X, Y χώροι Banach. Ένας τελεστής $T : X \to Y$ ονομάζεται συμπαγής αν το $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές (δηλαδή, αν το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές).*

Παρατηρήσεις.

(1) Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος.
(2) Αν ένας τελεστής είναι πεπερασμένης τάξης (δηλαδή, αν η εικόνα του είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης), τότε είναι συμπαγής.
(3) Ο ταυτοτικός τελεστής είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο χώρος είναι πεπερασμένης διάστασης.
(4) Αν $S, T : X \to X$, ο T είναι συμπαγής και ο S είναι φραγμένος, τότε οι ST και TS είναι συμπαγείς.
(5) Το σύνολο των συμπαγών τελεστών είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $B(X, Y)$. Πράγματι, έστω T_n μια ακολουθία συμπαγών τελεστών τέτοια ώστε $T_n \to T$. Αρκεί να δείξουμε ότι το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο. Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $\|T_{n_0} - T\| < \varepsilon$. Τότε $T(B_X) \subset T_{n_0}(B_X) + \varepsilon B_Y$. Αφού ο T_{n_0} είναι συμπαγής, το $T_{n_0}(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο, άρα υπάρχει πεπερασμένο $F \subset B_X$ τέτοιο ώστε $T_{n_0}(B_X) \subset T_{n_0}(F) + \varepsilon B_Y$. Επομένως
$$T(B_X) \subset T_{n_0}(F) + 2\varepsilon B_Y \subset T(F) + 3\varepsilon B_Y.$$

Για τα παρακάτω, θα χρειαστεί το θεώρημα του Ascoli: Αν ο (X, d) είναι συμπαγής μετρικός χώρος, τότε μια οικογένεια $\mathscr{F} \subset (C(X), \|\cdot\|_\infty)$ είναι σχετικά συμπαγής αν και μόνο αν είναι φραγμένη και ισοσυνεχής (ισοσυνεχής σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d(x, y) < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in \mathscr{F}$).

Παράδειγμα. Έστω $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{F}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ο ολοκληρωτικός τελεστής
$$T : C([0, 1]) \to C([0, 1]) \quad \text{με} \quad T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y)\, dy$$
είναι συμπαγής, διότι για κάθε f με $\|f\|_\infty \le 1$ έχουμε
$$|T(f)(x_1) - T(f)(x_2)| \le \int_0^1 |K(x_1, y) - K(x_2, y)|\, dy.$$
Αφού η K είναι ομοιόμορφα συνεχής, από την προηγούμενη σχέση συνεπάγεται ότι η οικογένεια $\{T(f) : \|f\|_\infty \le 1\}$ είναι ισοσυνεχής, άρα από το θεώρημα Ascoli, είναι σχετικά συμπαγής.

Παράδειγμα. Έστω $K \in L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Τότε ο τελεστής $T : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$ με
$$T(f)(x) = \int K(x, y) f(y)\, dy$$
είναι συμπαγής γιατί αν θέσουμε $K_x(y) = K(x, y)$, τότε $K_x \in L^2([0, 1])$ για σχεδόν όλα τα x, επομένως, αν $\{e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $L^2([0, 1])$ τότε
$$K_x = \sum_{j=1}^\infty \lambda_j(x) e_j,$$
για κάποια $\lambda_j(x) \in \mathbb{F}$. Αλλά, από Parseval
$$\|K\|_2^2 = \int \|K_x\|_2^2\, dx = \int \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j(x)|^2\, dx = \sum_{j=1}^\infty \int |\lambda_j(x)|^2\, dx,$$
άρα $\lambda_j \in L^2([0, 1])$. Θέτουμε τώρα
$$K_x^n = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) e_j$$
και θεωρούμε τους τελεστές $T_n : L^2([0, 1]) \to L^2([0, 1])$ με
$$T_n(f)(x) = \int K_x^n f = \sum_{j=1}^n \lambda_j(x) \int f e_j.$$
Οι T_n είναι πεπερασμένης τάξης (διότι $T_n(L^2) = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_n \rangle$), και
$$\|T_n - T\| \le \left(\int \|K_x^n - K_x\|_2^2\, dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=n+1}^\infty \int |\lambda_j(x)|^2\, dx \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=n+1}^\infty \|\lambda_j\|_2^2 \right)^{1/2} \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$, άρα ο T είναι συμπαγής.

Θεώρημα. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in B(X, Y)$.*

(1) *Αν ο T είναι συμπαγής και $x_n \xrightarrow{w} x$, τότε $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$.*

(2) *Αν ο X είναι αυτοπαθής και ο T έχει την ιδιότητα $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$, τότε ο T είναι συμπαγής.*

Απόδειξη.

(1) Έστω ότι υπήρχε $x_n \in X$ τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$ και $\|T(x_n)\| \nrightarrow 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε (παίρνοντας μια υπακολουθία) ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\|T(x_n)\| \geq \varepsilon$. Αφού η x_n είναι w-συγκλίνουσα, είναι φραγμένη, άρα και η $T(x_n)$ είναι φραγμένη. Αφού ο T είναι συμπαγής, η $T(x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω $T(x_{k_n})$. Τώρα για κάθε $y^* \in Y^*$ έχουμε ότι $y^* \circ T \in X^*$, άρα $y^*(T(x_{k_n})) \to 0$. Δηλαδή $T(x_{k_n}) \xrightarrow{w} 0$. Συνεπώς, από μοναδικότητα ορίου, $T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$, άτοπο, αφού $\|T_{x_{k_n}}\| \geq \varepsilon$.

(2) Έστω $T(x_n) \in T(B_X)$, με $x_n \in B_X$. Αφού ο X είναι αυτοπαθής, η x_n έχει ασθενώς συγκλίνουσα υπακολουθία, έστω x_{k_n}. Αλλά τότε η $T(x_{k_n})$ είναι, από υπόθεση, $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα.

□

Παράδειγμα. Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε μια εναλλακτική απόδειξη του ότι ο τελεστής του τελευταίου παραδείγματος είναι συμπαγής. Αφού ο L^2 είναι αυτοπαθής, αρκεί να δείξουμε ότι αν $f_n \xrightarrow{w} 0$ τότε $\|T(f_n)\|_2 \to 0$. Πράγματι

$$\|T(f_n)\|_2^2 = \int \left| \int K_x f_n \right|^2 dx.$$

Αφού $f_n \xrightarrow{w} 0$, έχουμε ότι $\|f_n\|_2^2 \leq C$, για κάποιο $C > 0$, και ότι $\int K_x f_n \to 0$ για σχεδόν όλα τα x. Επίσης

$$\left| \int K_x f_n \right|^2 \leq \|K_x\|_2^2 \cdot \|f_n\|_2^2 \leq C \|K_x\|_2^2.$$

Αλλά $\int \|K_x\|_2^2 \, dx = \|K\|_2^2 < \infty$, και το ζητούμενο έπεται από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα (Schauder). *Έστω X, Y χώροι Banach και $T \in B(X, Y)$. Τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο T είναι συμπαγής, και $y_n^* \in B_{Y^*}$. Θα δείξουμε ότι η $T^*(y_n^*)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y, z \in Y$, έχουμε $|y_n^*(y) - y_n^*(z)| \leq \|y - z\|$, άρα η οικογένεια $\{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ισοσυνεχής. Αφού ο T είναι συμπαγής, το $\overline{T(B_X)}$ είναι συμπαγές, άρα από το θεώρημα Ascoli, η y_n^* έχει μια υπακολουθία $y_{k_n}^*$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $T(B_X)$, και επομένως είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $T(B_X)$. Αλλά

$$\|T^*(y_{k_n}^*) - T^*(y_{k_m}^*)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |y_{k_n}^*(T(x)) - y_{k_m}^*(T(x))| = \sup_{y \in T(B_X)} |y_{k_n}^*(y) - y_{k_m}^*(y)|.$$

Συμπεραίνουμε ότι η $T^*(y_{k_n}^*)$ είναι Cauchy, άρα συγκλίνει.

Αντίστροφα, έστω ότι ο T^* είναι συμπαγής. Τότε, από το πρώτο μέρος του θωρήματος, ο

$$T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$$

είναι συμπαγής. Θεωρούμε τις κανονικές εμφυτεύσεις $J_X : X \to X^{**}$, $J_Y : Y \to Y^{**}$, και παρατηρούμε ότι $T^{**} J_X = J_Y T$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{J_X} & X^{**} \\ {\scriptstyle T}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T^{**}} \\ Y & \xrightarrow[J_Y]{} & Y^{**} \end{array}$$

Άρα $J_Y(T(B_X)) = T^{**}(J_X(B_X)) \subset T^{**}(B_{X^{**}})$. Αλλά ο T^{**} είναι συμπαγής, άρα το $T^{**}(B_{X^{**}})$ είναι ολικά φραγμένο, άρα και το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο, αφού η J_Y είναι ισομετρία. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder και $T : X \to X$ συμπαγής τελεστής. Τότε υπάρχει ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης $T_n : X \to X$ τέτοια ώστε $T_n \to T$.*

Απόδειξη. Έστω $P_n : X \to X$ οι προβολές μερικών αθροισμάτων που αντιστοιχούν στη βάση. Τότε οι τελεστές P_nT είναι πεπερασμένης τάξης. Ισχυριζόμαστε ότι $P_nT \to T$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το $T(B_X)$ είναι ολικά φραγμένο, υπάρχει πεπερασμένο $F \subset T(B_X)$ τέτοιο ώστε $T(B_X) \subset F + \varepsilon B_X$. Επομένως για κάθε $y \in T(B_X)$ υπάρχει $z \in F$ τέτοιο ώστε $\|y - z\| \leq \varepsilon$. Άρα

$$\|y - P_n(y)\| \leq \|y - z\| + \|z - P_n(z)\| + \|P_n(z) - P_n(y)\| \leq (1 + C)\varepsilon + \max_{w \in F} \|w - P_n(w)\|,$$

όπου $C = \sup_n \|P_n\|$. Συνεπώς

$$\|T - P_nT\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x) - P_n(T(x))\| = \sup_{y \in T(B_X)} \|y - P_n(y)\| \leq (1 + C)\varepsilon + \max_{w \in F} \|w - P_n(w)\|.$$

Αλλά $\max_{w \in F} \|w - P_n(w)\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$, επομένως $\overline{\lim}_n \|T - P_nT\| \leq (1 + C)\varepsilon$, το οποίο σημαίνει ότι $P_nT \to T$. $\square$

20. Στοιχειώδης φασματική θεωρία αλγεβρών Banach

Ορισμός. *Μια άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach επί του* $\mathbb{C}$ *με μια πράξη εσωτερικού πολλαπλασιασμού* $X \times X \ni (x, y) \mapsto xy \in X$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x, y, z \in X$ *και* $\lambda \in \mathbb{C}$ *έχουμε*

(1) $(xy)z = x(yz)$.
(2) $x(y + z) = xy + xz$, $(y + z)x = yx + zx$.
(3) $(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy)$.
(4) $\|xy\| \le \|x\| \cdot \|y\|$

Αν υπάρχει $e \in X$ με $\|e\| = 1$ τέτοιο ώστε $xe = ex = x$ για κάθε $x \in X$, τότε το e είναι μοναδικό και λέγεται μονάδα.
Αν η X έχει μονάδα, τότε κάποιο $x \in X$ λέγεται αντιστρέψιμο αν υπάρχει (κατ'ανάγκη μοναδικό) $y \in X$ τέτοιο ώστε $xy = yx = e$. Το y αυτό συμβολίζεται με x^{-1} και ονομάζεται αντίστροφο του x.
Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων είναι ομάδα ως προς την πράξη του πολλαπλασιασμού και συμβολίζεται με $G(X)$.

Παρατηρήσεις.

- Από το (4) στον ορισμό συνεπάγεται ότι ο πολλαπλασιασμός είναι συνεχής.
- Δεν υποθέτουμε ότι $xy = yx$ για κάθε x, y. Αν αυτό ισχύει τότε η άλγεβρα λέγεται μεταθετική.

Παράδειγμα. Ο $(C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ είναι (μεταθετική) άλγεβρα με πολλαπλασιασμό τον συνηθισμένο πολλαπλασιασμό συναρτήσεων και μονάδα την ταυτοτικά ίση με 1 συνάρτηση.

Παράδειγμα. Αν ο X είναι χώρος Banach, τότε ο χώρος $B(X)$ όλων φραγμένων τελεστών $T : X \to X$ είναι (μη μεταθετική) άλγεβρα Banach με πολλαπλασιασμό τη σύνθεση απεικονίσεων και μονάδα τον ταυτοτικό τελεστή. Η υποάλγεβρα των συμπαγών τελεστών δεν έχει μονάδα (εκτός και αν ο χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση).

Παράδειγμα. Ο $M(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με πολλαπλασιασμό τη συνέλιξη μέτρων

$$(\mu * \nu)(A) = \int \mu(A - x)\, d\nu(x) = \int \nu(A - x)\, d\mu(x)$$

και μονάδα το μέτρο Dirac δ_0.

Παράδειγμα. Ο $L^1(\mathbb{R})$ γίνεται μεταθετική άλγεβρα Banach με πολλαπλασιασμό τη συνέλιξη συναρτήσεων

$$(f * g)(x) = \int f(x - y)g(y)\, dy = \int g(x - y)f(y)\, dy.$$

Η άλγεβρα αυτή δεν έχει μονάδα. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $e \in L^1$ τέτοιο ώστε $f * e = f$ για κάθε $f \in L^1$ και θέσουμε $f_n = n\chi_{[0,1/n]}$, τότε $f_n = f_n * e \xrightarrow{\|\cdot\|_1} e$.

[Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της μετάθεσης, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int |e(x - y) - e(x)|\, dx < \varepsilon$$

για κάθε $|y| < \delta$. Έτσι για κάθε n με $1/n < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|f_n * e - e\|_1 &= \int \left| \int e(x - y)f_n(y)\, dy - e(x) \right| dx = \int \left| \int e(x - y)f_n(y)\, dy - \int e(x)f_n(y)\, dy \right| dx \\ &\le n \int_0^{1/n} \int |e(x - y) - e(x)|\, dx\, dy < \varepsilon.]\end{aligned}$$

Αλλά $f_n \to 0$ σχεδόν παντού, άρα $e = 0$, άτοπο. Εναλλακτικά, αν h είναι μια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν μηδενίζεται πουθενά (για παράδειγμα, $h(x) = e^{-x^2}$), τότε από τη σχέση $h * e = h$ συνεπάγεται ότι $\widehat{h} \cdot \widehat{e} = \widehat{h * e} = \widehat{h}$, άρα $\widehat{e} = 1$, άτοπο, αφού για κάθε $f \in L^1$ έχουμε ότι $\widehat{f}(\xi) \to 0$ καθώς $|\xi| \to +\infty$. Παρά ταύτα, η ακολουθία f_n είναι μια «προσέγγιση της μονάδας» αφού ασυμπτωτικά συμπεριφέρεται σαν να ήταν μονάδα: $f_n * f = f * f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$ για κάθε f. Παρατηρήστε επίσης ότι αν δούμε τον L^1 σαν υποάλγεβρα του $M(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ μέσω της ισομετρίας

$$L^1(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f\, dx \in M(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})),$$

όπου dx είναι το μέτρο Lebesgue, τότε η f_n συγκλίνει w^* στο δ_0.

[Απόδειξη: Έστω $g \in C_0(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της g στο 0, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|g(x) - g(0)| < \delta$ για κάθε $|x| < \delta$. Επομένως, για $n > 1/\delta$, έχουμε

$$\left|\int f_n(x)g(x)\,dx - \int g(x)\,d\delta_0(x)\right| = \left|\int f_n(x)g(x)\,dx - g(0)\right| = \left|\int f_n(x)g(x)\,dx - \int f_n(x)g(0)\,dx\right|$$
$$\leq n\int_0^{1/n} |g(x) - g(0)|\,dx < \varepsilon.]$$

Αλλά το δ_0 είναι ακριβώς η μονάδα του $M(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

Παρατήρηση. Αν μια άλγεβρα Banach X δεν έχει μονάδα, τότε μπορούμε να της επισυνάψουμε μια μονάδα ως εξής: Θέτουμε $Y = X \times \mathbb{C}$. Το Y είναι γραμμικός χώρος με τις κατά σημείο πράξεις, και άλγεβρα Banach με πολλαπλασιαμό $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta)$ και νόρμα $\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha|$. Η μονάδα του Y είναι το στοιχείο $(0, 1)$ και ο X μπορεί να θεωρηθεί υποάλγεβρα του Y μέσω της ισομετρίας

$$X \ni x \mapsto (x, 0) \in Y$$

η οποία διατηρεί την αλγεβρική δομή.

Θεώρημα. *Έστω X άλγεβρα Banach με μονάδα.*

(1) *Αν $\|x - e\| < 1$ τότε $x \in G(X)$.*
(2) *Αν $x \in G(X)$ και $\|x - y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ τότε $y \in G(X)$.*
(3) *Το $G(X)$ είναι ανοιχτό και η απεικόνιση $G(X) \ni x \mapsto x^{-1} \in G(X)$ ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη.

(1) Αφού $\|x-e\| < 1$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} \|e - x\|^n < \infty$, άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}(e - x)^n$ συγκλίνει. Θέτουμε $y = \sum_{n=0}^{\infty}(e - x)^n$. Τότε
$$xy = \lim_n \sum_{k=0}^{n}(e - (e - x))(e - x)^k = \lim_n \sum_{k=0}^{n}((e - x)^k - (e - x)^{k+1}) = \lim_n(e - (e - x)^{n+1}) = e.$$
Ομοίως, $yx = e$, άρα $x \in G(X)$.

(2) Έχουμε $\|x^{-1}y - e\| = \|x^{-1}(y - x)\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|y - x\| < 1$. Άρα, από το (1), $x^{-1}y \in G(X)$, επομένως $y \in G(X)$.

(3) Αν $x \in G(X)$ τότε από το (2) $D(x, \|x^{-1}\|^{-1}) \subset G(X)$, άρα το $G(X)$ είναι ανοιχτό. Σταθεροποιούμε τώρα $x \in G(X)$. Τότε για κάθε $h \in X$ με $\|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}/2$ έχουμε $\|(x - h) - x\| = \|h\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, άρα $x - h \in G(X)$. Επίσης
$$(x - h)^{-1} = (e - x^{-1}h)^{-1}x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x^{-1}h)^n x^{-1} = x^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(x^{-1}h)^n x^{-1}.$$
Επομένως
$$\|(x - h)^{-1} - x^{-1}\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x^{-1}\|^{n+1}\|h\|^n < \|h\| \cdot \|x^{-1}\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2\|h\| \cdot \|x^{-1}\|^2 \to 0$$
καθώς $h \to 0$. Συνεπώς η $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής. Αφού επιπλέον είναι 1-1 και επί, και η αντίστροφή της είναι ο εαυτός της, είναι ομοιομορφισμός.

$\square$

Ορισμός. *Έστω X άλγεβρα Banach με μονάδα, και $x \in X$. Θέτουμε*

- $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(X)\}$. *Το $\sigma(x)$ ονομάζεται φάσμα του x.*
- $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. *Το $\rho(x)$ ονομάζεται φασματική ακτίνα του x.*

Θεώρημα. *Έστω X άλγεβρα Banach με μονάδα, και $x \in X$.*

(1) *Το $\sigma(x)$ είναι μη κενό και συμπαγές.*
(2) $\rho(x) = \lim_n \|x^n\|^{1/n} = \inf_n \|x^n\|^{1/n}$.

Απόδειξη.

(1) Θεωρούμε την απεικόνιση $g : \mathbb{C} \to X$ με $g(\lambda) = x - \lambda e$. Η g είναι συνεχής και $\sigma(x) = g^{-1}(X \setminus G(X))$, άρα το $\sigma(x)$ είναι κλειστό. Επίσης, αν $|\lambda| > \|x\|$ τότε $\|x/\lambda\| < 1$, άρα $x/\lambda - e \in G(X)$, δηλαδή $\lambda \notin \sigma(x)$. Επομένως $\sigma(x) \subset B(0, \|x\|)$. Έτσι, το φάσμα είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές. Ορίζουμε τώρα $f : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to X$ με $f(\lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ και παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$.

[Απόδειξη: Για κάθε $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε

$$\|f(\lambda)\| = \|(x-\lambda e)^{-1}\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\left(e - \frac{x}{\lambda}\right)^{-1}\right\| = \frac{1}{|\lambda|}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{x}{\lambda}\right\|^n = \frac{1}{|\lambda| - \|x\|} \to 0$$

καθώς $\lambda \to \infty$.]

Έστω τώρα $x^* \in X^*$. Τότε η συνάρτηση $x^* \circ f : \mathbb{C} \setminus \sigma(x) \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική .

[Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι αναπτύσσεται τοπικά σε δυναμοσειρά. Έστω λοιπόν $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ τυχόν. Τότε για κάθε λ με $|\lambda - \lambda_0| < \|(x - \lambda_0 e)^{-1}\|^{-1}$ έχουμε

$$\|(x - \lambda e) - (x - \lambda_0 e)\| = |\lambda - \lambda_0| < \|(x - \lambda_0 e)^{-1}\|^{-1}$$

άρα $x - \lambda e \in G(X)$, δηλαδή $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Επίσης

$$f(\lambda) = (x-\lambda e)^{-1} = \left(e - (\lambda - \lambda_0)(x - \lambda_0 e)^{-1}\right)^{-1}(x - \lambda_0 e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(x - \lambda_0 e)^{-n-1}(\lambda - \lambda_0)^n.$$

Επομένως

$$(x^* \circ f)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x^*\left((x - \lambda_0 e)^{-n-1}\right)(\lambda - \lambda_0)^n.]$$

Αν τώρα το φάσμα ήταν κενό, τότε η $x^* \circ f$ θα ήταν μια ακέραιη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$|x^*(f(\lambda))| \leq \|x^*\| \cdot \|f(\lambda)\| \to 0$$

καθώς $\lambda \to \infty$, άρα από το θεώρημα Liouville, θα είχαμε $x^* \circ f = 0$. Αλλά το x^* είναι τυχόν, επομένως, από Hahn-Banach, $f = 0$, άτοπο.

(2) Για κάθε n επιλέγουμε $x_n^* \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|x_n^*\| = 1$ και $\|x^n\| = |x_n^*(x^n)|$. Δείξαμε στο (1) ότι για κάθε $|\lambda| > \|x\|$ έχουμε

$$f(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\lambda^{k+1}},$$

άρα

$$(x_n^* \circ f)(\lambda) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_n^*(x^k)}{\lambda^{k+1}}.$$

Αλλά η $x_n^* \circ f$ είναι αναλυτική στο $\{\lambda : |\lambda| > \rho(x)\}$, άρα από τη μοναδικότητα του αναπτύγματος Laurent, η προηγούμενη ισότητα ισχύει στην πραγματικότητα για κάθε $|\lambda| > \rho(x)$ (και η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του $\{\lambda : |\lambda| > \rho(x)\}$). Έτσι, αν για κάθε $r > \rho(x)$ θέσουμε $C(0, r) = \{\lambda : |\lambda| = r\}$, έχουμε

$$\int_{C(0,r)} \lambda^n (x_n^* \circ f)(\lambda)\, d\lambda = -\sum_{k=0}^{\infty} x_n^*(x^k)\int_{C(0,r)}\frac{d\lambda}{\lambda^{k-n+1}} = -2\pi i x_n^*(x^n).$$

Άρα

$$\|x^n\| = |x_n^*(x^n)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(0,r)}\lambda^n(x_n^* \circ f)(\lambda)\, d\lambda\right| \leq r^{n+1}\max_{\lambda\in C(0,r)}|(x_n^* \circ f)(\lambda)| \leq r^{n+1}\max_{\lambda\in C(0,r)}\|f(\lambda)\|.$$

Επομένως $\overline{\lim}_n\|x^n\|^{1/n} \leq r$ για κάθε $r > \rho(x)$, συνεπώς $\overline{\lim}_n\|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x)$. Απ'την άλλη, παρατηρούμε ότι για κάθε λ έχουμε

$$x^n - \lambda^n e = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}e) = (x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1}e)(x - \lambda e).$$

Άρα, αν $\lambda \in \sigma(x)$ τότε $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ και επομένως $|\lambda|^n \leq \|x^n\|$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $\rho(x) \leq \|x^n\|^{1/n}$ για κάθε n. Τελικά λοιπόν έχουμε

$$\overline{\lim_n}\|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \leq \inf_n \|x^n\|^{1/n}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

□

Θεώρημα. *Έστω X άλγεβρα Banach με μονάδα. Τότε από οποιαδήποτε από τις παρακάτω δυο υποθέσεις έπεται ότι η X είναι ισομετρικά ισόμορφη (εννοούμε ισομορφισμό αλγεβρών) με το $\mathbb{C}$.*

(1) *(Gelfand-Mazur) Κάθε μη μηδενικό στοιχείο της X είναι αντιστρέψιμο.*
(2) *Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε $\|xy\| \geq C\|x\| \cdot \|y\|$ για κάθε $x, y \in X$.*

Απόδειξη.

(1) Για κάθε $x \in X$, το $\sigma(x)$ είναι μη κενό. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν μη αντιστρέψιμα στοιχεία της μορφής $x - \lambda e$. Αλλά το μοναδικό μη αντιστρέψιμο στοιχείο της άλγεβρας είναι το 0. Επομένως υπάρχει (κατ'ανάγκη μοναδικό) $\lambda(x) \in \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $x = \lambda(x)e$. Η απεικόνιση $x \mapsto \lambda(x)$ είναι ο ζητούμενος ισομετρικός ισομορφισμός.
(2) Ισχυριζόμαστε κατ'αρχάς ότι $\partial G(X) = \{0\}$.

[Απόδειξη: Έστω $x \in \partial G(X)$, τότε $x \notin G(X)$ και υπάρχει ακολουθία $x_n \in G(X)$ τέτοια ώστε $x_n \to x$. Παρατηρούμε ότι $\|x_n^{-1}\| \to +\infty$, γιατί διαφορετικά θα υπήρχαν $M > 0$ και $j \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\|x_j^{-1}\| \leq M$ και $\|x_j - x\| < 1/M$. Αλλά τότε $\|x_j - x\| < \|x_j^{-1}\|^{-1}$, άρα το x θα ήταν αντιστρέψιμο, άτοπο. Επομένως
$$\|x_n\| \leq \frac{1}{C} \cdot \frac{\|x_n x_n^{-1}\|}{\|x_n^{-1}\|} = \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{\|x_n^{-1}\|} \to 0,$$
άρα $x = 0$.]

Έστω τώρα $x \in X$ μη μηδενικό και $\lambda \in \partial\sigma(x)$ (το $\partial\sigma(x)$ είναι μη κενό, διαφορετικά το $\sigma(x)$ θα ήταν μη κενό ανοιχτό και κλειστό, δηλαδή $\sigma(x) = \mathbb{C}$, άτοπο). Τότε $x - \lambda e \notin G(X)$ και υπάρχουν $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ τέτοια ώστε $\lambda_n \to \lambda$. Αυτό σημαίνει ότι $x - \lambda_n e \in G(X)$ και $x - \lambda_n e \to x - \lambda e$. Άρα $x - \lambda e \in \partial G(X) = \{0\}$. Επομένως $x = \lambda e$. Δηλαδή κάθε μη μηδενικό στοιχείο της X είναι αντιστρέψιμο, και το συμπέρασμα έπεται από το (1).

□

21. Το φάσμα ενός συμπαγούς τελεστή

Στην ενότητα αυτή θα χρησιμοποιούμε πολλαπλασιαστικό συμβολισμό για τη σύνθεση τελεστών. Επίσης, αν $T : X \to X$, τότε θα λέμε ότι ένας υπόχωρος $Y \subset X$ είναι T- αναλλοίωτος, αν $T(Y) \subset Y$.

Ορισμός. *Έστω X χώρος Banach. Θεωρούμε την άλγεβρα Banach $B(X)$ με πολλαπλασιασμό τη σύνθεση τελεστών, και $T \in B(X)$.*

- *Ένα στοιχείο $\lambda \in \sigma(T)$ λέγεται ιδιοτιμή αν $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$.*
- *Αν το λ είναι ιδιοτιμή τότε ο $\ker(T - \lambda I)$ λέγεται ιδιόχωρος και τα μη μηδενικά στοιχεία του, ιδιοδιανύσματα.*

Παράδειγμα. Αν $\dim X < \infty$ και $T : X \to X$ γραμμικός τελεστής, τότε κάθε στοιχείο του φάσματος είναι ιδιοτιμή.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή Volterra $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ με

$$T(f)(x) = \int_0^x f.$$

Παρατηρούμε ότι

$$T^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt.$$

Επομένως $\|T^n\| \leq 1/n!$, άρα $\rho(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = 0$. Δηλαδή $\sigma(T) = \{0\}$. Απ'την άλλη, ο T είναι 1-1, άρα το 0 δεν είναι ιδιοτιμή.

Τα ακόλουθα τρία θεωρήματα αποτελούν τη λεγόμενη θεωρία Riesz-Schauder.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach, $T : X \to X$ συμπαγής, και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq 0$.*

(1) $\dim\ker(T - \lambda I) < \infty$.
(2) *Ο $(T - \lambda I)(X)$ είναι κλειστός.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$ και θέτουμε $S = T - I$.

(1) Παρατηρούμε ότι $T|_{\ker S}(\ker S) = \ker S$. Αλλά αν η εικόνα ενός συμπαγούς τελεστή είναι κλειστή, τότε είναι πεπερασμένης διάστασης.
(2) Έστω $x_n \in X$ τέτοια ώστε $S(x_n) \to y$. Θέτουμε $\delta_n = \mathrm{dist}(x_n, \ker S)$. Τότε υπάρχει $w_n \in S$ με $\delta_n \leq \|x_n - w_n\| \leq 2\delta_n$. Ισχυριζόμαστε ότι η $x_n - w_n$ είναι φραγμένη.

[Απόδειξη: Έστω ότι δεν είναι φραγμένη. Τότε μπορούμε να υποθέσουμε (παίρνοντας μια υπακολουθία) ότι $\|x_n - w_n\| \to \infty$. Θέτουμε

$$z_n = \frac{x_n - w_n}{\|x_n - w_n\|}.$$

Τότε $S(z_n) \to 0$. Επίσης, η z_n είναι φραγμένη, άρα, αφού ο T είναι συμπαγής, υπάρχει υπακολουθία z_{k_n} τέτοια ώστε η $T(z_{k_n})$ συγκλίνει. Τότε $z_{k_n} = T(z_{k_n}) - S(z_{k_n}) \to w$, για κάποιο $w \in X$. Αφού $S(z_{k_n}) \to 0$, έχουμε ότι $S(w) = 0$, άρα $w \in \ker S$. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$(z_n - w)\|x_n - w_n\| = x_n - (w_n + w\|x_n - w_n\|),$$

άρα $\|z_n - w\| \cdot \|x_n - w_n\| \geq \delta_n$. Επομένως $\|z_n - w\| \geq 1/2$, άτοπο διότι $z_{k_n} \to w$.]

Αφού λοιπόν η $x_n - w_n$ είναι φραγμένη, υπάρχει υπακολουθία $x_{m_n} - w_{m_n}$ τέτοια ώστε η $T(x_{m_n} - w_{m_n})$ συγκλίνει. Τότε

$$x_{m_n} - w_{m_n} = T(x_{m_n} - w_{m_n}) - S(x_{m_n} - w_{m_n}) = T(x_{m_n} - w_{m_n}) - S(x_{m_n}) \to x,$$

για κάποιο $x \in X$. Έτσι, $S(x_{m_n} - w_{m_n}) \to S(x)$ και $S(x_{m_n} - w_{m_n}) = S(x_{m_n}) \to y$. Άρα $S(x) = y$, δηλαδή ο $S(X)$ είναι κλειστός.

□

Στις αποδείξεις των επόμενων τριών θεωρημάτων θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη παρατήρηση: Αν ο X είναι χώρος με νόρμα και $Y \subset X$ γνήσιος κλειστός υπόχωρος, τότε υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$ τέτοιο ώστε $\mathrm{dist}(x, Y) \geq 1/2$. Πράγματι, έστω $x_0 \notin Y$ και $\delta = \mathrm{dist}(x_0, Y)$. Επιλέγουμε $y \in Y$ με $\|y - x_0\| \leq 2\delta$ και θέτουμε

$$x = \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}.$$

Τότε για κάθε $z \in Y$ έχουμε

$$\|z - x\| = \frac{\| z\|y - x_0\| - y + x_0\|}{\|y - x_0\|} \geq \frac{\delta}{2\delta} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως $\mathrm{dist}(x, Y) \geq 1/2$.

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach, $T : X \to X$ συμπαγής, και $\lambda \in \sigma(T)$ με $\lambda \neq 0$. Τότε το λ είναι ιδιοτιμή.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\lambda = 1$ και θέτουμε $S = T - I$. Έστω τώρα ότι το 1 δεν είναι διοτιμή. Τότε ο S είναι 1-1. Ισχυριζόμαστε ότι ο S είναι επί.

[Απόδειξη: Έστω ότι δεν είναι. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $X_n = S^n(X)$. Τότε η X_n είναι μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων, άρα μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in X$ με $\|x_n\| = 1$ και $\mathrm{dist}(x_n, X_{n+1}) \geq 1/2$. Έτσι για κάθε $n > m$ έχουμε

$$T(x_m) - T(x_n) = x_m - (S(x_n) - S(x_m) + x_n) = x_m - x,$$

όπου $x \in X_{m+1}$. Άρα $\|T(x_m) - T(x_n)\| \geq \mathrm{dist}(x_m, X_{m+1}) \geq 1/2$. Επομένως η $T(x_n)$ δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο γιατί η x_n είναι φραγμένη και ο T συμπαγής.]

Έχουμε λοιπόν ότι ο S είναι 1-1 και επί, άρα, από θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης, είναι αντιστρέψιμος, άτοπο διότι $1 \in \sigma(T)$. □

Θεώρημα. *Έστω X χώρος Banach, και $T : X \to X$ συμπαγής. Τότε για κάθε $r > 0$ το σύνολο*

$$\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq r\}$$

είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη. Έστω ότι για κάποιο $r > 0$ το σύνολο $\{\lambda \in \sigma(T) : |\lambda| \geq r\}$ είναι άπειρο. Επιλέγουμε διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ με $|\lambda_n| \geq r$, και έστω x_n ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην λ_n. Τότε τα x_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι αν θέσουμε $X_n = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, τότε η X_n είναι μια γνήσια αύξουσα ακολουθία κλειστών υποχώρων. Επομένως υπάρχουν $y_n \in X_n$ με $\|y_n\| = 1$ και $\mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq 1/2$. Τότε για $n > m$ έχουμε

$$\lambda_n^{-1}T(y_n) - \lambda_m^{-1}T(y_m) = y_n - (\lambda_m^{-1}T(y_m) - \lambda_n^{-1}T(y_n) + y_n).$$

Ο πρώτος όρος στην παρένθεση ανήκει στο $X_m \subset X_{n-1}$ διότι αν $y_m = \sum_{j=1}^m \beta_j x_j$, τότε $T(y_m) = \sum_{j=1}^m \beta_j \lambda_j x_j$. Επίσης, αν $y_n = \sum_{j=1}^n \gamma_j x_j$, τότε $y_n - \lambda_n^{-1}T(y_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j(1 - \lambda_j\lambda_n^{-1})x_j \in X_{n-1}$. Άρα $\lambda_n^{-1}T(y_n) - \lambda_m^{-1}T(y_m) = y_n - x$, όπου $x \in X_{n-1}$. Επομένως

$$\|T(\lambda_n^{-1}y_n) - T(\lambda_m^{-1}y_m)\| = \|y_n - x\| \geq \mathrm{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq 1/2,$$

άτοπο, διότι η $\lambda_n^{-1}y_n$ είναι φραγμένη και ο T συμπαγής. □

Παρατήρηση. Τα δυο προηγούμενα θεωρήματα λένε ότι αν ο T είναι συμπαγής τότε το $\sigma(T) \setminus \{0\}$ αποτελείται από το πολύ αριθμήσιμες το πλήθος ιδιοτιμές με μοναδικό πιθανό σημείο συσσώρευσης το 0.

Παράδειγμα. Δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη ότι το φάσμα του ολοκληρωτικού τελεστή Volterra $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ με

$$T(f)(x) = \int_0^x f$$

είναι το $\{0\}$. Παρατηρούμε ότι για $f \in C([0, 1])$ με $\|f\|_\infty \leq 1$ έχουμε $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq |x - y|$, άρα, από θεώρημα Ascoli, ο T είναι συμπαγής. Επίσης, αν $T(f) = \lambda f$ για κάποιο λ και κάποια f, τότε $f = 0$. Άρα ο $T - \lambda I$ είναι 1-1, δηλαδή ο T δεν έχει ιδιοτιμές. Τώρα, ο T δεν είναι επί, άρα το 0 είναι στοιχείο του φάσματος. Αφού το φάσμα είναι μη κενό και τα μη μηδενικά στοιχεία του είναι ιδιοτιμές, πρέπει κατ'ανάγκη $\sigma(T) = \{0\}$.

Παράδειγμα (Η εξίσωση Fredholm)**.** Έστω $K : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{C}$ συνεχής με $\|K\|_\infty < 1$. Τότε για κάθε $g \in C([0, 1])$ υπάρχει μοναδική $f \in C([0, 1])$ τέτοια ώστε

$$\int_0^1 K(x, y)f(y)\,dy - f(x) = g(x)$$

για κάθε x. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τον τελεστή $T : C([0, 1]) \to C([0, 1])$ με

$$T(f)(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y)\,dy,$$

τότε ο T είναι συμπαγής. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι $T(f) = f$ για κάποια $f \neq 0$ και επιλέξουμε $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $|f(\xi)| = \|f\|_\infty$, τότε

$$\|f\|_\infty = |f(\xi)| \leq \int_0^1 |K(\xi, y)| \cdot |f(y)|\, dy \leq \|K\|_\infty \|f\|_\infty < \|f\|_\infty,$$

άτοπο. Άρα ο $T - I$ είναι 1-1, δηλαδή το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του T. Επομένως $1 \notin \sigma(T)$. Αυτό σημαίνει ότι ο $T - I$ είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς για κάθε g υπάρχει μοναδική f τέτοια ώστε $T(f) - f = g$.

Θεώρημα (Fredholm)**.** *Έστω X χώρος Banach, $T : X \to X$ συμπαγής, και $\lambda \in \mathbb{C}$ με $\lambda \neq 0$.*

(1) $\dim X/(T - \lambda I)(X) = \dim \ker (T - \lambda I)$.
(2) $\dim \ker (T - \lambda I) = \dim \ker (T^* - \lambda I)$.
(3) $(T - \lambda I)(X) = {}^\perp \ker (T^* - \lambda I)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda = 1$. Θέτουμε $S = T - I$.

(1) Έστω $X_n = \ker S^n$. Τότε οι χώροι X_n είναι πεπερασμένης διάστασης γιατί

$$S^n = (-1)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k = (-1)^n I + A,$$

όπου ο A είναι συμπαγής. Επίσης, $S(X_n) \subset X_{n-1} \subset X_n$. Δηλαδή, η X_n είναι μια αύξουσα ακολουθία S- αναλλοίωτων κλειστών υπόχωρων. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε $X_N = X_{N+1}$.

[Απόδειξη: Αν δεν υπάρχει τέτοιο N, τότε η X_n είναι γνήσια αύξουσα, επομένως για κάθε $n > 1$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_n \in X_n$ με $\|x_n\| = 1$ και $\text{dist}(x_n, X_{n-1}) \geq 1/2$. Έτσι για κάθε $n > m$ έχουμε

$$T(x_n) - T(x_m) = x_n - (S(x_m) - S(x_n) + x_m) = x_n - x,$$

όπου $x \in X_{n-1}$. Άρα $\|T(x_n) - T(x_m)\| \geq 1/2$. Επομένως η $T(x_n)$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο, αφού η x_n είναι φραγμένη και ο T συμπαγής.]

Θέτουμε τώρα $Y = X_N$ και θεωρούμε τον τελεστή $T' : X/Y \to X/Y$ με $T'(x + Y) = T(x) + Y$. Ο T' είναι καλά ορισμένος (γιατί ο Y είναι S- αναλλοίωτος, άρα και T- αναλλοίωτος), και συμπαγής. Επίσης, αν θέσουμε $S' = T' - I$, τότε ο S' είναι 1-1. Δηλαδή το 1 δεν είναι ιδιοτιμή του T', άρα $1 \notin \sigma(T')$ (διότι ο T' είναι συμπαγής). Επομένως ο S' είναι επί. Αυτό σημαίνει ότι $X = S(X) + Y$, άρα $\dim(X/S(X)) = \dim Y - \dim(S(X) \cap Y)$. Αλλά $S(X) \cap Y = S(Y)$ και $\dim S(Y) = \dim Y - \dim \ker S$, από το οποίο συνεπάγεται το συμπέρασμα.

(2) Χρησιμοποιώντας το (1), και ότι $(X/S(X))^* \cong S(X)^\perp$ παίρνουμε

$$\dim \ker S = \dim X/S(X) = \dim(X/S(X))^* = \dim S(X)^\perp = \dim \ker S^*.$$

(3) Αφού το $S(X)$ είναι κλειστό, έχουμε

$$S(X) = \overline{S(X)} = {}^\perp(S(X)^\perp) = {}^\perp \ker S^*.$$

□

Πόρισμα. Άμεση συνέπεια του (1) στο προηγούμενο θεώρημα είναι ότι η εξίσωση $T(x) - \lambda x = y$ έχει λύση για κάθε $y \in X$ αν και μόνο αν η εξίσωση $T(x) = \lambda x$ έχει μοναδική λύση (την $x = 0$).

Θεώρημα (Lomonosov)**.** *Έστω X χώρος Banach με $\dim X > 1$, και $T : X \to X$ συμπαγής. Τότε ο X έχει μη τετριμμένο, κλειστό, T- αναλλοίωτο υπόχωρο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|T\| = 1$, επιλέγουμε x_0 με $\|x_0\| > 1$ και $\|T(x_0)\| > 1$, και θέτουμε $K = \overline{T(B(x_0, 1))}$. Τότε το K είναι συμπαγές και $0 \notin K$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο X δεν έχει μη τετριμμένο, κλειστό, T- αναλλοίωτο υπόχωρο. Τότε, για κάθε $y \neq 0$, το σύνολο $\{p(T)(y) : p \text{ πολυώνυμο}\}$ είναι πυκνό διότι η κλειστότητά του είναι T- αναλλοίωτη. Επομένως, αφού $0 \notin K$, η οικογένεια $\{V_p : p \text{ πολυώνυμο}\}$, όπου $V_p = \{y : \|p(T)(y) - x_0\| < 1\}$, είναι ανοιχτή κάλυψη του K. Άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο σύνολο πολυωνύμων F τέτοιο ώστε

$$K \subset \bigcup_{p \in F} V_p.$$

Θέτουμε $C = \max\{\|p(T)\| : p \in F\}$. Αφού τώρα $T(x_0) \in K$, υπάρχει $p_1 \in F$ τέτοιο ώστε $\|(p_1(T)T)(x_0) - x_0\| < 1$. Αλλά τότε $(Tp_1(T)T)(x_0) \in K$, άρα υπάρχει $p_2 \in F$ τέτοιο ώστε $\|(p_1(T)p_2(T)T^2)(x_0) - x_0\| < 1$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια ακολουθία πολυωνύμων p_n τέτοια ώστε

$$\left\| \left(T^n \prod_{k=1}^{n} p_k(T) \right)(x_0) - x_0 \right\| < 1.$$

Συνεπώς

$$\|x_0\| - 1 < \left\| \left(T^n \prod_{k=1}^{n} p_k(T) \right)(x_0) \right\| \leq C^n \|T^n\| \cdot \|x_0\|.$$

Άρα

$$\rho(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} \geq \frac{1}{C}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το φάσμα περιέχει τουλάχιστο ένα μη μηδενικό στοιχείο το οποίο είναι ιδιοτιμή διότι ο T είναι συμπαγής. Ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι μη τετριμμένος, κλειστός, T- αναλλοίωτος υπόχωρος, άτοπο. Άρα ο X έχει μη τετριμμένο, κλειστό, T- αναλλοίωτο υπόχωρο !! □