Μαθηματικά ΙΙ για το τμήμα Χημείας

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots\right) = 0$$

όπου y είναι μια συνάρτηση του x.

Παραδείγματα.

- $\dfrac{dy}{dx} = y$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2$
- $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

Ορίζουμε την τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης να΄ναι η τάξη της ανώτερης παραγώγου που εμφανίζεται στην εξίσωση. Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης.

Το να λύσουμε μια διαφορική εξίσωση σημαίνει να προσδιορίσουμε όλες τις συναρτήσεις y που την ικανοποιούν.

Οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται ειδική λύση. Το σύνολο όλων των ειδικών λύσεων ονομάζεται γενική λύση.

Παράδειγμα. Η γενική λύση της

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

είναι

$$y = x^2 + C$$

όπου C είναι μια αυθαίρετη σταθερά. Πράγματι

$$\frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow \int \frac{dy}{dx} dx = \int 2x dx \Rightarrow y = x^2 + C.$$

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση όταν γνωρίζουμε τη γενική λύση πρέπει να ξέρουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης σ'ενα σημείο. Η πληροφορία αυτή ονομάζεται αρχική συνθήκη.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

με αρχική συνθήκη $y(0) = 1$. Η γενική λύση βρίσκεται όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και είναι

$$y = x^3 + C.$$

Γνωρίζουμε ότι $y(0) = 1$, άρα πρέπει

$$0^3 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτου βαθμού είναι

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y).$$

Η εξίσωση αυτή μαζί με την αρχική συνθήκη

$$y(x_0) = y_0,$$

όπου x_0 και y_0 είναι δοσμένες σταθερές, ονομάζεται πρόβλημα αρχικών τιμών.

Θα εξετάσουμε δύο κατηγορίες διαφορικών εξισώσεων που μπορούν να λυθούν με στοιχειώδεις μεθόδους:

- Τις εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών και
- τις γραμμικές εξισώσεις.

1. Εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών

Μια διαφορική εξίσωση ονομάζεται χωριζομένων μεταβλητών αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Τότε έχουμε

$$g(y)dy = f(x)dx \Rightarrow \int g(y)dy = \int f(x)dx$$

και επομένως έχουμε προσδιορίσει τη γενική λύση αν ξέρουμε να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y^2 = 0$$
$$y(1) = 1/2$$

Έχουμε

$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y^2 = 0 \Rightarrow -\frac{dy}{y^2} = 3x^2dx \Rightarrow -\int \frac{dy}{y^2} = \int 3x^2dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{y} = x^3 + C \Rightarrow y = \frac{1}{x^3 + C}$$

Εφόσον $y(1) = 1/2$, παίρνουμε $C = 1$.

Κάποιες εξισώσεις οι οποίες δεν είναι χωριζομένων μεταβλητών μπορούν να μετασχηματιστούν σε χωριζομένων μεταβλητών μέσω μιας κατάλληλης αλλαγής μεταβλητών. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η εξίσωση της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

όπου η F έχει την ιδιότητα $F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$ για κάθε λ. Μια τέτοια συνάρτηση ονομάζεται ομογενής. Η ιδιότητα των ομογενών συναρτήσεων που θα μας βοηθήσει να λύσουμε την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι η ακόλουθη: Μια συνάρτηση $F(x, y)$ είναι ομογενής αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$F(x, y) = f(y/x).$$

Τώρα, αν η F είναι ομογενής τότε η διαφορική εξίσωση

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

γίνεται χωριζομένων μεταβλητών μέσω του μετασχηματισμού $v = y/x$. Πράγματι. Το αριστερά μέλος είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(vx)}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

Το δεξιά μέλος είναι

$$F(x, y) = f(y/x) = f(v).$$

Άρα η διαφορική εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v) \Rightarrow \frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$\frac{x^2 + y^2}{xy}$$

είναι ομογενής. Άρα κάνουμε το μετασχηματισμό $v = y/x$, και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$vdv = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int vdv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \ln x + C \Rightarrow \frac{y^2}{2x^2} = \ln x + C$$

Λύνοντας αυτήν την αλγεβρική εξίσωση ως προς y παίρνουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

2. Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

Μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης λέγεται γραμμική αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x).$$

Αν $r(x) = 0$ τότε η εξίσωση λέγεται ομογενής. Διαφορετικά λέγεται μη ομογενής.

Στην ομογενή περίπτωση, η εξίσωση έχει τη μορφή

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx$$

η οποία είναι χωριζομένων μεταβλητών και λύνεται κατά τα γνωστά.

Στη μη ομογενή περίπτωση, θέτουμε

$$F(x) = e^{\int p(x)dx}$$

και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το αριστερά και το δεξιά μέλος της διαφορικής εξίσωσης με $F(x)$. Έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dx}F(x) + p(x)yF(x) = r(x)F(x) \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx}e^{\int p(x)dx} + p(x)ye^{\int p(x)dx} = r(x)e^{\int p(x)dx} \\
&\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(ye^{\int p(x)dx}\right) = r(x)e^{\int p(x)dx} \\
&\Rightarrow \frac{d(yF(x))}{dx} = r(x)F(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow yF(x) = \int r(x)F(x)dx$$

Λύνοντας την παραπάνω αλγεβρική εξίσωση ως προς y, παίρνουμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Η βοηθητική συνάρτηση F ονομάζεται ολοκληρωτικός παράγοντας.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = 3x^3.$$

Έχουμε $p(x) = 2/x$ και $r(x) = 3x^3$. Άρα ένας ολοκληρωτικός παράγοντας είναι

$$F(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Επομένως, σύμφωνα με τη σχέση της προηγούμενης παραγράφου, η γενική λύση είναι

$$yx^2 = \int 3x^3x^2dx = \frac{x^6}{2} + C \Rightarrow y = \frac{x^4}{2} + \frac{C}{x^2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Μια γραμμική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης έχει τη γενική μορφή

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = r(x)$$

όπου y είναι η άγνωστη συνάρτηση και $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ είναι δοσμένες συναρτήσεις. Αν $r(x) = 0$, τότε η εξίσωση λέγεται ομογενής. Διαφορετικά λέγεται μη ομογενής. Οι συναρτήσεις $p(x)$ και $q(x)$ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου οι συντελεστές είναι σταθεροί αριθμοί.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 \Rightarrow y = C_1x + C_2,$$

όπου C_1, C_2 είναι αυθαίρετες σταθερές

Αν θέλουμε να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση, πρέπει να ξέρουμε την τιμή της άγνωστης συνάρτησης σε κάποιο σημείο και επίσης την τιμή της παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης στο ίδιο σημείο. Δηλαδή, χρειαζόμαστε δύο αρχικές συνθήκες.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2$$

με αρχικές συνθήκες $y(0) = 1$ και $y'(0) = 2$. Έχουμε

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + C_1 \Rightarrow y = x^2 + C_1x + C_2.$$

Πρέπει $y(0) = 1$ άρα $C_2 = 1$. Επίσης $y'(x) = 2x + C_1$ και $y'(0) = 2$ άρα $C_1 = 2$.

1. Μέθοδος επίλυσης της ομογενούς εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή της εξίσωσης είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

όπου a και b δοσμένοι αριθμοί. Αποδεικνύεται ότι η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι της μορφής

$$y(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x)$$

όπου C_1, C_2 αυθαίρετες σταθερές, και $u_1(x)$, $u_2(x)$ κάποιες συναρτήσεις. Για να προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις αυτές, αντικαθιστούμε στη διαφορική εξίσωση το $\frac{d^2y}{dx^2}$ με λ^2, το $\frac{dy}{dx}$ με λ και το y με 1 και παίρνουμε το τριώνυμο

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται χαρακτηριστική εξίσωση. Έστω Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(1) $\Delta = 0$. Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα

$$\rho = -\frac{a}{2}.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$u_1(x) = e^{\rho x}, \quad u_2(x) = xe^{\rho x}.$$

(2) $\Delta > 0$. Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες

$$\rho_1 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \rho_2 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

Στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$u_1(x) = e^{\rho_1 x}, \quad u_2(x) = e^{\rho_2 x}.$$

(3) $\Delta < 0$. Τότε η χαρακτηριστική εξίσωση δεν έχει ρίζες. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$r = -\frac{a}{2}, \quad s = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

και έχουμε

$$u_1(x) = e^{rx}\sin(sx), \quad u_2(x) = e^{rx}\cos(sx).$$

Παραδείγματα.

(1) $y''-y'-2y=0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2-\lambda-2=0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=9>0$. Άρα

$$\rho_1=\frac{1+\sqrt{9}}{2}=2, \quad \rho_2=\frac{1-\sqrt{9}}{2}=-1.$$

Επομένως

$$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}.$$

(2) $y''+4y'+4y=0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2+4\lambda+4=0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=0$. Άρα

$$\rho=-\frac{4}{2}=-2.$$

Επομένως

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$$

(3) $y''+4y'+5y=0$. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2+4\lambda+5=0$. Η διακρίνουσα είναι $\Delta=-4<0$. Άρα θέτουμε

$$r=-\frac{4}{2}=-2, \quad s=\frac{\sqrt{4}}{2}=1.$$

Επομένως

$$y=C_1e^{-2x}\sin x+C_2e^{-2x}\cos x.$$

---

2. Μέθοδος επίλυσης της μη ομογενούς εξίσωσης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή είναι

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=r(x)$$

όπου a, b δοσμένοι αριθμοί και $r(x)$ δοσμένη συνάρτηση. Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή εργαζόμαστε ως εξής:

(1) Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\frac{dy}{dx}+by=0$$

και βρίσκουμε σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου, τη γενική της λύση, έστω y_h.

(2) Προσδιορίζουμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς, έστω y_p.

Τότε η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y = y_h + y_p.$$

Ο προσδιορισμός της y_p γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

(1) Αν $r(x) = p_n(x)$, όπου $p_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, τότε δεχόμαστε μια λύση y_p της μορφής

$$y_p = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0.$$

(2) Αν $r(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, όπου $p_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, τότε δεχόμαστε μια λύση y_p της μορφής

$$y_p = e^{\alpha x}(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0).$$

(3) Αν $r(x) = e^{\alpha x} p_n(x) \sin(\beta x)$ ή $r(x) = e^{\alpha x} p_n(x)\cos(\beta x)$, όπου $p_n(x)$ είναι ένα πολυώνυμο n βαθμού, τότε δεχόμαστε μια λύση y_p της μορφής

$$\begin{aligned} y_p &= e^{\alpha x}\sin(\beta x)(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \\ &\quad + e^{\alpha x}\cos(\beta x)(B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_1 x + B_0). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την y_p που δεχτήκαμε παραπάνω στην μη ομογενή εξίσωση, βρίσκουμε τους άγνωστους συντελεστές $A_0, A_1, \ldots, A_n$ και $B_0, B_1, \ldots, B_n$. Η μέθοδος αυτή ονομάζεται μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών.

Παράδειγμα. Θα λύσουμε την

$$y'' - y' - 2y = 4x^2.$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 9 > 0$, άρα η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο διακεκριμένες ρίζες $\rho_1 = 2$ και $\rho_2 = -1$. Επομένως η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Για να προσδιορίσουμε μια ειδική λύση της μη ομογενούς, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $4x^2$ είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, επομένως δεχόμαστε μια λύση της μορφής

$$y_p = A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$

Τότε

$$y_p' = 2A_2 x + A_1$$

και
$$y_p'' = 2A_2.$$
Εφόσον η y_p είναι λύση της μη ομογενούς πρέπει να την ικανοποιεί. Δηλαδή πρέπει
$$y_p'' - y_p' - 2y_p = 4x^2.$$
Ισοδύναμα
$$\begin{aligned} & 2A_2 - (2A_2x + A_1) - 2(A_2x^2 + A_1x + A_0) = 4x^2 \\ & \Rightarrow -2A_2x^2 + (-2A_2 - 2A_1)x + (2A_2 - A_1 - 2A_0) = 4x^2. \end{aligned}$$
Η παραπάνω σχέση είναι μια ισότητα μεταξύ πολυωνύμων, επομένως οι συντελεστές των δυνάμεων του x στο αριστερά μέλος πρέπει να είναι ίσοι με τους αντίστοιχους συντελεστές των δυνάμεων του x στο δεξιά μέλος. Άρα
$$\begin{gathered} -2A_2 = 4 \\ -2A_2 - 2A_1 = 0 \\ 2A_2 - A_1 - 2A_0 = 0 \end{gathered}$$
Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε
$$A_0 = -3, \quad A_1 = 2, \quad A_2 = -2.$$
Επομένως
$$y_p = -2x^2 + 2x - 3.$$
Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι
$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} - 2x^2 + 2x - 3.$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η
$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$
Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή
$$y'' - y' - 2y = 0.$$
Η γενική της λύση είναι
$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$
Θέτουμε $r(x) = e^{3x}$ και παρατηρούμε ότι $r(x) = e^{\alpha x}p_n(x)$, όπου $\alpha = 3$ και $p_n(x)$ πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Άρα δεχόμαστε μια ειδική λύση της μορφής
$$y_p = e^{3x}A_0.$$
Τότε
$$y_p' = 3A_0e^{3x}$$

και

$$y_p'' = 9A_0e^{3x}.$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή παίρνουμε

$$\begin{aligned}&9A_0e^{3x} - 3A_0e^{3x} - 2A_0e^{3x} = e^{3x}\\ &\Rightarrow 4A_0e^{3x} = e^{3x}\\ &\Rightarrow A_0 = 1/4.\end{aligned}$$

Επομένως

$$y_p = \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η

$$y'' - y' - 2y = \sin 2x.$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Η γενική της λύση είναι

$$y_h = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}.$$

Θέτουμε $r(x) = \sin 2x$ και παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $r(x) = p_n(x)\sin\beta x$, όπου $\beta = 2$ και $p_n(x)$ πολυώνυμο μηδενικού βαθμού. Άρα δεχόμαστε μια ειδική λύση της μορφής

$$y_p = A_0\sin 2x + B_0\cos 2x.$$

Τότε

$$y_p' = 2A_0\cos 2x - 2B_0\sin 2x$$

και

$$y_p'' = -4A_0\sin 2x - 4B_0\cos 2x.$$

αντικαθιστώντας στη μη ομογενή παίρνουμε

$$\begin{aligned}&-4A_0\sin 2x - 4B_0\cos 2x - (2A_0\cos 2x - 2B_0\sin 2x)\\ &-2(A_0\sin 2x + B_0\cos 2x) = \sin 2x\\ &\Rightarrow (-6A_0 + 2B_0)\sin 2x + (-6B_0 - 2A_0)\cos 2x = \sin 2x.\end{aligned}$$

Άρα

$$-6A_0 + 2B_0 = 1 \quad -6B_0 - 2A_0 = 0.$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε

$$A_0 = -3/20, \quad B_0 = 1/20.$$

Επομένως
$$y_p = -\frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x.$$
Άρα η γενική λύση είναι
$$y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \frac{3}{20}\sin 2x + \frac{1}{20}\cos 2x.$$

3. Τροποποίηση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Αν ένας όρος της υποψήφιας ειδικής λύσης περιλαμβάνεται ήδη στην y_h (με κάποιο διαφορετικό, ίσως, συντελεστή), τότε η μορφή της ειδικής λύσης που δεχόμαστε πρέπει να πολλαπλασιαστεί επί x^m, όπου m είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός για τον οποίο η μορφή της ειδικής λύσης και η y_h δεν έχουν όμοιο όρο

Παράδειγμα. Να λυθεί η
$$y'' = 9x^2 + 2x - 1.$$
Η εξίσωση αυτή μπορεί, φυσικά, να λυθεί με απ'ευθείας ολοκλήρωση. Ας την λύσουμε όμως με την παραπάνω μέθοδο για να δούμε πως αυτή εφαρμόζεται στην πράξη.

Η αντίστοιχη ομογενής είναι
$$y'' = 0.$$
Η γενική της λύση είναι
$$y_h = C_1 x + C_2.$$
Θέτουμε $r(x) = 9x^2 + 2x - 1$ και παρατηρούμε ότι $r(x) = p_n(x)$, όπου $p_n(x)$ είναι πολυώνυμο δεύτερου βαθμού. Άρα μια υποψήφια λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής
$$A_2 x^2 + A_1 x + A_0.$$
Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση και η y_h έχουν κοινούς όρους. Επομένως πολλαπλασιάζουμε επί x^2 και παίρνουμε
$$\begin{aligned} y_p &= A_2 x^4 + A_1 x^3 + A_0 x^2 \\ y_p' &= 4A_2 x^3 + 3A_1 x^2 + 2A_0 x \\ y_p'' &= 12A_2 x^2 + 6A_1 x + 2A_0. \end{aligned}$$
Αντικαθιστώντας στη μη ομογενή παίρνουμε
$$\begin{gathered} 12A_2 x^2 + 6A_1 x + 2A_0 = 9x^2 + 2x - 1 \\ \Rightarrow 12A_2 = 9 \quad 6A_1 = 2 \quad 2A_0 = -1 \end{gathered}$$

$$\Rightarrow A_2 = 3/4 \quad A_1 = 1/3 \quad A_0 = -1/2.$$

Επομένως

$$y_p = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Άρα η γενική λύση είναι

$$y = y_h + y_p = C_1 x + C_2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2.$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η

$$y'' - 2y' + y = xe^x.$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Η χαρακηριστική της εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Η διακρίνουσα είνα $\Delta = 0$, άρα η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα $\rho = 1$. Επομένως η γενική λύση της ομογενούς είναι

$$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Θέτουμε $r(x) = xe^x$ και παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $r(x) = e^{\alpha x} p_n(x)$, όπου $\alpha = 1$ και $p_n(x)$ πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Άρα μια υποψήφια ειδική λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$e^x(A_1 x + A_0) = A_1 x e^x + A_0 e^x.$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω έκφραση και η y_h έχουν κοινούς όρους. Άρα πολλαπλασιάζουμε επί x^2 και παίρνουμε

$$y_p = A_1 x^3 e^x + A_0 x^2 e^x$$

$$y_p' = e^x(A_1 x^3 + (A_0 + 3A_1)x^2 + 2A_0 x)$$

$$y_p'' = e^x(A_1 x^3 + (A_0 + 6A_1)x^2 + (4A_0 + 6A_1)x + 2A_0).$$

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές στη μη ομογενή και κάνοντας τις πράξεις και τις απλοποιήσεις παίρνουμε τελικά

$$6A_1 x + 2A_0 = x$$

$$\Rightarrow 6A_1 = 1 \quad 2A_0 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = 1/6 \quad A_0 = 0.$$

Επομένως

$$y_p = \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 x e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

---

4. Γενίκευση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών

Εαν η $r(x)$ είναι άθροισμα ή διαφορά όρων των διαφόρων μορφών που θεωρήσαμε στην ενότητα 2, τότε παίρνουμε ως y_p το άθροισμα ή τη διαφορά των y_p που δεχτήκαμε στις αντίστοιχες περιπτώσεις.

Παράδειγμα. Να λυθεί η

$$y'' - 4y' + 4y = \sin x + \cos 2x.$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Η γενική της λύση είναι

$$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Θέτουμε $r(x) = \sin x + \cos 2x$. Αν είχαμε μόνο τον όρο $\sin x$ θα δεχόμασταν μια ειδική λύση της μορφής

$$A_0 \sin x + B_0 \cos x.$$

Αν είχαμε μόνο τον όρο $\cos 2x$ θα δεχόμασταν μια ειδική λύση της μορφής

$$\Gamma_0 \sin 2x + \Delta_0 \cos 2x.$$

Άρα δεχόμαστε μια ειδική λύση της μορφής

$$y_p = A_0 \sin x + B_0 \cos x + \Gamma_0 \sin 2x + \Delta_0 \cos 2x.$$

Αντικαθιστώντας στη μη ομογενή και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε

$$\begin{aligned} &(4B_0 + 3A_0)\sin x + (3B_0 - 4A_0)\cos x - 8\Delta_0 \sin 2x - 8\Gamma_0 \cos 2x \\ &= \sin x + \cos 2x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 4B_0 + 3A_0 = 1 \\ 3B_0 - 4A_0 = 0 \\ -8\Delta_0 = 0 \\ -8\Gamma_0 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A_0 = 3/25 \\ B_0 = 4/25 \\ \Gamma_0 = -1/8 \\ \Delta_0 = 0 \end{matrix} \right\}.$$

Άρα μια ειδική λύση είναι

$$y_p = \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x - \frac{1}{8}\sin 2x.$$

Επομένως η γενική λύση είναι

$$y = y_h + y_p = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \frac{3}{25}\sin x + \frac{4}{25}\cos x - \frac{1}{8}\sin 2x.$$

5. Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων

Η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών δεν μπορεί να εφαρμοστεί όταν η συνάρτηση $r(x)$ δεν έχει μια από τις μορφές που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Αν λοιπόν θέλουμε να λύσουμε την

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

όπου $r(x)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση, ακολουθούμε μια άλλη μέθοδο η οποία λέγεται μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων.

Θεωρούμε την αντίστοιχη ομογενή εξίσωση

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Γνωρίζουμε ότι η γενική της λύση είναι της μορφής

$$y_h = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x).$$

Δεχόμαστε ότι μια ειδική λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$y_p = v_1(x) u_1(x) + v_2(x) u_2(x)$$

όπου $v_1(x)$, $v_2(x)$ είναι συναρτήσεις που πρέπει να προσδιοριστούν. Για να τις προσδιορίσουμε λύνουμε το ακόλουθο αλγεβρικό σύστημα ως προς $v_1'(x)$, $v_2'(x)$.

$$\begin{aligned} v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x) &= 0 \\ v_1'(x)u_1'(x) + v_2'(x)u_2'(x) &= r(x) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, ολοκληρώνουμε τις $v_1'(x)$ και $v_2'(x)$ που βρήκαμε και παίρνουμε τις $v_1(x)$ και $v_2(x)$. Η γενική λύση της μη ομογενούς είναι

$$y = y_h + y_p.$$

Παράδειγμα. Να λυθεί η

$$y'' - y' - 2y = e^{3x}.$$

Την εξίσωση αυτή την έχουμε ήδη λύσει με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Θα την λύσουμε και με τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων για να δούμε πως αυτή εφαρμόζεται.

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

Η γενική της λύση είναι

$$y_h = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}.$$

Δεχόμαστε ότι μια ειδική λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x).$$

Για να προσδιορίσουμε τις $v_1(x)$ και $v_2(x)$ λύνουμε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x) = 0 \\ \\ v_1'(x)u_1'(x) + v_2'(x)u_2'(x) = r(x) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1'(x)e^{-x} + v_2'(x)e^{2x} = 0 \\ \\ -v_1'(x)e^{-x} + 2v_2'(x)e^{2x} = e^{3x} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1'(x) = -\dfrac{e^{4x}}{3} \\ \\ v_2'(x) = \dfrac{e^{x}}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1(x) = -\dfrac{e^{4x}}{12} \\ \\ v_2(x) = \dfrac{e^{x}}{3} \end{array} \right\}.$$

Επομένως

$$y_p = -\frac{1}{12}e^{4x}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{x}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

Ας δούμε μία περίπτωση στην οποία δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, οπότε θα εφρμόσουμε κατ'ανάγκη τη μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

Παράδειγμα. Να λυθεί η

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}.$$

Η αντίστοιχη ομογενής είναι

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Η γενική της λύση είναι

$$y_h = C_1u_1(x) + C_2u_2(x) = C_1e^x + C_2xe^x.$$

Δεχόμαστε ότι μια ειδική λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής

$$y_p = v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x).$$

Για να προσδιορίσουμε τις $v_1(x)$ και $v_2(x)$ λύνουμε το σύστημα.

$$\left\{ \begin{array}{c} v_1'(x)u_1(x) + v_2'(x)u_2(x) = 0 \\ \\ v_1'(x)u_1'(x) + v_2'(x)u_2'(x) = r(x) \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1'(x)e^x + v_2'(x)xe^x = 0 \\ \\ v_1'(x)e^x + v_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1'(x) = -1 \\ \\ v_2'(x) = \dfrac{1}{x} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} v_1(x) = -x \\ v_2(x) = \ln x \end{array} \right\}.$$

Επομένως

$$y_p = -xe^x + xe^x \ln x.$$

Συνεπώς η γενική λύση είναι

$$\begin{aligned} y = y_h + y_p &= C_1 e^x + C_2 xe^x - xe^x + xe^x \ln x \\ &= C_1 e^x + C_3 xe^x + xe^x \ln x, \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $C_3 = C_2 - 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πίνακες

Ένας $m \times n$ πίνακας A είναι μια ορθογώνια διάταξη $m \cdot n$ αριθμών σε m γραμμές και n στήλες. Δηλαδή

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Χρησιμοποιούμε επίσης τον συμβολισμό $A = (a_{ij})$ για να δείξουμε ότι το στοιχείο a_{ij} βρίσκεται εκεί που συναντιέται η i-γραμμή με την j-στήλη. Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $m \times n$ πίνακας και $B = (b_{ij})$ είναι ένας $s \times r$ πίνακας τότε λέμε ότι $A = B$ αν $m = s,\ n = r$ και $a_{ij} = b_{ij}$ για όλα τα i, j.

1. Μορφές πινάκων

Θα ορίσουμε κάποιες ειδικές μορφές πινάκων που συναντιώνται συχνά στην πράξη.

- Ένας πίνακας 1×1 λέγεται **πίνακας στοιχείο**.
- Ένας πίνακας $1 \times n$ λέγεται **πίνακας γραμμή**. Παράδειγμα:

$$A = [1 \quad 2 \quad 5 \quad 7].$$

- Ένας πίνακας $n \times 1$ λέγεται **πίνακας στήλη**. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με $\mathbf{0}_{m\times n}$ (ή πιο απλά με $\mathbf{0}$, όταν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης), αν όλα τα στοιχεία του είναι μηδέν.
- Ένας $m \times n$ πίνακας λέγεται **τετραγωνικός** αν $m = n$. Παραδείγματα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 12 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται **διαγώνιος**, αν μόνο η διαγώνιος περιέχει μη μηδενικά στοιχεία. Δηλαδή

$$i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

- Ο διαγώνιος $n \times n$ πίνακας ο οποίος έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα με 1 λέγεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται με I_n. Δηλαδή

$$I_n = (a_{ij}),$$

όπου

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

Παραδείγματα:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν όλα τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι 0. Δηλαδή

$$i > j \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

- Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν όλα τα στοιχεία πάνω από τη διαγώνιο είναι 0. Δηλαδή

$$j > i \Rightarrow a_{ij} = 0.$$

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 8 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

2. Πράξεις μεταξύ πινάκων

- **Πρόσθεση**

  Έστω $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ δύο $m \times n$ πίνακες. Τότε το άθροισμα τους συμβολίζεται με $A + B$ και ορίζεται να'ναι ένας $m \times n$ πίνακας (c_{ij}) τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$
  Παράδειγμα:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

- **Βαθμωτό γινόμενο**

  Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και λ ένας πραγματικός αριθμός. Το βαθμωτό τους γινόμενο συμβολίζεται με λA και ορίζεται να'ναι ένας $m \times n$ πίνακας (c_{ij}), τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση
$$c_{ij} = \lambda a_{ij}.$$
  Παράδειγμα:
$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

- **Γινόμενο πινάκων**

  Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας και $B = (b_{ij})$ ένας $n \times s$ πίνακας. Τότε το γινόμενο τους συμβολίζεται με AB και ορίζεται να'ναι ένας $m \times s$ πίνακας (c_{ij}), τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$
  Παραδείγματα:
  (1)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = [1\cdot 0 + 2\cdot 1 + 3\cdot 0] = [2].$$

(3)

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3\\ 1\cdot 1 & 1\cdot 2 & 1\cdot 3\\ 0\cdot 1 & 0\cdot 2 & 0\cdot 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Αν A είναι ένας τετραγωνικός πίνακας και k ένας φυσικός αριθμός τότε θέτουμε $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ φορές}}$.

Ας δούμε τώρα τις βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε.

- $A + B = B + A$.
- $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$.
- Αν A είναι ένας $m\times n$ πίνακας, τότε $A\mathbf{0}_{n\times s} = \mathbf{0}_{m\times s}$ και $\mathbf{0}_{r\times m}A = \mathbf{0}_{r\times n}$ για όλα τα r, s.
- Αν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, B ένας $n \times s$ πίνακας και C ένας $s \times r$ πίνακας τότε $(AB)C = A(BC) = ABC$.
- Αν A, B είναι δύο $m \times n$ πίνακες και C ένας $n \times s$ πίνακας τότε $(A + B)C = AC + BC$.
- Αν D είναι ένας $m \times n$ πίνακας και E, F δύο $n \times s$ πίνακες τότε $D(E + F) = DE + DF$.
- Αν A είναι $n \times n$ τετραγωνικός πίνακας τότε $AI_n = I_nA = A$.

Γενικά δεν ισχύει $AB = BA$, ακόμα κι'αν οι A και B είναι τετραγωνικοί. Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Αν για δύο πίνακες A, B ισχύει $AB = BA$, τότε λέμε ότι οι A και B μετατίθενται.

3. Ανάστροφος και αντίστροφος πίνακας

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο **ανάστροφος** του A συμβολίζεται με A^t και ορίζεται να'ναι ένας $n \times m$ πίνακας (c_{ij}) τα στοιχεία του οποίου δίνονται από τη σχέση $c_{ij} = a_{ji}$. Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ένας πίνακας A λέγεται **συμμετρικός** αν $A^t = A$. Ένας συμμετρικός πίνακας είναι κατ'ανάγκη τετραγωνικός. Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 5 & 3 & 9 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ένας πίνακας A λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $A^t = -A$. Ένας αντισυμμετρικός πίνακας είναι κατάνάγκη τετραγωνικός και τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μηδέν. Παράδειγμα

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -5 & 0 & 9 \\ -7 & -9 & 0 \end{bmatrix}^t.$$

Ένας μη μηδενικός τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει πίνακας B τέτοιος ώστε

$$AB = BA = I_n.$$

Αν υπάρχει τέτοιος πίνακας B τότε είναι μοναδικός, συμβολίζεται με A^{-1} και ονομάζεται **αντίστροφος** του A. Υπάρχουν πίνακες οι οποίοι δεν είναι αντιστρέψιμοι. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Τέλος, ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A λέγεται **ορθογώνιος**, αν $AA^t = A^tA = I_n$ Ας δούμε κάποιες ιδιότητες.

- $I_n^t = I_n$.
- $(A^t)^t = A$.
- $(A + B)^t = A^t + B^t$.
- $(AB)^t = B^tA^t$.
- Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι, τότε και ο AB είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο A^t είναι αντιστρέψιμος και ισχύει $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

4. Κλιμακωτοί πίνακες

Ηγετικό στοιχείο ή **επικεφαλής στοιχείο** της γραμμης i ενός πίνακα ονομάζεται το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της, και συμβολίζουμε με $l(i)$ τον αριθμό της στήλης που το περιέχει. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1/2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ηγετικό στοιχείο της γραμμής 1 είναι το 1 και $l(1) = 2$.
Ηγετικό στοιχείο της γραμμής 3 είναι το 2 και $l(3) = 1$.
Ηγετικό στοιχείο της γραμμής 4 είναι το -3 και $l(4) = 4$.

Ένας πίνακας λέγεται **κλιμακωτός** αν:

(1) Όλες οι μη μηδενικές γραμμές βρίσκονται στην πάνω μεριά.
(2) Τα επικεφαλής στοιχεία κινούνται προς τα δεξιά καθώς κατεβαίνουμε τον πίνακα, δηλαδή $l(1) < l(2) < \cdots$.
(3) Όλα τα επικεφαλής στοιχεία είναι μονάδα.
(4) Κάθε στήλη που περιέχει επικεφαλής στοιχείο έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με μηδέν.

Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θα δούμε ότι μπορούμε να φέρουμε κάθε πίνακα σε κλιμακωτή μορφή μέσω μιας σειράς πράξεων τις οποίες θα περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

5. Στοιχειώδεις πράξεις γραμμών σε πίνακα

Ονομάζουμε **στοιχειώδεις πράξεις γραμμών** τους ακόλουθους μετασχηματισμούς πάνω σ'ένα πίνακα:

(1) Εναλλαγή δύο γραμμών: $r_{i_1} \leftrightarrow r_{i_2}$.
(2) Πολλαπλασιασμός γραμμής με έναν αριθμό λ: $r_i \to \lambda r_i$.
(3) Πρόσθεση σε μια γραμμή πολλαπλασίου μιας άλλης: $r_{i_1} \to r_{i_1} + \lambda r_{i_2}$.

Παράδειγμα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 2r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Αν A και B είναι δύο πίνακες, τότε λέμε ότι ο A είναι **γραμμοϊσοδύναμος** με τον B αν ο B μπορεί να προκύψει από τον A εφαρμόζοντας μια σειρά από στοιχειώδεις πράξεις γραμμών. Για παράδειγμα, οι τρεις πίνακες του προηγούμενου παραδείγματος είναι γραμμοϊσοδύναμοι.

Αποδεικνύεται ότι κάθε πίνακας A είναι γραμμοϊσοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα B. Ο αριθμός των μη μηδενικών γραμμών του B λέγεται **τάξη** του πίνακα A.

6. Μετατροπή πίνακα σε κλιμακωτό: Μέθοδος απαλοιφής του Gauss

Ο καλύτερος τρόπος να περιγράψουμε τη μέθοδο αυτή είναι μέσα από ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τον πίνακα

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

και θέλουμε να τον μετατρέψουμε σε κλιμακωτό, δηλαδή να βρούμε μέσω μιας σειράς στοιχειωδών πράξεων έναν κλιμακωτό γραμμοϊσοδύναμο πίνακα. Τα βήματα είναι τα εξής:

(1) Βρίσκουμε την πρώτη μη μηδενική στήλη.

$$j = 2$$

(2) Βρίσκουμε την πρώτη γραμμή στη στήλη αυτή η οποία περιέχει μη μηδενικό στοιχείο.

$$i = 2$$

(3) Είναι η γραμμή αυτή η πρώτη γραμμή του πίνακα; Αν ναι πάμε στο επόμενο βήμα. Αν όχι εναλλάσσουμε την γραμμή αυτή με την πρώτη γραμμή του πίνακα.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(4) Κάνουμε το επικεφαλής στοιχείο της πρώτης γραμμής του πίνακα που πήραμε στο προηγούμενο βήμα ίσο με 1 διαιρώντας τη

γραμμή αυτή δια το επικεφαλής στοιχείο.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \to -r_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

(5) Μηδενίζουμε όλα τα υπόλοιπα μη μηδενικά στοιχεία της στήλης που βρίσκεται το επικεφαλής στοιχείο προσθέτοντας ή αφαιρώντας κατάλληλα πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_1]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(6) Στο σημείο αυτό ελεγχουμε αν ο πίνακας είναι κλιμακωτός. Αν είναι σταματάμε. Αν όχι αγνοούμε την πρώτη γραμμή και επιστρέφουμε στο βήμα 1. Τη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε μέχρι να καταλήξουμε σε κλιμακωτό πίνακα.

$$\left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -4 & -7 \\ \hline 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to \frac{r_2}{3}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 + 4r_2 \\ r_3 \to r_3 - 3r_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -25/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ο παραπάνω πίνακας είναι σε κλιμακωτή μορφή άρα σταματάμε.

Στα παρακάτω παραδείγματα ξεκινάμε με κάποιο πίνακα και τον μετατρέπουμε σε κλιμακωτό εφαρμόζοντας τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss.

(1)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 - r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ \hline 0 & 2 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{2} r_2]{} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 - 5r_3 \\ r_2 \to r_2 + 3r_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to r_1 - 3r_2]{} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 + r_3 \\ r_1 \to r_1 - 5r_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαλοιφής του Gauss για να διερευνήσουμε και να λύσουμε οποιοδήποτε σύστημα γραμμικών εξισώσεων. Η γενική μορφή ενός συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους είναι

$$(*) \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right\},$$

όπου a_{ij} και b_i είναι δοσμένοι αριθμοί και x_j είναι οι άγνωστες ποσότητες που πρέπει να προσδιοριστούν ώστε όλες οι εξισώσεις $(*)$ να ικανοποιούνται. Το σύστημα $(*)$ μπορεί να γραφτεί σε μορφή πινάκων:

$$AX = B,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

είναι ο **πίνακας συντελεστών** του συστήματος και

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ορίζουμε επίσης τον πίνακα

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

ο οποίος λέγεται **επαυξημένος πίνακας** του συστήματος.

Παράδειγμα:

Έστω το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x_4 + x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Τότε

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x_4 + x_1 = 2 \\ x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 2 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 6 \\ 1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Άρα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A|B) = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Δίνουμε κάποιους ακόμα ορισμούς:

- Οποιαδήποτε n-άδα αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις $(*)$ λέγεται **λύση** του συστήματος.
- Αν ένα σύστημα έχει τουλάχιστο μια λύση τότε λέγεται **συμβιβαστό**. Διαφορετικά λέγεται **αδύνατο**.
- Δύο συστήματα που έχουν το ίδιο σύνολο λύσεων λέγονται **ισοδύναμα**.
- Αν σ'ένα σύστημα $AX = B$ ο πίνακας B είναι μηδενικός τότε το σύστημα λέγεται **ομογενές**. Διαφορετικά λέγεται μη ομογενές. Ένα ομογενές σύστημα είναι πάντοτε συμβιβαστό διότι έχει μία τουλάχιστο λύση: τη μηδενική.

Ένα σύστημα μπορεί να έχει καμία, μία μόνο ή άπειρες λύσεις. Στην τελευταία περίπτωση η μορφή των λύσεων εκφράζεται σαν συνάρτηση αυθαίρετων παραμέτρων. Παραδείγματα:

(1) Το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4 \end{array} \right\}$$

δεν έχει καμία λύση.

(2) Το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{array} \right\}$$

έχει μια μοναδική λύση: $(x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$.

(3) Το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} 4x_1 - 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 3/2 \end{array} \right\}$$

έχει μια μοναδική λύση: $(x_1, x_2) = (1/2, 1/2)$. Είναι δηλαδή ισοδύναμο με το προηγούμενο.

(4) Το σύστημα

$$x_1 + x_2 = 1$$

έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι αν θέσουμε $x_2 = \kappa$, όπου κ αυθαίρετος αριθμός, τότε $x_1 = 1 - x_2 = 1 - \kappa$. Άρα οι λύσεις του συστήματος είναι όλα τα ζευγάρια της μορφής

$$(x_1, x_2) = (1 - \kappa, \kappa),$$

όπου κ οποιοσδήποτε αριθμός.

Αν ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι κλιμακωτός, τότε το σύστημα είναι πάρα πολύ εύκολο να λυθεί. Λύνουμε πρώτα ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο τελευταίο ηγετικό στοιχείο. Στη συνέχεια λύνουμε ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο αμέσως προηγούμενο ηγετικό στοιχείο. Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να φτάσουμε στο πρώτο ηγετικό στοιχείο. Αν στα δεξιά μέλη των εκφράσεων που πήραμε υπάρχουν άγνωστοι, τους αντικαθιστούμε με αυθαίρετες παραμέτρους.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \end{array} \right\}.$$

Ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ο οποίος είναι κλιμακωτός. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} x_4 &= 1 \\ x_2 &= -3x_3 \\ x_1 &= -2x_3 \end{aligned}$$

Στα δεξιά μέλη υπάρχει ο άγνωστος x_3, επομένως θέτουμε $x_3 = \kappa$ και παίρνουμε

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_3, -3x_3, x_3, 1) = (-2\kappa, -3\kappa, \kappa, 1),$$

δηλαδή το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, η μορφή των οποίων δίνεται από την παραπάνω έκφραση.

Αποδεικνύεται ότι αν $AX = B$ και $A'X = B'$ είναι δυο συστήματα τέτοια ώστε οι αντίστοιχοι επαυξημένοι πίνακες $(A|B)$ και $(A'|B')$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε τα συστήματα είναι ισοδύναμα. Από το προηγούμενο όμως κεφάλαιο γνωρίζουμε ότι κάθε πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος μ'ένα κλιμακωτό πίνακα (απαλοιφή Gauss). Μ'άλλα λόγια, για να λύσουμε ένα σύστημα αρκεί να μετατρέψουμε τον επαυξημένο πίνακά του σ'ένα πίνακα $(A'|B')$, όπου ο A' είναι κλιμακωτός. Στις επόμενες παραγράφους θα δούμε πως αυτό μπορεί να γίνει με συστηματικό τρόπο.

1. Μέθοδος επίλυσης ομογενών συστημάτων

Η γενική μορφή ενός ομογενούς συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους είναι

$$AX = \mathbf{0}$$

όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας. Για να λύσουμε ένα τέτοιο σύστημα εργαζόμαστε ως εξής:

(1) Μετατρέπουμε τον A σ'ένα κλιμακωτό πίνακα A' χρησιμοποιώντας την απαλοιφή Gauss.

(2) Βρίσκουμε την τάξη r του A, δηλαδή τον αριθμό των μη μηδενικών γραμμών του A'. Αν $r = n$ τότε το σύστημα έχει μόνο την μηδενική λύση. Αν $r < n$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r$ αυθαίρετες παραμέτρους. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων, λύνουμε το σύστημα $A'X = \mathbf{0}$ σύμφωνα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου.

Παράδειγμα:
Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

Ο πίνακας συντελεστών του συστήματος είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Μετατρέπουμε τον A σε κλιμακωτό.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 5 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to -r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{r_1 \to r_1 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -\frac{1}{2} r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1 \to r_1 + r_3]{r_2 \to r_2 - 2r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

Η τάξη του πίνακα συντελεστών είναι $3 < 4$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $4 - 3 = 1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων λύνουμε το σύστημα $A'X = \mathbf{0}$ που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα A':

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

Λύνουμε πρώτα ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο τελευταίο ηγετικό στοιχείο (x_3), μετά ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο προηγούμενο ηγετικό στοιχείο (x_2) και τέλος ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο πρώτο ηγετικό στοιχείο (x_1).

$$\left\{ \begin{array}{c} x_3 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_1 = x_4 \end{array} \right\}.$$

Τους αγνώστους που μένουν, δηλαδή αυτούς που εμφανίζονται στα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων, (x_4), τους αντικαθιστούμε με αυθαίρετες παραμέτρους (κ). Επομένως η μορφή των λύσεων είναι:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, -x_4, -x_4, x_4) = (\kappa, -\kappa, -\kappa, \kappa).$$

Παράδειγμα:
Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right\}.$$

Μετατρέπουμε τον πίνακα συντελεστών σε κλιμακωτό.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{2} r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7/2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to -\frac{2}{7} r_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1\to r_1-\frac{3}{2}r_3\\ r_2\to r_2-\frac{1}{2}r_3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η τάξη του πίνακα είναι 3, όση δηλαδή και ο αριθμός των αγνώστων. Άρα το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση.

2. Μέθοδος επίλυσης μη ομογενών συστημάτων

Η γενική μορφή ενός μη ομογενούς συστήματος m γραμμικών εξισώσεων με n αγνώστους είναι

$$AX = B,$$

όπου A είναι ένας $m \times n$ πίνακας και B ένας $m \times 1$ πίνακας (πίνακας στήλη). Για να λύσουμε ένα τέτοιο σύστημα εργαζόμαστε ως εξής:

(1) Μετατρέπουμε με απαλοιφή Gauss τον επαυξημένο πίνακα $(A|B)$ σ'ένα πίνακα $(A'|B')$ όπου A' κλιμακωτός.

(2) Αν σε οποιαδήποτε φάση της διαδικασίας, εμφανιστεί ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη του πίνακα με τον οποίο δουλεύουμε, τότε το σύστημα είναι αδύνατο και σταματάμε. Διαφορετικά συνεχίζουμε και προσδιορίζουμε τη μορφή των λύσεων, λύνοντας το σύστημα $A'X = B'$ κατά τα γνωστά.

Αν τώρα, με βάση το παραπάνω κριτήριο, το σύστημα είναι συμβιβαστό και θέσουμε r να'ναι η τάξη του A, τότε:

- Αν $r = n$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση.
- Αν $r < n$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $n - r$ αυθαίρετες παραμέτρους.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 4 \end{array} \right\}.$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στην κατάλληλη μορφή.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2\to r_2-2r_1\\ r_3\to r_3-3r_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 13 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2\to \frac{1}{7}r_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 13 & 7 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3\to r_3-13r_2\\ r_1\to r_1+3r_2}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη έχει ηγετικό στοιχείο (-6). Άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 2 \end{array} \right\}.$$

Φέρνουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος στην κατάλληλη μορφή.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{7} r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1/7 \\ 0 & 8 & 4 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 + 3r_2 \\ r_3 \to r_3 - 8r_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 20/7 & 8/7 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[r_3 \to \frac{7}{20} r_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1/7 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 - \frac{10}{7} r_3 \\ r_2 \to r_2 - \frac{1}{7} r_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 \end{array} \right] = (A'|B').$$

Η τελευταία στήλη του $(A'|B')$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο, άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό. Η τάξη του A είναι 3, όση και ο αριθμός των αγνώστων, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για να τη βρούμε, λύνουμε το σύστημα $A'X = B'$. Δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = 1 \\ x_2 = -1/5 \\ x_3 = 2/5 \end{array} \right\}.$$

Παράδειγμα:

Ας υποθέσουμε ότι θέλαμε να λύσουμε το προηγούμενο σύστημα αλλά με μια εξίσωση λιγότερη, δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \end{array} \right\}.$$

Τότε θα είχαμε

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 2r_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{7} r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1/7 \end{array} \right] \xrightarrow[r_1 \to r_1 + 3r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10/7 & 11/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & -1/7 \end{array} \right] = (A'|B').$$

Η τελευταία στήλη του $(A'|B')$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό. Η τάξη του A είναι $2 < 3$. Άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $3-2=1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων, λύνουμε το σύστημα $A'X = B'$, δηλαδή

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + \frac{10}{7}x_3 = \frac{11}{7} \\ \\ x_2 + \frac{1}{7}x_3 = -\frac{1}{7} \end{array} \right\}.$$

Λύνουμε πρώτα ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο τελευταίο ηγετικό στοιχείο (x_2) και μετά ως προς τον άγνωστο που αντιστοιχεί στο πρώτο ηγετικό στοιχείο (x_1).

$$\left\{ \begin{array}{c} x_2 = -\frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7} \\ \\ x_1 = -\frac{10}{7}x_3 + \frac{11}{7} \end{array} \right\}.$$

Στα δεξιά μέλη των παραπάνω εξισώσεων εμφανίζεται ο άγνωστος x_3. Τον αντικαθιστούμε με μια αυθαίρετη παράμετρο κ και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3) &= \left(-\frac{10}{7}x_3 + \frac{11}{7}, -\frac{1}{7}x_3 - \frac{1}{7}, x_3 \right) \\ &= \left(-\frac{10}{7}\kappa + \frac{11}{7}, -\frac{1}{7}\kappa - \frac{1}{7}, \kappa \right). \end{aligned}$$

3. Έυρεση αντιστρόφου

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας. Θέλουμε να εξετάσουμε αν είναι αντιστρέψιμος και στην περίπτωση που είναι, να υπολογίσουμε τον αντίστροφό του. Ζητάμε δηλαδή ένα πίνακα $X = (x_{ij})$ τέτοιο ώστε

$$AX = I_n.$$

Ισοδύναμα

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Έστω X_j η j-στήλη του πίνακα X και E_j η j-στήλη του πίνακα I_n. Τότε η παραπάνω σχέση μας λέει ότι

$$AX_j = E_j$$

για όλα τα $j = 1, \ldots, n$. Δηλαδή για να προσδιορίσουμε τον X πρέπει να λύσουμε n συστήματα με n εξισώσεις και n αγνώστους το καθένα. Αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα ως εξής:

Θεωρούμε τον πίνακα

$$(A|I_n) = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right].$$

Μετατρέπουμε με απαλοιφή Gauss τον $(A|I_n)$ σ'ένα πίνακα $(A'|B)$, όπου A' κλιμακωτός. Αν $A' = I_n$ τότε ο A είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = B$. Αν $A' \neq I_n$ τότε ο A δεν είναι αντιστρέψιμος. Παράδειγμα:

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε

$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 + r_2 \\ r_3 \to r_3 - 5r_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3 \to \frac{1}{8} r_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & -5/8 & 1/8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_2 \to r_2 + 2r_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & -5/8 & 1/8 \end{array}\right] = (A'|B).$$

Παρατηρούμε ότι $A' = I_3$, άρα ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1/4 & 1/4 \\ -3/8 & -5/8 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί (αν υπάρχει) ο αντίστροφος του πίνακα
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$
Έχουμε
$$(A|I_3) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 + r1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right] = (A'|B).$$
Παρατηρούμε ότι $A' \neq I_3$, άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αν μας ενδιαφέρει μόνο αν ένας πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και όχι ο προσδιορισμός του αντιστρόφου, τότε δεν μας συμφέρει να δουλέψουμε με τον επαυξημένο $(A|I_n)$ γιατί οι πράξεις είναι περισσότερες. Στην περίπτωση αυτή απλά μετατρέπουμε τον A σε κλιμακωτό και βρίσκουμε την τάξη του. Αν είναι ίση με n τότε ο A είναι αντιστρέψιμος. Αν όχι τότε δεν είναι. Παράδειγμα:

Εξετάστε αν ο πίνακας
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
είναι αντιστρέψιμος.

Έχουμε
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to \frac{1}{3} r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{r_1 \to r_1 + r_2 \\ r_3 \to r_3 - 2r_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Η τάξη του A είναι $2 < 3$, άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Ορίζουσες

Έστω A ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ο **ελάσσων** πίνακας A_{ij} ορίζεται να'ναι ο τετραγωνικός $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας που προκύπτει από τον A αν παραλείψουμε την i γραμμή και την j στήλη. Παραδείγματα:

(1) Αν
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
τότε
$$A_{11} = [1],\ A_{12} = [0],\ A_{21} = [0],\ A_{22} = [1].$$

(2) Αν
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$
τότε
$$A_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},\ A_{31} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix},\ A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix},$$
$$A_{31} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},\ A_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\ A_{33} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Η **ορίζουσα** του πίνακα A είναι ένας πραγματικός αριθμός που συμβολίζεται με $|A|$ και ορίζεται ως εξής:

- Αν ο A είναι πίνακας στοιχείο, δηλαδή αν $A = [a_{11}]$, τότε $|A| = a_{11}$.
- Αν ο A είναι 2×2, δηλαδή αν
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$
τότε
$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Αν ο A είναι 3×3, δηλαδή αν
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$
τότε
$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$
Στην παραπάνω έκφραση εμφανίζονται ορίζουσες 2×2 οι οποίες υπολογίζονται σύμφωνα με τα προηγούμενα.
- Αν ο A είναι 4×4 πίνακας, τότε
$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - a_{14}|A_{14}|.$$
Εδώ εμφανίζονται ορίζουσες 3×3 τις οποίες υπολογίζουμε όπως παραπάνω.

Κοιτώντας τους παραπάνω τύπους είναι σαφές πια είναι η ιδέα: Αν μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα κάθε $n\times n$ πίνακα, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα κάθε $(n+1) \times (n+1)$ πίνακα. Ξέρουμε όμως πως βρίσκεται η ορίζουσα κάθε 1×1 πίνακα, άρα μπορούμε να βρούμε την ορίζουσα κάθε πίνακα με τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο:
$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}| - \cdots \pm a_{1n}|A_{1n}|,$$
όπου τα πρόσημα εναλλάσσονται (ξεκινάμε με $(+)$ και καταλήγουμε πάλι σε $(+)$ αν ο n είναι περιττός αριθμός, ενώ καταλήγουμε σε $(-)$ αν ο n είναι άρτιος). Ο παραπάνω τύπος λέγεται **ανάπτυγμα σε ελάσσονες ορίζουσες**. Παραδείγματα:

(1)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

(2)
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) + 2 \cdot (1 \cdot 1 - 2 \cdot 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι αν ο πίνακας είναι μεγάλος τότε η πολυπλοκότητα των υπολογισμών είναι τεράστια. Για παράδειγμα, αν θέλαμε να αναπτύξουμε την ορίζουσα ενός 4×4 πίνακα σε ελάσσονες ορίζουσες, θα έπρεπε να υπολογίσουμε 4 ορίζουσες 3×3 όπως στο προηγούμενο παράδειγμα. Θα δούμε στην επόμενη παράγραφο ότι υπάρχουν πολύ πιο αποτελεσματικές μέθοδοι υπολογισμού οριζουσών.

1. Ιδιότητες οριζουσών

Έστω A, B τετραγωνικοί $n \times n$ πίνακες. Τότε:

- $|A^t| = |A|$. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2, \quad |A^t| = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2.$$

- $|AB| = |A||B|$. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$|A| = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1, \quad |B| = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = -2.$$

$$|AB| = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 = |A||B|.$$

- Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα ισούται με το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του. Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 6 - 0 \cdot 5 = 18 = 1 \cdot 3 \cdot 6.$$

- Αν μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα είναι μηδενική, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν. Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 0.$$

- Αν δύο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα είναι ίσες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν. Παράδειγμα:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0.$$

- Αν εναλλάξουμε δύο γραμμές (ή στήλες) ενός πίνακα, τότε η ορίζουσά του αλλάζει πρόσημο. Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = B.$$
$$|A| = -1, \quad |B| = 1 = -|A|.$$
- Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή (ή στήλη) ενός πίνακα με ένα αριθμό λ, τότε η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται επί λ. Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \to 2r_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = B.$$
$$|A| = -2, \quad |B| = -4 = 2|A|.$$
- Αν προσθέσουμε σε μια γραμμή πολλαπλάσιο μιας άλλης, τότε η ορίζουσα δεν αλλάζει. Η ίδια ιδιότητα ισχύει και για στήλες. Παράδειγμα:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = B.$$
$$|A| = -2, \quad |B| = -2 = |A|.$$

Εφαρμογές:

(1) Ο μοναδιαίος I_n είναι ειδική περίπτωση άνω τριγωνικού (ή κάτω τριγωνικού) πίνακα, άρα
$$|I_n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1.$$

(2) Αν A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας, τότε $|\lambda A| = \lambda^n |A|$, για κάθε πραγματικό αριθμό λ. Πράγματι, έστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$
Τότε
$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^n \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$= \lambda^n |A|.$$

(3) Αν A αντιστρέψιμος, τότε $|A| \neq 0$ και

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Πράγματι

$$AA^{-1} = I_n \Rightarrow |AA^{-1}| = |I_n| \Rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

(4) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, θα υπολογίσουμε την ορίζουσα του

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Προσπαθούμε να μετατρέψουμε τον A σε άνω τριγωνικό.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$
$$\underset{\substack{r_3 \to r_3 + r_1 \\ r_4 \to r_4 - 2r_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\underset{r_4 \to r_4 - 5r_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -16 & -5 \end{vmatrix}$$
$$\underset{r_4 \to r_4 + 4r_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 \cdot (-9) = -36$$

2. Επίλυση γραμμικών συστημάτων με τη μέθοδο Cramer

Θεωρούμε το $n \times n$ σύστημα $AX = B$. Το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, η λύση δίνεται από τον τύπο

$$(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \ldots, \frac{|A_n|}{|A|} \right),$$

όπου A_j είναι ο πίνακας που προκύπτει αν αντικαστήσουμε την j-στήλη του A με τον πίνακα στήλη B.

Παράδειγμα: Να λυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 15 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 5 \end{array} \right\}.$$

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 15 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 15 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 15 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $|A| = 20 \neq 0$, άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση. Επιπλέον,

$$|A_1| = 20, \ |A_2| = -80, \ |A_3| = 100.$$

Άρα

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{|A_1|}{|A|}, \frac{|A_2|}{|A|}, \frac{|A_3|}{|A|} \right) = (1, -4, 5).$$

3. Εύρεση αντιστρόφου με τη μέθοδο των οριζουσών

Έστω A τετραγωνικός πίνακας. Ο **προσαρτημένος** πίνακας του A συμβολίζεται με adj$A$ και ορίζεται να'ναι ο πίνακας

$$\text{adj}A = ((-1)^{i+j}|A_{ij}|),$$

όπου A_{ij} ο ελάσσων πίνακας που αντιστοιχεί στο στοιχείο (i, j). Αποδεικνύεται ότι ο A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $|A| \neq 0$. Στην περίπτωση αυτή, ο αντίστροφος δίνεται από τον τύπο

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}A)^t.$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αντίστροφος του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε $|A| = 60 \neq 0$, άρα ο A αντιστρέφεται. Επίσης

$$|A_{11}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,\ |A_{12}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10,\ |A_{13}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7,$$

$$|A_{21}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -7,\ |A_{22}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 10,\ |A_{23}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$|A_{31}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 17,\ |A_{32}| = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 10,\ |A_{33}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Συνεπώς

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & |A_{13}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & -|A_{23}| \\ |A_{31}| & -|A_{32}| & |A_{33}| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & -7 \\ 7 & 10 & 11 \\ 17 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{adj}A)^t = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\mathrm{adj}A)^t = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 \\ 10 & 10 & -10 \\ -7 & 11 & 1 \end{bmatrix}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_{m\times 1}$

Το σύνολο όλων των $m \times 1$ πινάκων συμβολίζεται με $\mathbb{R}_{m\times 1}$ και τα στοιχεία του ονομάζονται **διανύσματα**. Ταυτίζουμε δηλαδή κάθε πίνακα στήλη

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

με το σημείο με συντεταγμένες $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ ή, ισοδύναμα, με το διάνυσμα με αρχή την αρχή των αξόνων και πέρας το σημείο $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$.

Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{m\times 1}$. Τότε

(1) Οποιαδήποτε έκφραση της μορφής

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n$$

όπου $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **γραμμικός συνδυασμός** των $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

(2) Τα διανύσματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ονομάζονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, όχι όλοι ίσοι με μηδέν, τέτοιοι ώστε

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0.$$

Παράδειγμα: Τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα διότι

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(3) Τα διανύσματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα** αν

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_n A_n = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \cdots = x_n = 0.$$

Παράδειγμα: Τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα διότι

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 = x_2 = 0.$$

(4) m το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}_{m\times 1}$ ονομάζονται **βάση** του $\mathbb{R}_{m\times 1}$. Παράδειγμα:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, E_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρήσεις: Έστω $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathbb{R}_{m\times 1}$.

(1) Το διάνυσμα B είναι γραμμικός συνδυασμός των $A_1, A_2, \ldots, A_n$, δηλαδή $B = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_nA_n$ αν και μόνο αν $AX = B$, όπου A είναι ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ και

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(2) Τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει και μη μηδενική λύση, όπου A ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ισοδύναμα, τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν η τάξη του A είναι μικρότερη από n. Αν $m = n$ τότε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν $|A| = 0$.

(3) Τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν το ομογενές σύστημα $AX = 0$ έχει μόνο τη μηδενική λύση, όπου A ο πίνακας που έχει στήλες τα διανύσματα $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ισοδύναμα, τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν η τάξη του A είναι ίση με n. Αν $m = n$ τότε τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.

(4) Αν $m = n$ και τα $A_1, A_2, \ldots, A_n$ αποτελούν βάση, τότε κάθε διάνυσμα B μπορεί να γραφτεί με μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός

συνδυασμός των $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Ισοδύναμα το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

Παραδείγματα:

(1) Να εξεταστεί αν τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του A δεν μπορεί να είναι 4 διότι ο πίνακας έχει μόνο 3 γραμμές, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(2) Να εξεταστεί αν τα διανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1ος τρόπος: Μετατρέπουμε τον A σε κλιμακωτό με απαλοιφή Gauss.

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι η τάξη του A είνα $3 < 4$, άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

2ος τρόπος: Υπολογίζουμε την ορίζουσα του A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Η ορίζουσα είναι 0 άρα τα διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(3) Να εξεταστεί αν το διάνυσμα

$$B = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικός συνδιασμός των διανυσμάτων

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

και εξετάζουμε αν το σύστημα

$$AX = B$$

είναι συμβιβαστό. Μετατρέπουμε τον επαυξημένο πίνακα του συστήματος με απαλοιφή Gauss σ'ενα πίνακα $(A'|B')$, όπου ο A' είναι κλιμακωτός.

$$(A|B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = (A'|B').$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία στήλη του $(A'|B')$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο, άρα το σύστημα είναι συμβιβαστό. Επομένως το B μπορεί να εκφραστεί σα γραμμικός συνδυασμός των A_1, A_2, A_3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα

Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Ένας αριθμός λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** του A, αν υπάρχει ένα μη μηδενικό διάνυσμα X τέτοιο ώστε

$$AX = \lambda X.$$

Κάθε τέτοιο διάνυσμα ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** του A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ.

1. Διαδικασία προσδιορισμού ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων

Ζητάμε λ τέτοιο ώστε για κάποιο μη μηδενικό X να ισχύει

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow AX - \lambda X = 0 \Leftrightarrow AX - \lambda IX = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται εξίσωση ιδιοτιμών. Θέλουμε το ομογενές αυτό σύστημα να έχει μη μηδενικές λύσεις. Ισοδύναμα

$$|A - \lambda I| = 0.$$

Δηλαδή για να βρούμε τις ιδιοτιμές του A αρκεί να λύσουμε ως προς λ την αλγεβρική εξίσωση

$$|A - \lambda I| = 0,$$

η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του A.

Έστω ότι αφού λύσαμε την εξίσωση αυτή, βρήκαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n.$$

Για να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές αυτές, βρίσκουμε τις μη μηδενικές λύσεις των συστημάτων

$$(A - \lambda_j I)X = 0, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ο αριθμός των αυθαίρετων παραμέτρων της λύσης του

$$(A - \lambda_j I)X = 0$$

είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_j.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης δηλαδή

$$\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1.$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε με απαλοιφή Gauss τα συστήματα

$$(A - \lambda_1 I)X = 0,\ (A - \lambda_2 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα είναι $1 < 2$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με μια αυθαίρετη παράμετρο. Προσδιορίζουμε τη μορφή τους κατά τα γνωστά.

$$(x_1, x_2) = (1/2x_2, x_2) = (1/2\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1 είναι

$$\begin{bmatrix} 1/2\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επίσης έχουμε

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα είναι $1 < 2$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με μια αυθαίρετη παράμετρο:

$$(x_1, x_2) = (-x_2, x_2) = (-\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_2 είναι

$$\begin{bmatrix} -\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή στην ιδιοτιμή λ_2 αντιστοιχεί ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) + 4(\lambda+1) + 16(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) + 4(\lambda+1) + 16(\lambda+1) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)(-\lambda^2 + 7\lambda + 8) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+1)(8-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda+1)^2(8-\lambda) = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης δηλαδή

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8.$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = \lambda_2$, λύνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_1 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα των συντελεστών είναι $1 < 3$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $3 - 1 = 2$ αυθαίρετες παραμέτρους. Για να προσδιορίσουμε τις λύσεις, λύνουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα.

$$x_1 + 1/2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1/2x_2 - x_3.$$

Θέτουμε $\kappa = x_2$ και $\lambda = x_3$, και παίρνουμε

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1/2x_2 - x_3, x_2, x_3) = (-1/2\kappa - \lambda, \kappa, \lambda).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1 = \lambda_2$ είναι

$$\begin{bmatrix} -1/2\kappa - \lambda \\ \kappa \\ \lambda \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα κ, λ, όχι και τα δύο μηδέν. Δηλαδή στην $\lambda_1 = \lambda_2$ αντιστοιχούν 2 γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για να βρούμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_3, λύνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_3 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα των συντελεστών είναι $2 < 3$, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $3-2 = 1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τις λύσεις, λύνουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα.

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - 1/2x_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_2 = 1/2x_3 \\ x_1 = x_3 \end{array} \right\}.$$

Θέτουμε $\kappa = x_3$ και παίρνουμε

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_3, 1/2x_3, x_3) = (\kappa, 1/2\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην λ_3 είναι

$$\begin{bmatrix} \kappa \\ 1/2\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή στην λ_3 αντιστοιχεί ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2. Ιδιότητες ιδιοτιμών-ιδιοδιανυσμάτων

(1) Το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με το άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$. $\lambda_1 + \lambda_2 = 4 = 1 + 3$.

(2) Το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσα του. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -1$. Η ορίζουσα του A είναι:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5 = \lambda_1 \lambda_2.$$

(3) Οι ιδιοτιμές ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

(4) (Θεώρημα Cayley-Hamilton) Κάθε πίνακας ικανοποιεί τη χαρακτηριστική του εξίσωση. Παράδειγμα:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0.$$

Έχουμε

$$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 16 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες

Έστω A τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας. Ο A ονομάζεται **διαγωνιοποιήσιμος** αν υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ είναι διαγώνιος. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο P **διαγωνιοποιεί** τον A.

Θεωρημα. *Ένας τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας διαγωνιοποιείται αν και μόνο αν έχει n το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.*

Έστω τώρα ότι ο τετραγωνικός $n \times n$ πίνακας A διαγωνιοποιείται, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του, και $X_1, \ldots, X_n$ τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ'αυτές. Θέτουμε

$$P = [X_1 \cdots X_n]$$

να είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $X_1, \ldots, X_n$. Τότε ο P διαγωνιοποιεί τον A και

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, δηλαδή

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Για να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα λύνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_1 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα συντελεστών είναι $1 < 2$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $2 - 1 = 1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων, λύνουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα.

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Θέτουμε $\kappa = x_2$ και παίρνουμε

$$(x_1, x_2) = (-x_2, x_2) = (-\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\begin{bmatrix} -\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή ο πίνακας έχει ένα μόνο (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο A δεν διαγωνιοποιείται.

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

διαγωνιοποιείται και αν βρεθεί ένας πίνακας που τον διαγωνιοποιεί.

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, δηλαδή

$$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

Για να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = i$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_1 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα συντελεστών είναι $1 < 2$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $2 - 1 = 1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων, λύνουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα.

$$x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -ix_2.$$

Θέτουμε $\kappa = x_2$ και παίρνουμε

$$(x_1, x_2) = (-ix_2, x_2) = (-i\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\begin{bmatrix} -i\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το

$$\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Για να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -i$ λύνουμε το σύστημα

$$(A - \lambda_2 I)X = 0.$$

Έχουμε

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{απαλοιφή Gauss}]{} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Η τάξη του πίνακα συντελεστών είναι $1 < 2$ άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με $2 - 1 = 1$ αυθαίρετη παράμετρο. Για να προσδιορίσουμε τη μορφή των λύσεων, λύνουμε το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα.

$$x_1 - ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = ix_2.$$

Θέτουμε $\kappa = x_2$ και παίρνουμε

$$(x_1, x_2) = (ix_2, x_2) = (i\kappa, \kappa).$$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα είναι

$$\begin{bmatrix} i\kappa \\ \kappa \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

για όλα τα $\kappa \neq 0$. Δηλαδή στην ιδιοτιμή λ_2 αντιστοιχεί ένα (γραμμικά ανεξάρτητο) ιδιοδιάνυσμα, το

$$\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο A έχει δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα:

$$\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Ένας πίνακας που τον διαγωνιοποιεί είναι

$$P = \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύουμε:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix},$$

και άρα

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} i/2 & 1/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα: Να αποδειχτεί ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

είναι διαγωνιοποιήσιμος και να βρεθεί ένας πίνακας που τον διαγωνιοποιεί.

Στην προηγούμενη ενότητα δείξαμε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 8,$$

και ότι στις ιδιοτιμές αυτές αντιστοιχούν τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος και ένας πίνακας που τον διαγωνιοποιεί είναι

$$P = \begin{bmatrix} -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Εύρεση όλων των δυνάμεων πίνακα

Έστω A ένας τετραγωνικός πίνακας. Ζητάμε έναν κλειστό τύπο για τον $A^k = \underbrace{AA\cdots A}_{k \text{ φορές}}$, για όλα τα k.

Αν ο A είναι διαγώνιος, δηλαδή αν

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

τότε

$$A^k = \begin{bmatrix} a_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n^k \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα ότι ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας P (ο οποίος έχει στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A) και ένας διαγώνιος πίνακας

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

(ο οποίος έχει στην διαγώνιο τις ιδιοτιμές του A), τέτοιοι ώστε

$$P^{-1}AP = \Lambda \Rightarrow A = P\Lambda P^{-1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} A^k &= (P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1}) \cdots (P\Lambda P^{-1}) = P\Lambda^k P^{-1} \\ &= P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω τύπος μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τις δυνάμεις του A χωρίς να χρειάζεται να κάνουμε k διαδοχικούς πολλαπλασιασμούς.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν οι δυνάμεις του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 1.$$

Στην ιδιοτιμή λ_1 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και στην ιδιοτιμή λ_2 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Θέτουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Τότε

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} A^k = P\Lambda^k P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{3^k+1}{2} & \dfrac{3^k-1}{2} \\ & \\ \dfrac{3^k-1}{2} & \dfrac{3^k+1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. Συστήματα γραμμικών διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές

Η γενική μορφή ενός τέτοιου συστήματος είναι

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' = a_{21}y_1 + \cdots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \end{array} \right\},$$

όπου $y_1, y_2, \ldots, y_n$ άγνωστες συναρτήσεις, a_{ij} σταθεροί αριθμοί (οι συντελεστές), και $b_1, b_2, \ldots, b_n$ δοσμένες συναρτήσεις.

Το σύστημα σε μορφή πινάκων είναι

$$Y' = AY + B.$$

όπου

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

είναι οι πίνακες των άγνωστων συναρτήσεων, των παραγώγων τους, των συντελεστών και των δοσμένων συναρτήσεων αντίστοιχα.

Αν $B = 0$ το σύστημα λέγεται **ομογενές**. Διαφορετικά λέγεται μη ομογενές. Θα ασχοληθούμε μόνο με ομογενή συστήματα.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{array} \right\}.$$

Λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς y_2,

$$y_2 = y_1' - 3y_1$$

και αντικαθιστούμε στην δεύτερη

$$y_1'' - 6y_1' + 8y_1 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι γραμμική, ομογενής, 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές. Η γενική της λύση, σύμφωνα με τα γνωστά, είναι

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

Αντικαθιστούμε τώρα στην 1η εξίσωση και παίρνουμε

$$y_2 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}.$$

6. Μέθοδος επίλυσης του ομογενούς συστήματος $Y' = AY$ όταν ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του A και $X_1, X_2, \ldots, X_n$ τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σ'αυτές. Θέτουμε

$$P = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]$$

να'ναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Τότε η γενική λύση του $Y' = AY$ είναι

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ C_n e^{\lambda_n x} \end{bmatrix},$$

όπου $C_1, C_2, \ldots, C_n$ αυθαίρετες σταθερές.

Παράδειγμα: Να λυθεί το σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{array} \right\}.$$

Το σύστημα σε μορφή πινάκων είναι

$$Y' = AY,$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = -1.$$

Στην λ_1 αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

και στην λ_2 αντιστοιχούν τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος. Θέτουμε

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η γενική λύση του συστήματος είναι

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda_1 x} \\ C_2 e^{\lambda_2 x} \\ C_3 e^{\lambda_3 x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 e^{2x} \\ C_2 e^{-x} \\ C_3 e^{-x} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x} \\ C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2C_3 e^{-x} \\ C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x} \end{bmatrix}.$$