ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΘΕΜΗΣ ΜΗΤΣΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ

Περιεχόμενα

1. Προειδοποίηση

Οι σημειώσεις αυτές δεν έχουν σκοπό ούτε την εξάντληση όλων των περιπτώσεων τής θεωρίας, ούτε την αυστηρή θεμελίωση τής θεωρίας. Για την ρεαλιστική επίτευξη αυτών, απαιτείται γνώση θεωρίας μέτρου.

2. Συνδυαστική

Αν A είναι κάποιο πεπερασμένο σύνολο, με $|A|$ συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του, με $\mathscr{P}(A)$ το δυναμοσύνολο τού A δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων τού A, και με $\mathbb{1}_A$ τη δείκτρια συνάρτηση τού A, δηλαδή τη συνάρτηση

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}.$$

Υπάρχουν δυο βασικές αρχές απαρίθμησης.

(1) **Η προσθετική αρχή**: Αν τα A, B είναι μεταξύ τους ξένα, τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Αν $A \subset B$, τότε $|B \setminus A| = |B| - |A|$. Επομένως, αν τα A και B δεν είναι ξένα, τότε

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Διαδοχικές εφαρμογές τού προηγούμενου δίνουν

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|.$$

(2) **Η πολλαπλασιαστική αρχή**: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Δηλαδή αν το i μπορεί να επιλεγεί με n τρόπους και το j με m τρόπους, τότε το ζευγάρι (i, j) μπορεί να επιλεγεί με nm τρόπους.

Τα παρακάτω είναι εφαρμογές των δυο αρχών.

- **Διατάξεις με επανάληψη**. Μια διάταξη n στοιχείων ανά k με επανάληψη, είναι μια διατεταγμένη k-άδα, όπου σε κάθε θέση βάζουμε κάποιο στοιχείο από τα n επιτρεπομένων επαναλήψεων. Από την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν n^k τέτοιες διατάξεις, αφού για την πρώτη θέση έχουμε n επιλογές, για τη δεύτερη πάλι n κ.τ.λ. Ιδιαίτερα, το πλήθος των των υποσυνόλων ενός συνόλου με k στοιχεία είναι 2^k αφού κάθε υποσύνολο μπορεί να ταυτιστεί με τη δείκτρια συνάρτησή του, η οποία είναι μια διατεταγμένη k-άδα από μηδενικά και άσους.
- **Διατάξεις χωρίς επανάληψη**. Μια διάταξη n στοιχείων ανά k ($k \leq n$) χωρίς επανάληψη, είναι μια διατεταγμένη k-άδα, όπου σε κάθε θέση βάζουμε ένα στοιχείο διαφορετικό από αυτά που έχουμε βάλει στις προηγούμενες. Εδώ έχουμε n επιλογές για την πρώτη θέση, $n-1$ επιλογές για τη δεύτερη κ.τ.λ. Επομένως έχουμε συνολικά

  $$n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  διατάξεις χωρίς επανάληψη. Η παραπάνω ποσότητα συμβολίζεται με $(n)_k$. Όταν $n = k$ η διάταξη χωρίς επανάληψη λέγεται **μετάθεση**.
- **Συνδυασμοί χωρίς επανάληψη**. Ένας συνδυασμός n στοιχείων ανά k ($k \leq n$) χωρίς επανάληψη, είναι ένα υποσύνολο με k στοιχεία από τα δοσμένα n. Σε κάθε τέτοιο συνδυασμό αντιστοιχούν $k!$ μεταθέσεις, επομένως αν συμβολίσουμε με $\binom{n}{k}$ το πλήθος όλων των συνδυασμών, έχουμε

  $$\binom{n}{k} k! = (n)_k,$$

  άρα

  $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

  Η ποσότητα αυτή ονομάζεται διωνυμικός συντελεστής και εμφανίζεται στο διωνυμικό ανάπτυγμα

  $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

  Η ειδική περίπτωση $a = b = 1$

  $$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

  έχει συνδυαστική ερμηνεία (και απόδειξη), αφού το αριστερά μέλος είναι το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου n στοιχείων, ενώ το δεξιά μέλος είναι το πλήθος των μονοσυνόλων συν το πλήθος των 2-συνόλων συν και τα λοιπά.

Το πλήθος των συνδυασμών είναι ίσο με το πλήθος των τρόπων με τους οποίους k όμοια αντικείμενα μπορούν να κατανεμηθούν σε n διακεκριμένες θέσεις. Συνεπώς n αντικείμενα μπορούν να κατανεμηθούν σε k δοχεία απεριόριστης χωρητικότητας με

$$\binom{n+k-1}{k-1}$$

τρόπους.

- **Συνδυασμοί με επανάληψη**. Αν στους συνδυασμούς των n ανά k επιτρέψουμε επαναλήψεις, τότε έχουμε μια κατανομή k όμοιων σφαιριδίων σε n διακεκριμένα κελιά, όπου στο i κελί τοποθετούμε j σφαιρίδια αν και μόνο αν το i αντικείμενο επιλέγεται j φορές στο συνδυασμό. Έτσι το πλήθος των συνδυασμών με επανάληψη είναι
$$\binom{n+k-1}{n-1}.$$
- **Αναγραμματισμοί**. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια λέξη μήκους m η οποία αποτελείται από k_1 σύμβολα τύπου 1, k_2 σύμβολα τύπου 2,..., k_n σύμβολα τύπου n. Σε ένα αναγραμματισμό κάθε ομάδα k_j όμοιων συμβόλων αντιστοιχεί σε $k_j!$ μεταθέσεις επομένως το πλήθος όλων των αναγραμματισμών είναι
$$\frac{m!}{k_1!k_2!\dots k_n!}.$$
Η ποσότητα αυτή ονομάζεται πολυωνυμικός συντελεστής και συμβολίζεται με
$$\binom{m}{k_1, k_2, \dots, k_n}.$$

3. Αξιωματική Πιθανότητα

Ένα τυχαίο πείραμα ή πείραμα τύχης είναι οποιαδήποτε διαδικασία έχει τυχαίες εκβάσεις. Για παράδειγμα, ρίχνουμε ένα ζάρι ή ένα νόμισμα και καταγράφουμε την ένδειξη, τραβάμε ένα κλήρο από μια κληρωτίδα, τραβάμε ένα χαρτί από μια τράπουλα, επιλέγουμε έναν άνθρωπο και μετράμε το ύψος του, πυροβολούμε ένα στόχο και μετράμε την απόκλιση τής βολής από το κέντρο. Τα πειράματα τύχης μοντελοποιούνται από μαθηματικά αντικείμενα που λέγονται **χώροι πιθανότητας**. Ένας χώρος πιθανότητας είναι μια τριάδα $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, όπου Ω είναι ο **δειγματικός χώρος**, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών εκβάσεων τού πειράματος, και $\mathscr{A}$ η οικογένεια των **ενδεχομένων** ή **τυχαίων γεγονότων**, δηλαδή μια οικογένεια υποσυνόλων τού Ω με τις ιδιότητες

(1) $\Omega \in \mathscr{A}$.
(2) Αν $A \in \mathscr{A}$, τότε $\Omega \smallsetminus A \in \mathscr{A}$.
(3) Αν A_n είναι μια ακολουθία ενδεχομένων τότε η ένωση $\bigcup_n A_n$ είναι ενδεχόμενο.

Τέλος P είναι μια **συνάρτηση πιθανότητας**, δηλαδή μια (συνολο)συνάρτηση

$$P : \mathscr{A} \to [0, 1]$$

με τις ιδιότητες

(1) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$.
(2) Αν A_n είναι μια ακολουθία ξένων ανά δυο ενδεχομένων, τότε $P(\bigcup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$.

Για παράδειγμα αν ρίξουμε ένα (φυσιολογικό) ζάρι,

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ \mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega),\ P(A) = \frac{|A|}{6}.$$

Έτσι η πιθανότητα να φέρουμε 4 ή 5 ή 6 είναι η πιθανότητα τού ενδεχομένου $\{4, 5, 6\}$ δηλαδή

$$P(\{4, 5, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Παρακινούμενοι από το προηγούμενο παράδειγμα, όποτε έχουμε πεπερασμένο δειγματικό χώρο με ισοπίθανες εκβάσεις, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι ο λόγος τού πλήθους των στοιχείων τού ενδεχομένου δια το πλήθος των στοιχείων τού δειγματικού χώρου. Πιο γραφικά

$$\frac{\text{πλήθος ευνοϊκών εκβάσεων}}{\text{πλήθος όλων των δυνατών εκβάσεων}}.$$

Ο παραπάνω τύπος είναι και ο ορισμός τής **εμπειρικής πιθανότητας**. Στην πράξη, πολλές φορές χρησιμοποιούμε αυτόν τον ορισμό χωρίς να καταφεύγουμε στον αυστηρό προσδιορισμό τού χώρου πιθανότητας.

Παραδείγματα.

- Ανακατεύουμε τα γράμματα Α,Α,Λ,Λ. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε τη λέξη ΑΛΛΑ; Εδώ οι δυνατές εκβάσεις είναι οι αναγραμματισμοί των τεσσάρων γραμμάτων οι οποίοι είναι 6. Η ευνοϊκή έκβαση είναι μία, άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/6$.
- Ανακατεύουμε τα γράμματα Α,Α,Β,Β,Γ,Γ,Δ,Δ. Ποια η πιθανότητα να πάρουμε μια λέξη που αρχίζει με Α και τελειώνει με Β; Οι δυνατές εκβάσεις είναι οι αναγραμματισμοί των 8 γραμμάτων οι οποίοι είναι $\binom{8}{2,2,2,2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$. Οι ευνοϊκές εκβάσεις είναι όλες οι λέξεις τής μορφής Α******Β, όπου ****** είναι αναγραμματισμός των Α,Β,Γ,Γ,Δ,Δ. Το πλήθος αυτών των αναγραμματισμών είναι $\binom{6}{1,2,2,1} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6$. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι $1/14$.

Θεώρημα. *Έστω $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ χώρος πιθανότητας. Τότε*

(1) *Αν για τα ενδεχόμενα A, B ισχύει $A \subset B$ τότε $P(A) \leq P(B)$.*
(2) *Για κάθε ενδεχόμενο A έχουμε $P(\Omega \smallsetminus A) = 1 - P(A)$.*
(3) *Αν A_n είναι μια ακολουθία εδεχομένων τότε $P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n P(A_n)$.*
(4) *Αν A_n είναι μια αύξουσα (αντίστοιχα φθίνουσα) ακολουθία ενδεχομένων τότε $P(\bigcup_n A_n) = \lim P(A_n)$ (αντίστοιχα $P(\bigcap_n A_n) = \lim P(A_n)$).*

Απόδειξη.

(1) $P(B) = P((B \smallsetminus A) \cup A) = P(B \smallsetminus A) + P(A) \geq P(A)$.
(2) $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\Omega \smallsetminus A)$.
(3) Αν $B_n = A_n \smallsetminus \bigcup_{k<n} A_k$, τότε τα B_n είναι ανά δυο ξένα και $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$, άρα

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = P\left(\bigcup_n B_n\right) = \sum_n P(B_n) \leq \sum_n P(A_n).$$

(4) Αν B_n όπως πριν τότε

$$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_n \sum_{k\le n} P(B_k) = \lim_n P\left(\bigcup_k B_k\right) = \lim_n P(A_n).$$

□

Γενικότερα, αν θέσουμε $\liminf A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\ge n} A_k$ και $\limsup A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\ge n} A_k$ τότε

$$P(\liminf A_n) \le \liminf P(A_n) \le \limsup P(A_n) \le P(\limsup A_n).$$

4. Δεσμευμένη Πιθανότητα

Αν τα A, B είναι δυο ενδεχόμενα, τότε το ενδεχόμενο να συμβεί το B δεδομένου ότι έχει συμβεί το A συμβολίζεται με $B|A$. Η πιθανότητα αυτό το ενδεχόμενο να συμβεί ορίζεται

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

και ονομάζεται **δεσμευμένη πιθανότητα**.

Θεώρημα.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \cdots P(A_2|A_1)P(A_1).$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) &= \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_n)}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})} \frac{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})}{P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2})} \cdots \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} P(A_1) \\ &= P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-2}) \cdots P(A_2|A_1)P(A_1). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα. Σε ένα δοχείο υπάρχουν n άσπρα και n μαύρα σφαιρίδια. Επιλέγουμε τυχαία τρία σφαιρίδια (χωρίς να τα βάλουμε πίσω). Ποια η πιθανότητα να έχουν το ίδιο χρώμα; Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_j = \text{το } j \text{ σφαιρίδιο είναι άσπρο}, \;\; j = 1, 2, 3.$$

τότε

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{n-2}{2n-2} \cdot \frac{n-1}{2n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n-2}{4(2n-1)}.$$

Αυτή είναι η πιθανότητα να είναι και τα τρία άσπρα και είναι ίση με την πιθανότητα να είναι και τα τρία μαύρα. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{n-2}{2(2n-1)}$. Εναλλακτικά, το πρόβλημα δεν αλλάζει αν θεωρήσουμε ότι τα σφαιρίδια είναι αριθμημένα (=διακεκριμένα). Τότε τα τρία σφαιρίδια μπορούν να επιλεγούν με $\binom{2n}{3}$ τρόπους. Οι ευνοϊκοί τρόποι (και τα τρία άσπρα) είναι $\binom{n}{3}$. Άρα η πιθανότητα να είναι και τα τρία άσπρα είναι

$$\frac{\binom{n}{3}}{\binom{2n}{3}} = \frac{n-2}{4(2n-2)}.$$

Θεώρημα (Ολικής πιθανότητας). *Αν η ακολουθία ενδεχομένων A_n διαμερίζει το δειγματικό χώρο, τότε για κάθε ενδεχόμενο B έχουμε*

$$P(B) = \sum_n P(B|A_n)P(A_n).$$

Απόδειξη.

$$\sum_n P(B|A_n)P(A_n) = \sum_n P(B \cap A_n) = P\left(\bigcup_n (B \cap A_n)\right) = P(B).$$

□

Παράδειγμα. Δυο δοχεία περιέχουν w_1 άσπρα και b_1 μαύρα σφαιρίδια το πρώτο, και w_2 άσπρα και b_2 μαύρα σφαιρίδια το δεύτερο. Ρίχνουμε ένα νόμισμα. Αν φέρουμε Κ επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από το πρώτο δοχείο. Αν φέρουμε Γ επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο από το δεύτερο δοχείο. Ποια η πιθανότητα το σφαιρίδιο να είναι άσπρο; Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$\begin{aligned} A &= \text{το σφαιρίδιο είναι άσπρο}, \\ H &= \text{φέραμε Κ}, \\ T &= \text{φέραμε Γ}. \end{aligned}$$

Τότε

$$P(A) = P(A|H)P(H) + P(A|T)P(T) = \frac{w_1}{w_1 + b_1}\frac{1}{2} + \frac{w_2}{w_2 + b_2}\frac{1}{2}.$$

Θεώρημα (Bayes). *Με τις ίδιες υποθέσεις όπως παραπάνω*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)},$$

για κάθε i.

Απόδειξη.

$$\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)} = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)} = P(A_i|B).$$

□

Παράδειγμα. Στο προηγούμενο παράδειγμα, δεδομένου ότι επιλέξαμε άσπρο σφαιρίδιο, ποια η πιθανότητα να φέραμε Κ;

$$P(H|A) = \frac{P(A|H)P(H)}{P(A|H)P(H) + P(A|T)P(T)} = \frac{\frac{w_1}{w_1+b_1}\frac{1}{2}}{\frac{w_1}{w_1+b_1}\frac{1}{2} + \frac{w_2}{w_2+b_2}\frac{1}{2}} = \frac{w_1(w_2+b_2)}{w_1(w_2+b_2)+w_2(w_1+b_1)}.$$

Για δυο ενδεχόμενα A και B, οι συνθήκες $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(B|A) = P(B)$ και $P(A|B) = P(A)$ είναι ισοδύναμες. Όταν ισχύει οποιαδήποτε από τις τρεις λέμε ότι τα A και B είναι **ανεξάρτητα**. Ανεξάρτητα ενδεχόμενα σημαίνει ότι η πραγματοποίηση τού ενός δεν επηρεάζει την πραγματοποίηση τού άλλου.

Παράδειγμα. Στο πρώτο παράδειγμα, αν κάθε φορά που επιλέγουμε ένα σφαιρίδιο το επιστρέφουμε πίσω στο δοχείο, τότε τα A_j είναι ανεξάρτητα και έχουν και τα τρία πιθανότητα $1/2$. Άρα

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = \frac{1}{8}.$$

Η παραπάνω πιθανότητα είναι ασυμπωτικά ίση με την πιθανότητα $\frac{n-2}{4(2n-1)}$ τού πρώτου παραδείγματος. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού αν έχουμε πολύ μεγάλο αριθμό σφαιριδίων στο δοχείο, ελάχιστη διαφορά θα κάνει αν τα τρία σφαιρίδια τού δείγματος τα βάλουμε πίσω ή όχι.

Τα $A_1, \ldots, A_n$ λέγονται ανεξάρτητα αν για κάθε $I \subset \{1, \ldots, n\}$ έχουμε $P(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i \in I} P(A_i)$.

5. Τυχαίες Μεταβλητές

Μια τυχαία μεταβλητή είναι μια μεταβλητή που παίρνει πραγματικές τιμές με τυχαίο τρόπο. Για παράδειγμα, ρίχνουμε ένα ζάρι και συμβολίζουμε με X την ένδειξη που παίρνουμε. Τότε η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με

$$P(X=j)=\frac{1}{6},\ j=1,\dots,6.$$

Αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή, τότε η αύξουσα συνάρτηση

$$F_X(x)=P(X\le x)$$

ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** τής X. Μια τυχαία μεταβλητή X ονομάζεται

(1) **Διακριτή** αν υπάρχει μια μη-αρνητική συνάρτηση f_X (η **συνάρτηση πιθανότητας** τής X) τέτοια ώστε

$$P(X=x)=f_X(x)$$

για όλα τα x που είναι τιμές τής X. Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές παίρνουν θετικές τιμές σ' ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο διακριτό σύνολο. Για παράδειγμα, η ένδειξη ενός ζαριού, ο αριθμός αυτοκινητιστικών ατυχημάτων μια δεδομένη περίοδο, ο αριθμός απωλειών σ' ένα πόλεμο, ο αριθμός των πελατών σ' ένα κατάστημα μια δεδομένη στιγμή.

(2) **Συνεχής** αν υπάρχει μια μη-αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f_X (η **συνάρτηση πυκνότητας** τής X) τέτοια ώστε

$$P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

για όλα τα x που είναι τιμές τής X. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνουν θετικές τιμές σε διαστήματα. Για παράδειγμα το ύψος, το βάρος, το εισόδημα ενός ανθρώπου. Το κέρδος μιας επιχείρησης. Η απόκλιση μιας βολής από το κέντρο.

Προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς ότι

(1) Αν η X είναι διακριτή και x_ξ μια αρίθμηση των διαδοχικών τιμών της, τότε $f_X(x_\xi)=F_X(x_\xi)-F_X(x_{\xi-1})$, και αντίστροφα $F_X(x_\xi)=\sum_{\zeta\le\xi} f_X(x_\zeta)$. Επίσης $\sum_\xi f_X(x_\xi)=1$. Γενικότερα, αν A είναι κάποιο σύνολο τιμών τής X τότε

$$P(X\in A)=\sum_{x_\xi\in A} f_X(x_\xi).$$

(2) Αν η X είναι συνεχής, τότε $f_X=F'_X$ (στα σημεία που η F_X είναι παραγωγίσιμη), και αντίστροφα $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$. Επίσης $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt=1$. Γενικότερα, αν A είναι κάποιο σύνολο τιμών τής X τότε

$$P(X\in A)=\int_A f_X(t)\,dt.$$

Συνήθως το A είναι εδώ διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

Παρατηρούμε ότι αν η X είναι συνεχής τότε η πιθανότητα να πάρει οποιαδήποτε διακριτή τιμή είναι μηδέν διότι

$$P(X=x)=\lim_n P(x-1/n<X\le x)=\lim_n \int_{x-1/n}^{x} f_X(t)\,dt=0.$$

Δηλαδή η πιθανότητα να επιλέξουμε έναν άνθρωπο και να έχει ύψος, ας πούμε, 1.72 είναι μηδέν. Θετική είναι η πιθανότητα το ύψος του να βρίσκεται, ας πούμε, στο διάστημα $[1.71,1.73]$.

Όταν λέμε ότι προσδιορίζουμε την **κατανομή** μιας τυχαίας μεταβλητής, εννοούμε ότι βρίσκουμε τη συνάρτηση πιθανότητας ή πυκνότητας. Βρίσκουμε δηλαδή τον πιθανοθεωρητικό νόμο που τη διέπει. Έτσι αν X είναι κάποια τυχαία μεταβλητή και g μια συνάρτηση, τότε έχουμε μια καινούργια τυχαία μεταβλητή $Y=g(X)$. Για να βρούμε την κατανομή τής Y είτε προσπαθούμε να υπολογίσουμε απ' ευθείας την πιθανότητα $P(Y=y)$ αν η X είναι διακριτή, ή βρίσκουμε πρώτα την $F_Y(y)=P(Y\le y)$ και μετά παραγωγίζουμε αν η X είναι συνεχής.

Παραδείγματα.

(1) Ρίχνουμε ένα ζάρι. Αν X είναι η ένδειξη, βρείτε την κατανομή τής X^2. Η X παίρνει τις τιμές $\{1,2,3,4,5,6\}$ με πιθανότητα $1/6$. Άρα η X^2 παίρνει τις τιμές $\{1,4,9,16,25,36\}$ με πιθανότητα $1/6$.

(2) Η X είναι συνεχής στο $[0,1]$ με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)=1$. Βρείτε την κατανομή τής X^2. Έχουμε για $0\le y\le 1$

$$F_Y(y)=P(X^2\le y)=P(X\le\sqrt{y})=\int_0^{\sqrt{y}} dt.$$

Άρα

$$f_Y(y)=F'_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

6. Ροπές Τυχαίας Μεταβλητής

Αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή τότε ονομάζουμε **μέση τιμή** τής X την ποσότητα

(1) $\sum_x x f_X(x)$, αν η X είναι διακριτή,

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx$, αν η X είναι συνεχής,

δεδομένου ότι η σειρά ή το ολοκληρωμα συγκλίνουν απόλυτα. Η μέση τιμή, αν υπάρχει, συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X)$ ή με μ_X.

Θεώρημα. *Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και g μια συνάρτηση τότε*

(1) $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x) f_X(x)$, *αν η X είναι διακριτή.*

(2) $\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$, *αν η X είναι συνεχής.*

(Δεδομένου ότι η σειρά ή το ολοκλήρωμα συγκλίνουν απόλυτα.)

Απόδειξη. Θέτουμε $Y = g(X)$.

(1) Αν η X παίρνει τις τιμές x_j με πιθανότητα $p_j = f_X(x_j)$ τότε η Y παίρνει τις τιμές $y_j = g(x_j)$ με την ίδια πιθανότητα. Έτσι

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j) = \sum_j g(x_j) p_j = \sum_j g(x_j) f_X(x_j).$$

(2) Από την άσκηση 52 έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \int_0^{+\infty} (1 - F_Y(y))\, dy - \int_{-\infty}^0 F_Y(y)\, dy = \int_0^{+\infty} P(Y > y)\, dy - \int_{-\infty}^0 P(Y \le y)\, dy \\ &= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Έχουμε

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \int_{\{x : g(x) > y\}} f_X(x)\, dx dy = \int_0^{+\infty} f_X(x) \int_0^{g(x)} dy dx = \int_0^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx.$$

Ομοίως

$$I_2 = \int_{-\infty}^0 g(x) f_X(x)\, dx.$$

□

Η ποσότητα $\mathbb{E}(X^k)$, αν υπάρχει, ονομάζεται **ροπή k τάξης**, και η $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ **διασπορά** ή **κύμανση** και συμβολίζεται με $\mathrm{Var}(X)$ ή με σ_X^2. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x)\, dx = \mathbb{E}(X^2) - \mu_X^2 = \mathrm{Var}(X).$$

Έτσι η διασπορά είναι πάντα μη-αρνητική.

Παράδειγμα. Αν $f_X(x) = 1$, $x \in [0,1]$, τότε $\mathbb{E}(X^n) = \int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}$.

7. Ροπογεννήτριες

Αν η είναι μια τυχαία μεταβλητή, θέτουμε $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$, για εκείνα τα t για τα οποία η μέση τιμή υπάρχει. Η M_X ονμάζεται **ροπογεννήτρια** τής X διότι αν αναπτύξουμε το εκθετικό σε δυναμοσειρά παίρνουμε

$$M_X(t) = \sum_n \frac{\mathbb{E}(X^n)}{n!} t^n.$$

Από τη μοναδικότητα των συντελεστών Taylor έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(X^n) = \left.\frac{d^n M_X}{dt^n}\right|_{t=0}.$$

Θεώρημα. *Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν την ίδια ροπογεννήτρια τότε έχουν την ίδια κατανομή.*

Απόδειξη. (Στην περίπτωση X, Y συνεχείς με συνεχή πυκνότητα και $a \leq X, Y \leq b$.) Από την υπόθεση προκύπτει ότι $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$, άρα $\int_a^b t^n(f_X(t) - f_Y(t))\,dt = 0$ για κάθε n. Θέτουμε $g = f_X - f_Y$. Τότε $\int_a^b Pg = 0$ για κάθε πολυώνυμο P. Έστω P_j μια ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην g (θεώρημα Weierstrass). Τότε

$$\int_a^b g^2 = \int_a^b g(g - P_j) \to 0.$$

Άρα $g = 0$. ◻

Παράδειγμα. Αν $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$, τότε $M_X(t) = \int_0^{+\infty} e^{tx}e^{-x}dx = \frac{1}{1-t}$, $t < 1$. Αναπτύσσοντας την $\frac{1}{1-t}$ σε σειρά Taylor με κέντρο το μηδέν παίρνουμε

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n.$$

Άρα $\mathbb{E}(X^n) = n!$.

8. Παραδείγματα Διακριτών Κατανομών

Ομοιόμορφη διακριτή

$$\Omega = \{x_1, \dots, x_n\},\ f_X(x_k) = \frac{1}{n},$$

για κάθε k. Όλα τα σημεία τού δειγματοχώρου έχουν την ίδια πιθανότητα.

Διωνυμική

$$\Omega = \{0, 1, \dots, n\},\ f_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Συμβολίζεται με $\mathcal{B}(n, p)$ και ισούται με τον αριθμό των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες **δοκιμές Bernoulli** με πιθανότητα επιτυχίας p (δοκιμή Bernoulli είναι οποιοδήποτε πείραμα τύχης με δυο δυνατές εκβάσεις: επιτυχία και αποτυχία).

Παράδειγμα. Ρίχνουμε ένα ζάρι 1000 φορές. Η πιθανότητα να φέρουμε 600 φορές το 3 είναι

$$\binom{1000}{600}\left(\frac{1}{6}\right)^{600}\left(\frac{5}{6}\right)^{400}.$$

Γεωμετρική

$$\Omega = \mathbb{N},\ f_X(n) = (1-p)^{n-1} p.$$

Ισούται με τον αριθμό των δοκιμών μέχρι την πρώτη επιτυχία σε μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p.

Παράδειγμα. Η πιθανότητα να ρίξουμε ένα ζάρι 1000 φορές μέχρι να φέρουμε 3 είναι $\left(\frac{5}{6}\right)^{999}\frac{1}{6}$.

Poisson

$$\Omega = \{0, 1, 2, \dots\},\ f_X(n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!},$$

$\lambda > 0$ σταθερά. Συνήθως ισούται με το πλήθος "σπάνιων" γεγονότων που συμβαίνουν ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Ο τύπος προκύπτει ως εξής. Ας πούμε ότι η X_n είναι διωνυμική $\mathcal{B}(n, p_n)$, όπου $p_n = \lambda/n$. Έτσι για μεγάλο αριθμό δοκιμών η πιθανότητα επιτυχίας είναι μικρή ("σπάνιο" γεγονός). Τότε η πιθανότητα k επιτυχιών είναι

$$P(X_n = k) = \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{(n-\lambda)^k}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

καθώς ο αριθμός των δοκιμών n τείνει στο άπειρο. Δηλαδή φανταζόμαστε ότι ο... Θεός ρίχνει μέχρι το τέλος τού σύμπαντος ένα πειραγμένο νόμισμα όπου το Κ έχει πολύ μικρή πιθανότητα εμφάνισης. Όταν φέρνει Κ γίνεται ένας σεισμός. Το λ είναι μια παράμετρος που εκφράζει τη συχνότητα των σεισμών. Η Poisson συμβολίζεται με $\mathcal{P}(\lambda)$.

Αρνητική διωνυμική

$$\Omega = \{n, n+1, \dots\},\ f_X(k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n},$$

$n \in \mathbb{N}$ σταθερά. Ισούται με το πλήθος των δοκιμών μέχρι να έχουμε n επιτυχίες σε μια ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p. Συμβολίζεται με $\mathcal{AB}(n, p)$. Για $n = 1$ παίρνουμε τη γεωμετρική.

Υπεργεωμετρική

$$\Omega = \{0, 1, \dots, k\},\ f_X(x) = \frac{\binom{n}{x}\binom{m}{k-x}}{\binom{n+m}{k}},$$

n, m, k σταθερές με $k \le \min\{n, m\}$. Ισούται με το πλήθος των άσπρων σφαιριδίων σ' ένα δείγμα μεγέθους k από ένα δοχείο που περιέχει n άσπρα και m μαύρα σφαιρίδια.

9. Παραδείγματα Συνεχών Κατανομών

Ομοιόμορφη

$$\Omega = [a,b],\ f_X(x) = \frac{1}{b-a},$$

$a < b$ σταθερές. Συμβολίζεται με $\mathcal{U}(a,b)$.

Εκθετική

$$\Omega = [0,+\infty),\ f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},$$

$\lambda > 0$ σταθερά.

Γάμμα

$$\Omega = [0,+\infty), f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x},$$

$a, \lambda > 0$ σταθερές, Γ η συνάρτηση γάμμα. Για $a = 1$ παίρνουμε την εκθετική. Συμβολίζεται με $\Gamma(a,\lambda)$ ή $\Gamma(a, 1/\lambda)$.

Κανονική

$$\Omega = \mathbb{R},\ f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},$$

$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ σταθερές. Συμβολίζεται με $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Το σύμβολο ~ σημαίνει "ακολουθεί την κατανομή...". Η $\mathcal{N}(0,1)$ λέγεται τυποποιημένη κανονική και η συνάρτηση κατανομής της συμβολίζεται με Φ.

Θεώρημα (Ανισότητα Chebychev). *Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει μέση τιμή μ και διασπορα σ^2, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε*

$$P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Απόδειξη. (X συνεχής.)

$$\varepsilon^2 P(|X-\mu| > \varepsilon) \leq \int_{|x-\mu|>\varepsilon} |x-\mu|^2 f_X(x)\,dx \leq \sigma^2.$$

□

Θεώρημα (Ανισότητα Jensen). *Αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή και η g μια κυρτή συνάρτηση τότε*

$$g(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(g(X)).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\mu = \mathbb{E}(X)$ και

$$\beta = \sup_{s<\mu} \frac{g(\mu)-g(s)}{\mu - s}.$$

Τότε

$$g(x) - g(\mu) - \beta(x-\mu) \geq 0,$$

για κάθε x λόγω κυρτότητας. Πολλαπλασιάζουμε με την πυκνότητα τής X (αντίστοιχα τη συνάρτηση πιθανότητας) και ολοκληρώνουμε ως προς x (αντίστοιχα αθροίζουμε). □

Η ανισότητα Jensen για $g(t) = t^2$ δίνει την ανισότητα Cauchy-Schwarz $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2)$, η οποία προκύπτει και από την γενικότερη Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |fg|\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f|^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2\right).$$

Μπορούμε να έχουμε μια γρήγορη απόδειξη παρατηρώντας ότι η ποσότητα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t|f(x)| - |g(x)|)^2\,dx,$$

είναι μη αρνητική για κάθε t. Άρα θεωρούμενη τριώνυμο τού t πρέπει να έχει αρνητική διακρίνουσα. Η συνθήκη αυτή είναι ακριβώς η ανισότητα Cauchy-Schwarz.

11. Τυχαία Διανύσματα

Ένα **τυχαίο διάνυσμα** ή **πολυδιάστατη τυχαία μεταβλητή** είναι μια n-άδα $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ τυχαίων μεταβλητών. Για απλότητα στο συμβολισμό θα περιοριστούμε στις 2-διάστατες μεταβλητές. Σε αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση ορίζουμε την **από κοινού συνάρτηση κατανομής**

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \,\&\, Y \leq y).$$

Η (X, Y) ονομάζεται

(1) **Διακριτή** αν υπάρχει μια μη-αρνητική συνάρτηση $f_{X,Y}$, η **συνάρτηση πιθανότητας** τής (X, Y), τέτοια ώστε

$$P(X = x \,\&\, Y = y) = f_{X,Y}(x, y)$$

για όλα τα (x, y) που είναι τιμές τής (X, Y). Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές παίρνουν θετικές τιμές σ' ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο διακριτό σύνολο. Γενικότερα

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} f_{X,Y}(x, y).$$

(2) **Συνεχής** αν υπάρχει μια μη-αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f_{X,Y}$, η **συνάρτηση πυκνότητας** τής (X, Y), τέτοια ώστε

$$P(X \leq x \,\&\, Y \leq y) = \iint\limits_{s\leq x \,\&\, t\leq y} f_{X,Y}(s, t)\, ds dt$$

για όλα τα (x, y) που είναι τιμές τής (X, Y). Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές παίρνουν θετικές τιμές σε σύνολα με μη-κενό εσωτερικό. Γενικότερα

$$P((X, Y) \in A) = \iint\limits_{A} f_{X,Y}(x, y)\, dx dy.$$

Δεδομένου τού ζευγαριού (X, Y) οι X και Y ονομάζονται **περιθώριες**. Ισχύει ότι

$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x, y), \;\; f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x, y),$$

αν η (X, Y) είναι διακριτή, και

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy, \;\; f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx,$$

αν η (X, Y) είναι συνεχής.

Σε αναλογία με τη μονοδιάστατη περίπτωση, αν η (X, Y) είναι συνεχής, τότε

$$f_{X,Y} = \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}.$$

Δυο τυχαίες μεταβλητές ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. Σε αναλογία με την περίπτωση των ενδεχομένων, η τυχαία μεταβλητή X **δεδομένου ότι η Y έχει πάρει την τιμή** y ορίζεται να έχει πυκνότητα

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}.$$

Ο τύπος ολικής πιθανότητας παίρνει τη μορφή

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y), & Y \text{ διακριτή} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\,dy, & Y \text{ συνεχής} \end{cases}.$$

Η μέση τιμή τής X δεδομένου ότι $Y = y$ ισούται (όταν υπάρχει) με

$$\mathbb{E}(X|Y=y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_x x f_{X|Y}(x|y), & X \text{ διακριτή} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y))\,dx, & X \text{ συνεχής} \end{cases}$$

και είναι συνάρτηση τού y. Ας την ονομάσουμε $g(y)$. Επομένως έχει νόημα να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $g(Y)$ η οποία ονομάζεται **δεσμευμένη μέση τιμή** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}(X|Y)$.

Θεώρημα. $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X)$.

Απόδειξη. (Συνεχής περίπτωση.)

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(X|Y=y)f_Y(y)\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\,dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \mathbb{E}(X).$$

□

Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, αν η $g(X,Y)$ είναι μια συνάρτηση τού τυχαίου ζευγαριού (X,Y), τότε

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)f_{X,Y}(x,y)\,dxdy,$$

δεδομένου ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα. Αυτό δείχνει και τη γραμμικότητα τής μέσης τιμής:

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Παρατηρούμε ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)),$$

για κάθε συναρτήσεις g και h, ώστε οι παραπάνω μέσες τιμές να υπάρχουν. Έτσι αν οι $X_1,\ldots,X_n$ είναι ανεξάρτητες και οι διασπορές υπάρχουν, τότε

$$\mathrm{Var}\left(\sum_k X_k\right) = E\left(\left(\sum_k X_k\right)^2\right) - E\left(\sum_k X_k\right)^2 = \sum_{i,j}\mathbb{E}(X_jX_j) - \sum_{i,j}\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = \sum_k \mathrm{Var}(X_k).$$

Ένα μέτρο τού βαθμού στον οποίο δυο μεταβλητές είναι συσχετισμένες αποτελεί η **συνδιακύμανση**

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),$$

και ο **συντελεστής συσχέτισης**

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε ότι $\mathbb{E}(XY)^2 \le \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2)$. Επομένως

$$\mathrm{Cov}(X,Y)^2 = \mathbb{E}((X-\mu_X)(Y-\mu_Y))^2 \le \sigma_X^2\sigma_Y^2.$$

Έτσι σε απόλυτη τιμή ο συντελεστής συσχέτισης είναι μικρότερος από ή ίσος με 1.

Τέλος όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση, η ροπογεννήτρια ενός ζευγαριού (X,Y) ορίζεται

$$M_{X,Y}(s,t) = E\left(e^{sX+tY}\right).$$

Παρατηρούμε ότι αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες τότε

$$M_{X,Y}(s,t) = M_X(s)M_Y(t).$$

13. Συναρτήσεις Διανυσματικών Τυχαίων Μεταβλητών

Έστω (X, Y) ένα τυχαίο διάνυσμα και $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (z, w)$, μια αμφιδιαφόριση. Θα υπολογίσουμε την πυκνότητα τής $(Z, W) = T(X, Y)$. Θέτοντας $A_{z,w} = \{(s, t) : s \le z \,\&\, t \le w\}$ έχουμε

$$F_{Z,W}(z, w) = P(Z \le z \,\&\, W \le w) = P((X, Y) \in T^{-1}(A_{z,w})) = \iint\limits_{T^{-1}(A_{z,w})} f_{X,Y}$$

$$= \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{w} f_{X,Y} \circ T^{-1}(s, t)|J_{T^{-1}}(s, t)|\, dt\, ds,$$

όπου $J_{T^{-1}}$ είναι η Jacobian τής αντίστροφης τής T. Παραγωγίζοντας ως προς z και w παίρνουμε

$$f_{Z,W}(z, w) = f_{X,Y}(x(z, w), y(z, w))\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix}\right|.$$

Παράδειγμα. Αν οι X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές, βρείτε την κατανομή τού αθροίσματος $Z = X+Y$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $(X, Y) \mapsto (X, Z) = (X, X + Y)$. Τότε

$$f_{X,Z}(x, z) = f_{X,Y}(x, z - x).$$

Άρα

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, z - x)\, dx.$$

Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\, dx.$$

Εναλλακτικά

$$F_Z(z) = P(X + Y \le z) = \iint\limits_{x+y\le z} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x, y)\, dy\, dx,$$

και παραγωγίζουμε ως προς z. Ομοίως η πυκνότητα τού γινομένου $W = XY$ είναι

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, w/x)\, \frac{dx}{|x|}.$$

Σε κάποιες περιπτώσεις, ο προσδιορισμός τής κατανομής αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών διευκολύνεται με τη χρήση ροπογεννητριών. Για παράδειγμα αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, τότε

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Αν τώρα $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ τότε $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Άρα

$$M_X(t) = E\left(e^{t(\sigma Z+\mu)}\right) = e^{t\mu}e^{t^2\sigma^2/2}.$$

Έτσι αν $X_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$, $j = 1, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τότε για το άθροισμα $Z = \sum_j X_j$ ισχύει

$$M_Z(t) = \prod_j M_{X_j}(t) = \exp\left(t\sum_j \mu_j\right)\exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_j \sigma_j^2\right).$$

Επομένως $Z \sim \mathcal{N}(\sum_j \mu_j, \sum_j \sigma_j^2)$.

14. Παραδείγματα Πολυδιάστατων Κατανομών

(1) (Πολυωνυμική.) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία από n ανεξάρτητα πειράματα. Κάθε πείραμα έχει k δυνατές εκβάσεις με πιθανότητα πραγματοποίησης p_j η κάθε μια. Αν X_j είναι συνολικός αριθμός των j-εκβάσεων μετά τα n πειράματα, τότε

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \binom{n}{x_1,x_2,\ldots,x_k} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k}.$$

(2) (Πολυδιάστατη κανονική.)

$$f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n|\boldsymbol{\Sigma}|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^t\right),$$

όπου $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ το διάνυσμα των μέσων τιμών και $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ο συμμετρικός, θετικά ορισμένος πίνακας των συνδιακυμάνσεων.

15. Οριακά Θεωρήματα

Μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n λέμε ότι **συγκλίνει κατά πιθανότητα** στην τυχαία μεταβλητή X αν για κάθε $c > 0$

$$P(|X_n - X| > c) \to 0.$$

Λέμε ότι **συγκλίνει κατά κατανομή** στη X αν

$$F_{X_n}(x) \to F_X(x),$$

για κάθε x. Θα χρειαστούμε τον παρακάτω συμβολισμό

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_n, \quad \overline{X_n} = \frac{1}{n} S_n.$$

Θεώρημα (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών)**.** *Αν X_n είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλήτων με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2, τότε η $\overline{X_n}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στη μέση τιμή μ.*

Απόδειξη. Από την ανισότητα Chebychev έχουμε

$$P(|\overline{X_n} - \mu| > c) \le \frac{\mathrm{Var}(\overline{X_n})}{c^2} = \frac{\sigma^2}{c^2 n} \to 0.$$

□

Θεώρημα (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα)**.** *Με τις ίδιες υποθέσεις όπως στο προηγούμενο θεώρημα, η ακολουθία*

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}}$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην $\mathcal{N}(0, 1)$.

16. Ασκήσεις

Άσκηση 1. Βρείτε τα σύνολα $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και $B = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$, όταν

(1) $A_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}$.
(2) $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}\right\}, n \in \mathbb{N}$

Λύση.

(1) $A = (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ διότι το δεξί άκρο τού A_{n+1} είναι μεγαλύτερο από το αριστερό άκρο τού A_n για $n \geq 2$, $B = \emptyset$ διότι δεν υπάρχει αριθμός x με $\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$ για κάθε n.
(2) Το A είναι ο μοναδιαίος δίσκος, το B είναι το $\{(0,0)\}$.

□

Άσκηση 2. Έστω A_n, B_n ακολουθίες υποσυνόλων ενός συνόλου X. Αποδείξτε ότι

- $(\liminf A_n) \cap (\limsup B_n) \subset (\limsup A_n) \cap (\limsup B_n)$.
- $(\liminf A_n) \cap (\limsup B_n) \subset \limsup(A_n \cap B_n)$.

Εξετάστε αν ισχύει πάντοτε η σχέση

$$(\limsup A_n) \cap (\limsup B_n) \subset \limsup(A_n \cap B_n).$$

Λύση. Ο πρώτος εγκλεισμός είναι προφανής διότι $\liminf A_n \subset \limsup A_n$. Για τον δεύτερο, ένα στοιχείο στο αριστερά μέλος ανήκει τελικά σε όλα τα A_n και σε άπειρα B_n, άρα ανήκει σε άπειρα $A_n \cap B_n$, δηλαδή στο δεξιά μέλος. Ο τρίτος εγκλεισμός δεν ισχύει όπως φαίνεται από τις ακολουθίες $A_n = (0,1)$ αν n άρτιος, $A_n = (1,2)$ αν n περιττός, και $B_n = (1,2)$ αν n άρτιος, $B_n = (0,1)$ αν n περιττός. □

Άσκηση 3. Υπολογίστε το $\limsup A_n$ και το $\liminf A_n$ στις παρακάτω περιπτώσεις

(1) Αν $A_n \cap A_m = \emptyset$, για κάθε $n \neq m$.
(2) Αν $A_{2n} = \left[-1, 2 + \frac{1}{2n}\right), A_{2n+1} = \left(-2 - \frac{1}{2n+1}, 1\right]$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

Λύση.

(1) $\liminf A_n = \limsup A_n = \emptyset$.
(2) $\liminf A_n = [-1, 1]$, $\limsup A_n = [-2, 2]$.

□

Άσκηση 4. Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι υποσύνολα κάποιου συνόλου, δείξτε ότι

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \triangle A_{k+1})\right),$$

όπου $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά.

Λύση. Το $\supset$ είναι προφανές. Για το $\subset$, αν κάποιο x ανήκει στην ένωση των A_k αλλά όχι στην τομή τους, τότε υπάρχουν δυο διαδοχικά i και j ώστε $x \in A_i$ και $x \notin A_j$. □

Άσκηση 5. Αν Ω είναι κάποιο σύνολο και $A \subset \Omega$, τότε η δείκτρια συνάρτηση τού A συμβολίζεται με $\mathbb{1}_A$ και ορίζεται ως εξής

$$\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}, \qquad \mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in A \\ \\ 0, & \text{αν } x \notin A \end{cases}.$$

Αν $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ εκφράστε την δείκτρια τής ένωσης $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ μέσω των $\mathbb{1}_{A_k}$.

Λύση. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $A, B \subset \Omega$, έχουμε $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, και αν επιπλέον τα A, B είναι ξένα τότε $\mathbb{1}_{A \cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B$. Τέλος $\mathbb{1}_{A^\complement} = 1 - \mathbb{1}_A$. Τώρα, κάθε $x \in \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ανήκει σε κάποια A_k (μπορεί σε όλα) και δεν ανήκει στα υπόλοιπα. Επομένως αν θέσουμε $S_k^0 = A_k$ και $S_k^1 = A_k^\complement$, τότε η ένωση των A_k είναι η ένωση όλων των συνόλων τής μορφής $S_1^{j_1} \cap S_2^{j_2} \cap \cdots \cap S_n^{j_n}$ όπου τα j_k είναι 0 ή 1 και δεν είναι όλα 1. Για παράδειγμα, η ένωση δυο συνόλων $A_1 \cup A_2$ είναι ίση με την ένωση των $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2^\complement$ και $A_1^\complement \cap A_2$. Έτσι αν θέσουμε $f_k^0 = \mathbb{1}_{A_k}$ και $f_k^1 = 1 - \mathbb{1}_{A_k}$ τότε

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n \in \{0,1\} \\ (j_1,\ldots,j_n) \neq (1,\ldots,1)}} f_1^{j_1} \cdots f_n^{j_n}.$$

Εναλλακτικά,

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = 1 - \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_k}).$$

$\square$

Άσκηση 6. Δείξτε ότι αν τα A, A_n είναι υποσύνολα κάποιου συνόλου Ω τότε

$$A \setminus \limsup A_n = \liminf (A \setminus A_n), \quad \text{και} \quad A \setminus \liminf A_n = \limsup (A \setminus A_n).$$

Λύση. Και οι δυο σχέσεις είναι άμεση συνέπεια των κανόνων De Morgan: Το συμπλήρωμα τής ένωσης είναι η τομή των συμπληρωμάτων και το συμπλήρωμα τής τομής είναι η ένωση των συμπληρωμάτων. $\square$

Άσκηση 7. Έστω $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ το αποτέλεσμα τής ρίψης ενός ("τίμιου") ζαριού. Τοποθετούμε δυο ίσα βάρη στις πλευρές "5" και "6" έτσι ώστε

$$P(X = 5 \text{ ή } X = 6) = 3P(X = 1 \text{ ή } X = 2 \text{ ή } X = 3 \text{ ή } X = 4).$$

Βρείτε την πιθανότητα $P(X = j)$ για $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Λύση. Θέτουμε

$$p = P(X = 5) = P(X = 6), \ q = P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4).$$

Τότε $2p = 12q$ και $2p + 4q = 1$, άρα $p = \cdots, q = \cdots$. $\square$

Άσκηση 8. Ένας συνεταιρισμός με n μέλη ($n \geq 3$) έχει 3 υποψήφιους προέδρους. Για να εκλεγεί ένας υποψήφιος χρειάζεται τουλάχιστο $n - 2$ ψήφους. Ποια είναι η πιθανότητα κανείς να μην εκλεγεί;

Λύση. Αν A, B, C είναι οι ψήφοι που πήραν οι τρεις υποψήφιοι, τότε θεωρώντας την ψηφοφορία μια ακολουθία n ανεξάρτητων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $1/3$, έχουμε

$$P(A = k) = P(B = k) = P(C = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$1 - P(A \geq n - 2) - P(B \geq n - 2) - P(C \geq n - 2).$$

$\square$

Άσκηση 9. Δεδομένου ότι $P(A) = P(B) = 3/4$, ποια είναι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή τής πιθανότητας $P(A \cap B)$;

Λύση. Προφανώς $P(A \cap B) \leq 3/4$ και από τη σχέση $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ παίρνουμε $P(A \cap B) \geq 1/2$. $\square$

Άσκηση 10. Δίνεται ότι $P(A) = 1/2$, $P(B) = 5/12$ και $P((A \cup B)^{\complement}) = 1/3$. Υπολογίστε τις πιθανότητες

$$P(A \cap B), \ P(A \cap B^{\complement}), \ P(A^{\complement} \cap B), \ P(A^{\complement} \cap B^{\complement}).$$

Λύση.

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B).$$

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A^{\complement} \cap B^{\complement}) = P((A \cup B)^{\complement}).$$

$\square$

Άσκηση 11. Ρίχνουμε 3 φορές ένα "τίμιο" ζάρι, παίρνουμε τους αριθμούς a, b και c και θεωρούμε το σύστημα

$$\begin{aligned} x - 2y &= 3 \\ ax - by &= c. \end{aligned}$$

Ποια η πιθανότητα το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις; να μην έχει λύση; να έχει μοναδική λύση; να έχει μοναδική λύση την $(3, 0)$;

Λύση. Όλες οι δυνατές εκβάσεις για τα (a, b, c) είναι $6^3 = 216$. Η ορίζουσα είναι μηδέν όταν $b = 2a$. Αυτό μπορεί να γίνει με 18 τρόπους. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις όταν η ορίζουσα είναι μηδέν και $c = 3a$. Αυτό μπορεί να γίνει με 2 τρόπους, άρα με πιθανότητα $2/216 = 1/108$. Το σύστημα δεν έχει λύση όταν η ορίζουσα είναι μηδέν και $c \neq 3a$. Αυτό μπορεί να γίνει με $18 - 2 = 16$ τρόπους, άρα με πιθανότητα $16/216 = 2/27$. Το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν η ορίζουσα είναι μη μηδενική. Αυτό μπορεί να γίνει με $216 - 18 = 198$ τρόπους, άρα με πιθανότητα $198/216 = 99/108$. Για να έχει μοναδική λύση την $(3, 0)$, πρέπει $c = 3a = (3 + 3b)/2$, δηλαδή $(a, b, c) = (1, 1, 3)$ ή $(a, b, c) = (2, 3, 6)$, άρα με πιθανότητα $2/216 = 1/108$. □

Άσκηση 12. Έστω A_n μια ακολουθία ενδεχομένων σε κάποιο χώρο πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι η πιθανότητα τού A_n είναι $\frac{1}{2^n}$ για κάθε n. Δείξτε ότι με πιθανότητα 1, κάθε στοιχείο τού δειγματοχώρου ανήκει το πολύ σε πεπερασμένο πλήθος από τα A_n.

Λύση.
$$P\left(\bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k\right) \leq \sum_{k\geq m} \frac{1}{2^k} \to 0$$
καθώς $m \to +\infty$. Δηλαδή $P(\limsup A_n) = 0$. □

Άσκηση 13. Θέτουμε $\Omega = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις πιθανότητας στο $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$. Κάντε το ίδιο αν το Ω είναι άπειρο αριθμήσιμο.

Λύση. Η συνάρτηση προσδιορίζεται από όλες τις ακολουθίες (πεπερασμένες ή άπειρες) μη αρνητικών αριθμών οι οποίες αθροίζουν στο 1. □

Άσκηση 14. Σε ένα δοχείο τοποθετούμε $n - 2$ άσπρες και 2 μαύρες μπάλες. Τραβάμε διαδοχικά μπάλες (και τις πετάμε έξω) μέχρι να τραβήξουμε μια μαύρη, οπότε κερδίζουμε. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός τραβηγμάτων έτσι ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι θα κερδίσουμε με πιθανότητα τουλάχιστο p; $(0 < p < 1.)$

Λύση. Για να κερδίσουμε στο j τράβηγμα πρέπει να τραβήξουμε άσπρη στα $j - 1$ πρώτα τραβήγματα και μαύρη στο j τράβηγμα. Αυτό γίνεται με πιθανότητα
$$p_j = \frac{(n-2)_{j-1}(2)_1}{(n)_j} = \frac{2(n-j)}{n(n-1)}.$$
Ζητάμε το ελάχιστο k ώστε
$$\sum_{j=1}^{k} p_j > p \Rightarrow \frac{(2n-1)k - k^2}{n(n-1)} > p \Rightarrow k = \left\lceil \frac{(2n-1) - \sqrt{(2n-1)^2 - 4pn(n-1)}}{2} \right\rceil.$$
□

Άσκηση 15. n εκλέκτορες ψηφίζουν k υποψήφιους. Ποια είναι η πιθανότητα ένας υποψήφιος να πάρει m ψήφους; $(0 \leq m \leq n.)$

Λύση. Το πλήθος των τρόπων που a όμοια σφαιρίδια (ψήφοι) μπορούν να κατανεμηθούν σε b διακεκριμένα κελιά (υποψήφιοι) είναι ίσος με τους συνδυασμούς $a + b - 1$ ανά $b - 1$. Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι
$$\frac{\binom{n-m+k-2}{k-2}}{\binom{n+k-1}{k-1}}.$$
Δείτε την άσκηση 8 για μια εναλλακτική προσέγγιση. □

Άσκηση 16. Αν A και B είναι δυο ενδεχόμενα σε κάποιο χώρο πιθανότητας, δείξτε ότι
$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Λύση. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $xy \leq \frac{(x+y)^2}{4}$ με $x = P(A)$ και $y = P(B)$ παίρνουμε
$$\begin{aligned} P(A)P(B) &\leq \frac{(P(A) + P(B))^2}{4} = \frac{(P(A \cup B) + P(A \cap B))^2}{4} \leq \frac{1}{4} + P(A \cap B)\frac{P(A \cap B) + 2P(A \cup B)}{4} \\ &\leq \frac{1}{4} + P(A \cap B). \end{aligned}$$
Άρα $P(A)P(B) - P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$. Η ανισότητα αυτή με το $B^{\complement}$ στη θέση τού B δίνει $P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \frac{1}{4}$. Επομένως έχουμε τη ζητούμενη ανισότητα. □

Άσκηση 17. Αν A_n είναι μια ακολουθία ενδεχομένων με $P(A_n) = 1$ τότε $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

Λύση. Η πιθανότητα τής τομής είναι 1 μείον την πιθανότητα τής ένωσης των συμπληρωμάτων, η οποία είναι μηδέν. □

Άσκηση 18. Δείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση πιθανότητας στο $(\mathbb{R}, \mathscr{B})$ η οποία να δίνει την ίδια πιθανότητα σε όλα τα διαστήματα μήκους 1.

Λύση. Αν υπήρχε, τότε η πιθανότητα μιας άπειρης αριθμήσιμης ξένης ένωσης διαστημάτων μήκους 1 θα ήταν άπειρη. □

Άσκηση 19. Έστω p, n φυσικοί αριθμοί. Κατανέμουμε στην τύχη p νομίσματα αριθμημένα από το 1 ως το p σε n κελιά αριθμημένα από το 1 ως το n. Τα κελιά έχουν απεριόριστη χωρητικότητα. Για $i = 1, \ldots, n$ σημειώνουμε με A_i το ενδεχόμενο το i-κελί να είναι κενό. Βρείτε την πιθανότητα τού ενδεχομένου $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ και χρησιμοποιώντας τον τύπο που βρήκατε, υπολογίστε το πλήθος των επί συναρτήσεων από ένα σύνολο με p στοιχεία σε ένα σύνολο με n στοιχεία.

Λύση. Τα p νομίσματα μπορούν να μπουν σε n κελιά με n^p τρόπους, και σε $n-1$ κελιά (1 κελί άδειο) με $(n-1)^p$ τρόπους, άρα

$$P(A_i) = \frac{(n-1)^p}{n^p}.$$

Γενικότερα η πιθανότητα k κελιά να είναι κενά είναι $\frac{(n-k)^p}{n^p}$. Επομένως

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{j_1 < \cdots < j_k} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left(\frac{n-k}{n}\right)^p.$$

Αν η κατανομή των νομισμάτων στα κελιά παριστάνει μια συνάρτηση, τότε επί συνάρτηση σημαίνει κανένα κελί άδειο. Άρα το ζητούμενο πλήθος είναι $n^p(1-p)$, όπου p η πιθανότητα που υπολογίστηκε παραπάνω. □

Άσκηση 20. Έστω n ένας περιττός αριθμός. Μια κάλπη περιέχει $2n$ αριθμημένα σφαιρίδια. Τραβάμε n σφαιρίδια χωρίς επανάθεση. Ποια είναι η πιθανότητα το άθροισμα των αριθμών των σφαιριδίων που τραβήξαμε να είναι γνήσια μεγαλύτερο από το άθροισμα των αριθμών των υπόλοιπων σφαιριδίων;

Λύση. Αν $s = 1 + 2 + \cdots + (2n)$ τότε το s είναι περιττός αριθμός. Έτσι αν a, a' είναι το άθροισμα των αριθμών που τραβήξαμε και το άθροισμα των αριθμών που έμειναν, έχουμε ότι $a + a' = s$, άρα αποκλείεται $a = a'$. Επίσης σε κάθε ζευγάρι (a, a') αντιστοιχεί το ζευγάρι (a', a). Συνεπώς η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{2}$. □

Άσκηση 21. Ρίχνουμε ένα ζάρι άπειρες φορές. Ποια είναι η πιθανότητα μια δεδομένη πλευρά να μην εμφανιστεί ποτέ;

Λύση. Η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\lim \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$. □

Άσκηση 22. Αν A και B είναι δυο ενδεχόμενα σε κάποιο χώρο πιθανότητας, με πιθανότητες $a > 0$ και $b > 0$ αντίστοιχα, δείξτε ότι αν $P(A|B) > a$ τότε $P(B|A) > b$, και εξετάστε αν είναι αληθής ή ψευδής η ανισότητα

$$P(A|B) \geq \frac{a+b-1}{b}.$$

Λύση. Αν $P(A|B) > a$ τότε $P(A \cap B) > ab$, άρα $P(B|A) = P(A \cap B)/a > b$. Επίσης η ανισότητα που θέλουμε να εξετάσουμε είναι ισοδύναμη με την

$$1 \geq P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B),$$

η οποία είναι αληθής. □

Άσκηση 23. Η πιθανότητα να πετύχουμε ένα στόχο είναι p. Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός από σφαίρες που πρέπει να έχουμε μαζί μας ώστε να είμαστε βέβαιοι ότι θα πετύχουμε το στόχο με πιθανότητα α.

Λύση. Η πιθανότητα να πετύχουμε το στόχο στην n βολή είναι $(1-p)^{n-1}p$. Επομένως ζητάμε το ελάχιστο n τέτοιο ώστε $p_1 + p_2 + \cdots + p_n > \alpha$. □

Άσκηση 24. 4 ανεξάρτητες βολές ρίχνονται σε ένα στόχο. Η πιθανότητες να πετύχουν το στόχο είναι αντίστοιχα

$$p_1 = 0.1, \quad p_2 = 0.2, \quad p_3 = 0.3, \quad p_4 = 0.4.$$

Αν τρεις βολές πέτυχαν το στόχο, ποια είναι η πιθανότητα να ήταν οι τρεις πρώτες;

Λύση. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A_k = \text{Η } k \text{ βολή πέτυχε το στόχο.}$$
$$T = \text{Τρεις βολές πέτυχαν το στόχο.}$$

Παρατηρούμε ότι

$$T = (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^{\complement}) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^{\complement} \cap A_4) \cup (A_1 \cap A_2^{\complement} \cap A_3 \cap A_4) \cup (A_1^{\complement} \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Άρα

$$P(T) = p_1p_2p_3(1-p_4) + p_1p_2(1-p_3)p_4 + p_1(1-p_2)p_3p_4 + (1-p_1)p_2p_3p_4.$$

Συνεπώς

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3|T) = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^{\complement})}{P(T)}.$$

□

Άσκηση 25. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί p, q, r, s ώστε

$$P(A|B) = p, \quad P(A|B^{\complement}) = q, \quad P(B|A) = r, \quad P(B|A^{\complement}) = s.$$

Λύση. Θέτουμε $x = P(A)$ τότε

$$p = P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^{\complement})P(A^{\complement})} = \frac{rx}{rx + s(1-x)}.$$

$$q = P(A|B^{\complement}) = \frac{P(B^{\complement}|A)P(A)}{P(B^{\complement}|A)P(A) + P(B^{\complement}|A^{\complement})P(A^{\complement})} = \frac{(1-r)x}{(1-r)x + (1-s)(1-x)}.$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{p} - 1 = \frac{s(1-x)}{rx}, \quad \frac{1}{q} - 1 = \frac{(1-s)(1-x)}{(1-r)x}.$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{s} - 1\right) = \left(\frac{1}{q} - 1\right)\left(\frac{1}{r} - 1\right).$$

□

Άσκηση 26. Διαλέγουμε στην τύχη δυο φυσικούς μικρότερους ή ίσους τού 10. Ποια η πιθανότητα το άθροισμά τους να είναι 12;

Λύση. $\Omega = \{(n, m) : 1 \le n, m \le 10\}$ και ενδιαφερόμαστε για το ενδεχόμενο

$$A = \{(2, 10), (3, 9), (4, 8), \ldots, (9, 3), (10, 2)\}.$$
$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{100}.$$

□

Άσκηση 27. Μια κάλπη A_1 περιέχει λ_1 λευκά και μ_1 μαύρα σφαιρίδια. Μια κάλπη A_2 περιέχει λ_2 λευκά και μ_2 μαύρα σφαιρίδια. Παίρνουμε ένα σφαιρίδιο από την πρώτη και το βάζουμε στη δεύτερη και μετά παίρνουμε ένα από τη δεύτερη και το βάζουμε στην πρώτη. Τέλος ξαναπαίρνουμε ένα σφαιρίδιο από την πρώτη. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι μαύρο;

Λύση. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$B_j = \text{Το } j \text{ σφαιρίδιο είναι μαύρο} \quad W_j = \text{Το } j \text{ σφαιρίδιο είναι άσπρο,}$$

$j = 1, 2, 3$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned}
P(B_3) &= P(B_3|B_1B_2)P(B_1B_2) + P(B_3|W_1W_2)P(W_1W_2) + P(B_3|W_1B_2)P(W_1B_2) + P(B_3|B_1W_2)P(B_1W_2) \\
&= P(B_3|B_1B_2)P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_3|W_1W_2)P(W_2|W_1)P(W_1) \\
&+ P(B_3|W_1B_2)P(B_2|W_1)P(W_1) + P(B_3|B_1W_2)P(W_2|B_1)P(B_1) \\
&= \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}\frac{\mu_2+1}{\mu_2+\lambda_2+1}\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}\frac{\lambda_2+1}{\mu_2+\lambda_2+1}\frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} \\
&+ \frac{\mu_1+1}{\mu_1+\lambda_1}\frac{\mu_2}{\mu_2+\lambda_2+1}\frac{\lambda_1}{\mu_1+\lambda_1} + \frac{\mu_1-1}{\mu_1+\lambda_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2+\lambda_2+1}\frac{\mu_1}{\mu_1+\lambda_1}.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 28. Επιλέγουμε ένα φυσικό αριθμό n με πιθανότητα $1/2^n$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $y \in \{1, \ldots, n\}$ με πιθανότητα $1/n$. Ποια είναι η πιθανότητα ο y να είναι άρτιος;

Λύση. Αν X είναι ο πρώτος και Y ο δεύτερος αριθμός έχουμε από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(Y = n) = \sum_k P(Y = n|X = k)P(X = k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{2^k}.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\sum_n P(Y = 2n) = \sum_k \frac{1}{2^k}\frac{1}{k}\left[\frac{k}{2}\right] \simeq 0.225347.$$

□

Άσκηση 29. Ρίχνουμε ένα νόμισμα άπειρες φορές. Θέτουμε $e_j = 0$ αν στην j-ρίψη φέρουμε Κ, και $e_j = 1$ αν φέρουμε Γ. Αν

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{2^j},$$

δείξτε ότι η πιθανότητα το s_n να είναι μικρότερο από t $(0 \leq t \leq 1)$ τείνει στο t καθώς $n \to +\infty$.

Λύση. Αν $t = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{d_j}{2^j}$ είναι το δυαδικό ανάπτυγμα τού t, τότε το πλήθος των $D \in \{0, 1\}^n$ για τα οποία έχουμε

$$\sum_{j \leq n} \frac{D(j)}{2^j} \leq t$$

είναι

$$2^{n-1}D(1) + 2^{n-2}D(2) + \cdots + D(n).$$

□

Άσκηση 30. Από γνήσια κείμενα δυο αρχαίων συγγραφέων Α και Β βρέθηκε ότι η λέξη "και" αποτελεί το 10% των λέξεων τού κειμένου για τον Α, και το 9% για τον Β. Ένα νέο κείμενο που βρέθηκε αποδίδεται κατά 60% στον Α και 40% στον Β. Αν σε 9 τυχαίες λέξεις του νέου κειμένου βρέθηκε 1 "και", ποια είναι η πιθανότητα το κείμενο να είναι τού Α;

Λύση. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$A =$ Το κείμενο είναι τού Α.

$B =$ Το κείμενο είναι τού Β.

$T =$ Από τις τυχαίες 9 λέξεις η μια είναι "και".

$S =$ Η τυχούσα λέξη είναι "και".

Τα δεδομένα είναι

$$P(A) = 0.6, \quad P(B) = 0.4, \quad P(S|A) = 0.1, \quad P(S|B) = 0.09,$$

και θεωρώντας την επιλογή των 9 λέξεων μια ακολουθία δοκιμών Bernoulli με επιτυχία την επιλογή "και", έχουμε

$$P(T|A) = \binom{9}{1}P(S|A)(1 - P(S|A))^8, \quad P(T|B) = \binom{9}{1}P(S|B)(1 - P(S|B))^8.$$

Η ζητούμενη πιθανότητα από τον τύπο τού Bayes είναι

$$P(A|T) = \frac{P(T|A)P(A)}{P(T|A)P(A) + P(T|B)P(B)}.$$

□

Άσκηση 31. Θεωρούμε n κάλπες και υποθέτουμε ότι η k κάλπη περιέχει k άσπρες και $n-k$ μαύρες σφαίρες. Επιλέγουμε στην τύχη μια κάλπη και τραβάμε διαδοχικά και χωρίς επανάθεση δυο σφαίρες. Ποια η πιθανότητα να είναι και οι δυο άσπρες;

Λύση. θεωρούμε τα ενδεχόμενα

$$A = \text{Οι δυο σφαίρες είναι άσπρες.}$$
$$A_k = \text{Επιλέξαμε την } k \text{ κάλπη.}$$

Έχουμε $P(A_k) = 1/n$ και $P(A|A_k) = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$. Άρα από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|A_k)P(A_k) = \frac{1}{n^2(n-1)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1).$$

□

Άσκηση 32. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και επιλέγουμε ένα φυσικό μικρότερο ίσο του $2n$ με πιθανότητα ανάλογη τού λογαρίθμου του. Αν A_k είναι το ενδεχόμενο επιλογής τού k και B το ενδεχόμενο επιλογής άρτιου αριθμού, υπολογίστε τις πιθανότητες $P(A_k)$, $P(B)$ και $P(A_{2p}|B)$, όπου p φυσικός.

Λύση. Αν $P(A_k) = c \log k$ τότε πρέπει $\sum_{k=1}^{2n} P(A_k) = 1$, άρα $c = 1/\log((2n)!)$. Επίσης

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_{2k}) = \frac{n \log 2 + \log(n!)}{\log((2n)!)}, \quad P(A_{2p}|B) = \frac{P(A_{2p})}{P(B)}.$$

□

Άσκηση 33. Σε κάποιο χώρο πιθανότητας δείξτε ότι:

(1) Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα, τότε και τα συμπληρώματά τους είναι ανεξάρτητα. Επίσης δείξτε ότι

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - e^{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}.$$

(2) Αν $B_n, n = 1, 2, \ldots$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δυο γεγονότων και A ένα γεγονός ανεξάρτητο με κάθε B_n τότε το A είναι ανεξάρτητο και με την ένωση των B_n.

Υπόδειξη: Στο (1) μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ανισότητα $e^{-x} > 1 - x$.

Λύση.

(1) Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα, τότε

$$P(A^{\complement} \cap B^{\complement}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(A^{\complement})P(B^{\complement}).$$

Επαγωγικά, αν ισχύει για n το πλήθος ανεξάρτητα γεγονότα και τα $A_1, \ldots, A_{n+1}$ είναι ανεξάρτητα τότε για κάθε $\{j_1, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, n+1\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(A_{j_1}^{\complement} \cap \cdots \cap A_{j_k}^{\complement}) &= P((A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_{k-1}})^{\complement})(1 - P(A_{j_k})) \\ &= (1 - P(A_{j_1})) \cdots (1 - P(A_{j_{k-1}}))(1 - P(A_{j_k})) = P(A_{j_1}^{\complement}) \cdots P(A_{j_k}^{\complement}). \end{aligned}$$

Τώρα

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P(A_1^{\complement} \cap \cdots \cap A_n^{\complement}) = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1 - P(A_k)) \geq 1 - \prod_{k=1}^{n} e^{-P(A_k)} = 1 - e^{-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}.$$

(2)

$$P\left(\left(\bigcup_{k} B_k\right) \cap A\right) = \sum_{k} P(B_k \cap A) = P(A) \sum_{k} P(B_k) = P(A) P\left(\bigcup_{k} B_k\right).$$

□

Άσκηση 34. Αν A_n είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων γεγονότων σε κάποιο χώρο πιθανότητας έτσι ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)$ αποκλίνει, τότε $P(\limsup A_n) = 1$.

Λύση. Η προηγούμενη άσκηση μας δίνει ότι για κάθε $m \geq n$ έχουμε

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \geq 1 - e^{-\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}.$$

Παίρνοντας όριο καθώς $m \to +\infty$

$$P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k\right) = 1,$$

για κάθε n. Άρα $P(\limsup A_n) = 1$. □

Άσκηση 35. Έστω ότι η διακριτή τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c\binom{x-1}{k-1}, \quad x = k, k+1, \dots, n.$$

Υπολογίστε τη σταθερά c και τη συνάρτηση κατανομής τής X. Επίσης, αν μπορείτε, υπολογίστε την c με καθαρά συνδυαστικά επιχειρήματα (σκεφτείτε τι εκφράζει ο διωνυμικός συντελεστής).

Λύση.

$$\sum_{x=k}^{n}\binom{x-1}{k-1} = 1 + \sum_{x=k+1}^{n}\left\{\binom{x}{k} - \binom{x-1}{k}\right\} = \binom{n}{k}.$$

Άρα

$$f(x) = \frac{\binom{x-1}{k-1}}{\binom{n}{k}},\ F(x) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\sum_{j=k}^{x}\binom{j-1}{k-1} = \frac{\binom{x}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

□

Άσκηση 36. Έστω ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = ce^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}.$$

Να υπολογιστεί η c, η συνάρτηση κατανομής τής X και η πιθανότητα $P(-1 < X \leq 2)$.

Λύση.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2,$$

άρα $c = 1/2$, και

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|t|}dt = \frac{1}{2}\begin{cases} e^{x}, & x \leq 0 \\ 2 - e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}, \quad P(-1 < X \leq 2) = F(2) - F(-1) = \frac{1}{2}(2 - e^{-1} - e^{-2}).$$

□

Άσκηση 37. Έστω A, B δυο ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $P(A) = P(B) = p$. Βρείτε την κατανομή των παρακάτω τυχαίων μεταβλητών.

$$X = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B, \quad Y = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B, \quad Z = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B,$$

όπου $\mathbb{1}_S$ είναι η δείκτρια συνάρτηση τού συνόλου S.

Λύση.

$$f_X(x) = \begin{cases} P(A^{\complement} \cap B^{\complement}) = 1 - 2p + p^2, & x = 0 \\ P(A \setminus B) + P(B \setminus A) = 2p(1-p), & x = 1 \\ P(A \cap B) = p^2, & x = 2 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} P(A \cap B) + P((A \cup B)^{\complement}) = 1 - 2p + 2p^2, & y = 0 \\ P(A \setminus B) = p - p^2, & y = 1 \\ P(B \setminus A) = p - p^2, & y = -1 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \begin{cases} P((A \cap B)^{\complement}) = 1 - p^2, & z = 0 \\ P(A \cap B) = p^2, & z = 1 \end{cases}$$

□

Άσκηση 38. Αν $X : \Omega \to \{0, 1, 2, \dots\}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή τής οποίας η πυκνότητα ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$f(n) = \frac{4}{n}f(n-1), \quad n = 1, 2, \dots,$$

βρείτε την κατανομή τής X.

Λύση. Η αναδρομική σχέση δίνει $f(n) = \frac{4^n}{n!}f(0)$. Αφού πρέπει $\sum_n f(n) = 1$, έχουμε $f(0) = e^{-4}$, δηλαδή Poisson με παράμετρο 4. □

Άσκηση 39. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ c\sum_{k=1}^{[x]} \frac{\theta^k}{k}, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\theta \in (0,1)$ δοσμένη σταθερά και $[x]$ το ακέραιο μέρος τού x. Βρείτε τη c και τη συνάρτηση πυκνότητας τής X.

Λύση. Έχουμε $\lim_{x\to+\infty} F(x) = c\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k} = c\log\frac{1}{1-\theta}$, άρα $c = \left(\log\frac{1}{1-\theta}\right)^{-1}$. Η F είναι σταθερή σε κάθε διάστημα $(k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, άρα $f(x) = 0$ σε κάθε τέτοιο διάστημα. Έτσι για k φυσικό έχουμε

$$f(k) = F(k) - F(k-) = c\frac{\theta^k}{k}.$$

□

Άσκηση 40.

(1) Δώστε μια πιθανοθεωρητική απόδειξη τού τύπου

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)^k = \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=k} \binom{k}{j_1, j_2, \ldots, j_n} \lambda_1^{j_1}\lambda_2^{j_2}\cdots\lambda_n^{j_n},$$

όπου τα λ_j είναι θετικά.

(2) Ο αριθμός των απωλειών την j ημέρα ενός πολέμου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ_j. Χρησιμοποιώντας το (1) βρείτε την πιθανότητα σε n ημέρες να έχουμε k απώλειες.

Λύση.

(1) Θεωρούμε μια ακολουθία k ανεξάρτητων πειραμάτων, όπου κάθε πείραμα έχει n δυνατές εκβάσεις με πιθανότητα p_j η κάθε μια. Τότε η πιθανότητα να έχουμε j_1 εκβάσεις τύπου 1, j_2 τύπου 2,..., j_n τύπου n είναι ίση με

$$\binom{k}{j_1, \ldots, j_n} p_1^{j_1}\cdots p_n^{j_n}.$$

Αν αθροίσουμε ως προς όλα τα $j_1, \ldots, j_n$ με $j_1 + \cdots + j_n = k$ πρέπει να πάρουμε αναγκαστικά 1. Θέτοντας $p_j = \lambda_j/(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ παίρνουμε τον ζητούμενο τύπο.

(2) Η πιθανότητα να έχουμε j_1 απώλειες την πρώτη μέρα και j_2 τη δεύτερη,... και j_n τη n-οστή, είναι

$$e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{j_1}}{j_1!}\cdots e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^{j_n}}{j_n!}.$$

Αθροίζοντας ως προς όλα τα $j_1, \ldots, j_n$ με άθροισμα k παίρνουμε

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n=k} e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{j_1}}{j_1!}\cdots e^{-\lambda_n}\frac{\lambda_n^{j_n}}{j_n!} = e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}\frac{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)^k}{k!},$$

δηλαδή Poisson με παράμετρο $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

□

Άσκηση 41. Σε μια γραμμή παραγωγής, η πιθανότητα παραγωγής ενός ελαττωματικού προϊόντος είναι p. Τα προϊόντα τοποθετούνται σε κουτιά με n μονάδες ανά κουτί και τα κουτιά σε χαρτόνια με k κουτιά ανά χαρτόνι. Να βρείτε την πιθανότητα ένα κουτί να περιέχει x ελαττωματικά προϊόντα, και την πιθανότητα ένα χαρτόνι να έχει y κουτιά τα οποία να περιέχουν μια τουλάχιστο ελαττωματική μονάδα.

Λύση. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε $\mathscr{B}(n,p)$. Στη δεύτερη έχουμε $\mathscr{B}(k, 1-(1-p)^n)$. □

Άσκηση 42. Επιλέγουμε τυχαία δυο φυσικούς X και Y με $P[X = n] = P[Y = n] = \frac{1}{2^n}$. Βρείτε την πιθανότητα ο X να διαιρεί τον Y.

Λύση. Αν $\Omega = \{(n,m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ θέλουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{(n,kn) : k, n \in \mathbb{N}\}$. Δηλαδή

$$\sum_{k,n} \frac{1}{2^n}\frac{1}{2^{kn}} = \sum_n \frac{1}{2^n(2^n-1)} \simeq 0.606695.$$

□

Άσκηση 43. Τοποθετούμε n αριθμημένα σφαιρίδια σε n αριθμημένα κελιά. Αν το j σφαιρίδιο τοποθετηθεί στο j κελί λέμε ότι έχουμε ένα ταίριασμα. Αν X είναι το πλήθος των ταιριασμάτων, βρείτε τη συνάρτηση πιθανότητας τής τυχαίας μεταβλητής X.

Λύση. Αν $D_{n,k}$ είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να έχουμε k ταιριάσματα όταν βάζουμε n σφαιρίδια σε n κελιά, τότε

$$D_{n,k} = \binom{n}{k} D_{n-k,0}.$$

Επίσης, αν $A_{n,k}$ είναι το σύνολο των τρόπων που μπορούμε να έχουμε ταίριασμα στο k κελί, όταν βάζουμε n σφαιρίδια σε n κελιά, τότε $|A_{n,k}| = (n-1)!$ και γενικότερα $|(A_{n,j_1} \cap \cdots \cap A_{n,j_m})| = (n-m)!$. Έτσι

$$D_{n-k,0} = (n-k)! - |A_{n-k,1} \cup \cdots \cup A_{n-k,n-k}| = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} (n-k-j)!.$$

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση πιθανότητας είναι

$$f_X(k) = P(X = k) = \frac{D_{n,k}}{n!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.$$

□

Άσκηση 44. Έστω ότι $X \sim \mathscr{B}(n = 8, p = 3/4)$. Αν $p_i = P(X = i)$, δείξτε ότι

$$p_i = \frac{3(9-i)}{i} p_{i-1}, \; i = 1, \ldots, 8.$$

Υπολογίστε στη συνέχεια την $P(X \geq 7)$ και βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή τού k έτσι ώστε $P(X \leq k) \leq 0.01$.

Λύση.

$$\frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{\binom{8}{i}(3/4)^i (1/4)^{8-i}}{\binom{8}{i-1}(3/4)^{i-1}(1/4)^{9-i}} = \frac{3(9-i)}{i}.$$

$P(X \geq 7) = p_7 + p_8 = 0.367081$. Τα $p_0, p_0 + p_1 \ldots, p_0 + p_1 + \cdots + p_7$ είναι

0.0000152588
0.00038147
0.00422668
0.027298
0.113815
0.321457
0.632919
0.899887

Άρα $k = 2$.

□

Άσκηση 45.

(1) Βρείτε τον πραγματικό αριθμό a έτσι ώστε η συνάρτηση

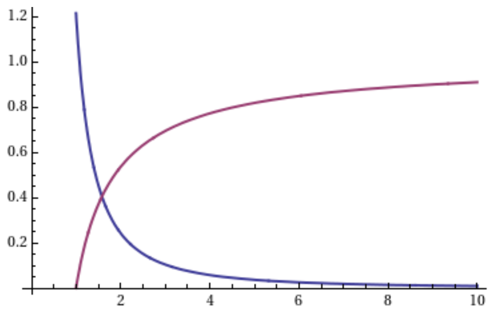
$$f(x) = \frac{a}{x^2 - \frac{1}{4}}, \; x > 1$$

να είναι συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X.

(2) Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής F τής X.

(3) Δώστε τα γραφήματα των f και F.

Λύση. $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = a \ln 3$, άρα $a = 1/\ln 3$. $F(x) = \int_1^x f(x)\,dx = 1 + a \ln \frac{x-1/2}{x+1/2}$.



□

Άσκηση 46. Έστω X μια συνεχής τυχαία μεταβλητή τής οποίας η πυκνότητα f είναι άρτια και συνεχής. Υποθέτουμε ότι η $Y = X^2$ ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο $\lambda > 0$. Βρείτε την f.

Λύση. Έχουμε $P(-|x| \le X \le |x|) = P(Y \le x^2)$, δηλαδή $F_X(|x|) - F_X(-|x|) = F_Y(x^2)$. Παραγωγίζοντας παίρνουμε $f_X(x) = \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$. □

Άσκηση 47. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$. Θέτουμε

$$Y = 4\left[\frac{X}{2}\right] - 2X + 1,$$

όπου $[\cdot]$ είναι το ακέραιο μέρος. Βρείτε την κατανομή τής Y και υπολογίστε τη μέση τιμή της και τη διασπορά της.

Λύση. Αν X άρτιος τότε $Y = 1$, αν X περιττός τότε $Y = -1$. Άρα

$$P(Y = 1) = P(X \text{ άρτιος}) = e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^4}{4!} + \cdots\right) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2}.$$

Ομοίως

$$P(Y = -1) = e^{-\lambda}\frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}.$$

$$\mathbb{E}(Y) = f_Y(1) - f_Y(-1) = e^{-2\lambda}.$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = f_Y(1) + f_Y(-1) = 1.$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 1 - e^{-4\lambda}.$$

□

Άσκηση 48. Θεωρούμε δυο κάλπες Α και Β. Αρχικά η Α έχει δυο σφαιρίδια 1 και 2, και η Β είναι κενή. Ρίχνουμε ένα νόμισμα $2n$ φορές. Σε κάθε ρίψη αν φέρουμε Κ το σφαιρίδιο 1 αλλάζει κάλπη, ενώ αν φέρουμε Γ το σφαιρίδιο 2 αλλάζει κάλπη. Αν X είναι ο αριθμός των σφαιριδίων στην Α μετά τις $2n$ ρίψεις, βρείτε την κατανομή και τη μέση τιμή τής X.

Λύση. Αν S είναι ο αριθμός των Κ τότε $X = 2$ αν S άρτιος και $X = 0$ αν S περιττός. Παρατηρούμε ότι

$$(1-1)^N = 0 \Rightarrow \sum_{j \le N, j \text{ άρτιος}} \binom{N}{j} = \sum_{j \le N, j \text{ περιττός}} \binom{N}{j}.$$

Άρα $P(S \text{ άρτιος}) = P(S \text{ περιττός}) = 1/2$. Έτσι $f_X(2) = f_X(0) = 1/2$ και $\mathbb{E}(X) = 1$. □

Άσκηση 49. Αν η X είναι τυποποιημένη κανονική, βρείτε την κατανομή τής $Z = X^2 - 2X$.

Λύση. Η διακρίνουσα τού $X^2 - 2X - t$ είναι $4(1 + t)$. Άρα, αν $t < -1$, $P(Z \le t) = 0$. Αν $t \ge -1$,

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P(1 - \sqrt{1+t} \le X \le 1 + \sqrt{1+t}) = F_X(1 + \sqrt{1+t}) - F_X(1 - \sqrt{1+t}).$$

Συνεπώς

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \frac{e^{-1-\frac{t}{2}}}{2\sqrt{1+t}}\left(e^{\sqrt{1+t}} + e^{-\sqrt{1+t}}\right).$$

□

Άσκηση 50. Ο αριθμός των μικροβίων σε οποιαδήποτε περιοχή μιας πλάκας μικροσκοπίου ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο ανάλογη τού εμβαδού τής περιοχής. Να βρεθεί η κατανομή τής απόστασης οποιουδήποτε μικροβίου από το κοντινότερό του.

Λύση. Έστω N_s ο αριθμός των μικροβίων σε μια περιοχή εμβαδού s και R η απόσταση οποιουδήποτε μικροβίου από το κοντινότερό του. Τότε

$$F_R(r) = P(R \le r) = P(N_{\pi r^2} \neq 0) = 1 - e^{-c\pi r^2}.$$

Συνεπώς

$$f_R(r) = F_R'(r) = 2\pi r e^{-c\pi r^2}.$$

□

Άσκηση 51. Παίρνουμε τυχαία ένα σημείο P πάνω σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους $2a$. Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X = |AP| \cdot |PB|$. Να βρεθεί η μέση τιμή και η πυκνότητα τής X.

Λύση. Αν $T = |AP|$, τότε $T \sim U(0, 2a)$ (ομοιόμορφη), και $X = T(2a - T)$. Έτσι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \int_0^{2a} \frac{t}{2a}\, dt = a \\
\mathbb{E}[T^2] &= \int_0^{2a} \frac{t^2}{2a}\, dt = \frac{4}{3}a^2 \\
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[2aT - T^2] = 2a\mathbb{E}[T] - \mathbb{E}[T^2] = \frac{2}{3}a^2
\end{aligned}$$

Τώρα

$$F_X(x) = P[X \le x] = P[T(2a - T) \le x] = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \le 0 \\ P[T^2 - 2aT + x \ge 0], & \text{αν } 0 < x < a^2 \\ 1, & \text{αν } x \ge a^2 \end{cases}.$$

Αλλά

$$P[T^2 - 2aT + x \ge 0] = P\left[T \le a - \sqrt{a^2 - x}\right] + P\left[T \ge a + \sqrt{a^2 - x}\right] = 1 - \frac{\sqrt{a^2 - x}}{a}.$$

Παραγωγίζοντας παίρνουμε

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{a^2 - x}}, & \text{αν } 0 < x < a^2 \\ \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

□

Άσκηση 52. Έστω ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει συνάρτηση κατανομής F και μέση τιμή μ. Δείξτε ότι

$$\mu = \int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\, dx.$$

Λύση.

$$\int_0^{+\infty} (1 - F(x))\, dx = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} f_X(t)\, dt\, dx = \int_0^{+\infty} f_X(t) \int_0^t dx\, dt = \int_0^{+\infty} t f_X(t)\, dt.$$

$$\int_{-\infty}^0 F(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x f_X(t)\, dt\, dx = \int_{-\infty}^0 \int_t^0 dx\, dt = -\int_{-\infty}^0 t f_X(t)\, dt.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 53. Υποθέτουμε ότι η συνεχής τυχαία μεταβλητή X έχει μέση τιμή μ και συνάρτηση πυκνότητας f με την ιδιότητα $f(c + x) = f(c - x)$ για κάποιο c (συμμετρική γύρω από το c). Δείξτε ότι $\mu = c$.

Λύση.

$$\begin{aligned}
\mu &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (y + c) f_X(y + c)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (y + c) f_X(c - y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} (2c - u) f_X(u)\, du \\
&= 2c - \mu.
\end{aligned}$$

□

Άσκηση 54. Δυο παίκτες Α και Β παίζουν με ένα ζάρι. Αρχίζει ο Α. Κερδίζει ο παίκτης που θα φέρει πρώτος άσσο. Υπολογίστε τις πιθανότητες νίκης των δυο παικτών.

Λύση. Ο Α μπορεί να κερδίσει με τους ακόλουθους τρόπους.

$$1,\ **1,\ ****1,\dots,\ \underbrace{**\cdots**}_{\text{άρτιο πλήθος}}1,\cdots,$$

άρα με πιθανότητα

$$\frac{1}{6}\sum_{n\ \text{άρτιος}}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} = \frac{6}{11}.$$

Ο Β κερδίζει με πιθανότητα $1-\frac{6}{11}=\frac{5}{11}$. □

Άσκηση 55. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ομοιόμορφη στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Θέτουμε $Y=\cos(\pi X)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας, τη συνάρτηση κατανομής, τη μέση τιμή και τη διασπορά τής Y.

Λύση. Η Y κινείται στο $[0,1]$ και

$$F_Y(y)=P(\cos(\pi X)\le y)=P\Big(X\ge\frac{1}{\pi}\arccos y\Big)+P\Big(X\le-\frac{1}{\pi}\arccos y\Big)=1-F_X\left(\frac{1}{\pi}\arccos y\right)+F_X\left(-\frac{1}{\pi}\arccos y\right),$$

για $0\le y\le 1$. Άρα

$$f_Y(y)=F_y'(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}},0\le y<1.$$

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\frac{2}{\pi}\left[-\sqrt{1-y^2}\right]_{y=0}^1=\frac{2}{\pi}.$$

$$\mathbb{E}(Y^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\,dy=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}y\sqrt{1-y^2}+\frac{\arcsin y}{2}\right]_{y=0}^1=\frac{1}{2}.$$

$$Var(Y)=\mathbb{E}(Y^2)-(\mathbb{E}(Y))^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}.$$

□

Άσκηση 56. Η πιθανότητα επιβίωσης ενός θύματος τροχαίου ατυχήματος είναι p. Το πλήθος K των ατυχημάτων ανά έτος ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, δηλαδή

$$P(K=k)=e^{-\lambda}\lambda^k/k!.$$

Αν X είναι ο αριθμός των θυμάτων που επιβιώνουν κάθε χρόνο, να βρεθεί η συνάρτηση πιθανότητας τής X.

Λύση. Δεδομένου ότι έχουν γίνει k ατυχήματα, το πλήθος των θυμάτων που επιβίωσαν ακολουθεί τη διωνυμική κατανομή με παραμέτρους k και p, έτσι απο το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε

$$f_X(x)=P(X=x)=\sum_k P(X=x|K=k)P(K=k)=\sum_{k=x}^{+\infty}\binom{k}{x}p^x(1-p)^{k-x}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^x}{x!},$$

δηλαδή Poisson με παράμετρο λp. □

Άσκηση 57. Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η συνάρτηση

$$f(x)=\lambda 2^{-[x]}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x),$$

όπου $[\cdot]$ είναι το ακέραιο μέρος. Βρείτε το λ ώστε η f να είναι συνάρτηση πυκνότητας μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X, και για αυτό το λ βρείτε τη μέση τιμή τής X.

Λύση.

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{+\infty}\int_k^{k+1}f(x)\,dx=\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2\lambda.$$

Άρα $\lambda=1/2$.

$$\mathbb{E}(X)=\int_0^{+\infty}xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\int_k^{k+1}x\,dx=\frac{1}{4}\left[2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^k}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\right]=\frac{3}{2}.$$

Χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\sum_{k\ge0}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$ ο οποίος προκύπτει αν παραγωγίσουμε τον τύπο τού αθροίσματος γεωμετρικής προόδου. □

Άσκηση 58. Μια κάλπη περιέχει n αριθμημένα σφαιρίδια από το 1 μέχρι το n. Τραβάμε ένα σφαιρίδιο, σημειώνουμε τον αριθμό του και το βάζουμε πίσω. Στη συνέχεια τραβάμε πάλι ένα σφαιρίδιο σημειώνουμε τον αριθμό του και το βάζουμε πίσω. Συνεχίζουμε μέχρι ο αριθμός που σημειώνουμε να είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον προηγούμενο. Αν X είναι ο αριθμός των τραβηγμάτων που χρειάστηκαν μέχρι να σταματήσουμε, να βρεθούν η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας τής X, η $\mathbb{E}(X)$ και το $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X)$.

Λύση. Για να σταματήσουμε χρειάζονται τουλάχιστο 2 και το πολύ $n+1$ τραβήγματα, διαφορετικά θα είχαμε μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών μικρότερων τού $n+1$ η οποία θα είχε μήκος μεγαλύτερο τού n. Τώρα, θα σταματήσουμε μετά από περισσότερα από k τραβήγματα αν και μόνο αν τα πρώτα k τραβήγματα είναι μια γνήσια φθίνουσα ακολουθία φυσικών μικρότερων ή ίσων τού n. Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ τέτοιες ακολουθίες, άρα

$$P(X > k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \Rightarrow F_X(k) = 1 - \frac{\binom{n}{k}}{n^k}.$$

Συνεπώς

$$f_X(k) = F_X(k) - F_X(k-1) = \frac{\binom{n}{k-1}}{n^{k-1}} - \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \binom{n+1}{k}\frac{k-1}{n^k},\ 2 \le k \le n+1,$$

και

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(k-1)k}{n^k}.$$

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα, παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k = (1+x)^{n+1},$$

και παίρνουμε

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}k(k-1)x^{k-2} = n(n+1)(1+x)^{n-1}.$$

Στη συνέχεια θέτουμε $x = 1/n$ και έχουμε

$$\sum_{k=2}^{n+1}\binom{n+1}{k}\frac{(k-1)k}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

□

Άσκηση 59. Έστω ότι για την τυχαία μεταβλητή X με τιμές στο $\mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$P(X = n+1) = \frac{3}{n+1}P(X = n).$$

Βρείτε τη μέση τιμή και τη διασπορά τής X.

Λύση. Διαδοχικές εφαρμογές τού αναδρομικού τύπου δίνουν

$$P(X = n) = \frac{3^{n-1}}{n!}P(X = 1).$$

Άρα

$$f_X(n) = \frac{1}{e^3-1}\frac{3^n}{n!}.$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3e^3}{e^3-1}.$$

$$\sigma^2(X) = \frac{(3e^3)(e^3-4)}{(e^3-1)^2}.$$

□

Άσκηση 60. Έστω ότι για την τυχαία μεταβλητή X με μη-αρνητικές ακέραιες τιμές ισχύει

$$P(X \ge u) \ne 0 \Rightarrow P(X \ge u+t | X \ge u) = P(X \ge t)$$

(έλλειψη μνήμης). Θέτουμε $q = P(X \ge 1)$ και υποθέτουμε ότι $0 < q < 1$. Βρείτε την πυκνότητα, τη μέση τιμή και τη διασπορά τής X.

Λύση. Αν θέσουμε $u = 1$ παίρνουμε

$$P(X \geq n) = P(X \geq 1)P(X \geq n-1).$$

Άρα $P(X \geq n) = q^n$, συνεπώς $f_X(n) = P(X \geq n) - P(X \geq n+1) = q^n(1-q)$, $\mathbb{E}(X) = q/(1-q)^2$, $\sigma^2(X) = q/(1-q)^2$. □

Άσκηση 61. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει την ιδιότητα $|X| \leq b$, για κάποιο $b > 0$. Δείξτε ότι

$$P(|X| > a) > \frac{\mathbb{E}(X^2) - a^2}{b^2},$$

για κάθε $0 < a < b$.

Λύση. (X συνεχής.)

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{|x|\leq b} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{|x|\leq a} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{a<|x|\leq b} x^2 f_X(x)\,dx < a^2 + b^2 P(|X| > a).$$

□

Άσκηση 62. Επιλέγουμε τυχαία και ομοιόμορφα ένα σημείο P πάνω στην περιφέρεια τού μοναδιαίου κύκλου. Η ευθεία που συνδέει το P με το σημείο $(0,1)$ τέμνει τον οριζόντιο άξονα σε ένα σημείο M. Να βρεθεί η συνάρτηση πυκνότητας τής θέσης τού M.

Λύση. Αν X είναι η πρώτη συντεταγμένη τού M και Θ η γωνία θέσης τού P, τότε

$$X = \frac{\cos\Theta}{1 - \sin\Theta},$$

με $\Theta \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$. Συνεπώς

$$\sin\Theta = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1}.$$

Άρα

$$F_X(x) = P\left(\Theta \leq \arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2\pi}\arcsin\frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Επομένως

$$f_X(x) = F_X'(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}.$$

□

Άσκηση 63. Αν η X είναι μια τυχαία μεταβλητή, θέτουμε $N_p = \left(\mathbb{E}(|X|^p)\right)^{1/p}$, όπου $p > 0$. Δείξτε ότι $N_p \leq N_q$ για $1 \leq p \leq q$, και ότι

$$\lim_{p\to+\infty} N_p = \sup|X| \text{ (πεπερασμένο ή άπειρο).}$$

Λύση. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Jensen

$$\varphi\left(E\left(|X|^p\right)\right) \leq E\left(\varphi(|X|^p)\right)$$

για $\varphi(t) = t^{q/p}$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$(\sup|X| - \varepsilon)P(\{|X| > \sup|X| - \varepsilon\})^{1/p} \leq N_p \leq \sup|X|.$$

□

Άσκηση 64. Δείξτε ότι

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}\,dt \leq \frac{1}{x}e^{-x^2}.$$

Αν $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, δείξτε ότι

$$P(|X-\mu| > \varepsilon\sigma) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon^2/2}.$$

Λύση. Έχουμε

$$x\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \int_x^{+\infty} te^{-t^2/2}dt = e^{-x^2/2}.$$

Επομένως

$$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right| > \varepsilon\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\varepsilon}e^{-\varepsilon^2/2}.$$

□

Άσκηση 65. Αν $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, δείξτε ότι

$$P(X \geq \lambda + 1) \leq \lambda, \quad P(X \leq \frac{\lambda}{3}) \leq \frac{9}{4}\lambda.$$

Λύση. Προκύπτουν από την ανισότητα Chebychev

$$P(|X - \lambda| \geq \varepsilon) \leq \frac{\lambda}{\varepsilon^2},$$

για $\varepsilon = 1$ και για $\varepsilon = 2\lambda/3$. □

Άσκηση 66. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X έχει μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2. Δείξτε ότι

$$P(X > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}, \quad P(X < \varepsilon) \geq \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}.$$

Λύση. (X συνεχής.) Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}(\varepsilon P(X > \varepsilon))^2 &\leq \left(\int_{x>\varepsilon} x f_X(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_{x\leq\varepsilon} x f_X(x)\,dx\right)^2 \leq P(X \leq \varepsilon) \int_{x\leq\varepsilon} x^2 f_X(x)\,dx \\ &\leq (\sigma^2 - \varepsilon^2 P(X > \varepsilon))(1 - P(X > \varepsilon)),\end{aligned}$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την πρώτη από τις ζητούμενες. Η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη αν αφαιρέσουμε 1 από τα δύο μέλη. □

Άσκηση 67. Έστω X ο αριθμός των άσων που παίρνει ένας παίκτης στο μοίρασμα των χαρτιών στο "bridge". Υπολογίστε τη μέση τιμή τής X χωρίς να βρείτε την κατανομή της.

Λύση. Αν W, Y, Z είναι το πλήθος των άσων των άλλων παικτών, τότε οι X, Y, Z, W είναι ισόνομες και $X + Y + Z + W = 4$. Επομένως $\mathbb{E}(X) = 1$. □

Άσκηση 68. Έστω X συνεχής τυχαία μεταβλητή για την οποία η μέση τιμή υπάρχει. Αν m είναι η διάμεσος τής X και c τυχούσα σταθερά, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}(|X - c|) = \mathbb{E}(|X - m|) + 2\int_m^c (c - x) f_X(x)\,dx.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|X - m|) + 2\int_m^c (c - x) f_X(x)\,dx &= \int_{-\infty}^m (m - x) f_X(x, dx + \int_m^{+\infty} (x - m) f_X(x)\,dx + 2\int_m^c (c - x) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^m (c - x) f_X(x)\,dx + \int_m^{+\infty} (x - c) f_X(x)\,dx + 2\int_m^c (c - x) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^c (c - x) f_X(x)\,dx + \int_c^{+\infty} (x - c) f_X(x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |x - c| f_X(x)\,dx = \mathbb{E}(|X - c|).\end{aligned}$$

□

Άσκηση 69. n άτομα κάθονται σ'ένα στρογγυλό τραπέζι. Αν X είναι ο αριθμός των ατόμων που χωρίζουν τον A από τον B, βρείτε την κατανομή τής X.

Λύση. Αν $n = 2k + 1$, τότε η X είναι ομοιόμορφη στο $\{0, 1, \ldots, k - 1\}$. Άρα $\mathbb{E}(X) = \frac{p-1}{2}, \sigma^2(X) = \frac{p^2-1}{12}$. Αν $n = 2k$ τότε

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{2k-1}, & x \in \{0, 1, \ldots, k-2\} \\ \\ \frac{1}{2k-1}, & x = k - 1 \end{cases}.$$

Άρα $\mathbb{E}(X) = \frac{(k-1)^2}{2k-1}$ και $\sigma^2(X) = \frac{k(k-1)(k^2-k+1)}{3(2k-1)^2}$. □

Άσκηση 70. Θεωρούμε n αριθμημένες κάλπες, έτσι ώστε η k κάλπη να περιέχει k αριθμημένα σφαιρίδια. Επιλέγουμε μια κάλπη και στη συνέχεια από αυτή ένα σφαιρίδιο. Αν X είναι ο αριθμός τής κάλπης και Y ο αριθμός τού σφαιρίδιου, να βρεθεί η κατανομή τού ζευγαριού (X, Y), και η μέση τιμή και η διασπορά τής Y.

Λύση. Η X ειναι ομοιόμορφη στο $\{1,\ldots,n\}$ και η $Y|X=i$ ομοιόμορφη στο $\{1,\ldots,i\}$. Άρα

$$f_{X,Y}(i,j)=\frac{1}{ni},\ 1\le j\le i\le n.$$

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{n+3}{4},\quad \sigma^2(Y)=\frac{(n-1)(7n+13)}{144}.$$

□

Άσκηση 71. Αν $T\sim\Gamma(n,\theta)$ με $n\in\mathbb{N}$ και αν η είναι τέτοια ώστε $X|T=t\sim\mathcal{P}(\lambda t)$, να υπολογιστούν η συνάρτηση πυκνότητας και η ροπογεννήτρια τής X.

Λύση. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$f_X(x)=\int_0^{+\infty}f_{X|T}(x|t)f_T(t)\,dt=\binom{x+n-1}{x}\frac{(\lambda\theta)^x}{(1+\lambda\theta)^{n+x}}.$$

Έτσι

$$M_X(t)=\sum_{x=0}^{+\infty}e^{tx}f_X(x)=(1+\lambda\theta(1-e^t))^{-n}.$$

□

Άσκηση 72. Αν το ζευγάρι (X,Y) ακολουθεί τη 2-διάστατη κανονική με μέσες τιμές 0 και πίνακα διασπορών

$$\Sigma=\begin{bmatrix}1&\rho\\ \rho&1\end{bmatrix},\quad |\rho|<1,$$

βρείτε τη μέση τιμή τής $\max\{X,Y\}$.

Λύση.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\max\{X,Y\})&=2\iint_{x>y}xf_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\iint_{x>y}x\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)\right\}dx\,dy\\&=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\rho^2}}\iint_{x>y}x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(y-\rho x)^2\right\}dx\,dy\\&=\frac{1}{\pi}\iint_{x>u\sqrt{\frac{1+\rho}{1-\rho}}}x\exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}\exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\}dx\,du=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 73. Έστω ότι η 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y)=8xy,\quad 0\le x\le y\le 1.$$

Βρείτε τη συνάρτηση κατανομής.

Λύση. Διακρίνουμε περιπτώσεις.

- Αν $x\le 0$ ή $y\le 0$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=0$.
- Αν $0\le x\le y\le 1$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_s^y 8st\,dt\,ds=2x^2y^2-x^4$.
- Αν $0\le x\le 1,\ y\ge 1$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=\int_0^x\int_s^1 8st\,dt\,ds=2x^2-x^4$.
- Αν $0\le y\le x,\ y\le 1$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=\int_0^y\int_s^y 8st\,dt\,ds=y^4$.
- Αν $x\ge 1,\ y\ge 1$ τότε $F_{X,Y}(x,y)=1$.

□

Άσκηση 74. Έστω ότι η (X,Y) έχει πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x,y)=xe^{-x(1+y)}\quad x,y>0.$$

Βρείτε τις περιθώριες και τις δεσμευμένες συναρτήσεις πυκνότητας.

Λύση.

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dy = e^{-x}.$$
$$f_Y(y) = \int_0^{+\infty} xe^{-x(1+y)}dx = \frac{1}{(1+y)^2}.$$
$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = (1+y)^2 xe^{-x(1+y)}.$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xe^{-x(1+y)}}{e^{-x}} = xe^{-xy}.$$

□

Άσκηση 75. Έστω ότι η (X, Y) είναι ομοιόμορφη στο μοναδιαίο δίσκο. Εξετάστε αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες.

Λύση. Η πυκνότητα τής (X, Y) είναι

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{αν } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Υπολογίζουμε τις περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας.

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1.$$
$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2} \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Παρατηρούμε ότι $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, άρα οι X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

□

Άσκηση 76. Έστω ότι η (X, Y) είναι ομοιόμορφη στο τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(0,1)$ και $(1,1)$. Βρείτε τις πιθανότητες $P[X > 1/2]$, $P[Y < 1/3]$ και $P[X > 1/2, Y < 1/3]$.

Λύση. Η πυκνότητα τής (X, Y) είναι $f_{X,Y}(x,y) = 2$, $0 \leq x \leq y \leq 1$. Επομένως

$$f_X(x) = 2\int_x^1 dy = 2(1-x),\ 0 \leq x \leq 1, \quad f_Y(y) = 2\int_0^y dx = 2y,\ 0 \leq y \leq 1.$$

Άρα

$$P[X > 1/2] = \int_{1/2}^1 2(1-x)\,dx = 1/4.$$
$$P[Y < 1/3] = \int_0^{1/3} 2y\,dy = 1/9.$$

Τώρα, το σύνολο $\{(x,y) : x > 1/2,\ y < 1/3\}$ δεν τέμνει το τρίγωνο, άρα

$$P[X > 1/2, Y < 1/3] = 0.$$

□

Άσκηση 77. Ένας αριθμός X επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $(0,1)$ και στη συνέχεια ένας αριθμός Y επιλέγεται τυχαία από το διάστημα $(X,1)$. Βρείτε τη συνάρτηση πυκνότητας τής Y.

Λύση. Η X είναι ομοιόμορφη στο $(0,1)$, δηλαδή $f_X(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$. Δεδομένου τώρα ότι έχουμε επιλέξει τον αριθμό x, δηλαδή $X = x$, ο δεύτερος αριθμός επιλέγεται ομοιόμορφα από το διάστημα $(x,1)$. Έτσι

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{1-x}, \quad x \leq y \leq 1.$$

Επομένως από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y|X}(y|x)f_X(x)\,dx = \int_0^y \frac{dx}{1-x} = -\ln(1-y).$$

□

Άσκηση 78. Έστω ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Θέτουμε $W = X + Y$. Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή τής X δεδομένου ότι $W = w$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, w]$.

Λύση. Έχουμε
$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0 \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y},\ y > 0.$$
Η από κοινού πυκνότητα τής (X, Y) είναι
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)},\ x, y > 0.$$
Υπολογίζουμε την πυκνότητα τής (X, W). Έχουμε ότι $(X, W) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$, όπου
$$g_1(x, y) = x,\ g_2(x, y) = x + y.$$
Η αντίστροφη τής (g_1, g_2) είναι η (h_1, h_2), όπου
$$h_1(x, w) = x,\ h_2(x, w) = w - x.$$
Η Ιακωβιανή είναι
$$J(x, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$
Άρα
$$f_{X,W}(x, w) = f_{X,Y}(h_1(x, w), h_2(x, w))|J(x, w)| = \lambda^2 e^{-\lambda w},\ 0 < x < w.$$
Έτσι
$$f_W(w) = \int_0^w f_{X,W}(x, w)\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda w} \int_0^w dx = \lambda^2 w e^{-\lambda w},\ w > 0.$$
Επομένως
$$f_{X|W}(x|w) = \frac{f_{X,W}(x, w)}{f_W(w)} = \frac{1}{w},\ 0 < x < w.$$
□

Άσκηση 79. Στην προηγούμενη άσκηση δείξτε ότι η $Z = X/W$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

Λύση. Έχουμε ότι
$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,W}(x, x/z) \frac{|x|}{z^2}\, dx.$$
Η πυκνότητα μέσα στο ολοκλήρωμα δεν μηδενίζεται όταν $x > 0$, $z > 0$ και $x < x/z$. Άρα $x > 0$ και $0 < z < 1$. Επομένως
$$f_Z(z) = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^\infty x e^{-\frac{\lambda}{z} x} dx = 1,\ 0 < z < 1.$$
□

Άσκηση 80. Έστω ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες γάμμα μεταβλητές με παραμέτρους (λ, a) και (λ, b) αντίστοιχα. Δείξτε ότι οι $Z = X + Y$ και $W = X/(X + Y)$ είναι ανεξάρτητες και βρείτε την πυκνότητα τής W.

Λύση. Οι πυκνότητες των X και Y είναι
$$f_X(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x},\ x > 0 \quad f_Y(y) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} y^{b-1} e^{-\lambda y},\ y > 0.$$
Έχουμε ότι $(Z, W) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$, όπουυ
$$g_1(x, y) = x + y,\ g_2(x, y) = x/(x + y).$$
Λύνοντας το σύστημα $z = x + y$ & $w = x/(x + y)$ ως προς x και y βρίσκουμε ότι η αντίστροφη τής (g_1, g_2) είναι η (h_1, h_2), όπου
$$h_1(z, w) = wz,\ h_2(z, w) = z - wz.$$
Η Ιακωβιανή είναι
$$J(z, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial z} & \dfrac{\partial h_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial z} & \dfrac{\partial h_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & z \\ 1 - w & -z \end{vmatrix} = -z.$$

Άρα

$$\begin{aligned} f_{Z,W}(z,w) &= f_{X,Y}(h_1(z,w),h_2(z,w))|J(z,w)| = f_X(wz)f_Y(z-wz)z \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{a+b-1}e^{-\lambda z}w^{a-1}(1-w)^{b-1},\ z>0,\ 0<w<1. \end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw \\ &= \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{a+b-1}e^{-\lambda z}w^{a-1}B(a,b) = \frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a+b)} z^{a+b-1}e^{-\lambda z},\ z>0. \end{aligned}$$

Η Z είναι γάμμα με παραμέτρους $(\lambda, a+b)$. Επίσης

$$\begin{aligned} f_W(w) &= w^{a-1}(1-w)^{b-1}\frac{\lambda^{a+b}}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^\infty z^{a+b-1}e^{-\lambda z}\,dz \\ &= w^{a-1}(1-w)^{b-1}\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\int_0^\infty f_X(x)\,dx = \frac{w^{a-1}(1-w)^{b-1}}{B(a,b)},\ 0<w<1. \end{aligned}$$

Η W είναι βήτα με παραμέτρους (a,b). Παρατηρούμε ότι $f_{Z,W}(z,w) = f_Z(z)f_W(w)$, άρα οι Z και W είναι ανεξάρτητες. □

Άσκηση 81. Έστω ότι η 2-διάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{αν } x^2+y^2 \le 1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $X = R\cos\Theta$, $Y = R\sin\Theta$, $0 < R \le 1$, $0 \le \Theta < 2\pi$. Βρείτε την πυκνότητα $f_{R,\Theta}(r,\theta)$ και εξετάστε αν οι R και Θ είναι ανεξάρτητες.

Λύση. Αν (g_1,g_2) είναι η συνάρτηση που στέλνει το ζευγάρι (X,Y) στο (R,Θ), τότε η αντίστροφη τής (g_1,g_2) είναι η (h_1,h_2), όπου

$$h_1(r,\theta) = r\cos\theta,\ h_2(r,\theta) = r\sin\theta.$$

Η Ιακωβιανή είναι

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial r} & \dfrac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial r} & \dfrac{\partial h_2}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

Άρα

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(h_1(r,\theta),h_2(r,\theta))|J(r,\theta)| = \frac{r}{\pi},\ 0<r\le 1,\ 0\le\theta<2\pi.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^{2\pi} f_{R,\Theta}(r,\theta)\,d\theta = 2r,\ 0<r\le 1. \\ f_\Theta(\theta) &= \int_0^1 f_{R,\Theta}(r,\theta)\,dr = \frac{1}{2\pi},\ 0\le\theta<2\pi. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_R(r)f_\Theta(\theta)$, άρα οι R και Θ είναι ανεξάρτητες. □

Άσκηση 82. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[g(X)|y]f_Y(y)\,dy.$$

Λύση. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[g(X)|y]f_Y(y)\,dy &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_{X|Y}(x|y)\,dx f_Y(y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)\,dy\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)\,dx = \mathbb{E}[g(X)]. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 83. Έστω ότι οι X, Y, Z είναι ανεξάρτητες κανονικές $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Υπολογίστε τη συνδιακύμανση των $X+Y$ και $Y+Z$.

Λύση.

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X+Y, Y+Z) &= \mathbb{E}[(X+Y)(Y+Z)] - \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[Y+Z] \\ &= \mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[XZ] + \mathbb{E}[YZ] + \mathbb{E}[Y^2] \\ &- \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathrm{Var}(Y) = \sigma^2.\end{aligned}$$

□

Άσκηση 84. Δείξτε ότι

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]|Z]].$$

Λύση. Αν θέσουμε $W = \mathbb{E}[X|Y]$, τότε από τον τύπο ολικής μέσης τιμής έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]|Z]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[W|Z]] = \mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X].$$

□

Άσκηση 85. Δείξτε ότι

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y], Y).$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y], Y) &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]Y] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[g(Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y],\end{aligned}$$

όπου $g(y) = \mathbb{E}[X|y]y$. Αλλά τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(Y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) f_Y(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X|Y}(x|y)\, dx\, f(y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X|Y}(x|y) f_Y(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy \\ &= \mathbb{E}[XY].\end{aligned}$$

Επομένως

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X|Y], Y) = \mathbb{E}[g(Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathrm{Cov}(X, Y).$$

□

Άσκηση 86. Έστω ότι η (X, Y) έχει πυκνότητα

$$f_{X,Y}(x, y) = x + y,\ 0 < x, y < 1.$$

Βρείτε τις $\mathbb{E}[X|y]$ και $\mathbb{E}[Y|x]$.

Λύση.

$$f_X(x) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^1 (x+y)\, dy = \frac{2x+1}{2}.$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\, dx = \int_0^1 (x+y)\, dx = \frac{2y+1}{2}.$$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = 2 \cdot \frac{x+y}{2y+1}.$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = 2 \cdot \frac{x+y}{2x+1}.$$

$$\mathbb{E}[X|y] = \int_0^1 x f_{X|Y}(x|y)\, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3y+2}{2y+1}.$$

$$\mathbb{E}[Y|x] = \int_0^1 y f_{Y|X}(y|x)\, dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x+2}{2x+1}.$$

□

Άσκηση 87. Έστω ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Θέτουμε $W = X + Y$. Δείξτε ότι η δεσμευμένη κατανομή τής X δεδομένου ότι $W = w$ είναι η ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, w]$.

Λύση. Έχουμε

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x},\ x > 0 \quad f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y},\ y > 0.$$

Η από κοινού πυκνότητα τής (X, Y) είναι

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)},\ x, y > 0.$$

Υπολογίζουμε την πυκνότητα τής (X, W). Έχουμε ότι $(X, W) = (g_1(X, Y), g_2(X, Y))$, όπου

$$g_1(x, y) = x,\ g_2(x, y) = x + y.$$

Η αντίστροφη τής (g_1, g_2) είναι η (h_1, h_2), όπου

$$h_1(x, w) = x,\ h_2(x, w) = w - x.$$

Η Ιακωβιανή είναι

$$J(x, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Άρα

$$f_{X,W}(x, w) = f_{X,Y}(h_1(x, w), h_2(x, w))|J(x, w)| = \lambda^2 e^{-\lambda w},\ 0 < x < w.$$

Έτσι

$$f_W(w) = \int_0^w f_{X,W}(x, w)\, dx = \lambda^2 e^{-\lambda w} \int_0^w dx = \lambda^2 w e^{-\lambda w},\ w > 0.$$

Επομένως

$$f_{X|W}(x|w) = \frac{f_{X,W}(x, w)}{f_W(w)} = \frac{1}{w},\ 0 < x < w.$$

□

Άσκηση 88. Στην προηγούμενη άσκηση δείξτε ότι η $Z = X/W$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,W}(x, x/z) \frac{|x|}{z^2}\, dx.$$

Η πυκνότητα μέσα στο ολοκλήρωμα δεν μηδενίζεται όταν $x > 0, z > 0$ και $x < x/z$. Άρα $x > 0$ και $0 < z < 1$. Επομένως

$$f_Z(z) = \frac{\lambda^2}{z^2} \int_0^\infty x e^{-\frac{\lambda}{z} x} dx = 1,\ 0 < z < 1.$$

□

Άσκηση 89. Αν οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, να υπολογιστούν οι $\mathbb{E}(X_j/(X_1 + X_2 + \cdots + X_n))$.

Λύση. Η από κοινού πυκνότητα είναι συμμετρική ως προς τις μεταβλητές της, άρα οι μέσες τιμές είναι ίσες. Επίσης αθροίζουν στο 1. Άρα είναι ίσες με $1/n$. □

Άσκηση 90. Αν $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$, $Y \sim \mathcal{N}(1, 4)$ και $\rho(X, Y) = -1/2$, να υπολογιστεί η $\mathrm{Cov}(2X - Y, 4X + Y)$.

Λύση. Η ζητούμενη ποσότητα είναι ίση με

$$8\sigma^2(X) - 2\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y) - \sigma^2(Y) = \frac{\sqrt{3} - 10}{3}.$$

□

Άσκηση 91. Αν $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, η Y παίρνει τις τιμές 1 και -1 με πιθανότητες p και $1 - p$ αντίστοιχα και υποθέσουμε ότι X και Y είναι ανεξάρτητες, βρείτε την κατανομή τής XY.

Λύση. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας,

$$\begin{aligned} F_{XY}(z) &= P(XY \le z | Y = 1)p + P(XY \le z | Y = -1)(1 - p) = pF_X(z) + (1 - p)(1 - F_X(-z)) \\ &= F_X(z). \end{aligned}$$

□

Άσκηση 92. Αν οι $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες στο $[0, 1]$, $Z = \min X_i$, $W = \max X_i$, βρείτε την κατανομή των (Z, W), Z, W.

Λύση. Για $0 \le z \le w \le 1$ έχουμε

$$F_{Z,W}(z, w) = P(W \le w) - P(W \le w \,\&\, Z \ge z) = w^n - (w - z)^n.$$

Άρα

$$f_{Z,W}(z, w) = n(n-1)(w-z)^{n-2},\ 0 \le z \le w \le 1.$$
$$f_Z(z) = n(1-z)^{n-1},\ 0 \le z \le 1.$$
$$f_W(w) = nw^{n-1},\ 0 \le w \le 1.$$

□

Άσκηση 93. Αν οι X και Y είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο $[0, a]$ να υπολογίσετε την κατανομή τής X/Y και τις ροπές κάθε τάξης, αν υπάρχουν.

Λύση.

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(zy) f_Y(y)|y|\, dy = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le z \le 1, \\ \\ \frac{1}{2z^2}, & z \ge 1 \end{cases}.$$

Έτσι

$$\mathbb{E}(X^k) \ge \int_1^{+\infty} z^{k-2} dz = +\infty,$$

για $k \ge 1$. □

Άσκηση 94. Δυο άτομα συμφωνούν να συναντηθούνν μεταξύ των ορών 6 και 7. Αυτός που θα έρθει πρώτος περιμένει το δεύτερο το πολύ 1/4 τής ώρας. Ποια η πιθανότητα το ραντεβού να μην πραγματοποιηθεί;

Λύση. Αν $X, Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ανεξάρτητες, ζητάμε την $P(|X - Y| > 1/4)$, η οποία είναι ίση με το εμβαδό τού χωρίου

$$\left\{(x, y) \in [0, 1]^2 : |x - y| > 1/4\right\},$$

δηλαδή $(3/4)^2$. □

Άσκηση 95. Το ημερήσιο εισόδημα χαρτοπαίχτη είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο διάστημα $[-5, 5]$ (χιλιάδες €). Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση ο αριθμός των ημερών που μπορεί να παίζει έτσι ώστε να έχει πιθανότητα τουλάχιστο 0.95 το συνολικό εισόδημα τις μέρες αυτές να είναι απόλυτα μικρότερο από 50000 €.

Λύση. Αν X_k είναι το εισόδημα την k ημέρα, τότε η X_k είναι ομοιόμορφη στο $[-5, 5]$, άρα έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $25/3$. Θέλουμε ένα n ώστε

$$P[|X_1 + \cdots + X_n| \le 50] \ge 0.95.$$

Αλλά

$$P[|X_1 + \cdots + X_n| \le 50] = P\left[-\frac{50}{\sqrt{n\frac{25}{3}}} \le \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n\frac{25}{3}}} \le \frac{50}{\sqrt{n\frac{25}{3}}}\right] \simeq 2\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{n\frac{25}{3}}}\right) - 1.$$

Επομένως

$$\Phi\left(\frac{50}{\sqrt{n\frac{25}{3}}}\right) \ge 0.975 \simeq \Phi(1.96).$$

Άρα $n \le 78$. □

Άσκηση 96. Έστω ότι k εστιατόρια συναγωνίζονται για τους n εργαζόμενους μιας γειτονικής επιχείρησης. Αν κάθε εργαζόμενος επιλέγει τυχαία ένα από τα εστιατόρια αυτά, να προσδιοριστεί ο ελάχιστος αριθμός καθισμάτων που πρέπει να διαθέτει ένα εστιατόριο ώστε με πιθανότητα τουλάχιστο 0.95 να είναι σε θέση να εξυπηρετήσει τους πελάτες που έρχονται σ'αυτό.

Λύση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_j παίρνει την τιμή 1 αν ο j εργαζόμενος επιλέγει ένα δεδομένο εστιατόριο, και την τιμή 0 διαφορετικά. Τότε η X_j είναι Bernoulli με παράμετρο $1/k$. Ζητάμε ένα m έτσι ώστε

$$P[X_1 + \cdots + X_n \leq m] \geq 0.95.$$

Όμως

$$P[X_1 + \cdots + X_n \leq m] = \left[\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\frac{1}{k}}{\sqrt{n\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)}} \leq \frac{m - n\frac{1}{k}}{\sqrt{n\frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)}}\right] \simeq \Phi\left(\frac{mk - n}{\sqrt{n(k-1)}}\right).$$

Επομένως

$$\Phi\left(\frac{mk - n}{\sqrt{n(k-1)}}\right) \geq 0.95 \simeq \Phi(1.6).$$

Άρα

$$m \geq \frac{1.6\sqrt{n(k-1)} + n}{k}.$$

□

Άσκηση 97. Έστω ότι το 10% τής παραγωγής ενός προϊόντος δεν πληροί τις καθορισμένες προδιαγραφές. Το προϊόν συσκευάζεται σε κιβώτια των 100 και κάθε μέρα ελέγχονται 100 τέτοια κιβώτια. Από κάθε κιβώτιο εκλέγονται τυχαία 5 μονάδες τού προϊόντος. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα ο αριθμός των ελαττωματικών να μην υπερβαίνει τα 60.

Λύση. Έστω ότι η X_k παίρνει την τιμή 1 αν η k μονάδα είναι ελαττωματική και την τιμή 0 διαφορετικά. Τότε

$$P[X_1 + \cdots + X_{500} \leq 60] = P\left[\frac{X_1 + \cdots + X_{500} \cdot 0.1}{\sqrt{500 \cdot 0.1 \cdot 0.9}} \leq \frac{60 - 500 \cdot 0.1}{\sqrt{500 \cdot 0.1 \cdot 0.9}}\right] \simeq \Phi(1.5) \simeq 0.9332.$$

□

Άσκηση 98. Έστω ότι ο αριθμός των ελαττωμάτων μιας μαγνητικής ταινίας μήκους t μέτρων ακολουθεί την κατανομή Poisson με μέση τιμή $t/200$. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα ο συνολικός αριθμός των ελαττωμάτων 100 ταινιών μήκους 800 μέτρων η κάθε μια, να μην υπερβαίνει τα 430.

Λύση. Αν X_k είναι ο αριθμός των ελαττωμάτων τής k ταινίας, τότε η μέση τιμή και η διασπορά τής X_k είναι 4. Άρα

$$P[X_1 + \cdots + X_{100} \leq 430] = P\left[\frac{X_1 + \cdots + X_{100} - 100 \cdot 4}{\sqrt{100 \cdot 4}} \leq \frac{430 - 100 \cdot 4}{\sqrt{100 \cdot 4}}\right] \simeq \Phi(1.5) \simeq 0.9332.$$

□

Άσκηση 99. Το ποσό των χρημάτων X που έχει ένας κάτοικος τής πόλης Α είναι τυχαία μεταβλητή και $X \sim N(500, 100^2)$ και για τον τυχαίο κάτοικο τής πόλης Β έχουμε το ποσό $Y \sim N(600, 160^2)$. Αν πάρουμε 9 κατοίκους τής πόλης Α, ποια η πιθανότητα να έχουν συνολικά τουλάχιστο 4800; Αν πάρουμε έναν από την Α και έναν από τη Β, ποια η πιθανότητα να έχουν και οι δυο μαζί το πολύ 1188;

Λύση. Αν $Z = X_1 + \cdots + X_9$ τότε $Z \sim N(9 \cdot 500, 9 \cdot 100^2) = N(4500, 300^2)$. Άρα

$$P[Z > 4800] = P\left[\frac{Z - 4500}{300} > 1\right] = 1 - \Phi(1) \simeq 0.1587.$$

Αν $W = X + Y \sim N(500 + 600, 100^2 + 160^2) \simeq N(1100, (188.68)^2)$ (προσέγγιση τής ρίζας), τότε

$$P[W < 1188] = P\left[\frac{W - 1100}{188.68} < 0.47\right] = \Phi(0.47) \simeq 0.6808.$$

□

Άσκηση 100. Έστω ότι η (X, Y) έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1 - \rho^2)}\right].$$

Δείξτε ότι οι $Z = X$ και $W = Y - \rho X$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές και υπολογίστε τη ροπογεννήτρια τής (Z, W)

Λύση. Ο μετασχηματισμός είναι $(Z,W) = (g_1(X,Y), g_2(X,Y))$, όπου $g_1(x,y) = x, g_2(x,y) = y - \rho x$. Λύνοντας το σύστημα $z = x$ & $w = y - \rho x$ ως προς x και y παίρνουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι (h_1, h_2), όπου $h_1(z,w) = z, h_2(z,w) = \rho z + w$. Η Ιακωβιανή είναι

$$J(z,w) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \rho & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Άρα

$$f_{Z,W}(z,w) = f_{X,Y}(h_1(z,w), h_2(z,w)) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{z^2 - \rho^2 z^2 + w^2}{2(1-\rho^2)}\right].$$

Επομένως

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)\,dz = \frac{e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}.$$

Δηλαδή $W \sim N(0, 1-\rho^2)$. Επίσης

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)\,dw = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{w^2}{2(1-\rho^2)}} dw = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Δηλαδή $Z \sim N(0,1)$. Παρατηρούμε ότι $f_{Z,W}(z,w) = f_Z(z) f_W(w)$ άρα Z και W ανεξάρτητες. Επομένως

$$M_{Z,W}(s,t) = M_Z(s) M_W(t) = e^{s^2/2} e^{(1-\rho^2)t^2/2}.$$

□

Άσκηση 101. Έστω ότι οι $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Θέτουμε

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}.$$

Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια τής S_n.

Λύση. Η ροπογεννήτρια τής εκθετικής είναι

$$M_{X_k}(t) = \lambda \int_0^{\infty} e^{tx} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - t},\ t < \lambda.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} M_{S_n}(t) &= E\left[\exp\left(t \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}\right)\right] = \prod_{k=1}^{n} E\left[e^{\frac{t}{k}X_k}\right] = \prod_{k=1}^{n} M_{X_k}\left(\frac{t}{k}\right) \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \cdot \frac{\lambda}{\lambda - \frac{t}{2}} \cdots \frac{\lambda}{t - \frac{t}{n}} = \frac{n!\lambda^n}{(\lambda - t)(2\lambda - t)\cdots(n\lambda - t)},\ t < \lambda. \end{aligned}$$

□

Άσκηση 102. Στην προηγούμενη άσκηση θέτουμε

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}.$$

Δείξτε ότι οι Y_n και S_n έχουν την ίδια κατανομή.

Λύση. Η συνάρτηση κατανομής τής εκθετικής είναι

$$F_{X_k}(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x},\ x > 0.$$

Άρα

$$F_{Y_n}(x) = P[X_1 \leq x, \cdots, X_n \leq x] = F_{X_1}(x) \cdots F_{X_n}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n.$$

Επομένως

$$f_{Y_n}(x) = F'_{Y_n}(x) = n\lambda(1 - e^{-\lambda x})^{n-1} e^{-\lambda x}.$$

Συνεπώς η ροπογεννήτρια τής Y_n είναι

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) &= n\lambda \int_0^\infty e^{tx}(1-e^{-\lambda x})^{n-1} e^{-\lambda x} dx = n\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{-\frac{t}{\lambda}} du = nB\Big(n, 1-\frac{t}{\lambda}\Big)\\
&= n\frac{\Gamma(n)\Gamma\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{t}{\lambda}+n\right)} = n\frac{(n-1)!\Gamma\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}{\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)\left(2-\frac{t}{\lambda}\right)\left(3-\frac{t}{\lambda}\right)\cdots\left(n-\frac{t}{\lambda}\right)\Gamma\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)}\\
&= \frac{n!\lambda^n}{(\lambda-t)(2\lambda-t)\cdots(n\lambda-t)} = M_{S_n}(t).
\end{aligned}$$

Έτσι οι Y_n και S_n έχουν την ίδια ροπογεννήτρια, άρα ακολουθούν την ίδια κατανομή. Στους παραπάνω υπολογισμούς κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = e^{-\lambda x}$ και χρησιμοποιήσαμε ότι η συνάρτηση Γ έχει την ιδιότητα $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. □

Άσκηση 103. Οι εισπράκτορες των λεωφορείων παραδίδουν στο ταμείο τής εταιρείας τα κέρματα σε μασούρια των 50 €. Έχει διαπιστωθεί εμπειρικά ότι 20% των μασουριών περιέχουν 49 €, 70% περιέχουν 50 €, και 10 % περιέχουν 51 €. Να υπολογιστεί κατά προσέγγιση η πιθανότητα 100 μασούρια να περιέχουν τουλάχιστον 4999 €.

Λύση. Έστω X_k το χρηματικό ποσό στο k μασούρι.

$$\mu = \mathbb{E}[X_k] = 0.2\cdot 49 + 0.7\cdot 50 + 0.1\cdot 51 = 49.9.$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) = \mathbb{E}[X_k^2] - \mathbb{E}[X_k]^2 = 0.2\cdot 49^2 + 0.7\cdot 50^2 + 0.1\cdot 51^2 - 49.9^2 = 0.29.$$

Έτσι αν

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k,$$

τότε από το κεντρικό οριακό θεώρημα, έχουμε

$$P[S_{100} \geq 4999] = P\left[\frac{S_{100} - 100\cdot 49.9}{10\sqrt{0.29}} \geq \frac{4999 - 100\cdot 49.9}{10\sqrt{0.29}}\right] \simeq 1 - \Phi(1.6751) \simeq 0.0475.$$

□

Άσκηση 104. Έστω ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών X_n έχει συνάρτηση κατανομής

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1-\frac{1}{n}, & x_0 \leq x < n \\ 1, & x \geq n \end{cases}.$$

Να προσδιοριστεί η οριακή συνάρτηση κατανομής.

Λύση. Αν $x < x_0$ τότε $F_n(x) = 0$ για κάθε n, άρα

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 0.$$

Αν $x \geq x_0$, τότε για κάθε $n > x$ έχουμε ότι $F_n(x) = 1 - \frac{1}{n}$, άρα

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1.$$

Επομένως η οριακή συνάρτηση κατανομής είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}.$$

Αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή x_0 με πιθανότητα 1 και οποιαδήποτε άλλη τιμή με πιθανότητα 0. □

Άσκηση 105. Σε μια πόλη 4000 κατοίκων έστω ότι 10 άτομα την ημέρα χρειάζεται να εισαχθούν στο νοσοκομείο. Πόσα ελεύθερα κρεβάτια πρέπει να διαθέτει το νοσοκομείο ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 0.95 να είναι σε θέση να εξυπηρετήσει την πόλη;

Λύση. Έστω ότι η τυχαία μεταβλητή X_k παίρνει την τιμή 1 αν ο k κάτοικος μπει στο νοσοκομείο και 0 διαφορετικά. Τότε

$$\mu = \mathbb{E}[X_k] = 0.0025,\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_k) = 0.00249375 \simeq 0.0025.$$

Αν

$$S_{4000} = X_1 + \cdots + X_{4000}$$

τότε θέλουμε ένα n έτσι ώστε

$$P[S_{4000} \leq n] \geq 0.95.$$

Ισοδύναμα

$$P\left[\frac{S_{4000} - 4000 \cdot 0.0025}{\sqrt{4000 \cdot 0.0025}} \leq \frac{n - 4000 \cdot 0.0025}{\sqrt{4000 \cdot 0.0025}}\right] \geq 0.95.$$

Και από το κεντρικό οριακό θεώρημα

$$\Phi\left(\frac{n-10}{3.158}\right) \geq 0.95 \simeq \Phi(1.6).$$

Άρα $n \geq 15$. □

Άσκηση 106. Έστω X_n, μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = \begin{cases} 0, & x < \mu \\ 1/2, & x = \mu \\ 1, & x > \mu \end{cases}.$$

Λύση. Χρησιμοποιούμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Αν $x = \mu$ τότε

$$P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq 0\right] \to \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Έστω τώρα ότι $x > \mu$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $x_0 > 0$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) > 1 - \varepsilon/2$, και στη συνέχεια n_0 τέτοιο ώστε

$$\sqrt{n}\frac{x-\mu}{\sigma} > x_0 \quad \text{και} \quad P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq x_0\right] > \Phi(x_0) - \varepsilon/2$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε

$$P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{x-\mu}{\sigma}\right] \geq P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq x_0\right] > \Phi(x_0) - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$1 - \varepsilon < P\left[\overline{X_n} \leq x\right] \leq 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = 1.$$

Ομοίως, αν $x < \mu$ επιλέγουμε $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0) < \varepsilon/2$, και στη συνέχεια n_0 τέτοιο ώστε

$$\sqrt{n}\frac{x-\mu}{\sigma} < x_0 \quad \text{και} \quad P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq x_0\right] < \Phi(x_0) + \varepsilon/2$$

για κάθε $n \geq n_0$. Τότε

$$P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq \sqrt{n}\frac{x-\mu}{\sigma}\right] \leq P\left[\sqrt{n}\frac{\overline{X_n} - \mu}{\sigma} \leq x_0\right] < \Phi(x_0) + \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

Δηλαδή για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$0 \leq P\left[\overline{X_n} \leq x\right] < \varepsilon,$$

Το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\overline{X_n} \leq x\right] = 0.$$

□