Σημειώσεις Γενικής Τοπολογίας

Θέμης Μήτσης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Κρητης

Περιεχόμενα

1. Τοπολογικοί Χώροι - Βάσεις - Υποβάσεις	4
2. Κλειστότητα και Εσωτερικό	7
3. Σύγκλιση	10
4. Συνέχεια	13
5. Η Σχετική Τοπολογία και η Τοπολογία Γινόμενο	15
6. Συνεκτικότητα	19
7. Η Τοπολογία Πηλίκο	24
8. Χώροι Hausdorff	26
9. Κανονικοί Χώροι	29
10. Φυσιολογικοί Χώροι	31
11. Το Λήμμα του Urysohn και το Θεώρημα Επέκτασης του Tietze	33
12. Συνθήκες Αριθμησιμότητας	35
13. Μετρικοποιησιμότητα	38
14. Συμπαγείς Χώροι	40
15. Τοπικά Συμπαγείς Χώροι	44
1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων	46
2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων	48
3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων	49
4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων	50
5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων	51

1. Τοπολογικοί Χώροι - Βάσεις - Υποβάσεις

Ορισμός.

(1) *Ένας τοπολογικός χώρος είναι ένα ζευγάρι* $(X, \mathscr{T})$*, όπου* X *είναι ένα σύνολο και* $\mathscr{T}$ *μια οικογένεια υποσυνόλων του* X *τέτοια ώστε:*
   (α') $\emptyset, X \in \mathscr{T}$.
   (β') *Η* $\mathscr{T}$ *είναι κλειστή ως προς τις (αυθαίρετες) ενώσεις. Δηλαδή αν* $G_i \in \mathscr{T}$, $i \in I$, *τότε* $\bigcup_{i\in I} G_i \in \mathscr{T}$.
   (γ') *Η* $\mathscr{T}$ *είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Δηλαδή αν* $U, V \in \mathscr{T}$, *τότε* $U \cap V \in \mathscr{T}$.
   Η $\mathscr{T}$ *ονομάζεται τοπολογία και τα στοιχεία της ανοιχτά σύνολα.*

(2) *Αν* $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$ *είναι δυο τοπολογίες σε κάποιο σύνολο και* $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$, *τότε λέμε ότι η* $\mathscr{T}_2$ *είναι μεγαλύτερη ή ισχυρότερη από την* $\mathscr{T}_1$.

(3) *Έστω* $(X, \mathscr{T})$ *τοπολογικός χώρος και* $x \in X$. *Κάθε* $U \in \mathscr{T}$ *με* $x \in U$ *λέγεται περιοχή του* x.

Παράδειγμα. Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $D(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$ ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο x και ακτίνα r. Η οικογένεια

$$\mathscr{T}_\rho = \{G \subset X : \text{Για κάθε } x \in G \text{ υπάρχει } r \text{ τέτοιο ώστε } D(x,r) \subset G\} = \{G \subset X : G \text{ ανοιχτό ως προς την } \rho\}$$

είναι μια τοπολογία στο X. Λέμε ότι η $\mathscr{T}_\rho$ επάγεται από την μετρική.

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός χώρος* $(X, \mathscr{T})$ *λέγεται μετρικοποιήσιμος αν υπάρχει μετρική* ρ *στο* X *τέτοια ώστε* $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$ *(δηλαδή αν η τοπολογία επάγεται από μετρική).*

Παράδειγμα (Η τετριμμένη τοπολογία)**.** Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$ είναι μια τοπολογία. Η $\mathscr{T}$ είναι η μικρότερη τοπολογία που μπορεί να έχει το X. Αν το X έχει περισσότερα από ένα στοιχεία, η $\mathscr{T}$ δεν είναι μετρικοποίησιμη. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι $\mathscr{T} = \mathscr{T}_\rho$ για κάποια μετρική ρ. Επιλέγουμε $a, b \in X$ με $a \neq b$ και $0 < r < \rho(a, b)$. Τότε ο δίσκος $D(a, r)$ είναι σύνολο ανοιχτό, μη κενό και διαφορετικό από το X, άτοπο.

Παράδειγμα (Η διακριτή τοπολογία)**.** Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ (όλα τα υποσύνολα του X) είναι μια τοπολογία. Η $\mathscr{T}$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία που μπορεί να έχει το X και επάγεται από τη διακριτή μετρική

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x = y \\ 1, & \text{αν } x \neq y \end{cases}.$$

Παράδειγμα (Η συμπεπερασμένη τοπολογία)**.** Έστω X ένα σύνολο. Η οικογένεια

$$\mathscr{T} = \{G \subset X : X \setminus G \text{ πεπερασμένο}\} \cup \{\emptyset\}$$

είναι μια τοπολογία στο X. Αν το X είναι πεπερασμένο, τότε η $\mathscr{T}$ είναι η διακριτή τοπολογία. Αν το X είναι άπειρο τότε η $\mathscr{T}$ δεν είναι μετρικοποιήσιμη διότι κάθε δυο μη κενά ανοιχτά σύνολα τέμνονται (σε ένα μετρικό χώρο με δυο τουλάχιστο σημεία μπορούμε πάντα να βρούμε δυο μη κενά ξένα ανοιχτά σύνολα).

Ορισμός. *Έστω* $(X, \mathscr{T})$ *ένας τοπολογικός χώρος και* $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$. *Η* $\mathscr{B}$ *λέγεται βάση για την* $\mathscr{T}$ *αν κάθε ανοιχτό σύνολο είναι ένωση συνόλων της* $\mathscr{B}$, *δηλαδή για κάθε* $G \in \mathscr{T}$ *υπάρχουν* $B_i \in \mathscr{B}$, $i \in I$, *τέτοια ώστε* $G = \bigcup_{i\in I} B_i$.

Θεώρημα.

(1) *Έστω* $(X, \mathscr{T})$ *ένας τοπολογικός χώρος και* $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$. *Η* $\mathscr{B}$ *είναι βάση για την* $\mathscr{T}$ *αν και μόνο αν για κάθε* $G \in \mathscr{T}$ *και κάθε* $x \in G$ *υπάρχει* $B \in \mathscr{B}$ *τέτοιο ώστε* $x \in B \subset G$.

(2) *Έστω* $(X, \mathscr{T})$ *ένας τοπολογικός χώρος και* $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ *μια βάση για την* $\mathscr{T}$. *Ένα σύνολο* $G \subset X$ *είναι ανοιχτό αν και μόνο αν για κάθε* $x \in G$ *υπάρχει* $B \in \mathscr{B}$ *τέτοιο ώστε* $x \in B \subset G$.

Απόδειξη.

(1) ($\Rightarrow$) Έστω $G \subset X$ ανοιχτό και $x \in G$. Αφού η $\mathscr{B}$ είναι βάση υπάρχουν $B_i \in \mathscr{B}$, $i \in I$, τέτοια ώστε $G = \bigcup_{i\in I} B_i$. Επομένως υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $x \in B_{i_0} \subset G$.
($\Leftarrow$) Έστω $G \subset X$ ανοιχτό. Από υπόθεση, για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_x \subset G$. Επομένως $G = \bigcup_{x\in G} B_x$, δηλαδή το G είναι ένωση συνόλων της $\mathscr{B}$.

(2) ($\Rightarrow$) Ακριβώς όπως το ($\Rightarrow$) του (1).
($\Leftarrow$) Έστω $G \subset X$ ένα σύνολο που ικανοποιεί την υπόθεση. Τότε για κάθε $x \in G$ υπάρχει $B_x \in \mathscr{B}$

τέτοιο ώστε $x \in B_x \subset G$. Άρα $G = \bigcup_{x \in G} B_x$. Επομένως το G είναι ανοιχτό σαν ένωση ανοιχτών συνόλων.

□

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε τοπολογικό χώρο η ίδια η τοπολογία είναι μια βάση για την τοπολογία.

(2) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος. Οι οικογένειες

$$\{D(x,r) : x \in X,\ r > 0\}, \quad \{D(x, 1/n) : x \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$$

είναι βάσεις για την $\mathscr{T}_\rho$.

(3) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία (αυτήν που επάγει η συνηθισμένη μετρική), οι οικογένειες

$$\{(a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}, \quad \{(p,q) : p, q \in \mathbb{Q},\ p < q\}$$

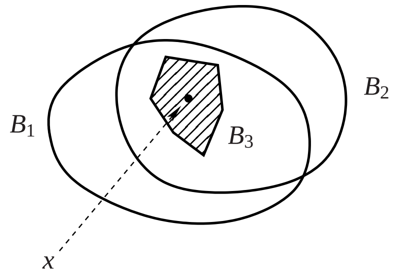
είναι βάσεις (όλα τα ανοιχτά διαστήματα και όλα τα ανοιχτά διαστήματα με ρητά άκρα).

(4) Σ'ένα διακριτό τοπολογικό χώρο X (δεν θα γράφουμε $(X, \mathscr{T})$ όταν η τοπολογία εννοείται ή όταν δεν υπάρχει περίπτωση να την μπερδέψουμε με κάποια άλλη), η οικογένεια $\{\{x\} : x \in X\}$ (όλα τα μονοσύνολα) είναι μια βάση.

Θεώρημα. *Έστω X ένα σύνολο και $\mathscr{B}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathscr{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία στο X αν και μόνο αν:*

(1) $\bigcup_{B \in \mathscr{B}} B = X$.

(2) *Για κάθε $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ και κάθε $x \in B_1 \cap B_2$ υπάρχει $B_3 \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*



Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω ότι η $\mathscr{B}$ είναι βάση για κάποια τοπολογία. Το X είναι ανοιχτό άρα υπάρχουν $B_i \in \mathscr{B}$, $i \in I$, τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i \in I} B_i$, επομένως $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$. Τώρα, έστω $B_1, B_2 \in \mathscr{B}$ και $x \in B_1 \cap B_2$. Το $B_1 \cap B_2$ είναι ανοιχτό, άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει $B_3 \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

($\Leftarrow$) Θέτουμε

$$\mathscr{T} = \{G \subset X : \text{Για κάθε } x \in G \text{ υπάρχει } B \in \mathscr{B} \text{ τέτοιο ώστε } x \in B \subset G\}.$$

Τότε η $\mathscr{T}$ είναι μια τοπολογία η οποία έχει βάση την $\mathscr{B}$. Πράγματι, είναι προφανές ότι $\emptyset \in \mathscr{T}$ και ότι η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις. Το ότι $X \in \mathscr{T}$ συνεπάγεται από το (1). Το ότι η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές συνεπάγεται από το (2). Τέλος, το ότι η $\mathscr{B}$ είναι βάση προκύπτει από το ότι $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ και το προηγούμενο θεώρημα. □

Παρατήρηση. Μια οικογένεια υποσυνόλων η οποία είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές ικανοποιεί αυτομάτως τη δεύτερη συνθήκη στο προηγούμενο θεώρημα (για B_3 παίρνουμε το ίδιο το $B_1 \cap B_2$). Επομένως για να ελέγξουμε αν είναι βάση αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιεί μόνο την πρώτη. Το αντίστροφο, φυσικά, δεν ισχύει. Μια βάση δεν είναι κατ'ανάγκη κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}^2$, η τομή δυο ανοιχτών δίσκων δεν είναι ποτέ δίσκος (εκτός κι'αν ο ένας περιέχεται στον άλλο).

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$ η οικογένεια

$$\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b, +\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

ικανοποιεί την πρώτη αλλά όχι τη δεύτερη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος, άρα δεν είναι βάση για καμία τοπολογία.

Παράδειγμα (Η τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων)**.** Στο $\mathbb{R}$ η οικογένεια

$$\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

ικανοποιεί τις δυο συνθήκες του προηγούμενου θεωρήματος, άρα είναι βάση για κάποια τοπολογία $\mathscr{T}$. Η $\mathscr{T}$ είναι γνήσια ισχυρότερη από τη συνηθισμένη τοπολογία $\mathscr{T}_\rho$. Πράγματι για κάθε ανοιχτό διάστημα έχουμε

$$(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{1}{n}\right] \in \mathscr{T}.$$

Δηλαδή όλα τα ανοιχτά διαστήματα ανήκουν στην $\mathscr{T}$. Αλλά κάθε ανοιχτό σύνολο ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία είναι ένωση ανοιχτών διαστημάτων. Άρα $\mathscr{T}_\rho \subset \mathscr{T}$. Απ'την άλλη, $(a,b] \notin \mathscr{T}_\rho$, επομένως $\mathscr{T}_\rho \subsetneq \mathscr{T}$.

Θεώρημα. *Έστω X ένα σύνολο και $\mathscr{C}$ μια αυθαίρετη οικογένεια υποσυνόλων του X. Τότε η οικογένεια*

$$\mathscr{B}_{\mathscr{C}} = \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} C_k : C_k \in \mathscr{C},\ k = 1,\dots,n,\ n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{X\}$$

(όλες οι πεπερασμένες τομές συνόλων της $\mathscr{C}$) είναι βάση για μια τοπολογία στο X. Η τοπολογία αυτή συμβολίζεται με $\tau(\mathscr{C})$ και είναι η μικρότερη τοπολογία η οποία περιέχει την $\mathscr{C}$. Η $\mathscr{C}$ ονομάζεται υποβάση της $\tau(\mathscr{C})$ και λέμε ότι η $\mathscr{C}$ παράγει την $\tau(\mathscr{C})$.

Απόδειξη. Αφού $X \in \mathscr{B}_{\mathscr{C}}$, η $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$ προφανώς ικανοποιεί την πρώτη συνθήκη του προηγούμενου θεωρήματος. Επίσης, η $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, άρα ικανοποιεί και τη δεύτερη συνθήκη. Επομένως είναι βάση για κάποια τοπολογία $\tau(\mathscr{C})$. Έστω τώρα $\mathscr{T}$ μια άλλη τοπολογία στο X τέτοια ώστε $\mathscr{C} \subset \mathscr{T}$. Κάθε σύνολο της $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$ είναι πεπερασμένη τομή συνόλων της $\mathscr{C}$. Αφού η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές, έχουμε ότι $\mathscr{B}_{\mathscr{C}} \subset \mathscr{T}$. Τώρα, κάθε σύνολο της $\tau(\mathscr{C})$ είναι ένωση συνόλων της $\mathscr{B}_{\mathscr{C}}$. Επομένως $\tau(\mathscr{C}) \subset \mathscr{T}$ διότι η $\mathscr{T}$ είναι κλειστή ως προς τις ενώσεις. Συνεπώς η $\tau(\mathscr{C})$ είναι η μικρότερη τοπολογία που περιέχει την $\mathscr{C}$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Η $\tau(\mathscr{C})$ αποτελείται από όλες τις δυνατές ενώσεις όλων των δυνατών πεπερασμένων τομών συνόλων της $\mathscr{C}$.
(2) Αν το X έχει ήδη κάποια τοπολογία $\mathscr{T}$ με βάση $\mathscr{B}$, τότε $\tau(\mathscr{B}) = \tau(\mathscr{T}) = \mathscr{T}$.
(3) Μια δεδομένη οικογένεια $\mathscr{C}$ μπορεί να μην είναι βάση για κάποια τοπολογία. Είναι όμως πάντα υποβάση της $\tau(\mathscr{C})$. Με αυτή την έννοια, κάθε οικογένεια υποσυνόλων «παράγει μια τοπολογία».

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$, η οικογένεια

$$\{(-\infty,a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

παράγει τη συνηθισμένη τοπολογία (αλλά δεν είναι βάση της). Ομοίως, η οικογένεια

$$\{(-\infty,a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(b,+\infty) : b \in \mathbb{R}\}$$

παράγει την τοπολογία των αριστερά ημιάνοικτων διαστημάτων (αλλά δεν είναι βάση της).

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $x \in X$. Μια οικογένεια $\mathscr{B}$ από ανοιχτά σύνολα λέγεται βάση περιοχών του x, αν:*

(1) *Για κάθε $B \in \mathscr{B}$ έχουμε $x \in \mathscr{B}$.*
(2) *Για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $B \in \mathscr{B}$ τέτοιο ώστε $B \subset U$.*

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία η οικογένεια $\{(x - 1/n, x + 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση περιοχών του x.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων η οικογένεια $\{(x-1/n, x] : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση περιοχών του x. Η οικογένεια του προηγούμενου παραδείγματος δεν είναι βάση περιοχών κανενός σημείου διότι, για παράδειγμα, στο διάστημα $(-\infty, x]$, το οποίο είναι περιοχή του x, δεν περιέχεται ανοιχτό διάστημα με κέντρο το x.

2. Κλειστότητα και Εσωτερικό

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου λέγεται κλειστό αν το συμπλήρωμά του είναι ανοιχτό.*

Παρατήρηση. Η οικογένεια των κλειστών συνόλων είναι κλειστή ως προς τις (αυθαίρετες) τομές και τις πεπερασμένες ενώσεις.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, το $(a,b]$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό, το $\mathbb{Z}$ είναι κλειστό, όχι ανοιχτό, και το $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ δεν είναι ούτε ανοιχτό ούτε κλειστό.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων, το $(a,b]$ είναι ανοιχτό και κλειστό, και τα $\mathbb{Z}$, $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστά, όχι ανοιχτά.
(3) Σ' ένα διακριτό χώρο, όλα τα σύνολα είναι ανοιχτά και κλειστά.
(4) Σ' χώρο με τη συμπεπερασμένη τοπολογία ένα σύνολο είναι κλειστό αν και μόνο αν είναι πεπερασμένο ή κενό ή ολόκληρος ο χώρος.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Η κλειστότητα του A ορίζεται να είναι*

$$\overline{A} = \operatorname{cl} A = \bigcap_{\substack{F \text{ κλειστό} \\ A \subset F}} F.$$

Τα σημεία του $\overline{A}$ λέγονται οριακά σημεία του A.

Παρατηρήσεις.

(1) Το $\overline{A}$ είναι το μικρότερο κλειστό υπερσύνολο του A και είναι, φυσικά, μη κενό αν το A είναι μη κενό.
(2) Το A είναι κλειστό αν και μόνο αν $A = \overline{A}$.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων, $\overline{(a,b)} = (a,b]$.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{R}$.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $A \subset X$, και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν για κάθε περιοχή U του x έχουμε $U \cap A \neq \emptyset$, δηλαδή το x είναι οριακό σημείο του A αν και μόνο αν κάθε περιοχή του x τέμνει το A.*

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω $x \in \overline{A}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $U \cap A = \emptyset$. Τότε το $X \setminus U$ είναι κλειστό και $A \subset X \setminus U$. Άρα $\overline{A} \subset X \setminus U$. Ιδιαίτερα, $x \notin U$, άτοπο.
($\Leftarrow$) Έστω ότι κάθε περιοχή του x τέμνει το A και ας υποθέσουμε ότι $x \notin \overline{A}$. Τότε το $X \setminus \overline{A}$ είναι περιοχή του x. Άρα $A \cap (X \setminus \overline{A}) \neq \emptyset$, άτοπο διότι $A \subset \overline{A}$.

□

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A, B \subset X$. Τότε:*

(1) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
(2) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
(3) $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Απόδειξη.

(1) Το $\overline{B}$ είναι κλειστό και περιέχει το A, άρα $\overline{A} \subset \overline{B}$.
(2) Το $\overline{A} \cup \overline{B}$ είναι κλειστό και περιέχει το $A \cup B$, άρα $\overline{(A \cup B)} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Απ' την άλλη, το (1) δίνει $\overline{A} \subset \overline{(A \cup B)}$ και $\overline{B} \subset \overline{(A \cup B)}$. Επομένως $\overline{(A \cup B)} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$.
(3) Από το (1) έχουμε $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A}$ και $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{B}$. Άρα $\overline{(A \cap B)} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Το (2) στο προηγούμενο θεώρημα, γενικά, δεν ισχύει για άπειρες ενώσεις. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία

$$\overline{\bigcup_{0<x<1} \{x\}} = \overline{(0,1)} = [0,1] \neq (0,1) = \bigcup_{0<x<1} \overline{\{x\}}.$$

(2) Στο (3) του προηγούμενου θωρήματος, δεν έχουμε γενικά ισότητα: στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία
$$\overline{(0,1)\cap(1,2)} = \emptyset \neq \{1\} = \overline{(0,1)} \cap \overline{(1,2)}.$$

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X λέγεται πυκνό αν $\overline{A} = X$.*

Παράδειγμα. Το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία και την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Το εσωτερικό του A ορίζεται να είναι*
$$A^\circ = \operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{G \text{ ανοιχτό} \\ G \subset A}} G.$$
Τα σημεία του A° λέγονται εσωτερικά σημεία του A.

Παρατηρήσεις.

(1) Το A° είναι το μεγαλύτερο ανοιχτό υποσύνολο του A και μπορεί να είναι κενό για μη κενό A.
(2) Το A είναι ανοιχτό αν και μόνο αν $A = A^\circ$, δηλαδή αν όλα τα σημεία του είναι εσωτερικά.
(3) Ένα $x \in X$ είναι εσωτερικό σημείο του A αν και μόνο αν υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $U \subset A$.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων, $[a,b]^\circ = (a,b]$.
(2) Στο $\mathbb{R}$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία, $[a,b]^\circ = \emptyset$.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A, B \subset X$. Τότε:*

(1) $A \subset B \Rightarrow A^\circ \subset B^\circ$.
(2) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(3) $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$.

Απόδειξη.

(1) Το A° είναι ανοιχτό υποσύνολο του B, άρα $A^\circ \subset B^\circ$.
(2) Το $A^\circ \cap B^\circ$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $A \cap B$, άρα $A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cap B)^\circ$. Επίσης, από το (1), $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ$ και $(A \cap B)^\circ \subset B^\circ$, επομένως $(A \cap B)^\circ \subset A^\circ \cap B^\circ$.
(3) Το (1) δίνει $A^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ και $B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$. Άρα $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Το (2) στο προηγούμενο θεώρημα, γενικά, δεν ισχύει για άπειρες τομές. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία
$$\left(\bigcap_{x>0}(-x,x)\right)^\circ = \{0\}^\circ = \emptyset \neq \{0\} = \bigcap_{x>0}(-x,x)^\circ.$$
(2) Στο (3) του προηγούμενου θωρήματος, δεν έχουμε γενικά ισότητα: στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία
$$([0,1]\cup[1,2])^\circ = (0,2) \neq (0,1)\cup(1,2) = [0,1]^\circ \cup [1,2]^\circ.$$

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε:*

(1) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
(2) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.

Απόδειξη.

(1) Το $X \setminus A^\circ$ είναι κλειστό και περιέχει το $X \setminus A$, άρα $\overline{X \setminus A} \subset X \setminus A^\circ$. Έστω τώρα $x \notin A^\circ$. Τότε για κάθε περιοχή U του x έχουμε $U \not\subset A$, το οποίο σημαίνει ότι $U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$. Άρα $x \in \overline{X \setminus A}$, δηλαδή $X \setminus A^\circ \subset \overline{X \setminus A}$.
(2) Εφαρμόζουμε το (1) με το $X \setminus A$ στη θέση του A και παίρνουμε συμπληρώματα στη σχέση που προκύπτει.

□

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $A \subset X$, και $x \in X$. Το x λέγεται σημείο συσσώρευσης του A αν για κάθε περιοχή U του x έχουμε $A \cap U \setminus \{x\} \neq \emptyset$, δηλαδή αν κάθε περιοχή του x περιέχει σημεία του A διαφορετικά από το x. Το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A ονομάζεται παράγωγο σύνολο του A και συμβολίζεται με A'. Ένα σημείο του A το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης λέγεται μεμονωμένο.*

Παρατήρηση. Προφανώς κάθε σημείο συσσώρευσης ενός συνόλου είναι οριακό σημείο. Το αντίστροφο φυσικά δεν ισχύει. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, $\mathbb{Z}' = \emptyset$.

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων, το a δεν είναι σημείο συσσώρευσης του διαστήματος $[a, b]$, ενώ το b είναι (σε αντίθεση με τη συνηθισμένη τοπολογία, στην οποία και τα δύο άκρα κάθε τύπου διαστήματος είναι σημεία συσσώρευσης).

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subset X$. Τότε $\overline{A} = A \cup A'$.*

Απόδειξη. Κάθε σημείο συσσώρευσης είναι οριακό σημείο, άρα $A \cup A' \subset \overline{A}$. Αντίστροφα, έστω $x \in \overline{A}$. Αν $x \in A$ τότε τελειώσαμε. Έστω λοιπόν ότι $x \notin A$. Τότε για κάθε περιοχή U του x έχουμε ότι η τομή $U \cap A$ είναι μη κενή (αφού το x είναι οριακό σημείο) και δεν περιέχει το x (αφού $x \notin A$). Επομένως $U \cap A \setminus \{x\} = U \cap A \neq \emptyset$, το οποίο σημαίνει ότι $x \in A'$. □

3. Σύγκλιση

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία, και $x \in X$. Λέμε ότι η x_n συγκλίνει στο x και γράφουμε $x_n \to x$, αν για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $x_n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Σ' ένα μετρικό χώρο, ο προηγούμενος ορισμός συμπίπτει με τον γνωστό ορισμό της σύγκλισης.
(2) Αν σ' ένα σύνολο έχουμε δυο τοπολογίες, η μία ισχυρότερη της άλλης, τότε σύγκλιση ως προς την ισχυρή τοπολογία συνεπάγεται σύγκλιση ως προς την ασθενή τοπολογία.
(3) Σ' ένα γενικό τοπολογικό χώρο, μια ακολουθία μπορεί να συγκλίνει σε περισσότερα από ένα σημεία. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{N}$ με την συμπεπερασμένη τοπολογία, η ακολουθία $x_n = n$ συγκλίνει σε κάθε φυσικό αριθμό. Πράγματι, έστω U μια περιοχή οποιουδήποτε φυσικού αριθμού. Το σύνολο $\mathbb{N} \setminus U$ είναι πεπερασμένο, άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subset U$. Επομένως $x_n = n \in U$ για κάθε $n \geq n_0$.

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε τοπολογικό χώρο, μια τελικά σταθερή ακολουθία συγκλίνει (τελικά σταθερή σημαίνει ότι υπάρχουν x και n_0 τέτοια ώστε $x_n = x$ για κάθε $n \geq n_0$).
(2) Σ' ένα διακριτό χώρο, μια ακολουθία συγκλίνει αν και μόνο αν είναι τελικά σταθερή διότι τα μονοσύνολα είναι περιοχές.
(3) Στον τετριμμένο τοπολογικό χώρο, κάθε ακολουθία συγκλίνει σε κάθε σημείο διότι η μοναδική περιοχή οποιουδήποτε σημείου είναι ολόκληρος ο χώρος.
(4) Στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων η ακολουθία $1/n$ δεν συγκλίνει. Πράγματι, αν συνέκλινε θα έπρεπε να συγκλίνει στο 0 διότι η τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι ισχυρότερη της συνηθισμένης. Αλλά αυτό είναι αδύνατο αφού η ακολουθία αποφεύγει εξ' ολοκλήρου την περιοχή $(-\infty, 0]$.

Σ' ένα γενικό τοπολογικό χώρο, οι ακολουθίες μπορεί να μην επαρκούν για να περιγράψουν μια σειρά από έννοιες για τις οποίες στην περίπτωση ενός μετρικού χώρου είναι διαθέσιμος ικανοποιητικός ακολουθιακός χαρακτηρισμός. Για παράδειγμα, υπάρχει ένας τοπολογικός χώρος X, ένα σύνολο $A \subset X$, και ένα $x \in \overline{A}$, έτσι ώστε καμία ακολουθία σημείων του A δεν συγκλίνει στο x (αν δεν γνωρίζετε θεωρία συνόλων αγνοήστε αυτήν την παρένθεση. Έστω ω_1 ο πρώτος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Στο σύνολο $X = [0, \omega_1]$ θεωρούμε την τοπολογία η οποία έχει για βάση όλα τα διαστήματα της μορφής $(\zeta, \xi]$, όπου $\zeta < \xi \leq \omega_1$ (μαζί με το $\{0\}$). Θέτουμε $A = [0, \omega_1)$. Τότε $\overline{A} = X$. Αλλά το supremum οποιασδήποτε ακολουθίας αριθμήσιμων διατακτικών αριθμών είναι αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός, επομένως δεν υπάρχει ακολουθία στο A η οποία να συγκλίνει στο ω_1). Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί γενικεύοντας την έννοια της ακολουθίας. Αυτό θα γίνει μέσω των παρακάτω ορισμών.

Ορισμός. *Ένα προδιατεταγμένο σύνολο είναι ένα ζευγάρι $(\Lambda, \leq)$ όπου Λ είναι ένα σύνολο και $\leq$ μια διμελής σχέση στο Λ τέτοια ώστε:*

- *$\lambda \leq \lambda$ για κάθε $\lambda \in \Lambda$ (αυτοπάθεια).*
- *Για κάθε $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$, αν $\lambda \leq \mu$ και $\mu \leq \nu$ τότε $\lambda \leq \nu$ (μεταβατικότητα).*

Παράδειγμα. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε $z \leq w$ αν και μόνο αν $|z| \leq |w|$. Τότε το $(\mathbb{C}, \leq)$ είναι προδιατεταγμένο.

Ορισμός. *Ένα κατευθυνόμενο σύνολο είναι ένα προδιατεταγμένο σύνολο $(\Lambda, \leq)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, υπάρχει $\lambda_3 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $\lambda_1 \leq \lambda_3$ και $\lambda_2 \leq \lambda_3$.*

Παραδείγματα.

(1) Το $(\mathbb{N}, \leq)$, όπου $\leq$ είναι η συνηθισμένη διάταξη, είναι κατευθυνόμενο σύνολο: αν για $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ θέσουμε $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$ τότε $n_1 \leq n_3$ και $n_2 \leq n_3$.
(2) Έστω X τοπολογικός χώρος, $x \in X$ κάποιο σημείο, και $\mathscr{B}_x$ μια βάση περιοχών του x. Τότε το $(\mathscr{B}_x, \supset)$ είναι κατευθυνόμενο. Πράγματι, αν $B_1, B_2 \in \mathscr{B}_x$ τότε το $B_1 \cap B_2$ είναι περιοχή του x, άρα υπάρχει $B_3 \in \mathscr{B}_x$ τέτοιο ώστε $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Δηλαδή $B_3 \subset B_1$ και $B_3 \subset B_2$.

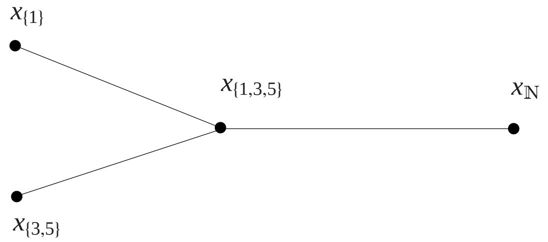
Ορισμός. *Έστω X ένα σύνολο, και $(\Lambda, \leq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Μια συνάρτηση $x : \Lambda \to X$ λέγεται δίκτυο στο X. Γράφουμε x_λ αντί $x(\lambda)$ και φανταζόμαστε το x_λ σαν τον «λ-οστό» όρο του δικτύου.*

Παρατηρήσεις.

(1) Μια ακολουθία είναι ειδική περίπτωση δικτύου, όπου $(\Lambda, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$.

(2) Σε μια ακολουθία x_n οι δείκτες, δηλαδή οι φυσικοί αριθμοί, είναι συγκρίσιμοι: το x_4 είναι «μετά» το x_1 και «πριν» το x_{10}.

Σε ένα δίκτυο x_λ, $\lambda \in \Lambda$, το μόνο που ξέρουμε είναι ότι για κάθε δύο όρους $x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}$ υπάρχει κάποιος τρίτος όρος x_{λ_3} ο οποίος είναι «μετά» από τους x_{λ_1} και x_{λ_2}. Οι δείκτες λ_1 και λ_2 μπορεί, κάλλιστα, να μην είναι μεταξύ τους συγκρίσιμοι. Για παράδειγμα, αν πάρουμε $(\Lambda, \leq) = (\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subset)$, τότε ο όρος $x_{\{1,3,5\}}$ είναι «πριν» τον όρο $x_{\mathbb{N}}$ και «μετά» τους όρους $x_{\{3,5\}}$ και $x_{\{1\}}$, αλλά ο $x_{\{1\}}$ δεν είναι ούτε «πριν» ούτε «μετά» τον $x_{\{3,5\}}$.



(3) Σε ένα δίκτυο δεν έχει γενικά νόημα να μιλήσουμε για τον «επόμενο» ή τον «προηγούμενο» ενός όρου. Για παράδειγμα, στο δίκτυο $x_q = \sin q$, $q \in \mathbb{Q}$, όπου το $\mathbb{Q}$ έχει τη συνηθισμένη διάταξη, κανένας όρος δεν έχει ούτε επόμενο, ούτε προηγούμενο, παρά το ότι όλοι οι δείκτες, δηλαδή οι ρητοί αριθμοί, είναι μεταξύ τους συγκρίσιμοι.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $x_\lambda \in X$, $\lambda \in \Lambda$, ένα δίκτυο, και $x \in X$. Λέμε ότι το x_λ συγκλίνει στο x και γράφουμε $x_\lambda \to x$, αν για κάθε περιοχή U του x, υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.*

Παρατηρήσεις.

(1) Αν $\mathscr{B}_x$ είναι μια βάση περιοχών του x, τότε $x_\lambda \to x$ αν και μόνο αν για κάθε $U \in \mathscr{B}_x$ υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.

(2) Προσέξτε τη διαφορά ανάμεσα στον ορισμό της συγκλίνουσας ακολουθίας και του συγκλίνοντος δικτύου. Ο ακολουθιακός ορισμός είναι ισοδύναμος με το ότι για κάθε περιοχή του x το πολύ πεπερασμένο πλήθος όρων της ακολουθίας βρίσκονται έξω από την περιοχή, διότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : n < n_0\}$ είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση ενός δικτύου δεν μπορούμε, γενικά, να πούμε κάτι για το σύνολο $\{\lambda \in \Lambda : \lambda \ngeq \lambda_0\}$. Έτσι δεν αποκλείεται να έχουμε άπειρους όρους του δικτύου έξω από κάποια περιοχή του x.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, θεωρούμε το δίκτυο x_r, $r \in \mathbb{Z}$ (το $\mathbb{Z}$ έχει τη συνηθισμένη διάταξη), όπου

$$x_r = \begin{cases} r, & \text{αν } r \leq 0 \\ 1/r, & \text{αν } r > 0 \end{cases}.$$

Τότε $x_r \to 0$. Παρά ταύτα, άπειροι όροι του δικτύου βρίσκονται έξω από κάθε φραγμένη περιοχή του 0. Επίσης το δίκτυο αυτό, αν και συγκλίνει, δεν είναι φραγμένο. Αν τώρα, με αυθαίρετο τρόπο, αναδιατάξουμε τους όρους του δικτύου ώστε να το γράψουμε σαν ακολουθία, δηλαδή $\{x_r : r \in \mathbb{Z}\} = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε η y_n **δεν** συγκλίνει γιατί δεν είναι φραγμένη.

(2) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, θεωρούμε το δίκτυο $x_a = a$, $a \in \mathbb{R}$ (το $\mathbb{R}$ έχει τη συνηθισμένη διάταξη). Τότε το x_a δεν συγκλίνει σε κανένα πραγματικό αριθμό. Ως προς τη συμπεπερασμένη τοπολογία, το x_a συγκλίνει σε κάθε πραγματικό αριθμό.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος, $A \subset X$, και $x \in X$. Τότε $x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει δίκτυο $x_\lambda \in A$, $\lambda \in \Lambda$, τέτοιο ώστε $x_\lambda \to x$.*

Απόδειξη.

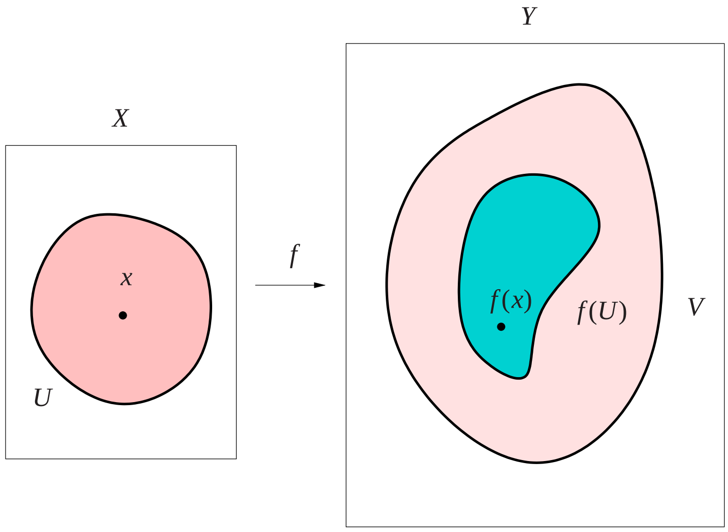
($\Rightarrow$) Έστω $(\mathscr{N}, \supset)$ η οικογένεια όλων των περιοχών του x με σχέση διάταξης το αντίστροφο περιέχεσθαι, δηλαδή $U \leq V$ αν και μόνο αν $U \supset V$. Το $(\mathscr{N}, \supset)$ είναι κατευθυνόμενο γιατί αν U και V είναι δυο περιοχές του x τότε η $U \cap V$ είναι περιοχή του x και $U \cap V \subset U$, $U \cap V \subset V$. Αφού $x \in \overline{A}$, έχουμε ότι για κάθε $U \in \mathscr{N}$ υπάρχει $x_U \in A \cap U$. Τότε το δίκτυο x_U, $U \in \mathscr{N}$, συγκλίνει στο x. Πράγματι αν W είναι τυχούσα περιοχή του x, τότε για κάθε $U \in \mathscr{N}$ με $U \subset W$ έχουμε $x_U \in U \subset W$.

($\Leftarrow$) Έστω $x_\lambda \in A$, $\lambda \in \Lambda$, ένα δίκτυο στο A τέτοιο ώστε $x_\lambda \to x$. Θα δείξουμε ότι $x \in \overline{A}$. Έστω λοιπόν U μια περιοχή του x. Τότε υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_{\lambda_0} \in U$. Δηλαδή $x_{\lambda_0} \in A \cap U$, άρα $U \cap A \neq \emptyset$, επομένως $x \in \overline{A}$.

□

4. Συνέχεια

Ορισμός. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, και $x \in X$. Η f λέγεται συνεχής στο x αν για κάθε περιοχή $V \subset Y$ του $f(x)$ υπάρχει περιοχή $U \subset X$ του x τέτοια ώστε $f(U) \subset V$. Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X τότε λέγεται συνεχής.*



Παραδείγματα.

(1) Κάθε σταθερή συνάρτηση, ανάμεσα σε δυο τυχόντες τοπολογικούς χώρους, είναι συνεχής.
(2) Κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διακριτό χώρο είναι συνεχής.

Θεώρημα. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι, $f : X \to Y$ μια συνάρτηση, και $x \in X$. Η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε δίκτυο $x_\lambda \in X$, $\lambda \in \Lambda$, με $x_\lambda \to x$, έχουμε $f(x_\lambda) \to f(x)$.*

Απόδειξη.

($\Rightarrow$) Έστω $x_\lambda \in X$, $\lambda \in \Lambda$, ένα δίκτυο με $x_\lambda \to x$, και V μια περιοχή του $f(x)$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $f(U) \subset V$. Αφού το x_λ συγκλίνει στο x. Υπάρχει $\lambda_0 \in \Lambda$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Επομένως $f(x_\lambda) \in f(U) \subset V$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε υπάρχει περιοχή V του $f(x)$ τέτοια ώστε για κάθε περιοχή U του x έχουμε $f(U) \not\subset V$. Επομένως για κάθε περιοχή U του x υπάρχει $x_U \in U$ τέτοιο ώστε $f(x_U) \notin V$. Έστω τώρα $\mathcal{N}$ η οικογένεια όλων των περιοχών του x διατεταγμένη με τη σχέση του αντίστροφου περιέχεσθαι. Τότε το δίκτυο x_U, $U \in \mathcal{N}$, συγκλίνει στο x, άρα από υπόθεση $f(x_U) \to f(x)$. Επομένως υπάρχει $U_0 \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $f(x_{U_0}) \in V$, άτοπο.

□

Θεώρημα. *Έστω $f : X \to Y$ μια συνάρτηση ανάμεσα σε δυο τοπολογικούς χώρους. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f είναι συνεχής.*
(2) *Για κάθε $G \subset Y$ ανοιχτό, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό.*
(3) *Για κάθε $F \subset Y$ κλειστό, το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.*
(4) *Για κάθε $A \subset A$, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.*

Απόδειξη.

(1) $\Rightarrow$ (2) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε σημείο του $f^{-1}(G)$ είναι εσωτερικό. Έστω λοιπόν $x \in f^{-1}(G)$. Τότε $f(x) \in G$, άρα το G είναι περιοχή του $f(x)$, επομένως υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $f(U) \subset G$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $U \subset f^{-1}(f(U)) \subset f^{-1}(G)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Έστω $x \in X$ και V μια περιοχή του $f(x)$. Από υπόθεση, το $U := f^{-1}(V)$ είναι ανοιχτό, άρα είναι περιοχή του x. Αλλά $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω $F \subset Y$ κλειστό. Τότε το $Y \setminus F$ είναι ανοιχτό, άρα από υπόθεση το $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ είναι ανοιχτό, επομένως το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

(3) $\Rightarrow$ (2) Τελείως ανάλογα με το προηγούμενο.

(3) $\Rightarrow$ (4) Το $\overline{f(A)}$ είναι κλειστό άρα, από υπόθεση, το $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ είναι κλειστό. Επίσης, $A \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Επομένως $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$. Συνεπώς $f\left(\overline{A}\right) \subset f\left(f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)\right) \subset \overline{f(A)}$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Έστω $F \subset Y$ κλειστό. Από υπόθεση έχουμε $f\left(\overline{f^{-1}(F)}\right) \subset \overline{f(f^{-1}(F))} \subset \overline{F} = F$. Επομένως $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(F)$, άρα το $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό.

□

Παρατηρήσεις.

(1) Η συνεπαγωγή (2) $\Rightarrow$ (1) εξακολουθεί να ισχύει αν αντί της αντίστροφης εικόνας κάθε ανοιχτού συνόλου, πάρουμε την αντίστροφη εικόνα κάθε συνόλου μιας βάσης για την τοπολογία του Y.

(2) Η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής:

$$x_\lambda \to x \Rightarrow f(x_\lambda) \to f(x) \Rightarrow g(f(x_\lambda)) \to g(f(x)).$$

Παράδειγμα. Έστω $\mathscr{T}$ η τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g : (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ (το πεδίο τιμών έχει τη συνηθισμένη τοπολογία), με τύπους

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ 1, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}.$$

Τότε η f είναι συνεχής διότι η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε συνόλου είναι το $\emptyset$, ή το $\mathbb{R}$, ή το $(0, +\infty)$, ή το $(-\infty, 0]$. Όλα αυτά τα σύνολα είναι ανοιχτά. Η g δεν είναι συνεχής διότι η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε ανοιχτού διαστήματος περιέχει το 1 αλλά όχι το 0 είναι το μη ανοιχτό σύνολο $[0, +\infty)$. Φυσικά, καμία από τις δυο συναρτήσεις δεν είναι συνεχής ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία.

Ορισμός. *Έστω X, Y τοπολογικοί χώροι και $f : X \to Y$ μια αντιστρέψιμη (1-1 και επί) συνάρτηση. Η f λέγεται ομοιομορφισμός αν είναι συνεχής και έχει συνεχή αντίστροφη. Αν μεταξύ δυο τοπολογικών χώρων υπάρχει ομοιομορφισμός, τότε οι χώροι λέγονται ομοιομορφικοί.*

Θεώρημα. *Έστω $f : X \to Y$ μια αντιστρέψιμη συνάρτηση ανάμεσα σε δυο τοπολογικούς χώρους. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Η f είναι ομοιομορφισμός.*
(2) *Η f είναι συνεχής και για κάθε $G \subset X$ ανοιχτό, το $f(G)$ είναι ανοιχτό.*
(3) *Η f είναι συνεχής και για κάθε $F \subset X$ κλειστό, το $f(F)$ είναι κλειστό.*
(4) *Για κάθε $A \subset X$, $f\left(\overline{A}\right) = \overline{f(A)}$.*

Απόδειξη.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) Η $f^{-1} : Y \to X$ είναι συνεχής αν και μόνο για κάθε $G \subset X$ ανοιχτό, το $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ είναι ανοιχτό.

(2) $\Rightarrow$ (3) Έστω $F \subset X$ κλειστό. Τότε το $X \setminus F$ είναι ανοιχτό, άρα από υπόθεση το $f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$ είναι ανοιχτό, επομένως το $f(F)$ είναι κλειστό.

(3) $\Rightarrow$ (2) Τελείως ανάλογα με το προηγούμενο.

(3) $\Rightarrow$ (4) Από υπόθεση το $f\left(\overline{A}\right)$ είναι κλειστό. Επίσης $f(A) \subset f\left(\overline{A}\right)$. Άρα $\overline{f(A)} \subset f\left(\overline{A}\right)$. Αλλά η f είναι συνεχής, επομένως, από το προηγούμενο θεώρημα, $\overline{f(A)} \supset f\left(\overline{A}\right)$. Συνεπώς $\overline{f(A)} = f\left(\overline{A}\right)$

(4) $\Rightarrow$ (3) Έστω $F \subset X$ κλειστό. Τότε $f(F) = f\left(\overline{F}\right) = \overline{f(F)}$. Άρα το $f(F)$ είναι κλειστό. Επίσης, $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ για κάθε $A \subset X$, άρα η f είναι συνεχής από το προηγούμενο θεώρημα.

□

Παραδείγματα.

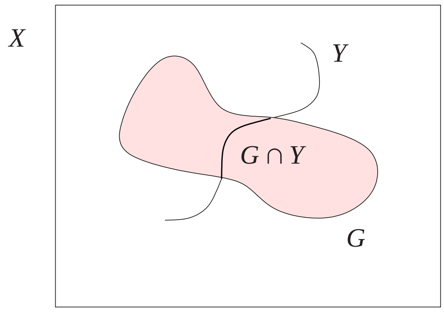
(1) Δυο αριθμήσιμοι διακριτοί χώροι είναι ομοιομορφικοί.

(2) Στο $\mathbb{R}$, η τοπολογία $\mathscr{T}$ των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων δεν είναι ομοιομορφική με την συνηθισμένη τοπολογία. Πράγματι, αν υπήρχε ομοιομορφισμός $f : (\mathbb{R}, \mathscr{T}) \to \mathbb{R}$ τότε το $f((a, b])$ θα ήταν μη κενό, διαφορετικό από το $\mathbb{R}$, ανοιχτό και κλειστό (ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία). Αυτό είναι άτοπο.

Παρατήρηση. Μια ιδιότητα λέγεται τοπολογική αν διατηρείται από κάθε ομοιομορφισμό. Έτσι δυο ομοιομορφικοί χώροι έχουν τις ίδιες τοπολογικές ιδιότητες, και επομένως από αυτή την άποψη τους ταυτίζουμε.

5. Η Σχετική Τοπολογία και η Τοπολογία Γινόμενο

Ορισμός. *Έστω $(X, \mathscr{T})$ τοπολογικός χώρος και $Y \subset X$. Η οικογένεια $\mathscr{T}_Y = \{G \cap Y : G \in \mathscr{T}\}$ είναι προφανώς μια τοπολογία στο Y. Η $\mathscr{T}_Y$ ονομάζεται σχετική τοπολογία του Y (ως προς την $\mathscr{T}$).*



Τα σύνολα της $\mathscr{T}_Y$ θα τα λέμε ανοιχτά στο Y. Ομοίως και με τις άλλες τοπολογικές έννοιες. Για παράδειγμα, θα μιλάμε για την κλειστότητα ενός συνόλου $A \subset Y$ ως προς τη σχετική τοπολογία και θα γράφουμε $\mathrm{cl}_Y(A)$, κ.τ.λ. Όταν λέμε απλώς «ανοιχτό», «κλειστό», κ.τ.λ. χωρίς κάποιον άλλο προσδιορισμό, θα εννοούμε ως προς την τοπολογία ολόκληρου του X.

Παρατηρήσεις.

(1) Θα έλεγε κανείς ότι ο λογικότερος τρόπος να ορίσει κανείς μια τοπολογία στο Y είναι να θεωρήσει την οικογένεια $\{G \in \mathscr{T} : G \subset Y\}$. Το πρόβλημα είναι ότι αν το Y δεν είναι ανοιχτό τότε η οικογένεια αυτή δεν είναι τοπολογία. Μάλιστα είναι δυνατό να αποτελείται μόνο από το κενό σύνολο.

(2) Η σχετική τοπολογία είναι η μικρότερη τοπολογία στο Y ως προς την οποία η ταυτοτική απεικόνιση $\varphi : Y \to X$, $\varphi(y) = y$, είναι συνεχής. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η σχετική τοπολογία ορίστηκε με τον τρόπο που ορίστηκε. Η συνέχεια της φ είναι η φυσιολογικότερη απαίτηση που μπορεί να έχει κανείς από μια τοπολογία στο Y η οποία είναι «συμβατή» με την τοπολογία ολόκληρου του X.

Παραδείγματα.

(1) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία θέτουμε $Y = [0, 1] \cup \{2\}$. Τότε τα σύνολα $[0, 1/2)$ και $\{2\}$ είναι ανοιχτά στο Y (αλλά όχι σ' ολόκληρο το $\mathbb{R}$).

(2) Στο $\mathbb{R}^2$ με τη συνηθισμένη τοπολογία θέτουμε $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$. Τότε το σύνολο $(0, 1) \times \{0\}$ είναι ανοιχτό στο Y. Παρατηρήστε ότι κανένα υποσύνολο του Y δεν είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}^2$ (το Y είναι μια ευθεία γραμμή). Το σημείο $\{(0, 0)\}$ δεν ανοιχτό στο Y διότι κανένας ανοιχτός δίσκος δεν μπορεί να τέμνει μια ευθεία σ' ένα μονοσύνολο.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $Y \subset X$. Τότε:*

(1) *Αν $\mathscr{B}$ είναι μια βάση (αντίστοιχα υποβάση) για την τοπολογία του X τότε η οικογένεια $\{B \cap Y : B \in \mathscr{B}\}$ είναι μια βάση (αντίστοιχα υποβάση) για τη σχετική τοπολογία του Y.*

(2) *Ένα σύνολο $A \subset Y$ είναι κλειστό στο Y αν και μόνο αν υπάρχει $F \subset X$ κλειστό τέτοιο ώστε $A = F \cap Y$.*

(3) *Αν το Y είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό), τότε ένα σύνολο $A \subset Y$ είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό) στο Y αν και μόνο είναι ανοιχτό (αντίστοιχα κλειστό).*

(4) *Έστω $y_\lambda \in Y$ ένα δίκτυο στο Y, και $y \in Y$. Τότε $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία, αν και μόνο αν $y_\lambda \to y$.*

(5) *Αν $A \subset Y$, τότε $\mathrm{cl}_Y(A) = Y \cap \mathrm{cl}(A)$ και $\mathrm{int}_Y(A) \supset Y \cap \mathrm{int}(A)$.*

(6) *Αν Z είναι κάποιος άλλος τοπολογικός χώρος και $f : X \to Z$ μια συνεχής συνάρτηση, τότε ο περιορισμός $f|_Y : Y \to Z$ είναι συνεχής.*

Απόδειξη.

(1) Έστω $A \subset Y$ ανοιχτό στο Y. Τότε υπάρχει $G \subset X$ ανοιχτό τέτοιο ώστε $A = G \cap Y$. Αφού η $\mathscr{B}$ είναι βάση υπάρχουν $B_i \in \mathscr{B}$, $i \in I$, τέτοια ώστε $G = \bigcup_{i \in I} B_i$. Αλλά τότε $A = \bigcup_{i \in I} B_i \cap Y$. Ομοίως για την υποβάση.

(2) Αν το A είναι κλειστό στο Y τότε το $Y \setminus A$ είναι ανοιχτό στο Y, άρα υπάρχει $G \subset X$ ανοιχτό τέτοιο ώστε $Y \setminus A = G \cap Y$, επομένως $A = (X \setminus G) \cap Y$ με $X \setminus G$ κλειστό. Αντίστροφα, αν $A = F \cap Y$ για κάποιο F κλειστό, τότε $Y \setminus A = (X \setminus F) \cap Y$ με $X \setminus F$ ανοιχτό. Άρα το $Y \setminus A$ είναι ανοιχτό στο Y, επομένως το A είναι κλειστό στο Y.

(3) Έστω ότι το Y είναι ανοιχτό. Αν τώρα το A είναι ανοιχτό στο Y τότε $A = G \cap Y$ για κάποιο G ανοιχτό. Άρα και το A είναι ανοιχτό ως τομή δυο ανοιχτών συνόλων. Αντίστροφα, αν το A είναι ανοιχτό τότε γράφουμε $A = A \cap Y$ και συμπεραίνουμε ότι το A είναι ανοιχτό στο Y από τον ορισμό της σχετικής τοπολογίας. Ομοίως για τα κλειστά.

(4) Έστω ότι $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία, και έστω U μια περιοχή του y. Η $U \cap Y$ είναι περιοχή του y ως προς τη σχετική τοπολογία, άρα υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε $y_\lambda \in U \cap Y \subset U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Επομένως $y_\lambda \to y$. Αντίστροφα, έστω ότι $y_\lambda \to y$, και έστω A μια περιοχή του y ως προς τη σχετική τοπολογία. Τότε $A = V \cap Y$ για κάποια περιοχή V του y. Αφού το δίκτυο συγκλίνει υπάρχει λ_0 τέτοιο ώστε $y_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$. Αλλά το δίκτυο βρίσκεται στο Y, άρα $y_\lambda \in V \cap Y = A$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$, το οποίο σημαίνει ότι $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία.

(5) Έστω $y \in \mathrm{cl}_Y(A) \subset Y$. Τότε υπάρχει δίκτυο $y_\lambda \in A$ τέτοιο ώστε $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία. Τότε, από το (4), έχουμε ότι $y_\lambda \to y$, άρα $y \in Y \cap \mathrm{cl}(A)$. Αντίστροφα, έστω $y \in Y \cap \mathrm{cl}(A)$. Τότε υπάρχει δίκτυο $y_\lambda \in A$ τέτοιο ώστε $y_\lambda \to y$. Αφού $y \in Y$, από το (4) συνεπάγεται ότι $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία, άρα $y \in \mathrm{cl}_Y(A)$.

    Έστω τώρα $y \in Y \cap \mathrm{int}(A)$. Τότε υπάρχει περιοχή U του y τέτοια ώστε $U \subset A$. Αλλά τότε το $U \cap Y$ είναι μια περιοχή του y ως προς τη σχετική τοπολογία η οποία περιέχεται στο A. Άρα $y \in \mathrm{int}_Y(A)$.

(6) Έστω $y_\lambda \in Y$ ένα δίκτυο στο Y τέτοιο ώστε, για κάποιο $y \in Y$, έχουμε $y_\lambda \to y$ ως προς τη σχετική τοπολογία. Τότε από το (4), $y_\lambda \to y$. Αφού η f είναι συνεχής, έχουμε $f(y_\lambda) \to f(y)$, άρα $f|_Y(y_\lambda) \to f|_Y(y)$. Επομένως η $f|_Y$ είναι συνεχής.

□

Παρατήρηση. Στο (5) του προηγούμενου θεωρήματος γενικά έχουμε $\mathrm{int}_Y(A) \neq Y \cap \mathrm{int}(A)$. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, $\mathrm{int}_{\mathbb{Z}}(\{1\}) = \{1\}$, αλλά $\mathrm{int}(\{1\}) = \emptyset$.

Θα ορίσουμε τώρα μια φυσιολογική τοπολογία στο καρτεσιανό γινόμενο μιας οικογένειας τοπολογικών χώρων.

Ορισμός. *Έστω X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Για κάθε $j \in I$ θεωρούμε τις προβολές*

$$p_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j, \quad p_j(x) = x(j),$$

και θέτουμε

$$\mathscr{C} = \{p_i^{-1}(G_i) : G_i \subset X_i \text{ ανοιχτό},\ i \in I\}.$$

Η τοπολογία που παράγει η οικογένεια $\mathscr{C}$ ονομάζεται τοπολογία γινόμενο στο $\prod_{i \in I} X_i$.

Παρατηρήσεις.

(1) Η τοπολογία γινόμενο είναι η μικρότερη τοπολογία στο $\prod_{i \in I} X_i$ ως προς την οποία οι προβολές είναι συνεχείς.

(2) Μια βάση για την τοπολογία γινόμενο είναι η οικογένεια όλων των συνόλων της μορφής

$$\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}),\ G_{i_k} \subset X_{i_k} \text{ ανοιχτό},\ i_1, \ldots, i_k \in I,\ n \in \mathbb{N},$$

δηλαδή όλες οι πεπερασμένες τομές συνόλων της $\mathscr{C}$. Ισοδύναμα, μια βάση αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής $\prod_{i \in I} G_i$, όπου τα $G_i \subset X_i$ είναι ανοιχτά και $G_i \neq X_i$ για το πολύ πεπερασμένο πλήθος i.

(3) Αν πάρουμε μια πεπερασμένη οικογένεια τοπολογικών χώρων $X_1, X_2, \ldots, X_m$ τότε μια βάση για την τοπολογία γινόμενο στο $X_1 \times \cdots \times X_m$ είναι όλα τα «ορθογώνια» $G_1 \times \cdots \times G_m$, όπου τα $G_k \subset X_k$ είναι ανοιχτά. Αυτό προκύπτει από τη σχέση

$$\prod_{k=1}^{n} G_k = \bigcap_{k=1}^{n} p_k^{-1}(G_k).$$

(4) Αν το $G \subset \prod_{i \in I} X_i$ είναι ανοιχτό τότε το $p_j(G)$ είναι ανοιχτό για κάθε j.

(5) Η προβολή ενός κλειστού συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκη κλειστό σύνολο. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}^2$, το σύνολο $F = \{(x, 1/x) : x > 0\}$ είναι κλειστό, αλλά $p_1(F) = p_2(F) = (0, +\infty)$.

Παραδείγματα.

(1) Η τοπολογία γινόμενο στο $\mathbb{R}^n$ ταυτίζεται με τη συνηθισμένη τοπολογία που επάγει η Ευκλείδεια μετρική. Αυτό προκύπτει από το ότι μέσα σε κάθε ανοιχτή μπάλα μπορούμε να βρούμε έναν ανοιχτό κύβο με το ίδιο κέντρο, και αντιστρόφως.

(2) Στο $\mathbb{R}^n$ με την τοπολογία γινόμενο, το σύνολο

$$\prod_{k=1}^{n}(0,1) = (0,1)^n = \underbrace{(0,1)\times\cdots\times(0,1)}_{n \text{ παράγοντες}}$$

είναι ανοιχτό (σαν σύνολο της βάσης).

(3) Στο $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο, το σύνολο

$$A = \prod_{n=1}^{\infty}(0,1) = (0,1)^{\mathbb{N}} = (0,1)\times(0,1)\times\cdots$$

ΔΕΝ είναι ανοιχτό. Στην πραγματικότητα $A^\circ = \emptyset$. Αν το A είχε μη κενό εσωτερικό, τότε θα υπήρχαν $i_1,\dots,i_n \in \mathbb{N}$ και ανοιχτά σύνολα $G_{i_1},\dots,G_{i_n} \subset \mathbb{R}$ έτσι ώστε

$$\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subset A.$$

Επιλέγουμε τώρα $m \in \mathbb{N} \setminus \{i_1,\dots,i_n\}$. Τότε

$$\mathbb{R} = p_m\left(\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})\right) \subset p_m(A) = (0,1),$$

άτοπο. Γενικότερα, σ' ένα καρτεσιανό γινόμενο με άπειρους παράγοντες, ένα ορθογώνιο, τυπικά δεν είναι ανοιχτό σύνολο.

(4) Αν το $\{0,1\}$ έχει τη διακριτή τοπολογία τότε η τοπολογία γινόμενο στο $\{0,1\}^n$ είναι η διακριτή για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αντίθετα, το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ δεν έχει τη διακριτή τοπολογία.

Θεώρημα. *Έστω X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Θέτουμε $X = \prod_{i\in I} X_i$.*

(1) *Ένα δίκτυο $x_\lambda \in X$ συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$ αν και μόνο αν $p_i(x_\lambda) \to p_i(x)$ για κάθε $i \in I$. Δηλαδή το δίκτυο συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη.*

(2) *Αν $A_i \subset X_i$, $i \in I$, τότε*

$$\operatorname{cl}\left(\prod_{i\in I} A_i\right) = \prod_{i\in I} \overline{A}_i, \quad \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ \subset \prod_{i\in I} A_i^\circ.$$

(3) *Έστω Y ένας άλλος τοπολογικός χώρος και $f : Y \to X$ μια συνάρτηση. Η f είναι συνεχής αν και μόνο αν η $p_i \circ f$ είναι συνεχής για κάθε $i \in I$.*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_i\circ f"'] & X \arrow[d, "p_i"] \\ & X_i \end{tikzcd}$$

Απόδειξη.

(1) Η μια κατεύθυνση προκύπτει από τη συνέχεια των προβολών p_i. Για την άλλη κατεύθυνση, έστω $\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$ μια περιοχή του x. Τότε το G_{i_k} είναι περιοχή του $p_{i_k}(x)$. Αφού $p_{i_k}(x_\lambda) \to p_{i_k}(x)$, υπάρχουν $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ τέτοια ώστε $p_{i_k}(x_\lambda) \in G_{i_k}$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_k$. Επιλέγουμε λ_0 τέτοιο ώστε $\lambda_0 \geq \lambda_k$ για κάθε $k = 1,2,\dots,n$. Τότε $x_\lambda \in \bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_0$, άρα $x_\lambda \to x$.

(2) Έστω $x \in \operatorname{cl}\left(\prod_{i\in I} A_i\right)$. Τότε υπάρχει δίκτυο $x_\lambda \in \prod_{i\in I} A_i$ τέτοιο ώστε $x_\lambda \to x$. Τώρα, από το (1), έχουμε ότι $p_i(x_\lambda) \to p_i(x)$ για κάθε i. Αλλά τότε $p_i(x) \in \overline{A}_i$ για κάθε i, δηλαδή $x \in \prod_{i\in I} \overline{A}_i$. Αντίστροφα, έστω $x \in \prod_{i\in I} \overline{A}_i$, και έστω $\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$ τυχούσα περιοχή του x. Τότε το G_{i_k} είναι περιοχή του $p_{i_k}(x) \in \overline{A}_{i_k}$ άρα $G_{i_k} \cap A_{i_k} \neq \emptyset$. Επομένως $\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \cap \prod_{i\in I} A_i \neq \emptyset$ διότι οι i_k-πλευρές του ορθογωνίου $\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$ είναι τα σύνολα G_{i_k} τα οποία τέμνουν τα A_{i_k}, ενώ οι υπόλοιπες i-πλευρές είναι ολόκληροι οι χώροι X_i οι οποίοι προφανώς τέμνουν τα A_i. Συνεπώς $x \in \operatorname{cl}\left(\prod_{i\in I} A_i\right)$.

Για τη δεύτερη σχέση, αν το αριστερά μέλος είναι κενό τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω λοιπόν $x \in \left(\prod_{i\in I} A_i\right)^\circ$. Τότε υπάρχουν ανοιχτά $G_{i_k} \subset X_{i_k}$, $k = 1,\dots,n$, τέτοια ώστε

$$x \in \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k}) \subset \prod_{i\in I} A_i.$$

Άρα $p_{i_k}(x) \in G_{i_k} \subset A_{i_k}$ για κάθε k, και κατ' ανάγκη, $A_j = X_j$ για κάθε j διαφορετικό από τα i_k. Επομένως $p_{i_k}(x) \in A^\circ_{i_k}$ για κάθε k. Συνεπώς $x \in \prod_{i\in I} A^\circ_i$. Ισότητα γενικά δεν έχουμε, όπως δείχνει το (3) των προηγούμενων παραδειγμάτων.

(3) Αν η f είναι συνεχής τότε η $p_i \circ f$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Για το αντίστροφο, έστω y_λ ένα δίκτυο στο Y με $y_\lambda \to y$. Τότε $p_i(f(y_\lambda)) \to p_i(f(y))$ για κάθε i. Άρα, από το (1), $f(y_\lambda) \to f(y)$. Επομένως η f είναι συνεχής.

□

Παραδείγματα.

(1) Ταυτίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ με το γινόμενο $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Τότε μια ακολουθία συναρτήσεων f_n συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση f αν και μόνο αν $f_n \to f$ ως προς την τοπολογία γινόμενο.

(2) Αν θεωρήσουμε το $C([0,1])$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^{[0,1]}$ τότε η τοπολογία της άσκησης (10) του 1ου φυλλαδίου συμπίπτει με την σχετική τοπολογία γινόμενο.

(3) Έστω $\mathbb{R}_s$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων. Τότε το $A = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ (η αντιδιαγώνιος) δεν έχει σημεία συσσώρευσης ως προς την τοπολογία γινόμενο στον $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$. Πράγματι, για κάθε x η περιοχή $(-\infty, x] \times (-\infty, -x]$ τέμνει το A ακριβώς στο σημείο $(x,-x)$. Επίσης το A είναι κλειστό διότι είναι κλειστό ως προς τη συνηθισμένη τοπολογία του $\mathbb{R}^2$, άρα $A' = \emptyset$.

6. Συνεκτικότητα

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός χώρος X ονομάζεται συνεκτικός αν δεν υπάρχουν $U, V \subset X$ μη κενά, ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Ένα σύνολο $A \subset X$ ονομάζεται συνεκτικό αν είναι συνεκτικός χώρος ως προς τη σχετική τοπολογία.*

Παραδείγματα.

(1) Σε κάθε τοπολογικό χώρο τα μονοσύνολα είναι συνεκτικά.

(2) Ένας διακριτός χώρος με τουλάχιστο δυο σημεία δεν είναι συνεκτικός, γιατί αν $x \in X$ τότε

$$X = \{x\} \cup (X \setminus \{x\}).$$

(3) Το $A = [0, 1) \cup \{2\}$ δεν είναι συνεκτικό γιατί τα $[0, 1)$ και $\{2\}$ είναι ανοιχτά στο A.

(4) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι συνεκτικό διότι $\mathbb{Q} = \Big((-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}\Big) \cup \Big((\sqrt{2}, +\infty) \cap \mathbb{Q}\Big)$.

(5) Το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διατημάτων δεν είναι συνεκτικό διότι

$$\mathbb{R} = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty).$$

(6) Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία είναι συνεκτικό γιατί αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $U, V \subset \mathbb{R}$ μη κενά, ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $\mathbb{R} = U \cup V$, τότε το $U = \mathbb{R} \setminus V$ είναι ανοιχτό, κλειστό, μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άτοπο.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(1) *Ο X είναι συνεκτικός.*

(2) *Τα μοναδικά υποσύνολα του X τα οποία είναι ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το X.*

(3) *Δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : X \to \{0, 1\}$ η οποία είναι επί.*

Απόδειξη.

(1) $\Rightarrow$ (2) Έστω $A \subset X$ ανοιχτό και κλειστό. Τότε τα σύνολα A και $X \setminus A$ είναι ανοιχτά και ξένα, και $X = A \cup (X \setminus A)$. Αφού ο X είναι συνεκτικός, πρέπει είτε $A = \emptyset$ ή $X \setminus A = \emptyset$. Δηλαδή είτε $A = \emptyset$ ή $A = X$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f : X \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί. Τότε το $f^{-1}(\{0\})$ είναι ανοιχτό, κλειστό, μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, άτοπο.

(3) $\Rightarrow$ (1) Έστω ότι ο X δεν είναι συνεκτικός. Τότε υπάρχουν $U, V \subset X$ μη κενά ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $X = U \cup V$. Επομένως η συνάρτηση $f : X \to \{0, 1\}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in U \\ 0, & \text{αν } x \in V \end{cases}$$

είναι συνεχής και επί, άτοπο.

□

Θεώρημα. *Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Αν κάποιο συνεκτικό $A \subset \mathbb{R}$ δεν είναι διάστημα, τότε υπάρχουν $x, y \in A$ και $z \notin A$ με $x < z < y$. Αλλά τότε $A = ((-\infty, z) \cap A) \cup ((z, +\infty) \cap A)$, άτοπο. Αντίστροφα, αν υποθέσουμε ότι κάποιο διάστημα A δεν είναι συνεκτικό, τότε υπάρχει $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής η οποία παίρνει ακριβώς δυο τιμές. Αυτό είναι άτοπο από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής του απειροστικού λογισμού. □

Θεώρημα. *Έστω X συνεκτικός χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής και επί. Τότε ο Y είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Αν ο Y δεν ήταν συνεκτικός τότε θα υπήρχε $g : Y \to \{0, 1\}$ συνεχής και επί. Αλλά τότε η σύνθεση $g \circ f : X \to \{0, 1\}$ θα ήταν συνεχής και επί, άτοπο. □

Παραδείγματα.

(1) Ο μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ είναι η εικόνα του διαστήματος $[0, 2\pi]$ μέσω της συνεχούς απεικόνισης $f(t) = (\cos t, \sin t)$, άρα είναι συνεκτικό σύνολο.

(2) Στο $\mathbb{R}^n$ μια ευθεία που περνάει από το σημείο x_0 και έχει κατεύθυνση e είναι συνεκτικό σύνολο ως εικόνα του $\mathbb{R}$ μέσω της συνεχούς $f(t) = x_0 + te$.

Το ακόλουθο είναι η «αφηρημένη έκδοση» του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής.

Θεώρημα. *Έστω X συνεκτικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει κάθε τιμή ανάμεσα σε δυο οποιεσδήποτε τιμές της.*

Απόδειξη. Αφού ο X συνεκτικός το $f(X)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα είναι διάστημα. Έστω τώρα $\xi_1, \xi_2 \in f(X)$ δυο τιμές της f με $\xi_1 < \xi_2$, και $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$. Αφού το $f(X)$ είναι διάστημα, έχουμε ότι $\xi \in f(X)$, δηλαδή το ξ είναι τιμή της f. □

Θεώρημα. *Έστω A_i, $i \in I$, μια οικογένεια συνεκτικών συνόλων με ένα τουλάχιστο κοινό σημείο. Τότε η ένωση $\bigcup_{i\in I} A_i$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$, και $f : \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$ συνεχής. Θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Έστω $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$. Τότε $x \in A_i$ για κάποιο i. Αλλά ο περιορισμός $f|_{A_i}$ είναι σταθερή συνάρτηση γιατί το A_i είναι συνεκτικό. Επομένως $f(x) = f(x_0)$. Η ισότητα αυτή ισχύει για κάθε x, άρα η f είναι σταθερή. □

Παρατήρηση. Η τομή δυο συνεκτικών συνόλων δεν είναι κατ' ανάγκη συνεκτικό σύνολο. Για παράδειγμα, στο επίπεδο, ένας κύκλος τέμνει μια διάμετρο του σε δύο σημεία.

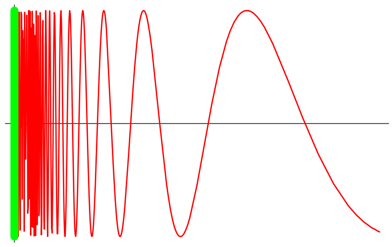
Θεώρημα. *Αν το A είναι συνεκτικό και $A \subset B \subset \overline{A}$, τότε το B είναι συνεκτικό. Ιδιαίτερα, η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου είναι συνεκτική.*

Απόδειξη. Έστω $f : B \to \{0,1\}$ συνεχής. Αφού το A είναι συνεκτικό, ο περιορισμός $f|_A$ είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή το $f(A)$ είναι μονοσύνολο. Αλλά

$$f(B) = f(B \cap \overline{A}) = f(\mathrm{cl}_B A) \subset \overline{f(A)} = f(A).$$

Άρα το $f(B)$ είναι μονοσύνολο. Επομένως η f είναι σταθερή. Συνεπώς το B είναι συνεκτικό. □

Παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}^2$ θέτουμε $X = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\}$. Το X είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου. Επομένως το $\overline{X} = X \cup (\{0\} \times [-1,1])$ είναι συνεκτικό.

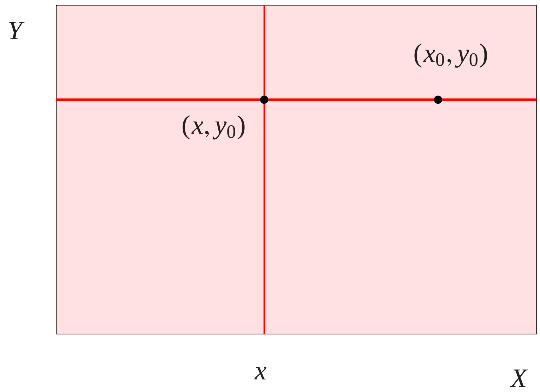


Παρατηρήστε ότι αν αφαιρέσουμε οποιοδήποτε σύνολο σημείων από το ευθύγραμμο τμήμα $\{0\} \times [-1,1]$, το σύνολο που προκύπτει παραμένει συνεκτικό γιατί βρίσκεται μεταξύ ενός συνεκτικού συνόλου και της κλειστότητας του.

Θεώρημα. *Έστω X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε το γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε παράγοντας X_i είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Αν το γινόμενο είναι συνεκτικό τότε κάθε X_j είναι συνεκτικό ως συνεχής εικόνα του $\prod_{i\in I} X_i$ μέσω της προβολής p_j. Για το αντίστροφο, θα δείξουμε αρχικά ότι αν X και Y είναι δυο συνεκτικοί χώροι τότε το $X \times Y$ είναι συνεκτικό. Σταθεροποιούμε $(x_0, y_0) \in X \times Y$ και για κάθε $x \in X$ θεωρούμε τον «σταυρό»

$$C_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y_0\}).$$



Παρατηρήστε ότι το $\{x\} \times Y$ είναι συνεκτικό γιατί είναι ομοιομορφικό με το Y. Ομοίως το $X \times \{y_0\}$ είναι συνεκτικό γιατί είναι ομοιομορφικό με το X. Επίσης

$$(x, y_0) \in (\{x\} \times Y) \cap (X \times \{y_0\}) .$$

Άρα το C_x είναι συνεκτικό ως ένωση δυο συνεκτικών συνόλων με μη κενή τομή. Τώρα, το σημείο (x_0, y_0) ανήκει σε όλα τα C_x, επομένως η ένωση $\bigcup_{x\in X} C_x = X \times Y$ είναι συνεκτική. Επαγωγικά, το γινόμενο μιας πεπερασμένης οικογένειας συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικό. Δείχνουμε τώρα τη γενική περίπτωση. Έστω X_i, $i \in I$, μια αυθαίρετη οικογένεια συνεκτικών χώρων. Σταθεροποιούμε $z = (z_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ και για κάθε $J \subset I$ πεπερασμένο θέτουμε

$$Y_J = \bigcap_{i\in I\setminus J} p_i^{-1}(\{z_i\}), \quad Y = \bigcup_{\substack{J\subset I \\ J \text{ πεπερασμένο}}} Y_J.$$

Το Y_J είναι ένα ορθογώνιο η j-πλευρά του οποίου είναι ο χώρος X_j, για κάθε $j \in J$. Οι υπόλοιπες πλευρές είναι μονοσύνολα. Επομένως το Y_J είναι ομοιομορφικό με το πεπερασμένο γινόμενο $\prod_{j\in J} X_j$, και άρα είναι συνεκτικό. Επίσης το σημείο z ανήκει σε όλα τα Y_J άρα η ένωσή τους, δηλαδή το Y, είναι συνεκτικό. Παρατηρούμε τώρα ότι μια τυχούσα περιοχή στο γινόμενο, δηλαδή ένα ορθογώνιο της μορφής $\bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$ τέμνει το ορθογώνιο $Y_{\{i_1,\dots,i_n\}}$. Πράγματι, η i_k-πλευρά του δεύτερου ορθογωνίου είναι το X_{i_k} το οποίο τέμνει την i_k-πλευρά του πρώτου ορθογωνίου, και για $i \neq i_k$ η i-πλευρά του πρώτου ορθογωνίου είναι το X_i το οποίο τέμνει την i-πλευρά του δεύτερου. Συμπεραίνουμε ότι το Y είναι πυκνό. Έτσι, ο χώρος είναι η κλειστότητα ενός συνεκτικού συνόλου, συνεπώς είναι συνεκτικός. □

Δίνουμε τώρα μια τυπική εφαρμογή της συνεκτικότητας.

Θεώρημα. *Έστω $n \geq 2$. Τότε το $\mathbb{R}$ δεν είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Τότε το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ είναι ομοιομορφικό με το $\mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$. Αυτό είναι άτοπο διότι το $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν είναι συνεκτικό, ενώ το $A = \mathbb{R}^n \setminus \{h(0)\}$ είναι. Πράγματι, σταθεροποιούμε $x_0 \in A$ και επιλέγουμε μια ευθεία ℓ η οποία περνάει από το x_0 και όχι από το $h(0)$. Τώρα για κάθε $x \in A$ επιλέγουμε μια ευθεία ℓ_x η οποία τέμνει την ℓ και δεν περνάει από το $h(0)$. Θέτουμε $L_x = \ell \cup \ell_x$. Τότε τα L_x είναι συνεκτικά υποσύνολα του A, το σημείο x_0 ανήκει σε κάθε L_x και η ένωσή τους είναι το A. Επομένως το A είναι συνεκτικό. □

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε χώρος «σπάει στα συνεκτικά του κομμάτια».

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Για κάθε $x \in X$ θέτουμε*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x\in A \\ A \subset X \text{ συνεκτικό}}} A.$$

Το $C(x)$ ονομάζεται συνεκτική συνιστώσα του X στο σημείο x.

Παρατηρήσεις.

(1) Το $C(x)$ είναι μη κενό γιατί το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι συνεκτικό.
(2) Το $C(x)$ είναι συνεκτικό ως ένωση συνεκτικών συνόλων με ένα τουλάχιστο κοινό σημείο.
(3) Μια συνεκτική συνιστώσα είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο του X, δηλαδή αν το B είναι κάποιο άλλο συνεκτικό σύνολο και $C(x) \subset B$ τότε $C(x) = B$. Ισοδύναμα δεν υπάρχει συνεκτικό γνήσιο υπερσύνολο του $C(x)$.

Παραδείγματα.

(1) Σ' ένα διακριτό χώρο έχουμε $C(x) = \{x\}$ για κάθε x.
(2) Στον χώρο $(0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4\}$ (με τη σχετική τοπολογία) έχουμε

$$C(x) = \begin{cases} (0, 1], & \text{αν } x \in (0, 1] \\ [2, 3], & \text{αν } x \in [2, 3] \\ \{4\}, & \text{αν } x = 4 \end{cases} .$$

Δηλαδή ο χώρος έχει μόνο τρεις διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες.
(3) Στο $\mathbb{Q}$ (με τη σχετική τοπολογία) δεν υπάρχουν συνεκτικά σύνολα με περισσότερα από ένα σημεία γιατί αν υποθέσουμε ότι $x, y \in A$ με $x < y$, τότε επιλέγοντας έναν άρρητο α μεταξύ των x και y έχουμε $A = ((-\infty, \alpha) \cap A) \cup ((\alpha, +\infty) \cap A)$. Επομένως $C(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in \mathbb{Q}$.
(4) Ομοίως στο $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων, τα μοναδικά συνεκτικά σύνολα είναι τα μονοσύνολα, άρα $C(x) = \{x\}$ για κάθε x.

Ορισμός. *Ένας χώρος X με την ιδιότητα $C(x) = \{x\}$ για κάθε $x \in X$, ονομάζεται ολικά αντισυνεκτικός.*

Παραδείγματα. Κάθε διακριτός χώρος είναι ολικά αντισυνεκτικός. Το $\mathbb{Q}$ με τη σχετική τοπολογία, το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων και το $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο είναι ολικά αντισυνεκτικοί χώροι.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τότε*

(1) *Η ένωση των συνεκτικών συνιστωσών είναι ολόκληρος ο χώρος.*
(2) *Κάθε συνεκτική συνιστώσα είναι κλειστό σύνολο.*
(3) *Δυο συνεκτικές συνιστώσες είτε ταυτίζονται ή είναι ξένες.*

Απόδειξη.

(1) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό.
(2) Το $\overline{C(x)}$ είναι συνεκτικό και περιέχει το $C(x)$, επομένως από τη μεγιστικότητα της συνιστώσας πρέπει να έχουμε $\overline{C(x)} = C(x)$.
(3) Αν δυο συνιστώσες $C(x)$ και $C(y)$ τέμνονται τότε το $C(x) \cup C(y)$ είναι συνεκτικό και
$$C(x), C(y) \subset C(x) \cup C(y),$$
άρα από μεγιστικότητα, $C(x) = C(x) \cup C(y) = C(y)$.

□

Ορισμός. *Μια καμπύλη σ' ένα τοπολογικό χώρο είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [0,1] \to X$. Το $\gamma(0)$ λέγεται αρχή της καμπύλης και το $\gamma(1)$ τέλος της καμπύλης.*

Παρατηρήσεις.

(1) Αν η γ έχει αρχή το x και τέλος το y, τότε η $\widetilde{\gamma}$ με $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(1-t)$ έχει αρχή το y και τέλος το x.
(2) Συχνά, όταν λέμε «μια καμπύλη γ» εννοούμε το σύνολο $\gamma([0,1])$.

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός χώρος λέγεται κατά τόξα συνεκτικός αν για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει καμπύλη στο X με αρχή το x και τέλος το y.*

Παράδειγμα. Κάθε κυρτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικό, γιατί αν $x, y \in A$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα $\gamma(t) = (1-t)x + ty$, $t \in [0,1]$, βρίσκεται στο A και συνδέει τα x και y.

Παρατήρηση. Αν σ' ένα χώρο X υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε για κάθε x υπάρχει καμπύλη η οποία συνδέει τα x_0 και x, τότε ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός. Πράγματι, έστω $x, y \in X$, και καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ με $\gamma_1(0) = x$, $\gamma_1(1) = x_0$, $\gamma_2(0) = x_0$, $\gamma_2(1) = y$. Τότε η $\gamma : [0,1] \to X$
$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{αν } t \in [0,1/2] \\ \gamma_2(2t-1), & \text{αν } t \in [1/2,1] \end{cases}$$
είναι μια καμπύλη με αρχή το x και τέλος το y.

Θεώρημα. *Αν ο X είναι κατά τόξα συνεκτικός τότε είναι συνεκτικός.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x_0 \in X$. Τότε για κάθε $x \in X$ υπάρχει καμπύλη $\gamma_x : [0,1] \to X$ με αρχή το x_0 και τέλος το x. Τα σύνολα $\gamma_x([0,1])$ είναι συνεκτικά (ως συνεχείς εικόνες του συνεκτικού $[0,1]$), το x_0 είναι κοινό σημείο τους, και η ένωσή τους όλος ο χώρος X. Άρα ο X είναι συνεκτικός. □

Παρατήρηση. Το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος δεν ισχύει. Πράγματι, στο $\mathbb{R}^2$ θέτουμε
$$Y = \{(x, \sin(1/x)) : x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1,1]).$$
Όπως είδαμε, το Y είναι συνεκτικό. Θα δείξουμε ότι τα σημεία $(0,0)$ και $(1/\pi, 0)$ δεν μπορούν να συνδεθούν με κάποια καμπύλη στο Y. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει καμπύλη $\gamma : [0,1] \to Y$ με $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ τέτοια ώστε $\gamma(0) = (0,0)$ και $\gamma(1) = (1/\pi, 0)$. Παρατηρήστε ότι αν $x(t) > 0$ τότε το σημείο $(x(t), y(t))$ είναι στο γράφημα της συνάρτησης $\sin(1/x)$, άρα $y(t) = \sin(1/x(t))$. Τώρα, έχουμε $x(0) = 0$ και $x(1) = 1/\pi$, άρα από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής, υπάρχει $t_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $x(t_1) = 2/(3\pi)$. Ομοίως, υπάρχει $t_2 \in (0, t_1)$ τέτοιο ώστε $x(t_2) = 2/(5\pi)$ κ.ο.κ. Παίρνουμε έτσι μια φθίνουσα, άρα συγκλίνουσα, ακολουθία $t_n \in (0,1)$ τέτοια ώστε $x(t_n) = 2/((2n+1)\pi)$ και $y(t_n) = \sin(1/x(t_n)) = (-1)^n$. Επομένως
$$\gamma(t_n) = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, (-1)^n\right).$$
Αυτό είναι άτοπο διότι το αριστερά μέλος συγκλίνει ενώ το δεξιά μέλος όχι.

Παρά ταύτα έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και συνεκτικό. Τότε το G είναι κατά τόξα συνεκτικό.*

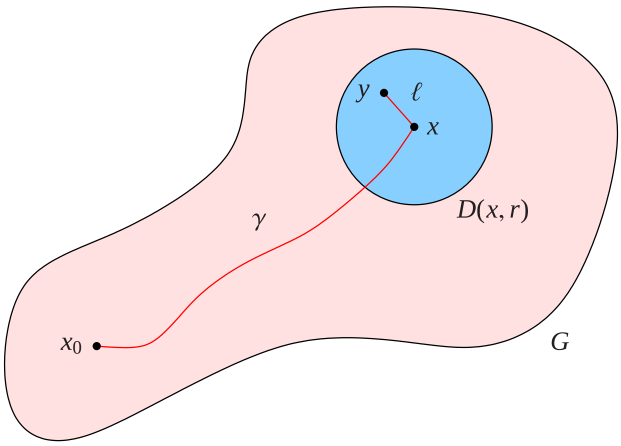
Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $x_0 \in G$ και θέτουμε

$$A = \{x \in G : \text{Υπάρχει καμπύλη στο } G \text{ με αρχή το } x_0 \text{ και τέλος το } x\}.$$

Προφανώς $x_0 \in A$, άρα το A είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό και κλειστό στο G, επομένως, εφόσον το G είναι συνεκτικό, πρέπει να ταυτίζεται με ολόκληρο το G. Έστω $x \in A$. Αφού το G είναι ανοιχτό, υπάρχει ανοιχτή μπάλα $D(x,r) \subset G$. Τώρα, κάθε σημείο y της μπάλας συνδέεται με το x μέσω του ευθυγράμμου τμήματος $\ell(t) = (1-t)x + ty$, $t \in [0,1]$, το οποίο βρίσκεται στο G γιατί η μπάλα βρίσκεται στο G. Απ' την άλλη, το x_0 συνδέεται με το x μέσω κάποιας καμπύλης $\gamma : [0,1] \to G$, $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x$. Επομένως, το x_0 συνδέεται με το y μέσω της καμπύλης

$$\sigma(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & \text{αν } t \in [0,1/2] \\ \ell(2t-1), & \text{αν } t \in [1/2,1] \end{cases}$$

Η οποία προφανώς βρίσκεται στο G αφού τα δυο κομμάτια της (η γ και το ℓ) βρίσκονται στο G. Αυτό δείχνει ότι $y \in A$, δηλαδή $D(x,r) \subset A$, άρα το A είναι ανοιχτό.



Έστω τώρα $a_j \in A$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $a_j \to a$ για κάποιο $a \in G$. Αφού το G είναι ανοιχτό, υπάρχει ανοιχτή μπάλα $D(a,r) \subset G$. Αλλά $a_j \to a$, άρα υπάρχει j_0 τέτοιο ώστε $a_{j_0} \in D(a,r)$. Στη συνέχεια, ακριβώς όπως πριν, συνδέουμε το a με το a_{j_0} με ένα ευθύγραμμο τμήμα και μετά το a_{j_0} με το x_0 με μια καμπύλη στο G και συμπεραίνουμε ότι $a \in A$. Δηλαδή το A είναι κλειστό.

Έχουμε λοιπόν ότι $A = G$, άρα κάθε σημείο του G μπορεί να συνδεθεί με το x_0 με κάποια καμπύλη, συνεπώς το G είναι κατά τόξα συνεκτικό. □

7. Η Τοπολογία Πηλίκο

Ορισμός. *Έστω X ένας τοπολογικός χώρος, Y ένα σύνολο, και $f : X \to Y$ μια απεικόνιση επί. Θέτουμε*

$$\mathscr{T}_f = \{G \subset Y : f^{-1}(G) \text{ ανοιχτό}\}.$$

Η $\mathscr{T}_f$ ονομάζεται τοπολογία πηλίκο του Y ως προς f.

Παρατήρηση. Η τοπολογία πηλίκο είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y ως προς την οποία η f είναι συνεχής.

Παράδειγμα. Αν $X = \mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία, $Y = [0, +\infty)$, και $f(x) = x^2$, τότε η τοπολογία πηλίκο του Y ως προς την f είναι ακριβώς η σχετική τοπολογία.

Θεώρημα. *Έστω X, $(Y, \mathscr{T})$ τοπολογικοί χώροι, και $f : X \to Y$ συνεχής, ανοιχτή (ή κλειστή) και επί. Τότε $\mathscr{T} = \mathscr{T}_f$.*

Απόδειξη. Αφού η $\mathscr{T}_f$ είναι η μεγαλύτερη τοπολογία στο Y ως προς την οποία η f είναι συνεχής, έχουμε ότι $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_f$. Αντίστροφα, αν $G \in \mathscr{T}_f$, τότε από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο, το $f^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό. Αλλά η f είναι ανοιχτή, άρα το $G = f(f^{-1}(G))$ είναι ανοιχτό ως προς την $\mathscr{T}$. □

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος, Y ένα σύνολο, $f : X \to Y$ επί, και Z ένας άλλος χώρος. Μια συνάρτηση $g : (Y, \mathscr{T}_f) \to Z$ είναι συνεχής αν και μόνο αν η $g \circ f$ είναι συνεχής.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & (Y, \mathscr{T}_f) \arrow[d, "g"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

Απόδειξη. Αν η g είναι συνεχής τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής σαν σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Αντίστροφα, αν η $g \circ f$ είναι συνεχής, και το $G \subset Z$ είναι ανοιχτό τότε το $f^{-1}(g^{-1}(G)) = (g \circ f)^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό, επομένως, από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο, το $g^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό. □

Όταν, σ' ένα χώρο, λέμε ότι «ταυτίζουμε δυο σημεία x, y» εννοούμε ότι υπάρχει μια σχέση ισοδυναμίας R τέτοια ώστε $(x, y) \in R$. Έτσι, μια κλάση ισοδυναμίας αποτελείται από όλα τα σημεία που έχουμε ταυτίσει.

Ορισμός. *Έστω X τοπολογικός χώρος και $R \subset X \times X$ μια σχέση ισοδυναμίας. Θεωρούμε την απεικόνιση πηλίκο $Q : X \to X/R$, με $Q(x) = [x]$, όπου $[x]$ είναι η κλάση ισοδυναμίας του x και $X/R = \{[x] : x \in X\}$ το σύνολο πηλίκο. Το X/R με την τοπολογία πηλίκο ως προς Q ονομάζεται χώρος πηλίκο. Ιδιαίτερα, αν $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι η διαγώνιος, και $A \subset X$ κάποιο υποσύνολο, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε τη σχέση ισοδυναμίας $R = \Delta(X) \cup (A \times A)$. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε X/A αντί X/R.*

Διαισθητικά, το X/R είναι ο χώρος που προκύπτει αν «συρρικνώσουμε» κάθε κλάση ισοδυναμίας σ' έναν αντιπρόσωπό της. Έτσι, το X/A προκύπτει αν συρρικνώσουμε το A σ' ένα σημείο.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος, Y ένα σύνολο και $f : X \to Y$ επί. Θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας $R_f = \{(x_1, x_2) : f(x_1) = f(x_2)\}$ (στην περίπτωση αυτή, η f λέγεται απεικόνιση ταύτισης). Τότε ο χώρος πηλίκο X/R_f είναι ομοιομορφικός με τον $(Y, \mathscr{T}_f)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την απεικόνιση $h : X/R_f \to Y$ με $h([x]) = f(x)$. Η h είναι καλά ορισμένη 1-1 και επί. Παρατηρούμε ότι $h \circ Q = f$ και $h^{-1} \circ f = Q$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "f"'] & (X/R_f, \mathscr{T}_Q) \arrow[d, "h"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "Q"'] & (Y, \mathscr{T}_f) \arrow[d, "h^{-1}"] \\ & X/R_f \end{tikzcd}$$

Επομένως, από το προηγούμενο θεώρημα, οι h και h^{-1} είναι συνεχείς. □

Παραδείγματα. Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $X \approx Y$ αν οι X και Y είναι ομοιομορφικοί. Επίσης, με S^{n-1} θα συμβολίζουμε την επιφάνεια της μοναδιαίας μπάλας του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή την μοναδιαία σφαίρα. Τέλος θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα μιγαδικό συμβολισμό στο $\mathbb{R}^2$.

(1) $[0,2\pi]/\{0,2\pi\} \approx S^1$. Πράγματι, θεωρούμε την απεικόνιση ταύτισης $f : [0,2\pi] \to S^1$ με $f(t) = e^{it}$. Η f είναι συνεχής και κλειστή, άρα η συνηθισμένη τοπολογία του S^1 συμπίπτει με την τοπολογία πηλίκο ως προς f. Επίσης $\Delta([0,2\pi]) \cup (\{0,2\pi\} \times \{0,2\pi\}) = R_f$. Επομένως

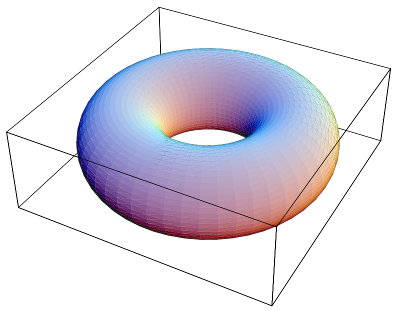
$$[0,2\pi]/\{0,2\pi\} = [0,2\pi]/R_f \approx (S^1, \mathscr{T}_f) = S^1.$$

(2) Στο $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας R με $(x,y) \in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $y = \lambda x$, δηλαδή δυο σημεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με αρχή το 0. Τότε $X/R \approx S^{n-1}$. Εδώ η απεικόνιση ταύτισης είναι η $f : X \to S^{n-1}$ με $f(x) = x/|x|$, όπου $|x|$ είναι το μέτρο του x. Η f είναι συνεχής και ανοιχτή, άρα η τοπολογία της S^{n-1} είναι η τοπολογία πηλίκο ως προς f. Παρατηρούμε ότι $R = R_f$, έτσι

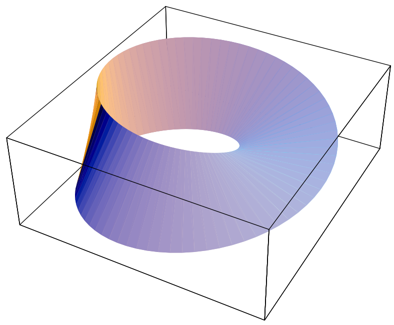
$$X/R = X/R_f \approx (S^{n-1}, \mathscr{T}_f) = S^{n-1}.$$

(3) Στο $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ θεωρούμε τη σχέση ισοδυναμίας R με $(x,y) \in R$ αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε $y = \lambda x$, δηλαδή δυο σημεία είναι ισοδύναμα αν ανήκουν σε κάποια ευθεία που περνάει από το 0. Ο χώρος πηλίκο X/R συμβολίζεται με $\mathbb{RP}^{n-1}$ και ονομάζεται πραγματικός προβολικός χώρος.

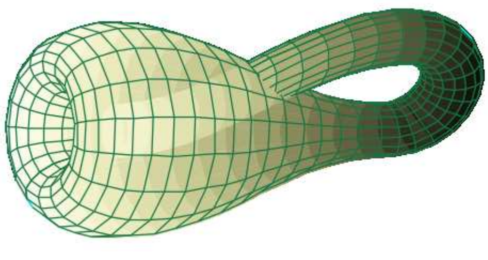
(4) Στο $[0,1] \times [0,1]$, για κάθε x ταυτίζουμε το $(x,0)$ με το $(x,1)$ και για κάθε y το $(0,y)$ με το $(1,y)$. Ο χώρος που προκύπτει (το "torus") είναι ομοιομορφικός με τον $S^1 \times S^1$. Η απεικόνιση ταύτισης είναι η $(s,t) \mapsto (e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})$. Το $S^1 \times S^1$ είναι με τη σειρά του ομοιομορφικό με την επιφάνεια του σχήματος.



(5) Στο $[0,1] \times [0,1]$ ταυτίζουμε το $(0,y)$ με το $(1,1-y)$ για κάθε y και παίρνουμε την «ταινία του Mobius».

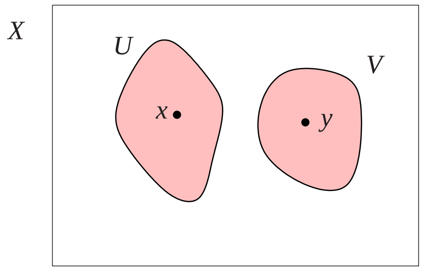


(6) Στο $[0,1] \times [0,1]$, για κάθε y ταυτίζουμε το $(0,y)$ με το $(1,y)$ και για κάθε x το $(x,0)$ με το $(1-x,1)$. Παίρνουμε μια κλειστή επιφάνεια (την «φιάλη του Klein») χωρίς εσωτερικό ή εξωτερικό η οποία δεν είναι ομοιομορφική με κανένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$.



8. Χώροι Hausdorff

Ορισμός. *Ένας τοπολογικός χώρος X λέγεται T_2 ή Hausdorff αν για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$ υπάρχουν περιοχές U, V των x, y αντίστοιχα τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$.*



Παραδείγματα.

(1) Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) είναι Hausdorff γιατί αν $x, y \in X$ με $x \neq y$ τότε $D(x, \varepsilon) \cap D(y, \varepsilon) = \emptyset$ όπου $\varepsilon = \rho(x, y)/2$.

(2) Ένας τετριμμένος χώρος με τουλάχιστο δυο σημεία δεν είναι Hausdorff γιατί το μοναδικό μη κενό ανοιχτό σύνολο είναι ο ίδιος ο χώρος.

(3) Το $\mathbb{N}$ με τη συμπεπερασμένη τοπολογία δεν είναι Hausdorff γιατί κάθε δυο μη κενά ανοιχτά σύνολα τέμνονται.

Παρατηρήσεις.

(1) Αν ο $(X, \mathscr{T})$ είναι Hausdorff και $\mathscr{S}$ είναι μια τοπολογία στο X μεγαλύτερη της $\mathscr{T}$, τότε ο $(X, \mathscr{S})$ είναι Hausdorff. Έτσι, για παράδειγμα, το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι Hausdorff.

(2) Σ' ένα χώρο Hausdorff τα μονοσύνολα, άρα και τα πεπερασμένα σύνολα, είναι κλειστά.

Θεώρημα. *Ένας χώρος X είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε συγκλίνον δίκτυο συγκλίνει σε ένα μόνο σημείο.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι Hausdorff και έστω ότι για κάποιο δίκτυο x_λ, $\lambda \in \Lambda$, έχουμε ότι $x_\lambda \to x$ και $x_\lambda \to y$ με $x \neq y$. Επιλέγουμε περιοχές U, V των x, y τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$. Τότε υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ τέτοια ώστε $x_\lambda \in U$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_1$ και $x_\lambda \in V$ για κάθε $\lambda \geq \lambda_2$. Έτσι αν πάρουμε $\lambda_0 \in \Lambda$ με $\lambda_0 \geq \lambda_1$ και $\lambda_0 \geq \lambda_1$, θα έχουμε $x_{\lambda_0} \in U \cap V$, άτοπο.

Αντίστροφα, έστω ότι ο X δεν είναι Hausdorff. Τότε υπάρχουν $x, y \in X$ με $x \neq y$ τέτοια ώστε $U \cap V \neq \emptyset$ για κάθε περιοχή U του x και κάθε περιοχή V του y. Θεωρούμε το σύνολο

$$\Lambda = \{(U, V) : U \text{ περιοχή του } x,\ V \text{ περιοχή του } y\}$$

με σχέση διάταξης

$$(U_1, V_1) \preceq (U_2, V_2) \Leftrightarrow U_2 \subset U_1 \ \&\ V_2 \subset V_1.$$

Το $(\Lambda, \preceq)$ είναι κατευθυνόμενο. Τώρα, για κάθε $(U, V) \in \Lambda$ επιλέγουμε $x_{(U,V)} \in U \cap V$. Τότε $x_{(U,V)} \to x$ και $x_{(U,V)} \to y$. Πράγματι, αν U_0, V_0 είναι τυχούσες περιοχές των x, y, τότε για κάθε $(U, V) \succeq (U_0, V_0)$ έχουμε $x_{(U,V)} \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0 \subset U_0$ και $x_{(U,V)} \in U \cap V \subset U_0 \cap V_0 \subset V_0$. □

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Ο X είναι Hausdorff.*

(2) *Για κάθε $x, y \in X$ με $x \neq y$, υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $y \notin \overline{U}$.*

(3) *Για κάθε $x \in X$ έχουμε*

$$\bigcap_{U \text{ περιοχή του } x} \overline{U} = \{x\}.$$

(4) *Η διαγώνιος $\Delta(X) = \{(x, x) : x \in X\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδυναμία $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow (A \times B) \cap \Delta(X) = \emptyset$, για κάθε $A, B \subset X$.

(1) ⇒ (2) Αφού ο X είναι Hausdorff υπάρχουν περιοχές U, V των x, y με $U \cap V = \emptyset$. Δηλαδή υπάρχει περιοχή του y η οποία δεν τέμνει το σύνολο U. Αυτό σημαίνει ότι το y δεν ανήκει στο $\overline{U}$.

(2) ⇒ (3) Το x προφανώς ανήκει στην τομή

$$\bigcap_{U \text{ περιοχή του } x} \overline{U}.$$

Αν τώρα y είναι κάποιο σημείο διαφορετικό από το x τότε υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $y \notin \overline{U}$. Επομένως

$$y \notin \bigcap_{U \text{ περιοχή του } x} \overline{U}.$$

Άρα το x είναι το μοναδικό στοιχείο της τομής.

(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω $(x, y) \notin \Delta(X)$. Τότε $x \neq y$, άρα

$$y \notin \bigcap_{U \text{ περιοχή του } x} \overline{U}.$$

Έτσι υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε $y \notin \overline{U}$. Επομένως το $X \setminus \overline{U}$ είναι μια περιοχή του y με $U \cap \left(X \setminus \overline{U}\right) = \emptyset$. Συνεπώς το $U \times \left(X \setminus \overline{U}\right)$ είναι μια περιοχή του (x, y) με $\left(U \times \left(X \setminus \overline{U}\right)\right) \cap \Delta(X) = \emptyset$. Δηλαδή το $\Delta(X)$ είναι κλειστό.

(4) $\Rightarrow$ (1) Έστω $x, y \in X$ με $x \neq y$. Τότε $(x, y) \notin \Delta(X)$. Αφού το $\Delta(X)$ είναι κλειστό, υπάρχουν περιοχές U, V των x, y τέτοιες ώστε $(U \times V) \cap \Delta(X) = \emptyset$. Αυτό σημαίνει ότι $U \cap V = \emptyset$.

□

Θεώρημα. *Έστω X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων. Τότε το γινόμενο $\prod_{i\in I} X_i$ είναι Hausdorff αν και μόνο αν κάθε παράγοντας X_i είναι Hausdorff.*

Απόδειξη. Έστω ότι κάθε X_i είναι Hausdorff, και έστω $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$ με $x \neq y$. Τότε υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε $p_j(x) \neq p_j(y)$. Αφού ο X_j είναι Hausdorff, υπάρχουν U, V περιοχές των $p_j(x), p_j(y)$ τέτοιες ώστε $U \cap V = \emptyset$. Τότε οι $p_j^{-1}(U), p_j^{-1}(V)$ είναι ξένες περιοχές των x, y. Άρα το γινόμενο είναι Hausdorff.

Αντίστροφα, έστω ότι το γινόμενο είναι Hausdorff. Σταθεροποιούμε $j \in I$ και θα δείξουμε ότι ο X_j είναι Hausdorff. Έστω $x_j, y_j \in X_j$ με $x_j \neq y_j$. Επιλέγουμε δυο σημεία $x, y \in \prod_{i\in I} X_i$ με $p_i(x) = p_i(y)$ αν $i \neq j$ και $p_j(x) = x_j$, $p_j(y) = y_j$. Τότε $x \neq y$. Αφού το γινόμενο είναι Hausdorff υπάρχουν περιοχές $\prod_{i\in I} U_i$, $\prod_{i\in I} V_i$ των x, y τέτοιες ώστε $(\prod_{i\in I} U_i) \cap (\prod_{i\in I} V_i) = \emptyset$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \neq j$ τα σύνολα U_i και V_i τέμνονται αφού περιέχουν το σημείο $p_i(x) = p_i(y)$. Επομένως, κατ' ανάγκη, έχουμε ότι $U_j \cap V_j = \emptyset$. Αλλά το U_j είναι περιοχή του x_j και το V_j είναι περιοχή του y_j. Συμπεραίνουμε ότι ο X_j είναι Hausdorff. □

Παρατηρήσεις.

(1) Αν ο X είναι Hausdorff και $Y \subset X$, τότε ο Y με τη σχετική τοπολογία είναι Hausdorff.

(2) Η ιδιότητα Hausdorff, γενικά, δεν μεταφέρεται από συνεχείς απεικονίσεις (φυσικά, μεταφέρεται από ομοιομορφισμούς). Για παράδειγμα, αν $X = \{0, 1\}$ και $\mathscr{T} = \{\emptyset, X, \{0\}\}$, τότε ο $(X, \mathscr{T})$ δεν είναι Hausdorff γιατί η μοναδική περιοχή του 1 είναι ολόκληρος ο χώρος. Όμως η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to X$ με $f = \chi_{\{1\}}$ είναι συνεχής, ανοιχτή και επί.

(3) Ένας χώρος πηλίκο ενός χώρου Hausdorff δεν είναι κατ' ανάγκη Hausdorff. Για παράδειγμα, στο $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, η σταθερή ακολουθία $\xi_n = [0]$ συγκλίνει σε κάθε $[\alpha] = \{\alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Πράγματι έστω $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, $Q(x) = [x]$, η απεικόνιση πηλίκο, και έστω G τυχούσα περιοχή του $[\alpha]$. Το $Q^{-1}(G)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, άρα υπάρχει ρητός $r \in Q^{-1}(G)$. Επομένως

$$\xi_n = [0] = [r] = Q(r) \in G$$

για κάθε n.

Θεώρημα. *Έστω X τοπολογικός χώρος και R μια σχέση ισοδυναμίας στο X τέτοια ώστε*

(1) *Το R είναι κλειστό υποσύνολο του $X \times X$.*

(2) *Η $Q : X \to X/R$, $Q(x) = [x]$, είναι ανοιχτή απεικόνιση.*

Τότε ο X/R είναι Hausdorff.

Απόδειξη. Έστω $Q(x), Q(y) \in X/R$ με $Q(x) \neq Q(y)$. Τότε τα x, y δεν είναι ισοδύναμα, άρα $(x, y) \notin R$. Αφού το R είναι κλειστό, υπάρχουν U, V περιοχές των x, y τέτοιες ώστε $(U \times V) \cap R = \emptyset$. Αφού η Q είναι ανοιχτή τα $Q(U), Q(V)$ είναι ξένες περιοχές των $Q(x), Q(y)$ (αν τα $Q(U), Q(V)$ τέμνονταν, θα υπήρχαν $z_1 \in U$, $z_2 \in V$ με $Q(z_1) = Q(z_2)$. Αλλά τότε $(z_1, z_2) \in (U \times V) \cap R$, άτοπο). □

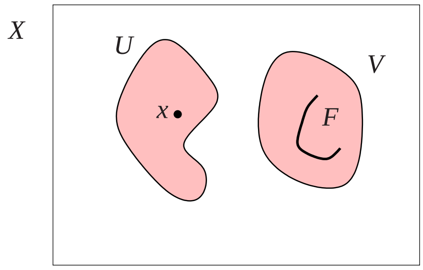
Παράδειγμα. Θεωρούμε τον προβολικό χώρο $\mathbb{RP}^{n-1} = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}/R$, όπου R είναι η σχέση ισοδυναμίας $(x, y) \in R \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \neq 0$ τέτοιο ώστε $y = \lambda x$. Ο $\mathbb{RP}^{n-1}$ είναι Hausdorff. Πράγματι, έστω $(x_j, y_j) \in R$ με $(x_j, y_j) \to (x, y)$. Αφού $(x_j, y_j) \in R$, υπάρχουν $\lambda_j \neq 0$ ώστε $y_j = \lambda_j x_j$, άρα $|\lambda_j| \to |y|/|x| > 0$. Επομένως η λ_j είναι φραγμένη, συνεπώς υπάρχει υπακολουθία λ_{k_j} τέτοια ώστε $\lambda_{k_j} \to \lambda$, για κάποιο $\lambda \neq 0$. Συμπεραίνουμε ότι $y = \lim y_{k_j} = \lim \lambda_{k_j} x_{k_j} = \lambda x$, δηλαδή $(x, y) \in R$ και έτσι το R είναι κλειστό. Έστω τώρα $G \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ανοιχτό. Τότε

$$Q^{-1}(Q(G)) = \bigcup_{\lambda \neq 0} \lambda G,$$

όπου $\lambda G = \{\lambda g : g \in G\}$. Αλλά τα σύνολα λG είναι ανοιχτά ως εικόνες του G μέσω του ομοιομορφισμού $x \mapsto \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Άρα, από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο, το $Q(G)$ είναι ανοιχτό. Δηλαδή η Q είναι ανοιχτή. Το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο θεώρημα.

9. Κανονικοί Χώροι

Ορισμός. *Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται T_3 ή κανονικός (regular), αν για κάθε $F \subset X$ κλειστό και κάθε $x \notin F$ υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $x \in U$ και $F \subset V$. Δηλαδή τα x και F διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα.*



Παραδείγματα.

(1) Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι T_3. Πράγματι, έστω $F \subset X$ κλειστό και $a \notin F$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = d(x, F) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}$. Η f είναι συνεχής γιατί $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$. Επίσης $f(a) > 0$ γιατί $a \notin F$ και F κλειστό. Τέλος $f|_F = 0$. Επομένως $a \in f^{-1}((f(a)/2, +\infty))$ και $F \subset f^{-1}((-\infty, f(a)/2))$. Τα $f^{-1}((f(a)/2, +\infty), f^{-1}((-\infty, f(a)/2))$ είναι προφανώς ξένα και ανοιχτά σαν αντίστροφες εικόνες ανοιχτών συνόλων μέσω της συνεχούς f.

(2) Το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι T_3. Έστω $F \subset \mathbb{R}$ κλειστό και $x \notin F$. Επιλέγουμε μια περιοχή $(a, x]$ του x τέτοια ώστε $(a, x] \cap F = \emptyset$, και για κάθε $y \in F$ μια περιοχή $(b_y, y]$ του y τέτοια ώστε $x \notin (b_y, y]$. Τότε

$$(a, x] \cap \bigcup_{y \in F} (b_y, y] = \emptyset.$$

(3) Υπάρχει χώρος T_2 ο οποίος δεν είναι T_3. Επίσης μια τοπολογία ισχυρότερη μιας κανονικής τοπολογίας, δεν είναι κατ' ανάγκη κανονική. Αυτά προκύπτουν από το εξής παράδειγμα. Στο $\mathbb{R}$ θεωρούμε την τοπολογία που παράγεται από την οικογένεια

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\} \cup \{\mathbb{Q}\}.$$

Έτσι, μια βάση για την τοπολογία αποτελείται από όλα τα ανοιχτά διαστήματα και όλα τα σύνολα της μορφής $(a, b) \cap \mathbb{Q}$. Η τοπολογία αυτή είναι ισχυρότερη της συνηθισμένης, άρα είναι T_2. Παρατηρήστε ότι το $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ είναι κλειστό και $0 \notin F$. Ισχυριζόμαστε ότι το F και το x δεν διαχωρίζονται από ανοιχτά σύνολα. Πράγματι, έστω U τυχούσα περιοχή του 0 και V τυχόν ανοιχτό υπερσύνολο του F. Η U περιέχει ένα σύνολο της μορφής $(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Επιλέγουμε τώρα έναν άρρητο $\alpha \in (-\delta, \delta)$. Η V είναι περιοχή του α, άρα περιέχει κάποιο διάστημα $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ το οποίο κατ' ανάγκη τέμνει το $(-\delta, \delta) \cap \mathbb{Q}$. Δηλαδή κάθε περιοχή του 0 τέμνει κάθε ανοιχτό υπερσύνολο του F. Αυτό σημαίνει ότι ο χώρος δεν είναι T_3.

Παρατηρήσεις.

(1) Κάθε υπόχωρος ενός χώρου T_3 είναι T_3.
(2) Ακριβώς όπως στην περίπτωση χώρων Hausdorff, η συνεχής εικόνα ή ένα πηλίκο ενός χώρου T_3 δεν είναι αναγκαστικά T_3.

Θεώρημα. *Ένας χώρος Hausdorff X είναι T_3 αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ και κάθε περιοχή U του x, υπάρχει περιοχή V του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset U$.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι T_3, και έστω U μια περιοχή του x. Τότε $x \notin X \setminus U$, άρα υπάρχουν $V, W \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $x \in V$ και $X \setminus U \subset W$. Επομένως, $\overline{V} \subset \overline{X \setminus W} = X \setminus W \subset U$. Αντίστροφα, έστω $F \subset X$ κλειστό και $x \notin F$. Τότε το $X \setminus F$ είναι περιοχή του x, άρα υπάρχει V περιοχή του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset X \setminus F$. Τότε το $X \setminus \overline{V}$ είναι ανοιχτό υπερσύνολο του F ξένο με το V. □

Παρατήρηση. Το προηγούμενο θεώρημα μας δίνει μια εναλλακτική απόδειξη ότι ένας μετρικός χώρος είναι T_3. Για κάθε x και κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\overline{D(x, \varepsilon/2)} \subset D(x, \varepsilon)$.

Θεώρημα. *Το γινόμενο μιας οικογένειας χώρων X_i, $i \in I$, είναι T_3 αν και μόνο αν κάθε παράγοντας X_i είναι T_3.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο $X = \prod_{i\in I} X_i$ είναι T_3. Σταθεροποιούμε $j \in I$ και ένα σημείο $z = (z_i)_{i\in I} \in X$. Τότε το σύνολο $A_j = \bigcap_{i\neq j} p_i^{-1}(\{z_i\})$ είναι χώρος T_3 ως προς τη σχετική τοπολογία. Είναι επίσης ομοιομορφικό με τον X_j μέσω του ομοιομορφισμού:

$$A_j \ni y \mapsto p_j(y) \in X_j.$$

Άρα ο X_j είναι T_3. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι όλοι οι παράγοντες είναι T_3. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι ο X είναι T_2 ως γινόμενο χώρων T_2. Έστω τώρα $x \in X$ και $U = \bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$ μια περιοχή του x. Τότε το U_{i_k} είναι περιοχή του $p_{i_k}(x)$, άρα, από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει μια περιοχή V_{i_k} του $p_{i_k}(x)$ τέτοια ώστε $\overline{V}_{i_k} \subset U_{i_k}$. Αλλά τότε το $\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(V_{i_k})$ είναι μια περιοχή του x τέτοια ώστε

$$\overline{\bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(V_{i_k})} = \bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}\left(\overline{V}_{i_k}\right) \subset \bigcap_{k=1}^n p_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) = U.$$

Επομένως, πάλι από το προηγούμενο θεώρημα, ο X είναι T_3. □

Θεώρημα. *Αν ο X είναι T_3 και το $A \subset X$ κλειστό, τότε ο X/A είναι Hausdorff.*

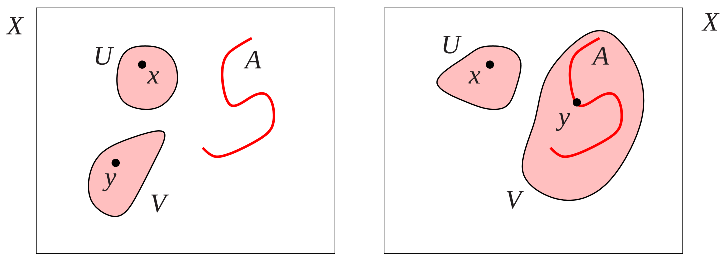
Απόδειξη. Έστω $Q : X \to X/A$, $Q(x) = [x]$, η απεικόνιση πηλίκο. Παρατηρήστε ότι $Q(x) = \{x\}$ αν $x \notin A$ και $Q(x) = A$ αν $x \in A$. Έτσι η $Q|_{X\setminus A} : X \setminus A \to X/A \setminus \{A\}$ είναι 1-1 και επί. Έστω τώρα $[x], [y] \in X/A$ με $[x] \neq [y]$. Τότε τα x και y δεν είναι ισοδύναμα άρα αποκλείεται να ανήκουν και τα δυο στο A.

Αν $x \notin A$ και $y \notin A$, τότε αφού ο X είναι T_2 και το A κλειστό, υπάρχουν ξένες περιοχές $U, V \subset X \setminus A$ των x, y. Αφού η $Q|_{X\setminus A}$ είναι 1-1 έχουμε ότι $Q(U) \cap Q(V) = \emptyset$. Επίσης $Q^{-1}(Q(U)) = U$ και $Q^{-1}(Q(V)) = V$, άρα τα $Q(U)$ και $Q(V)$ είναι ανοιχτά από τον ορισμό της τοπολογίας πηλίκο.

Αν $x \notin A$ και $y \in A$, τότε αφού ο X είναι T_3, υπάρχουν U, V ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $x \in U$ και $A \subset V$. Τα $Q(U)$ και $Q(V)$ είναι ξένα γιατί αν υπήρχαν $u \in U$ και $v \in V$ με $Q(u) = Q(v)$ τότε τα u, v θα ήταν ισοδύναμα, δηλαδή θα είχαμε $u = v$ ή $u, v \in A$, επομένως τα U, V δεν θα ήταν ξένα. Επίσης $Q^{-1}(Q(U)) = U$ γιατί η $Q|_{X\setminus A}$ είναι 1-1, άρα το $Q(U)$ είναι ανοιχτό. Τέλος

$$Q^{-1}(Q(V)) = Q^{-1}(Q(A \cup (V \setminus A))) = Q^{-1}(Q(A)) \cup Q^{-1}(Q(V \setminus A)) = Q^{-1}(\{A\}) \cup (V \setminus A) = A \cup (V \setminus A) = V.$$

Δηλαδή και το $Q(V)$ είναι ανοιχτό.



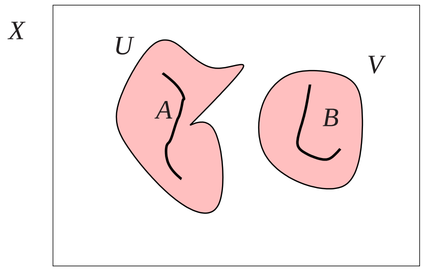
Συμπεραίνουμε ότι σε κάθε περίπτωση, τα $Q(U)$, $Q(V)$ είναι ξένες περιοχές των $[x]$, $[y]$.

□

Παρατήρηση. Η υπόθεση ότι το A είναι κλειστό δεν μπορεί να παραληφθεί όπως φαίνεται από το παράδειγμα $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

10. Φυσιολογικοί Χώροι

Ορισμός. *Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται T_4 ή φυσιολογικός (normal), αν για κάθε $A, B \subset X$ κλειστά και ξένα, υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $A \subset U$ και $B \subset V$.*



Παραδείγματα.

(1) Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι T_4, γιατί αν τα $A, B \subset X$ είναι κλειστά και ξένα και θεωρήσουμε τη συνεχή συνάρτηση
$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$
τότε έχουμε $A \subset f^{-1}((-\infty, 1/2))$, $B \subset f^{-1}((1/2, +\infty))$.

(2) Το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι T_4. Πράγματι, έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ κλειστά και ξένα. Για κάθε $x \in A$ επιλέγουμε μια περιοχή $(a_x, x]$ ξένη με το B και για κάθε $y \in B$ επιλέγουμε μια περιοχή $(b_y, y]$ ξένη με το A. Τότε
$$\bigcup_{x \in A}(a_x, x] \cap \bigcup_{y \in B}(b_y, y] = \emptyset.$$

Θεώρημα. *Ένας χώρος Hausdorff X είναι T_4 αν και μόνο αν για κάθε $A \subset X$ κλειστό και κάθε $U \supset A$ ανοιχτό υπάρχει $V \supset A$ ανοιχτό τέτοιο ώστε $\overline{V} \subset U$.*

Απόδειξη. Τελείως ανάλογη με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για χώρους T_3. □

Θεώρημα.

(1) *Ένας κλειστός υπόχωρος ενός χώρου T_4 είναι T_4.*

(2) *Αν ο X είναι T_4, ο Y είναι T_2, και η $f : X \to Y$ συνεχής, κλειστή και επί, τότε ο Y είναι T_4.*

Απόδειξη.

(1) Δυο ξένα και κλειστά υποσύνολα ενός κλειστού υπόχωρου είναι κλειστά σ' ολόκληρο το χώρο, άρα διαχωρίζονται.

(2) Έστω $A, B \subset Y$ κλειστά και ξένα. Τότε τα $f^{-1}(A), f^{-1}(B) \subset X$ είναι κλειστά και ξένα, άρα υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $f^{-1}(A) \subset U$ και $f^{-1}(B) \subset V$. Αφού η f είναι κλειστή τα $Y \setminus f(X \setminus U)$ και $Y \setminus f(X \setminus V)$ είναι ανοιχτά και ξένα υπερσύνολα των A, B.

□

Παρατήρηση. Ένας υπόχωρος ενός φυσιολογικού χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη φυσιολογικός. Για παράδειγμα (εδώ απαιτούνται γνώσεις θεωρίας συνόλων) αν θεωρήσουμε τους χώρους διατακτικών αριθμών $[0, \omega]$, $[0, \omega_1]$ με την τοπολογία που έχει βάση όλα τα διαστήματα της μορφής $(\alpha, \beta]$ (μαζί με το $\{0\}$) και θέσουμε $X = [0, \omega] \times [0, \omega_1]$, τότε ο X είναι φυσιολογικός, αλλά ο ανοιχτός υπόχωρος $Y = X \setminus \{(\omega, \omega_1)\}$ δεν είναι γιατί τα κλειστά (στον Y) και ξένα σύνολα $\{\omega\} \times [0, \omega_1)$ και $[0, \omega) \times \{\omega_1\}$ δεν διαχωρίζονται.

Η ιδιότητα T_4 επιβάλλει περιορισμούς στο «πόσο πολλά» μπορεί να είναι τα κλειστά και ξένα υποσύνολα ενός χώρου, όπως φαίνεται από το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Έστω X ένας φυσιολογικός χώρος, $Y \subset X$ κλειστό και διακριτό, και $D \subset X$ πυκνό. Τότε $|\mathscr{P}(Y)| \leq |\mathscr{P}(D)|$, όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο.*

Απόδειξη. Αφού ο Y είναι διακριτός, κάθε υποσύνολό του είναι κλειστό στον X. Επομένως για κάθε $A \subset Y$ υπάρχουν $U_A, V_A \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $A \subset U_A$ και $Y \setminus A \subset V_A$. Αφού τα U_A είναι ανοιχτά και το D πυκνό, έχουμε ότι $U_A \cap D \neq \emptyset$. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση
$$\varphi : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(D),\ \varphi(A) = U_A \cap D.$$

Τότε η φ είναι 1-1. Πράγματι, αν $A, B \subset Y$ με $A \neq B$ τότε μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $A \cap (Y \setminus B) \neq \emptyset$, άρα $U_A \cap V_B \neq \emptyset$, επομένως $U_A \cap V_B \cap D \neq \emptyset$ γιατί το D είναι πυκνό. Αν λοιπόν είχαμε ότι $\varphi(A) = \varphi(B)$ τότε

$$\emptyset \neq U_A \cap V_B \cap D = \varphi(A) \cap V_B = \varphi(B) \cap V_B = U_B \cap D \cap V_B = \emptyset,$$

άτοπο. Συμπεραίνουμε ότι $|\mathscr{P}(Y)| \leq |\mathscr{P}(D)|$. □

Σαν εφαρμογή, δίνουμε το ακόλουθο παράδειγμα το οποίο δείχνει ότι υπάρχει χώρος T_3 ο οποίος δεν είναι T_4, ότι το γινόμενο δυο T_4 χώρων δεν είναι κατ' ανάγκη T_4 και ότι μια τοπολογία ισχυρότερη μιας τοπολογίας T_4 μπορεί να μην είναι T_4.

Παράδειγμα. Έστω $\mathbb{R}_s$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων. Θέτουμε $X = \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$, $Y = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ και $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Ο X είναι T_3 σαν γινόμενο χώρων T_3. Επίσης, το D είναι πυκνό γιατί το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στον $\mathbb{R}_s$. Τέλος, όπως έχουμε δει, το Y είναι κλειστό και διακριτό. Αν ο X ήταν T_4, τότε από το προηγούμενο θεώρημα θα είχαμε ότι $|\mathscr{P}(Y)| \leq |\mathscr{P}(D)|$. Αλλά $|\mathscr{P}(Y)| = |\mathscr{P}(\mathbb{R})|$ και $|\mathscr{P}(D)| = |\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$, άτοπο γιατί ο πληθάριθμος του δυναμοσυνόλου είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του συνόλου.

Θεώρημα. *Έστω X ένας χώρος T_4 και $A \subset X$ κλειστό. Τότε ο X/A είναι T_4.*

Απόδειξη. Ανάλογη με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος της προηγούμενης ενότητας. □

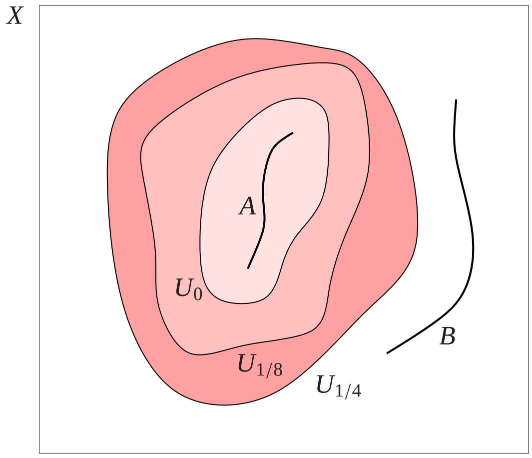
11. Το Λήμμα του Urysohn και το Θεώρημα Επέκτασης του Tietze

Η σημαντικότερη ιδιότητα των φυσιολογικών χώρων είναι ότι δυο κλειστά και ξένα σύνολα μπορούν να διαχωριστούν από συνεχείς συναρτήσεις, ακριβώς όπως και στην περίπτωση των μετρικών χώρων.

Θεώρημα (Το Λήμμα του Urysohn)**.** *Έστω X ένας χώρος T_4 και $A, B \subset X$ κλειστά και ξένα. Τότε υπάρχει $f : X \to [0,1]$ συνεχής τέτοια ώστε $f|_A = 0$ και $f|_B = 1$.*

Απόδειξη. Έστω $D = \{k/2^n : n = 0,1,2,\dots \ k = 0,1,2,\dots,2^n\}$ το σύνολο όλων των δυαδικών αριθμών στο $[0,1]$. Το D είναι πυκνό. Θα ορίσουμε επαγωγικά μια οικογένεια U_r, $r \in D$, ανοιχτών υποσυνόλων του X με τις ακόλουθες ιδιότητες.

(1) $A \subset U_r$, $B \cap U_r = \emptyset$.
(2) Αν $r < s$ τότε $\overline{U}_r \subset U_s$.



Θέτουμε $U_1 = X \setminus B$. Τότε $A \subset U_1$. Αφού το A είναι κλειστό και ο χώρος φυσιολογικός, υπάρχει U_0 ανοιχτό τέτοιο ώστε $A \subset U_0 \subset \overline{U}_0 \subset U_1$. Έστω τώρα ότι τα $U_{k/2^{n-1}}$, $k = 0,1,\dots,2^{n-1}$, έχουν οριστεί ώστε να ικανοποιούνται οι (1) και (2). Θα ορίσουμε τα $U_{k/2^n}$, $k = 0,1,2,\dots,2^n$. Αν ο k είναι άρτιος, δηλαδή $k = 2\ell$, τότε το $U_{k/2^n} = U_{\ell/2^{n-1}}$ έχει ήδη οριστεί. Αν ο k είναι περιττός τότε οι $k-1$ και $k+1$ είναι άρτιοι επομένως τα $U_{(k-1)/2^n}$, $U_{(k+1)/2^n}$ έχουν οριστεί και έχουμε $\overline{U}_{(k-1)/2^n} \subset U_{(k+1)/2^n}$. Αφού ο χώρος είναι φυσιολογικός υπάρχει $U_{k/2^n}$ ανοιχτό τέτοιο ώστε

$$\overline{U}_{(k-1)/2^n} \subset U_{k/2^n} \subset \overline{U}_{k/2^n} \subset U_{(k+1)/2^n}.$$

Αυτό ολοκληρώνει τον επαγωγικό ορισμό. Αντικαθιστούμε τώρα το U_1 με όλο τον χώρο X και ορίζουμε

$$f : X \to [0,1], \quad f(x) = \inf\{r \in D : x \in U_r\}.$$

Αφού $U_1 = X$, η f είναι καλά ορισμένη. Αν $x \in A$ τότε το x ανήκει σε όλα τα U_r επομένως $f(x) = 0$. Αν $x \in B$ τότε το x ανήκει μόνο στο U_1 άρα $f(x) = 1$. Δείχνουμε τέλος ότι η f είναι συνεχής. Έστω $x_0 \in X$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, $f(x_0) \in (0,1)$. Έστω τώρα $I = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ μια περιοχή του $f(x_0)$. Αφού το D είναι πυκνό, υπάρχουν $r_1, r_2 \in D$ τέτοια ώστε $f(x_0) - \varepsilon < r_1 < r_2 < f(x_0)$. Τότε $x_0 \notin U_{r_2}$, άρα $x_0 \notin \overline{U}_{r_1}$. Επίσης $f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$, άρα υπάρχει $r_3 \in D$ με $f(x_0) \le r_3 < f(x_0) + \varepsilon$ τέτοιο ώστε $x_0 \in U_{r_3}$. Επομένως το $W = U_{r_3} \setminus \overline{U}_{r_1}$ είναι περιοχή του x_0. Παρατηρούμε ότι $f(W) \subset I$ γιατί αν $x \in W$ τότε $r_1 \le f(x) \le r_3$. Συνεπώς η f είναι συνεχής. □

Παρατηρήσεις.

(1) Ισχύει και το αντίστροφο του λήμματος του Urysohn: Αν ένας χώρος Hausdorff X έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $A, B \subset X$ κλειστά και ξένα υπάρχει $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής ώστε $f|_A = 0$ και $f|_B = 1$, τότε ο X είναι T_4. Πράγματι, τα ανοιχτά σύνολα $f^{-1}((-\infty, 1/2))$ και $f^{-1}((1/2, +\infty))$ διαχωρίζουν τα A και B.
(2) Αφού $[0,1] \approx [a,b]$, έχουμε ότι αν ο X είναι T_4 και $A, B \subset X$ κλειστά και ξένα τότε υπάρχει $f : X \to [a,b]$ συνεχής τέτοια ώστε $f|_A = a$ και $f|_B = b$.

Θεώρημα (Το Θεώρημα Επέκτασης του Tietze)**.** *Έστω X ένας χώρος T_4, $A \subset X$ κλειστό και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε υπάρχει $h : X \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $h|_A = f$. Δηλαδή η f έχει συνεχή επέκταση.*

Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη.

Πρόταση. *Έστω X χώρος T_4, $A \subset X$ κλειστό και $F : A \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|F(x)| \leq c$ για κάθε $x \in A$. Τότε υπάρχει $H : X \to \mathbb{R}$ συνεχής τέτοια ώστε $|H(x)| \leq c/3$ για κάθε $x \in X$ και $|F(x) - H(x)| \leq 2c/3$ για κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A_+ = \{x \in A : F(x) \geq c/3\}$ και $A_- = \{x \in A : F(x) \leq -c/3\}$. Τα A_+ και A_- είναι κλειστά στο A, άρα και στο X αφού το A είναι κλειστό. Από το λήμμα του Urysohn υπάρχει $H : X \to [-c/3, c/3]$ συνεχής τέτοια ώστε $H|_{A_+} = c/3$ και $H|_{A_-} = -c/3$. Η H είναι προφανώς η ζητούμενη. □

Απόδειξη. (Του Θεωρήματος του Tietze.)

1η περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $|f| \leq c$ στο A και δείχνουμε ότι υπάρχει συνεχής επέκταση h τέτοια ώστε $|h| \leq c$ στο X. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη πρόταση για $F = f$ και παίρνουμε μια $h_0 : X \to \mathbb{R}$ συνεχή τέτοια ώστε $|h_0| \leq c/3$ στο X και $|f - h_0| \leq 2c/3$ στο A. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την πρόταση για $F = f - h_0$ και παίρνουμε μια $h_1 : X \to \mathbb{R}$ συνεχή τέτοια ώστε $|h_1| \leq 1/3 \cdot 2c/3$ στο X και $|f - h_0 - h_1| \leq (2/3)^2 c$ στο A. Συνεχίζοντας με διαδοχικές εφαρμογές της πρότασης, παίρνουμε μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $h_n : X \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $|h_n| \leq 1/3(2/3)^n c$ στο X και $|f - \sum_{k=0}^{n} h_k| \leq (2/3)^{n+1} c$ στο A. Αφού $\sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n < \infty$, από το κριτήριο Weierstrass έχουμε ότι η $h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$ είναι συνεχής. Επίσης $|h| \leq c/3 \sum_{n=0}^{\infty} (2/3)^n = c$ στο X. Τέλος παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ στη σχέση $|f - \sum_{k=0}^{n} h_k| \leq (2/3)^{n+1} c$ έχουμε ότι $f = h|_A$.

2η περίπτωση. Υποθέτουμε ότι $|f| < c$ στο A και δείχνουμε ότι υπάρχει συνεχής επέκταση h τέτοια ώστε $|h| < c$ στο X. Από την 1η περίπτωση, υπάρχει συνεχής επέκταση $\widehat{h}$ τέτοια ώστε $|\widehat{h}| \leq c$. Θέτουμε

$$A_0 = \{x \in X : |\widehat{h}| = c\}.$$

Τότε το A_0 είναι κλειστό και ξένο με το A, άρα από το λήμμα του Urysohn υπάρχει $\varphi : X \to [0, 1]$ συνεχής τέτοια ώστε $\varphi|_{A_0} = 0$ και $\varphi|_A = 1$. Θέτουμε $h = \varphi \widehat{h}$.

3η περίπτωση. Δεν υπάρχει περιορισμός για την f. Εδώ θεωρούμε έναν ομοιομορφισμό $\psi : \mathbb{R} \to (-1, 1)$. Τότε από την 2η περίπτωση υπάρχει $g : X \to (-1, 1)$ συνεχής επέκταση της $\psi \circ f$. Έτσι η $h = \psi^{-1} \circ g$ είναι η ζητούμενη επέκταση.

□

Παρατήρηση. Ισχύει και το αντίστροφο του θεωρήματος του Tietze. Αν ένας χώρος Hausdorff έχει την ιδιότητα ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε κάθε κλειστό σύνολο έχει συνεχή επέκταση, τότε ο χώρος είναι T_4. Πράγματι, αν A, B είναι κλειστά και ξένα, τότε η $f : A \cup B \to [0, 1]$ με $f|_A = 0$ και $f|_B = 1$ είναι συνεχής, άρα έχει συνεχή επέκταση σ' ολόκληρο το χώρο. Δηλαδή, τα A και B διαχωρίζονται από μια συνεχή συνάρτηση, επομένως ο χώρος είναι φυσιολογικός.

12. Συνθήκες Αριθμησιμότητας

Ορισμός. *Ένας χώρος λέγεται διαχωρίσιμος αν έχει ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο.*

Παραδείγματα.

(1) Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία και με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι διαχωρίσιμος χώρος αφού και στις δυο περιπτώσεις το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό.

(2) Ένας υπεραριθμήσιμος διακριτός χώρος δεν είναι διαχωρίσιμος αφού το μοναδικό πυκνό υποσύνολο είναι ο ίδιος ο χώρος.

Θεώρημα. *Έστω X διαχωρίσιμος.*

(1) *Κάθε ανοιχτός υπόχωρος είναι διαχωρίσιμος.*

(2) *Αν Y είναι κάποιος χώρος και $f : X \to Y$ συνεχής και επί, τότε ο Y είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $D \subset X$ αριθμήσιμο και πυκνό.

(1) Αν το $A \subset X$ είναι ανοιχτό, τότε το $D \cap A$ είναι πυκνό στο A διότι κάθε $U \subset A$ ανοιχτό στο A είναι ανοιχτό στο X επομένως τέμνει το D άρα και το $D \cap A$.

(2) Έχουμε $Y = f(X) = f\left(\overline{D}\right) \subset \overline{f(D)}$. Άρα το $f(D)$ είναι πυκνό.

□

Παρατήρηση. Ένας αυθαίρετος υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου χώρου δεν είναι κατ' ανάγκη διαχωρίσιμος. Για παράδειγμα, αν $\mathbb{R}_s$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων τότε το $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ είναι διαχωρίσιμος χώρος αφού το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ είναι πυκνό. Αλλά η αντιδιαγώνιος $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ είναι υπεραριθμήσιμη και διακριτή, άρα δεν μπορεί να είναι διαχωρίσιμος χώρος. Παρά ταύτα έχουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα. *Αν ο (X, d) είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και $Y \subset X$, τότε ο Y είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό στο X. Τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $y \in Y$ υπάρχει $n(y, k) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $d(y, x_{n(y,k)}) < 1/k$. Το σύνολο $\{n(y, k) : y \in Y\}$ είναι αριθμήσιμο, άρα υπάρχουν $y_j^k \in Y$, $j \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\{n(y, k) : y \in Y\} = \{n(y_j^k, k) : j \in \mathbb{N}\}$. Τότε το $\{y_j^k : j, k \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό στο Y. Πράγματι, έστω $y \in Y$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k, j \in \mathbb{N}$ με $1/k < \varepsilon/2$ και $n(y, k) = n(y_j^k, k)$. Τότε

$$d(y, y_j^k) \leq d(y, x_{n(y,k)}) + d(x_{n(y_j^k,k)}, y_j^k) < 1/k + 1/k < \varepsilon.$$

□

Παράδειγμα. Ο $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ είναι διαχωρίσιμος αλλά η αντιδιαγώνιος δεν είναι. Άρα ο χώρος αυτός δεν είναι μετρικοποιήσιμος.

Θεώρημα. *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία διαχωρίσιμων χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι διαχωρίσιμος χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $D_n \subset X_n$ αριθμήσιμο και πυκνό. Σταθεροποιούμε ένα $z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$. Τότε το σύνολο

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} D_j \times \prod_{j=n+1}^{\infty} \{z_j\} \right)$$

είναι αριθμήσιμο και πυκνό γιατί το τυχόν ανοιχτό βασικό σύνολο $U = \bigcap_{k=1}^{n} p_{i_k}^{-1}(G_{i_k})$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, τέμνει το ορθογώνιο $R = \prod_{j=1}^{i_n} D_j \times \prod_{j=i_n+1}^{\infty} \{z_j\} \subset D$. Πράγματι, η i_k-πλευρά του U δηλαδή το ανοιχτό σύνολο G_{i_k}, τέμνει την i_k πλευρά του R η οποία είναι το πυκνό σύνολο D_{i_k}. Για $j \neq i_k$, η j-πλευρά του U είναι ολόκληρος ο χώρος X_j ο οποίος φυσικά τέμνει την j-πλευρά του R. □

Παρατήρηση. Ένα αυθαίρετο γινόμενο διαχωρίσιμων χώρων μπορεί να μην είναι διαχωρίσιμος χώρος. Για παράδειγμα το $\mathbb{R}^I$, όπου ο πληθάριθμος του I είναι γνήσια μεγαλύτερος από τον πληθάριθμο του $\mathbb{R}$ (η απόδειξη παραλείπεται).

Ορισμός. *Ένας χώρος λέγεται 1ος αριθμήσιμος αν κάθε σημείο του έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών.*

Παραδείγματα.

(1) Κάθε μετρικός χώρος (X, d) είναι 1ος αριθμήσιμος αφού η οικογένεια $\{D(x, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση περιοχών του x.

(2) Το $\mathbb{R}$ με την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων είναι 1ος αριθμήσιμος χώρος γιατί η οικογένεια $\{(x - 1/n, x] : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση περιοχών του x.

(3) Αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, τότε ο χώρος $X = \mathbb{R}^I$ δεν είναι 1ος αριθμήσιμος, άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος. Στην πραγματικότητα κανένα σημείο δεν έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών. Ας υποθέσουμε ότι κάποιο $x = (x_i)_{i\in I} \in X$ έχει αριθμήσιμη βάση περιοχών $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, όπου $U_n = \bigcap_{i\in J_n} p_i^{-1}(G_i^n)$, $J_n \subset I$ πεπερασμένο, $G_i^n \subset \mathbb{R}$ ανοιχτό. Τότε αν επιλέξουμε $i_0 \in I \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$ θα έχουμε ότι η περιοχή $U = p_{i_0}^{-1}((x_{i_0} - 1, x_{i_0} + 1))$ δεν περιέχει κανένα U_n, αφού η i_0-πλευρά της U είναι ένα φραγμένο διάστημα, ενώ η i_0-πλευρά των U_n είναι το $\mathbb{R}$.

Παρατήρηση. Ένας υπόχωρος ενός 1ου αριθμήσιμου χώρου είναι 1ος αριθμήσιμος.

Θεώρημα. *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία 1ων αριθμήσιμων χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι 1ος αριθμήσιμος χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, και $\mathscr{B}_n$ αριθμήσιμη βάση περιοχών του $x_n \in X_n$. Τότε η οικογένεια

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} p_k^{-1}(U_k) : U_k \in \mathscr{B}_k,\ k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

είναι μια αριθμήσιμη βάση περιοχών του x. □

Θεώρημα. *Έστω X 1ος αριθμήσιμος, $A \subset X$, $x \in X$, Y κάποιος χώρος, και $f : X \to Y$.*

(1) *$x \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $x_n \in A$ τέτοια ώστε $x_n \to x$.*
(2) *Η f είναι συνεχής στο x αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_n \in X$ με $x_n \to x$ έχουμε $f(x_n) \to f(x)$.*

Δηλαδή σ' ένα 1ο αριθμήσιμο χώρο οι ακολουθίες μπορούν να παίξουν το ρόλο των δικτύων.

Απόδειξη. Έστω $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια βάση περιοχών του x. Αντικαθιστώντας το B_n με το $\bigcap_{k\leq n} B_k$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η B_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων.

(1) Αν $x \in \overline{A}$, επιλέγουμε $x_n \in A \cap B_n$. Τότε $x_n \to x$. Πράγματι, αν U είναι τυχούσα περιοχή του x τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $B_{n_0} \subset U$. Επομένως για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε $x_n \in B_n \subset B_{n_0} \subset U$.
(2) Ας υποθέσουμε ότι η f δεν είναι συνεχής στο x. Τότε υπάρχει περιοχή V του $f(x)$ τέτοια ώστε $f(B_n) \not\subset V$ για κάθε n. Επιλέγουμε $x_n \in B_n$ με $f(x_n) \notin V$. Τότε $x_n \to x$ και $f(x_n) \nrightarrow f(x)$.

□

Ορισμός. *Ένας χώρος $(X, \mathscr{T})$ λέγεται 2ος αριθμήσιμος αν η $\mathscr{T}$ έχει αριθμήσιμη βάση.*

Παρατηρήσεις.

(1) Ένας υπόχωρος ενός 2ου αριθμήσιμου χώρου είναι 2ος αριθμήσιμος.
(2) Ένας 2ος αριθμήσιμος χώρος είναι 1ος αριθμήσιμος και διαχωρίσιμος γιατί αν $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι μια βάση για την τοπολογία, τότε η $\{B_n : x \in B_n\}$ είναι αριθμήσιμη βάση περιοχών του τυχόντος x. Επίσης, αν επιλέξουμε $x_n \in B_n$, τότε το σύνολο $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι πυκνό. Σ' ένα μετρικό χώρο ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα. *Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (X, d) είναι 2ος αριθμήσιμος.*

Απόδειξη. Έστω $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ πυκνό. Τότε η οικογένεια $\{D(x_n, 1/m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση για την τοπολογία. Πράγματι, έστω $G \subset X$ ανοιχτό και $x \in G$. Τότε υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $D(x, 1/m) \subset G$. Επιλέγοντας x_n με $d(x, x_n) < 1/(2m)$, παίρνουμε ότι $x \in D(x_n, 1/(2m)) \subset D(x, 1/m) \subset G$. □

Θεώρημα (Lindelof)**.** *Έστω X 2ος αριθμήσιμος.*

(1) *Αν G_i, $i \in I$, είναι μια οικογένεια ανοιχτών υποσυνόλων του X, τότε υπάρχει $J \subset I$ αριθμήσιμο τέτοιο ώστε $\bigcup_{i\in I} G_i = \bigcup_{j\in J} G_j$.*
(2) *Αν $\mathscr{B}$ είναι μια βάση για την τοπολογία του X, τότε υπάρχει $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}$ αριθμήσιμη τέτοια ώστε η $\mathscr{C}$ είναι βάση.*

Απόδειξη. Έστω $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια βάση για την τοπολογία του X.

(1) Θέτουμε $G = \bigcup_{i\in I} G_i$. Για κάθε $x \in G$ υπάρχει $i(x) \in I$ με $x \in G_{i(x)}$, άρα υπάρχει $n(x) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x \in U_{n(x)} \subset G_{i(x)}$. Το σύνολο $\{n(x) : x \in G\}$ είναι αριθμήσιμο, επομένως υπάρχουν $x_k \in G$, $k \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε $\{n(x) : x \in G\} = \{n(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Θέτουμε $J = \{i(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$. Τότε $\bigcup_{j\in J} G_j = G$.
(2) Αφού η $\mathscr{B}$ είναι βάση, κάθε U_n γράφεται σαν ένωση συνόλων της $\mathscr{B}$. Επομένως, από το (1), υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}$ τέτοια ώστε $U_n = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_n} B$. Θέτουμε $\mathscr{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}_n$. Αφού η $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση, και η $\mathscr{C}$ είναι βάση.

□

Παράδειγμα. Ο χώρος $\mathbb{R}_s$ είναι διαχωρίσιμος, 1ος αριθμήσιμος και όχι 2ος αριθμήσιμος (άρα δεν είναι μετρικοποιήσιμος). Αν ήταν 2ος αριθμήσιμος, τότε θα υπήρχαν $a_n < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε η οικογένεια $\{(a_n, b_n] : n \in \mathbb{N}\}$ να είναι βάση για την τοπολογία. Αν τώρα επιλέξουμε $x \in \mathbb{R}$ διαφορετικό από όλα τα b_n, τότε η περιοχή $(-\infty, x]$ δεν μπορεί να περιέχει κάποιο διάστημα $(a_n, b_n]$ με $x \in (a_n, b_n]$ γιατί θα είχαμε $b_n = x$.

Θεώρημα. *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία 2ων αριθμήσιμων χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι 2ος αριθμήσιμος χώρος.*

Απόδειξη. Έστω $\mathscr{B}_n$ αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X_n. Τότε η οικογένεια

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} p_k^{-1}(U_k) : U_k \in \mathscr{B}_k,\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

είναι μια αριθμήσιμη βάση για την τοπολογία του X. □

Παρατήρηση. Ένα υπεραριθμήσιμο γινόμενο 2ων αριθμήσιμων χώρων γενικά δεν είναι 2ος αριθμήσιμος χώρος, γιατί όπως είδαμε μπορεί να μην είναι ούτε 1ος αριθμήσιμος.

Θεώρημα. *Αν ο X είναι 2ος αριθμήσιμος και T_3 τότε είναι T_4.*

Απόδειξη. Έστω $A, B \subset X$ κλειστά και ξένα. Αφού ο X είναι T_3, για κάθε $x \in A$ υπάρχει περιοχή U_x του x τέτοια ώστε $\overline{U}_x \cap B = \emptyset$. Ομοίως, για κάθε $y \in B$ υπάρχει V_y περιοχή του y τέτοια ώστε $\overline{V}_y \cap A = \emptyset$. Αφού ο X είναι 2ος αριθμήσιμος υπάρχουν $x_n \in A$ και $y_n \in B$ τέτοια ώστε

$$\bigcup_{x \in A} U_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{x_n}, \quad \bigcup_{y \in B} V_y = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{y_n}.$$

Θέτουμε

$$\widetilde{U}_n = U_{x_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{V}_{y_k}, \quad \widetilde{V}_n = V_{y_n} \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{U}_{x_k},$$

και

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U}_n, \quad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n.$$

Τότε τα U, V είναι ανοιχτά και ξένα υπερσύνολα των A, B. □

13. Μετρικοποιησιμότητα

Στην ενότητα αυτή θα χαρακτηρίσουμε τους διαχωρίσιμους μετρικοποιήσιμους χώρους.

Θεώρημα (Urysohn). *Έστω X 2ος αριθμήσιμος και T_3, τότε ο X είναι μετρικοποιήσιμος (και διαχωρίσιμος).*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια σειρά ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Θεώρημα. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Θέτουμε $\rho = d/(1 + d)$. Τότε η τοπολογία που επάγει η μετρική ρ ταυτίζεται με την τοπολογία που επάγει η d. Έτσι, σ' ένα μετρικοποιήσιμο χώρο μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι η τοπολογία του επάγεται από μια μετρική φραγμένη από το 1.*

Απόδειξη. Ένας μετρικός χώρος είναι 1ος αριθμήσιμος, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει ως προς τη μια μετρική αν και μόνο αν συγκλίνει ως προς την άλλη. Αν $x_n \to x$ ως προς την d τότε $\rho(x_n, x) = d(x_n, x)/(1 + d(x_n, x)) \to 0$, άρα $x_n \to x$ ως προς τη ρ. Αν $x_n \to x$ ως προς τη ρ τότε $d(x_n, x) = \rho(x_n, x)/(1 - \rho(x_n, x)) \to 0$, άρα $x_n \to x$ ως προς την d. □

Θεώρημα. *Έστω X_n, $n \in \mathbb{N}$, μια ακολουθία μετρικοποιήσιμων χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος.*

Απόδειξη. Έστω ότι η τοπολογία του X_n επάγεται από τη μετρική d_n. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $d_n \leq 1$. Στο X θεωρούμε τη μετρική

$$d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k(x(k), y(k))}{2^k}.$$

Θα δείξουμε ότι η τοπολογία που επάγει η d ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο. Αφού οι δυο τοπολογίες είναι 1ες αριθμήσιμες, αρκεί να δείξουμε ότι μια ακολουθία συγκλίνει ως προς την d αν και μόνο αν συγκλίνει κατά συντεταγμένη, διότι σύγκλιση ως προς την τοπολογία γινόμενο είναι ισοδύναμη με κατά συντεταγμένη σύγκλιση. Αν $d(x_n, x) \to 0$, τότε για κάθε k έχουμε $d_k(x_n(k), x(k)) \leq 2^k d(x_n, x) \to 0$. Αντίστροφα, έστω ότι $x_n(k) \to x(k)$ για κάθε k, και έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε k_0 τέτοιο ώστε $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 1/2^k < \varepsilon$. Τότε

$$d(x_n, x) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{d_k(x_n(k), x(k))}{2^k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \frac{d_k(x_n(k), x(k))}{2^k} < \sum_{k=1}^{k_0} \frac{d_k(x_n(k), x(k))}{2^k} + \varepsilon.$$

Επομένως $\limsup d(x_n, x) \leq \varepsilon$. Η σχέση αυτή ισχύει για κάθε ε, άρα $d(x_n, x) \to 0$. □

Παρατήρηση. Ένα υπεραριθμήσιμο γινόμενο μετρικοποιήσιμων χώρων δεν είναι γενικά μετρικοποιήσιμο, αφού μπορεί να μην είναι 1ος αριθμήσιμος χώρος.

Πρόταση. *Έστω X χώρος Hausdorff, X_i, $i \in I$, μια οικογένεια τοπολογικών χώρων, και $f_i : X \to X_i$ μια οικογένεια συνεχών συναρτήσεων τέτοια ώστε για κάθε $A \subset X$ κλειστό και κάθε $x \notin A$ υπάρχει $i \in I$ τέτοιο ώστε $f_i(x) \notin \overline{f_i(A)}$. Τότε η απεικόνιση*

$$f : X \to \prod_{i \in I} X_i, \quad f(x) = (f_i(x))_{i \in I}$$

είναι ομοιομορφισμός του X στο $f(X)$.

Απόδειξη. Η f είναι προφανώς συνεχής και 1-1 γιατί αν $x \neq y$ τότε, αφού τα μονοσύνολα είναι κλειστά, υπάρχει i τέτοιο ώστε $f_i(x) \notin \overline{f_i(\{y\})}$, άρα $f(x) \neq f(y)$. Θα δείξουμε ότι η $f : X \to f(X)$ είναι ανοιχτή. Έστω $G \subset X$ ανοιχτό και $f(x) \in f(G)$. Τότε $x \notin X \setminus G$, άρα υπάρχει i τέτοιο ώστε $f_i(x) \notin \overline{f_i(X \setminus G)}$. Επομένως

$$f(x) \in p_i^{-1}\left(X_i \setminus \overline{f_i(X \setminus G)}\right) \cap f(X) \subset f(G).$$

Αυτό σημαίνει ότι το $f(G)$ είναι ανοιχτό στο $f(X)$. □

Απόδειξη. (Του θεωρήματος μετρικοποιησιμότητας του Urysohn.) Έστω $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια βάση για την τοπολογία του X. Θέτουμε $I = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \overline{U}_m \subset U_n\}$. Αφού ο X είναι 2ος αριθμήσιμος και T_3, είναι φυσιολογικός, άρα, από το λήμμα του Urysohn, για κάθε $(m, n) \in I$, υπάρχει $f_{m,n} : X \to [0, 1]$ συνεχής τέτοια ώστε $f_{m,n}|_{\overline{U}_m} = 0$ και $f_{m,n}|_{X \setminus U_n} = 1$. Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $f_{m,n}$ ικανοποιεί την υπόθεση της προηγούμενης πρότασης. Έστω $A \subset X$ κλειστό και $x \notin A$. Τότε υπάρχει U_n τέτοιο ώστε $x \in U_n$ και $U_n \cap A = \emptyset$. Αφού ο X είναι T_3 υπάρχει U_m τέτοιο ώστε $x \in U_m \subset \overline{U}_m \subset U_n$. Τότε $(m, n) \in I$ και

$$f_{m,n}(x) = 0 \notin \{1\} = \overline{f_{m,n}(A)}.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο X είναι ομοιομορφικός με έναν υπόχωρο του μετρικοποιήσιμου χώρου $[0, 1]^I$ (το I είναι αριθμήσιμο), άρα ο X είναι μετρικοποιήσιμος. □

Παρατηρήσεις.

(1) Φυσικά, ισχύει και το αντίστροφο του προηγούμενου θεωρήματος. Ένας διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι, όπως έχουμε δει, 2ος αριθμήσιμος και κανονικός.

(2) Υπάρχει πλήρης χαρακτηρισμός των μετρικοποιήσιμων χώρων (ανεξάρτητα από το αν είναι διαχωρίσιμοι), ξεφεύγει όμως από τους σκοπούς του μαθήματος.

14. Συμπαγείς Χώροι

Ορισμός. *Έστω X ένας χώρος και $A \subset X$. Μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων G_i, $i \in I$, τέτοια ώστε $A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$ λέγεται ανοιχτή κάλυψη του A.*

Ορισμός. *Ένας χώρος Hausdorff X λέγεται συμπαγής αν κάθε ανοιχτή κάλυψη του X έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Δηλαδή για κάθε οικογένεια ανοιχτών συνόλων G_i, $i \in I$, με $\bigcup_{i \in I} G_i = X$, υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$ τέτοια ώστε $\bigcup_{k=1}^{n} G_{i_k} = X$. Ένα υποσύνολο $A \subset X$ λέγεται συμπαγές αν είναι συμπαγής χώρος ως προς τη σχετική τοπολογία.*

Παραδείγματα.

(1) Το $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη τοπολογία και την τοπολογία των αριστερά ημιάνοιχτων διαστημάτων δεν είναι συμπαγής χώρος γιατί η ανοιχτή κάλυψη $(-n, n)$, $n \in \mathbb{N}$, δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη.

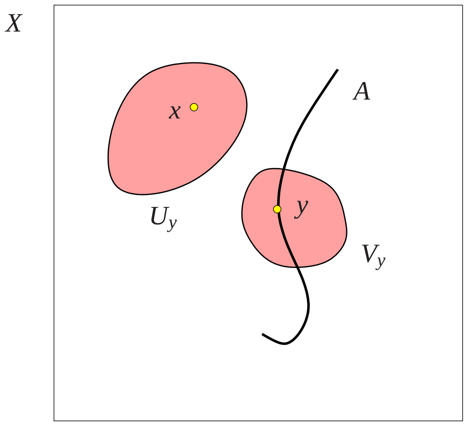
(2) Ένας διακριτός χώρος X είναι συμπαγής αν και μόνο αν το X είναι πεπερασμένο. Η μια κατεύθυνση είναι προφανής. Για την άλλη κατεύθυνση, θεωρούμε την ανοιχτή κάλυψη $\{\{x\} : x \in X\}$. Αφού ο X είναι συμπαγής υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $X = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Θεώρημα. *Αν ο X είναι συμπαγής χώρος και το $A \subset X$ κλειστό, τότε το A είναι συμπαγές.*

Απόδειξη. Έστω G_i, $i \in I$, μια ανοιχτή κάλυψη του A. Τότε η οικογένεια $\{X \setminus A\} \cup \{G_i : i \in I\}$, είναι ανοιχτή κάλυψη του X, άρα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $\{X \setminus A\} \cup \{G_{i_k} : k = 1, \dots, n\}$. Επομένως τα G_{i_k} αποτελούν πεπερασμένη υποκάλυψη του A. □

Θεώρημα. *Αν ο X είναι Hausdorff, το $A \subset X$ συμπαγές, και $x \notin A$, τότε υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $x \in U$ και $A \subset V$. Ιδιαίτερα, το A είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω $x \notin A$. Τότε για κάθε $y \in A$ υπάρχουν περιοχές U_y και V_y των x και y αντίστοιχα τέτοιες ώστε $U_y \cap V_y = \emptyset$.



Η οικογένεια V_y, $y \in A$, είναι ανοιχτή κάλυψη του A, άρα υπάρχουν $y_1, \dots, y_n \in A$ τέτοια ώστε $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$. Θέτουμε

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}, \quad V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}.$$

□

Θεώρημα. *Αν ο X είναι Hausdorff και $A, B \subset X$ συμπαγή και ξένα, τότε υπάρχουν $U, V \subset X$ ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $A \subset U$ και $B \subset V$.*

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα, για κάθε $x \in A$, υπάρχουν U_x, V_x ανοιχτά και ξένα τέτοια ώστε $x \in U_x$ και $B \subset V_x$. Η οικογένεια U_x, $x \in A$, είναι ανοιχτή κάλυψη του A, άρα υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in A$ τέτοια ώστε $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}$. Θέτουμε

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} U_{x_k}, \quad V = \bigcap_{k=1}^{n} V_{x_k}.$$

Τότε τα U, V είναι ανοιχτά και ξένα υπερσύνολα των A, B. □

Θεώρημα. *Αν ο X είναι συμπαγής, τότε είναι T_4.*

Απόδειξη. Αν $A, B \subset X$ είναι κλειστά και ξένα, τότε είναι συμπαγή και το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο θεώρημα. □

Θεώρημα. *Έστω X συμπαγής, Y Hausdorff και $f : X \to Y$ συνεχής και επί. Τότε*

(1) *Ο Y είναι συμπαγής.*
(2) *Αν επιπλέον η f είναι 1-1, τότε είναι ομοιομορφισμός.*

Απόδειξη.

(1) Έστω G_i, $i \in I$, μια ανοιχτή κάλυψη του Y. Τότε η $f^{-1}(G_i)$, $i \in I$, είναι ανοιχτή κάλυψη του X, άρα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη $f^{-1}(G_{i_k})$, $k = 1, \dots, n$. Συνεπώς η G_{i_k}, $k = 1, \dots, n$ είναι κάλυψη του $f(X) = Y$.
(2) Αν το $A \subset X$ είναι κλειστό, τότε είναι συμπαγές αφού ο X είναι συμπαγής. Άρα από το (1), το $f(A)$ είναι συμπαγές, επομένως κλειστό. Έτσι η f είναι 1-1, επί, συνεχής και κλειστή, άρα είναι ομοιομορφισμός.

□

Το ακόλουθο θεώρημα είναι ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα στη Γενική Τοπολογία.

Θεώρημα (Tychonoff)**.** *Έστω X_i, $i \in I$, μια οικογένεια συμπαγών χώρων. Τότε το γινόμενο $X = \prod_{i \in I} X_i$ είναι συμπαγής χώρος.*

Για την απόδειξη, θα χρειαστούμε τα εξής.

Θεώρημα (Το λήμμα του Zorn)**.** *Έστω $(X, \leq)$ ένα μερικά διατεταγμένο σύνολο, τέτοιο ώστε κάθε ολικά διατεταγμένο υποσύνολο $A \subset X$ έχει άνω φράγμα, δηλαδή υπάρχει $s \in X$ τέτοιο ώστε $a \leq s$ για κάθε $a \in A$. Τότε το X έχει μεγιστικό (maximal) στοιχείο, δηλαδή υπάρχει $x_0 \in X$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in X$ έχουμε $x_0 \leq x \Rightarrow x = x_0$ (αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει στοιχείο γνήσια μεγαλύτερο από το x_0. Δεν σημαίνει κατ' ανάγκη ότι το x_0 είναι μεγαλύτερο από κάθε στοιχείο του X, εκτός κι' αν η διάταξη είναι ολική).*

Απόδειξη. Γίνεται στο μάθημα της Θεωρίας Συνόλων. □

Θεώρημα (Alexander)**.** *Έστω X χώρος Hausdorff και $\mathscr{A}$ μια υποβάση. Υποθέτουμε ότι κάθε ανοιχτή κάλυψη του X από σύνολα της $\mathscr{A}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Τότε ο X είναι συμπαγής.*

Στην απόδειξη, αν $\mathscr{S}$ είναι κάποια οικογένεια συνόλων τότε θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\bigcup \mathscr{S}$ για την ένωση $\bigcup_{S \in \mathscr{S}} S$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο X είναι δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει ανοιχτή κάλυψη του X χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη. Θέτουμε λοιπόν

$$\mathscr{F} = \{\mathscr{C} : \text{Η } \mathscr{C} \text{ είναι ανοιχτή κάλυψη του } X \text{ χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη}\}.$$

Από το λήμμα του Zorn, το $\mathscr{F}$ έχει maximal (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) στοιχείο, έστω $\mathscr{C}_0$. Δηλαδή η $\mathscr{C}_0$ **δεν έχει** πεπερασμένη υποκάλυψη, και αν $\mathscr{C}$ είναι κάποια άλλη ανοιχτή κάλυψη γνήσια μεγαλύτερη της $\mathscr{C}$, τότε η $\mathscr{C}$ **έχει** πεπερασμένη υποκάλυψη. Πράγματι, έστω $\{\mathscr{D}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ ένα ολικά διατεταγμένο υποσύνολο του $\mathscr{F}$. Θέτουμε $\mathscr{D} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{D}_\gamma$ και δείχνουμε ότι η $\mathscr{D}$ είναι άνω φράγμα του $\{\mathscr{D}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ στο $\mathscr{F}$. Προφανώς $\mathscr{D}_\gamma \subset \mathscr{D}$ για κάθε γ. Επίσης, αν η $\mathscr{D}$ δεν ανήκε στο $\mathscr{F}$ θα είχε πεπερασμένη υποκάλυψη $G_1, \dots, G_n$. Τότε, αφού οι $\mathscr{D}_\gamma$ είναι συγκρίσιμες ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι, όλα τα G_k θα ανήκαν σε κάποιο $\mathscr{D}_{\gamma_0}$, άρα η $\mathscr{D}_{\gamma_0}$ θα είχε πεπερασμένη υποκάλυψη, άτοπο.

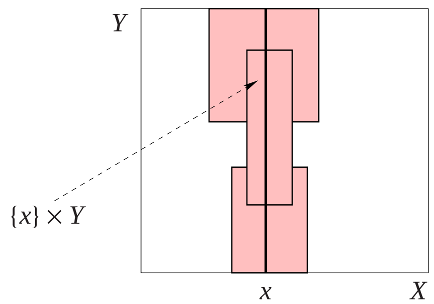
Θέτουμε τώρα $\mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{C}_0$ (η $\mathscr{B}$ μπορεί να είναι κενή). Η $\mathscr{B}$ δεν καλύπτει τον χώρο γιατί αν τον κάλυπτε θα είχε πεπερασμένη υποκάλυψη (αφού $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$). Αυτό είναι άτοπο διότι $\mathscr{B} \subset \mathscr{C}_0$. Επομένως υπάρχει $x \notin \bigcup \mathscr{B}$. Αφού η $\mathscr{C}_0$ είναι κάλυψη, υπάρχει $V \in \mathscr{C}_0$ με $x \in V$. Αφού η $\mathscr{A}$ είναι υποβάση, υπάρχουν $U_1, \dots, U_n \in \mathscr{A}$ τέτοια ώστε $x \in U_1 \cap \dots \cap U_n \subset V$. Αν κάποιο U_i ανήκε στην $\mathscr{C}_0$ τότε θα ανήκε στην $\mathscr{B}$, άρα θα είχαμε $x \in \bigcup \mathscr{B}$, άτοπο. Επομένως $U_i \notin \mathscr{C}_0$, και έτσι $\mathscr{C}_0 \subsetneq \mathscr{C}_0 \cup \{U_i\}$ για κάθε i. Αφού η $\mathscr{C}_0$ είναι maximal, έχουμε ότι για κάθε i η $\mathscr{C}_0 \cup \{U_i\}$ δεν ανήκει στο $\mathscr{F}$, συνεπώς έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Επομένως για κάθε i υπάρχουν $V_j^i \in \mathscr{C}_0$, $j = 1, \dots, k_i$, τέτοια ώστε $U_i \cup V_1^i \cup \dots \cup V_{k_i}^i = X$. Αλλά τότε

$$X = \bigcap_{i=1}^{n} \left(U_i \cup \bigcup_{j=1}^{k_i} V_j^i \right) \subset \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} V_j^i \subset V \cup \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{k_i} V_j^i.$$

Δηλαδή η $\mathscr{C}_0$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, άτοπο. □

Απόδειξη. (Του θεωρήματος του Tychonoff.) Έστω $\mathscr{C}$ μια κάλυψη του X από υποβασικά σύνολα, δηλαδή ορθογώνια της μορφής $p_i^{-1}(G)$, όπου $i \in I$, $G \subset X_i$ ανοιχτό. Για κάθε i θέτουμε $\mathscr{C}_i = \{G \subset X_i : p_i^{-1}(G) \in \mathscr{C}\}$, (το $\mathscr{C}_i$ αποτελείται από όλες τις μη τετριμμένες i-πλευρές των ορθογωνίων της $\mathscr{C}$). Τότε υπάρχει $j \in I$ τέτοιο ώστε η $\mathscr{C}_j$ καλύπτει το X_j, διαφορετικά θα μπορούσαμε για κάθε i να επιλέξουμε $x_i \notin \bigcup \mathscr{C}_i$. Αλλά τότε το σημείο $x = (x_i)_{i\in I}$ δεν θα ανήκε σε κανένα σύνολο της $\mathscr{C}$, άτοπο. Αφού ο X_j είναι συμπαγής, υπάρχουν $G_1, \ldots, G_n \in \mathscr{C}_j$ τέτοια ώστε $X_j = G_1 \cup \cdots \cup G_n$. Άρα $X = p_j^{-1}(G_1) \cup \cdots \cup p_j^{-1}(G_n)$. Δηλαδή η $\mathscr{C}$ έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα του Alexander. $\square$

Παρατήρηση. Η απόδειξη του θεωρήματος του Tychonoff είναι ουσιωδώς απλούστερη αν έχουμε πεπερασμένο πλήθος χώρων. Στην περίπτωση αυτή το θεώρημα του Alexander αντικαθίσταται από την σχεδόν τετριμμένη παρατήρηση ότι ένας χώρος Hausdorff είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ανοιχτή κάλυψη από βασικά σύνολα έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι X και Y είναι συμπαγείς χώροι και έστω $U_\kappa \times V_\kappa$, $\kappa \in K$, μια ανοιχτή κάλυψη του $X \times Y$ από βασικά σύνολα. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in X$, η «φέτα» $\{x\} \times Y$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X \times Y$ γιατί είναι ομοιομορφική με τον Y. Επομένως υπάρχει $K_x \subset K$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $\{x\} \times Y \subset \bigcup_{\kappa \in K_x} U_\kappa \times V_\kappa$.



Θέτουμε $W_x = \bigcap_{\kappa \in K_x} U_\kappa$. Τότε η W_x, $x \in X$, είναι ανοιχτή κάλυψη του X, άρα υπάρχουν $x_1, \ldots, x_n \in X$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{j=1}^n W_{x_j}$. Συμπεραίνουμε ότι

$$X \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} W_{x_j} \times Y = \bigcup_{j=1}^{n} \left(W_{x_j} \times \bigcup_{\kappa \in K_{x_j}} V_\kappa \right) \subset \bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{\kappa \in K_{x_j}} U_\kappa \times V_\kappa.$$

Άρα ο $X \times Y$ είναι συμπαγής.

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποιες ιδιότητες των συμπαγών μετρικών χώρων τις οποίες, γενικά, δεν έχουν μη μετρικοποιήσιμοι συμπαγείς τοπολογικοί χώροι.

Θεώρημα. *Ένας συμπαγής μετρικός χώρος (X, d) είναι διαχωρίσιμος και φραγμένος.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η οικογένεια $D(x, 1/n)$, $x \in X$, είναι ανοιχτή κάλυψη του X, άρα υπάρχει $F_n \subset X$ πεπερασμένο, τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{x \in F_n} D(x, 1/n)$. Θέτουμε $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Τότε το D είναι αριθμήσιμο και πυκνό. Επίσης, για σταθεροποιημένο $x_0 \in X$, η ανοιχτή κάλυψη $D(x_0, n)$, $n \in \mathbb{N}$, έχει πεπερασμένη υποκάλυψη. Άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{n_0} D(x_0, n) = D(x_0, n_0)$, δηλαδή ο X είναι φραγμένος. $\square$

Παρατήρηση. Υπάρχουν συμπαγείς τοπολογικοί χώροι οι οποίοι δεν είναι διαχωρίσιμοι. Για παράδειγμα, ο χώρος $\{0, 1\}^I$, όπου το I έχει πληθάριθμο γνήσια μεγαλύτερο από τον πληθάριθμο του $\mathbb{R}$ (η απόδειξη παραλείπεται).

Θεώρημα. *Ένας μετρικός χώρος (X, d) είναι συμπαγής αν και μόνο αν κάθε ακολουθία έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Απόδειξη. Έστω ότι ο X είναι συμπαγής και $x_n \in X$ μια ακολουθία. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}}.$$

Η F_n είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Αφού ο X είναι συμπαγής, έχουμε ότι $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι η τομή είναι κενή, τότε η οικογένεια $X \setminus F_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι ανοιχτή κάλυψη του X, άρα υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{n_0} X \setminus F_n = X \setminus F_{n_0}$, επομένως $F_{n_0} = \emptyset$, άτοπο. Επιλέγουμε λοιπόν $x \in \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Αφού $x \in F_1$, υπάρχει n_1 τέτοιο ώστε $d(x, x_{n_1}) < 1$. Ομοίως, αφού $x \in F_{n_1+1}$, υπάρχει $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $d(x, x_{n_2}) < 1/2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια υπακολουθία x_{n_k} τέτοια ώστε $d(x, x_{n_k}) < 1/k \to 0$.

Αντίστροφα, έστω ότι κάθε ακολουθία στο X έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Ισχυριζόμαστε κατ' αρχάς ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει $F_n \subset X$ πεπερασμένο τέτοιο ώστε $X = \bigcup_{x \in F_n} D(x, 1/n)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν είναι αλήθεια, τότε υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε ο X δεν καλύπτεται από πεπερασμένο πλήθος δίσκων ακτίνας $1/n_0$. Επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in X$. Τότε $X \neq D(x_1, 1/n_0)$, άρα υπάρχει $x_2 \notin D(x_1, 1/n_0)$. Ομοίως, $X \neq D(x_1, 1/n_0) \cup D(x_2, 1/n_0)$, άρα υπάρχει $x_3 \notin D(x_1, 1/n_0) \cup D(x_2, 1/n_0)$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία x_n τέτοια ώστε $x_n \notin \bigcup_{i<n} D(x_i, 1/n_0)$, από το οποίο συνεπάγεται ότι $d(x_n, x_m) \geq 1/n_0$ για κάθε $n \neq m$. Αυτό σημαίνει ότι η x_n δεν μπορεί να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άτοπο. Τώρα, το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος, επομένως 2ος αριθμήσιμος. Έστω ότι δεν είναι συμπαγής. Τότε υπάρχει ανοιχτή κάλυψη $\mathscr{C}$ χωρίς πεπερασμένη υποκάλυψη. Αφού ο χώρος είναι 2ος αριθμήσιμος, από το θεώρημα Lindelof, η $\mathscr{C}$ έχει αριθμήσιμη υποκάλυψη, έστω $\mathscr{D} = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$. Η $\mathscr{D}$ δεν έχει πεπερασμένη υποκάλυψη, άρα, όπως πριν, μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $x_n \notin \bigcup_{i \leq n} G_i$. Από υπόθεση, υπάρχουν μια υπακολουθία x_{k_n} και ένα σημείο $x \in X$ με $x_{k_n} \to x$. Αφού η $\mathscr{D}$ είναι κάλυψη, έχουμε $x \in G_{m_0}$ για κάποιο m_0. Επομένως υπάρχει $n_0 \geq m_0$ τέτοιο ώστε $x_{k_{n_0}} \in G_{m_0}$, άτοπο γιατί $x_{k_{n_0}} \notin \bigcup_{i \leq k_{n_0}} G_i$. □

Παρατήρηση. Σ' ένα μη μετρικοποιήσιμο χώρο, το προηγούμενο θεώρημα γενικά δεν ισχύει. Η περιγραφή των σχετικών αντιπαραδειγμάτων είναι εκτός των σκοπών του μαθήματος.

Παράδειγμα. Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με τη συνηθισμένη τοπολογία είναι συμπαγές αν και μόνο είναι κλειστό και φραγμένο. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος και του ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Bolzano-Weierstrass).

Θεώρημα. *Έστω X συμπαγής τοπολογικός χώρος και $f : X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν επιπλέον ο X είναι μετρικοποιήσιμος τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής ως προς οποιαδήποτε μετρική επάγει την τοπολογία του X.*

Απόδειξη. Το $f(X)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$ άρα είναι κλειστό και φραγμένο. Θέτουμε $\ell = \inf f(X)$ και $u = \sup f(X)$ και επιλέγουμε ακολουθίες $\ell_n, u_n \in f(X)$ τέτοιες ώστε $\ell_n \to \ell$, $u_n \to u$. Αφού το $f(X)$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $\ell, u \in f(X)$. Δηλαδή το $f(X)$ έχει μέγιστο και ελάχιστο στοιχείο, επομένως η f παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Έστω τώρα ότι η τοπολογία του X επάγεται από τη μετρική d. Για να δείξουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε ζευγάρι ακολουθιών $x_n, y_n \in X$ με $d(x_n, y_n) \to 0$ έχουμε $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Ας υποθέσουμε ότι $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})$ τέτοια ώστε $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Αφού ο X είναι συμπαγής, υπάρχουν υπακολουθίες $x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}$, και σημεία $x, y \in X$ τέτοια ώστε $x_{n_{k_\ell}} \to x$, $y_{n_{k_\ell}} \to y$. Αλλά $d(x_{n_{k_\ell}}, y_{n_{k_\ell}}) \to 0$, άρα $x = y$, επομένως $\varepsilon \leq |f(x_{n_{k_\ell}}) - f(y_{n_{k_\ell}})| \to |f(x) - f(y)| = 0$, άτοπο. □

Θεώρημα. *Ένας συμπαγής μετρικός χώρος (X, d) είναι πλήρης, δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω x_n μια ακολουθία Cauchy. Αφού ο χώρος είναι συμπαγής, υπάρχουν x_{k_n} και $x \in X$ τέτοια ώστε $x_{k_n} \to x$. Αλλά τότε

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) \to 0.$$

□

Παρατήρηση. Σε ένα αυθαίρετο τοπολογικό χώρο οι έννοιες «φραγμένο σύνολο», «ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση» και «ακολουθία Cauchy» δεν έχουν, γενικά, νόημα.

15. Τοπικά Συμπαγείς Χώροι

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου ονομάζεται σχετικά συμπαγές αν η κλειστότητά του είναι συμπαγές σύνολο. Ένας χώρος Hausdorff ονομάζεται τοπικά συμπαγής αν κάθε σημείο έχει μια σχετικά συμπαγή περιοχή.*

Παραδείγματα.

(1) Το $\mathbb{R}^n$ με τη συνηθισμένη τοπολογία είναι τοπικά συμπαγής χώρος γιατί κάθε δίσκος είναι σχετικά συμπαγές σύνολο.
(2) Ένας διακριτός χώρος είναι τοπικά συμπαγής γιατί τα μονοσύνολα είναι συμπαγή.
(3) Το $\mathbb{Q}$ δεν είναι τοπικά συμπαγής χώρος γιατί κανένα διάστημα δεν είναι συμπαγές (στο $\mathbb{Q}$!).

Θεώρημα. *Έστω X τοπικά συμπαγής χώρος, $x \in X$ και U μια περιοχή του x. Τότε υπάρχει σχετικά συμπαγής περιοχή V του x τέτοια ώστε $\overline{V} \subset U$. Ιδιαίτερα, ο X είναι κανονικός.*

Απόδειξη. Έστω G σχετικά συμπαγής περιοχή του x. Το $\overline{G}$ είναι συμπαγές, άρα T_3. Το $G \cap U$ είναι περιοχή του x στο $\overline{G}$, επομένως υπάρχει περιοχή W του x τέτοια ώστε $\mathrm{cl}_{\overline{G}}(W \cap \overline{G}) \subset G \cap U$. Δηλαδή, $\overline{W \cap \overline{G}} \cap \overline{G} \subset G \cap U$, άρα $\overline{W \cap G} \subset G \cap U$. Θέτουμε $V = W \cap G$. Τότε το $\overline{V}$ είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς $\overline{G}$, άρα είναι συμπαγές, και προφανώς $\overline{V} \subset U$. □

Θεώρημα (Baire). *Έστω X τοπικά συμπαγής και G_n, $n \in \mathbb{N}$, ανοιχτά και πυκνά. Τότε το $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι πυκνό.*

Απόδειξη. Έστω U_1 ανοιχτό και σχετικά συμπαγές. Θέτουμε $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Θα δείξουμε ότι το U_1 τέμνει το D. Αφού το G_1 είναι ανοιχτό και πυκνό, το $G_1 \cap U_1$ είναι μη κενό και ανοιχτό. Από το προηγούμενο θεώρημα, υπάρχει U_2 ανοιχτό και σχετικά συμπαγές τέτοιο ώστε $\overline{U}_2 \subset G_1 \cap U_1$. Ομοίως, αφού το G_2 είναι ανοιχτό και πυκνό, το $G_2 \cap U_2$ είναι μη κενό και ανοιχτό άρα υπάρχει U_3 ανοιχτό και σχετικά συμπαγές με $\overline{U}_3 \subset G_2 \cap U_2$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία ανοιχτών και σχετικά συμπαγών συνόλων U_n τέτοια ώστε $\overline{U}_{n+1} \subset G_n \cap U_n$. Η $\overline{U}_n$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών υποσυνόλων του συμπαγούς $\overline{U}_1$, άρα $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{U}_n \neq \emptyset$. Συμπεραίνουμε ότι $D \cap U_1 \neq \emptyset$. □

Παρατήρηση. Το θεώρημα Baire δεν ισχύει αν ο χώρος δεν είναι τοπικά συμπαγής, ή αν η οικογένεια των ανοιχτών και πυκνών δεν είναι αριθμήσιμη. Για παράδειγμα στο $\mathbb{Q}$ τα σύνολα $\mathbb{Q} \setminus \{q\}$, $q \in \mathbb{Q}$, είναι ανοιχτά και πυκνά αλλά η τομή τους είναι κενή. Ομοίως, στο $\mathbb{R}$, η υπεραριθμήσιμη οικογένεια $\mathbb{R} \setminus \{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, έχει κενή τομή.

Ορισμός. *Ένα υποσύνολο ενός τοπολογικού χώρου ονομάζεται:*

(1) *Πουθενά πυκνό, αν η κλειστότητά του έχει κενό εσωτερικό.*
(2) *1ης κατηγορίας, αν είναι αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων.*

Με αυτή την ορολογία, το θεώρημα Baire μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα. *Ένας τοπικά συμπαγής χώρος δεν είναι 1ης κατηγορίας.*

Απόδειξη. Έστω ότι $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, όπου τα A_n είναι πουθενά πυκνά. Τότε τα $X \setminus \overline{A}_n$ είναι ανοιχτά και πυκνά με κενή τομή, άτοπο. □

Τα σύνολα 1ης κατηγορίας είναι, από τοπολογική άποψη, «μικρά». Για παράδειγμα, οι ρητοί είναι σύνολο 1ης κατηγορίας. Οι άρρητοι δεν είναι, γιατί αν ήταν τότε το $\mathbb{R}$ θα ήταν 1ης κατηγορίας.

Παρατήρηση. Το θεώρημα Baire ισχύει και σε πλήρεις μετρικούς χώρους. Η απόδειξη είναι παρόμοια. Χρησιμοποιεί το γεγονός ότι σ' ένα πλήρη μετρικό χώρο, μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων η διάμετρος των οποίων τείνει στο μηδέν, έχει τομή ένα μονοσύνολο.

Ορισμός. *Έστω $(X, \mathscr{T})$ τοπικά συμπαγής, μη συμπαγής χώρος και ∞ ένα αντικείμενο με $\infty \notin X$. Θέτουμε $X_\infty = X \cup \{\infty\}$, και $\mathscr{T}_\infty = \mathscr{T} \cup \{X_\infty \setminus K : K \subset X$ συμπαγές$\}$. Ο χώρος $(X_\infty, \mathscr{T}_\infty)$ ονομάζεται συμπαγοποίηση ενός σημείου ή συμπαγοποίηση Alexandroff του X.*

Παρατηρήσεις.

(1) Η σχετική τοπολογία του X σαν υποσύνολο του X_∞ είναι η $\mathscr{T}$.
(2) Η ταυτοτική απεικόνιση $\iota : X \to X_\infty$ ομοιομορφισμός του X επί της εικόνας του.
(3) Το X είναι πυκνό υποσύνολο του X_∞.
(4) Αν $\infty' \notin X$, τότε $X_\infty \approx X_{\infty'}$.

Διαισθητικά, ο X_∞ προκύπτει αν προσθέσουμε στο X ένα σημείο (το «άπειρο»). Στον καινούργιο χώρο, μια βάση περιοχών ένος σημείου x είναι οι περιοχές του x ως προς $\mathscr{T}$ αν $x \in X$, ενώ μια βάση περιοχών του απείρου είναι τα συμπληρώματα των συμπαγών υποσυνόλων του X. Για παράδειγμα στο $\mathbb{R}_\infty$ μια περιοχή του απείρου είναι το $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Θεώρημα. *Έστω X τοπικά συμπαγής. Τότε ο X_∞ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Δείχνουμε κατ' αρχάς ότι ο X_∞ είναι Hausdorff. Έστω $x, y \in X_\infty$ με $x \neq y$. Αν $x, y \in X$ τότε, αφού ο X είναι Hausdorff, τα x, y διαχωρίζονται στον X, άρα και στον X_∞. Αν $x \in X$ και $y = \infty$, τότε, αφού ο X είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει σχετικά συμπαγής περιοχή U του x. Έτσι τα U και $X_\infty \setminus \overline{U}$ διαχωρίζουν τα x και ∞. Έστω τώρα G_i, $i \in I$, μια ανοιχτή κάλυψη του X_∞. Τότε υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $\infty \in G_{i_0}$. Επιλέγουμε $K \subset X$ συμπαγές τέτοιο ώστε $\infty \in X_\infty \setminus K \subset G_{i_0}$. Αφού το K είναι συμπαγές υπάρχουν $i_1, \dots, i_n \in I$ τέτοια ώστε $K \subset G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$. Επομένως $X_\infty = G_{i_0} \cup G_{i_1} \cup \dots \cup G_{i_n}$, άρα ο X_∞ είναι συμπαγής. □

Παραδείγματα.

(1) Αν $X = [0, 1)$, τότε $X_\infty \approx [0, 1]$.

(2) Αν $X = \mathbb{R}$, τότε $X_\infty \approx S^1$. Πράγματι, έστω $f : \mathbb{R} \to S^1 \setminus \{N\}$, ένας ομοιομορφισμός, όπου N είναι ο «βόρειος πόλος». Τότε η $g : X_\infty \to S^1$ με $g(x) = f(x)$, αν $x \in \mathbb{R}$, και $g(\infty) = N$ είναι ομοιομορφισμός.

Θεώρημα (Το Λήμμα του Urysohn για Τοπικά Συμπαγείς Χώρους)**.** *Έστω X τοπικά συμπαγής, $K \subset X$ συμπαγές και $U \supset K$ ανοιχτό. Τότε υπάρχει $f : X \to [0, 1]$ συνεχής με $f|_K = 0$ και $f|_{X \setminus U} = 1$.*

Απόδειξη. Ο X_∞ είναι συμπαγής, άρα φυσιολογικός, επομένως από το λήμμα του Urysohn υπάρχει συνεχής $g : X_\infty \to [0, 1]$ τέτοια ώστε $g|_K = 0$ και $g|_{X_\infty \setminus U} = 1$. Θέτουμε $f = g|_X$. □