Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισησ και εφαρμογεσ, Ανοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζακησ

Πρώτο Διαγώνισμα

Λύσεις

Πρόβλημα 1. (2 μονάδες)
Έστω V ο $\mathbb{C}$-γραμμικός χώρος των συναρτήσεων $f : [0,1) \to \mathbb{C}$ που έχουν την ιδιότητα να είναι σταθερές μέσα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\frac{k}{10}, \frac{k+1}{10})$, για $k = 0, 1, \ldots, 9$, και έχουν την επιπλέον ιδιότητα ότι $f(0.05) = f(0.95)$. Βρείτε τη διάσταση του χώρου και μια βάση του.
Λύση: Ο χώρος V αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις που είναι σταθερές από κάθε σημείο της μορφής $k/10$ στο επόμενο (δηλ. στο $(k+1)/10$). Όμως λόγω της επιπλέον συνθήκης $f(0.05) = f(0.95)$ η τιμή στο τελευταίο διάστημα $[0.9, 1)$ είναι η ίδια με την τιμή στο πρώτο διάστημα $[0, 0.1)$. Άρα οι συναρτήσεις $e_1(x) = \chi_{[0.1,0.2)}(x), e_2(x) = \chi_{[0.2,0.3)}(x), \ldots, e_8(x) = \chi_{[0.8,0.9)}(x)$, μαζί με την $e_0(x) = \chi_{[0,0.1)}(x) + \chi_{[0.9,1)}(x)$ αποτελούν βάση του V (αφού κάθε συνάρτηση στο V γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός αυτών) και η διάσταση είναι $\dim V = 9$.

Πρόβλημα 2. (2 μονάδες)
Για $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ δείξτε ότι

$$\|z\|_2 \le \|z\|_1 \le \sqrt{n}\|z\|_2.$$

Λύση: Για την πρώτη ανισότητα, μετά από τετραγωνισμό έχουμε να δείξουμε

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \le (\sum_{j=1}^{n} |z_j|)^2.$$

Αναπτύσσοντας το τετράγωνο δεξιά και διαγράφοντας τα (μη αρνητικά) διπλάσια γινόμενα προκύπτει το αριστερό μέλος, άρα η ανισότητα ισχύει.

Για τη δεύτερη ανισότητα γράφουμε

$$\|z\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{n} |z_j| \cdot 1 \le \sqrt{n}\|z\|_2$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz στα διανύσματα $z = (z_1, \ldots, z_n)$ και $(1, 1, \ldots, 1)$.

Πρόβλημα 3. (2 μονάδες)
Αν $x_n \to x$ σε ένα χώρο με νόρμα, δείξτε ότι $\|x_n\| \to \|x\|$.
Λύση: Η τριγωνική ανισότητα για τη νόρμα είναι

$$|\|x\| - \|y\|| \le \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \ \ \forall x, y.$$

Εφαρμόζοντας την πρώτη ανισότητα για x_n, $-x$ παίρνουμε

$$|\|x_n\| - \|x\|| \le \|x_n - x\| \to 0,$$

άρα και $|\|x_n\| - \|x\|| \to 0$.

Πρόβλημα 4. (2 μονάδες)
Δείξτε ότι ο $\mathbb{C}$-γραμμικός χώρος $C([0,1])$ των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων στο $[0,1]$ δεν έχει πεπερασμένη διάσταση. Δείξτε δηλ. ότι υπάρχει μια άπειρη ακολουθία συναρτήσεων $f_n \in C([0,1])$ που είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο.
Λύση: Πάρτε τις συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής: η f_n είναι μηδέν εκτός του διαστήματος $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$, είναι ίση με 1 στο μέσο του διαστήματος αυτού και είναι γραμμική στο πρώτο και στο δεύτερο μισό του διαστήματος αυτού. (Το γράφημα της f_n είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με ύψος

1 του οποίου η βάση είναι το διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι άπειρες το πλήθος $(n = 1, 2, \ldots)$ και είναι γραμμικώς ανεξάρτητες αφού αν ένας γραμμικός συνδυασμός

$$F(x) = c_1 f_{n_1}(x) + c_2 f_{n_2}(x) + \cdots + c_k f_{n_k}(x)$$

είναι παντού ίσος με το μηδέν έχουμε εύκολα ότι όλα τα c_j είναι 0. Ο λόγος είναι ότι αν υπολογίσουμε την $F(x)$ για x να είναι το μέσον του διαστήματος $(\frac{1}{n_j+1}, \frac{1}{n_j})$ τότε η $F(x)$ αφενός κάνει 0 (αφού η F μηδενίζεται παντού) και αφετέρου κάνει c_j αφού η f_{n_j} είναι η μόνη συνάρτηση από αυτές που συμμετέχουν στην $F(x)$ που δε μηδενίζεται σε αυτό το διάστημα.

Πρόβλημα 5. (2 μονάδες)
Έστω $\epsilon > 0$ και $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ συνεχής. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ τέτοιο ώστε

$$|f(x) - p(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in [0,1],$$

και $p(3) = 1 + i$.
Λύση: Επεκτείνουμε την f στο διάστημα $[0,3]$ ορίζοντάς την να κάνει $1+i$ στο 3 και ανάμεσα στο 1 και στο 3 να είναι γραμμική. Δηλ. ορίζουμε την f στο διάστημα $[1,3]$ να ισούται με

$$\frac{1}{2}(3-x)f(1) + \frac{1}{2}(x-1)(1+i).$$

(Βεβαιωθείτε ότι όντως αυτή η συνάρτηση παίρνει τις τιμές $f(1)$ και $1+i$ στα δύο άκρα του διαστήματος $[1,3]$.) Η συνάρτηση $f : [0,3] \to \mathbb{C}$ που ορίσαμε είναι συνεχής και άρα, από το θεώρημα του Weierstrass υπάρχει ένα πολυώνυμο $q(x)$ τέτοιο ώστε $|f(x) - q(x)| \le \epsilon/2$ για κάθε $x \in [0,3]$. Ορίζουμε τώρα το πολυώνυμο

$$p(x) = q(x) + 1 + i - q(3),$$

και παρατηρούμε ότι $p(3) = 1+i$ και αφενός

$$|p(x) - q(x)| = |1 + i - q(3)| = |f(3) - q(3)| \le \epsilon/2$$

και αφετέρου $|f(x) - q(x)| \le \epsilon/2$. Η τριγωνική ανισότητα μας δίνει ότι $|f(x) - p(x)| \le \epsilon$ για όλα τα $x \in [0,3]$ άρα και για όλα τα $x \in [0,1]$.

Πρόβλημα 6. (2 μονάδες)
(α) Φτιάξτε μια ακολουθία $f_n \in C([0,1])$ τέτοια ώστε $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$ και για κάθε $x \in [0,1]$ να ισχύει $f_n(x) \to 0$.
(β) Δείξτε ότι για κάθε τέτοια ακολουθία f_n οι νόρμες $\|f_n\|_\infty$ και $\|f_n\|_2$ είναι κάτω φραγμένες από κάποιο θετικό αριθμό.
Λύση: (α) Πάρτε το γράφημα της f να είναι ένα ισοσκελές τρίγωνο με βάση το διάστημα $(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})$ και ύψος τέτοιο ώστε το εμβαδό του να είναι 1. Τότε ισχύει φυσικά $\int_0^1 f_n(x)\,dx = 1$. Ας είναι τώρα $x \in [0,1]$. Αν $x = 0$ τότε όλες οι f_n μηδενίζονται στο x οπότε φυσικά $f_n(x) \to 0$. Αν $x > 0$ τότε για $n > \frac{1}{x}$ όλες οι f_n μηδενίζονται στο x (τα τριγωνάκια έχουν περάσει στα αριστερά του x και εξακολουθούν να "κινούνται" προς τα αριστερά) άρα και πάλι $f_n(x) \to 0$.

(β) Έχουμε $|f_n(x)| \le \|f_n\|_\infty$ για κάθε $x \in [0,1]$ άρα

$$1 = \int_0^1 f_n(x)\,dx \le \int_0^1 |f_n(x)|\,dx \le \int_0^1 \|f_n\|_\infty\,dx = \|f_n\|_\infty$$

άρα $1 \le \|f_n\|_\infty$ για όλα τα n. Η ανισότητα $\|f_n\|_2 \ge 1$ προκύπτει εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz στο εσωτερικό γινόμενο των δύο συναρτήσεων $|f_n(x)|$ και 1 στο διάστημα $[0,1]$.

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Διάρκεια 2 ώρες. Το άριστα είναι 10 μονάδες.