Πανεπιστημιο Κρητης, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρια Προσεγγισης και εφαρμογες, Ανοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζακης

Τρίτο Διαγώνισμα

Πρόβλημα 1. (2 μονάδες)
Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ έχει συνεχή παράγωγο παντού και οι f, f' είναι 2π-περιοδικές συναρτήσεις δείξτε ότι

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha \left|\widehat{f}(n)\right|^2 < \infty,$$

για κάθε $\alpha < 1$.

Πρόβλημα 2. (2 μονάδες)
Αν $e_1, e_2, \ldots, e_k$ είναι ένα ορθοκανονικό σύνολο (στο $[0, 2\pi]$) συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων και για κάθε f συνεχή και 2π-περιοδική ορίσουμε

$$P(f) = \sum_{j=1}^{k} \langle f, e_j\rangle e_j$$

να είναι η προβολή της f στο χώρο $\mathrm{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ δείξτε ότι η σύνθεση της συνάρτησης P με τον εαυτό της είναι η ίδια η P.

Πρόβλημα 3. (2 μονάδες)
Στο χώρο $C([a, b])$ βρείτε ένα τύπο για το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$ για δύο πολυώνυμα $f(x) = \sum_{j=0}^N f_j x^j$ και $g(x) = \sum_{j=0}^N g_j x^j$ μέσω των ποσοτήτων N, a, b, f_j, g_j.

Πρόβλημα 4. (2 μονάδες)
Στο χώρο $C([0, 1])$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)}\,dx$ βρείτε την ορθογώνια προβολή της $f(x) = x^2$ στο χώρο των συναρτήσεων της μορφής $Ax + B$.

Πρόβλημα 5. (2 μονάδες)
Δείξτε ότι ο κανόνας ολοκλήρωσης που στο διάστημα $[0, 1]$ προσεγγίζει το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης f με την ποσότητα

$$\frac{1}{6}f(0) + \frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}f(1)$$

έχει τάξη ακριβώς 3.

Πρόβλημα 6. (2 μονάδες)
Δείξτε ότι ένας απλός κανόνας αριθμητικής ολοκλήρωσης με n σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_n$ στο διάστημα $[a, b]$

$$I_*(f) = \sum_{k=1}^{n} c_k f(x_k)$$

δε μπορεί να ολοκληρώνει ακριβώς όλα τα πολυώνυμα βαθμού $2n$.

Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. Διάρκεια 2 ώρες. Το άριστα είναι 10 μονάδες.