

Ομάδα ασκήσεων Νο 7

Παρακάτω ας είναι  $T_n(x)$  το πολυώνυμο Chebyshev βαθμού  $n$ .

**Πρόβλημα 1.** Δείξτε

$$T_m(x) \cdot T_n(x) = \frac{1}{2}(T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x))$$

για  $m > n$ .

**Πρόβλημα 2.** Δείξτε

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x).$$

**Πρόβλημα 3.** Δείξτε

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left( (x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right).$$

**Πρόβλημα 4.** Το υπερβολικό συνημίτονο είναι η συνάρτηση  $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ . Δείξτε

$$T_n(\cosh x) = \cosh(nx).$$

**Πρόβλημα 5.** Βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου  $T_n(x)$  και δείξτε ότι ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες του  $T_n(x)$  υπάρχει ακριβώς μία ρίζα του  $T_{n-1}(x)$  και ότι τα  $T_n(x), T_{n-1}(x)$  δεν έχουν κοινές ρίζες.

**Πρόβλημα 6.** Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

για όλες τις τιμές των  $m, n$ .

**Πρόβλημα 7.** Δείξτε ότι για  $-1 \leq x \leq 1$  ισχύει η ανισότητα

$$|T'_n(x)| \leq n^2.$$