Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων – `Διακριτα Μαθηματικα 1' – Τελικο Διαγωνισμα

1. Πόσες στήλες με 13 στοιχεία υπάρχουν που σε κάθε θέση έχουν 1, 2, ή X, τέτοιες ώστε το πλήθος των 1 να είναι ίδιο με το πλήθος των 2; Εκφράστε το αποτέλεσμα με όσο μπορείτε πιο απλό τρόπο.

2. Αποδείξτε με συνδυαστικό τρόπο την ταυτότητα

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

3. Έστω a_n ο αριρθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε n μπάλες από τρεις άπειρους σωρούς από κόκκινες, μπλε και άσπρες μπάλες, με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των κόκκινων μπαλών είναι πάντα άρτιος. Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ της ακολουθίας a_n.

4. Δέντρο είναι ένα απλό, συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε κάποιο γνωστό θεώρημα δείξτε ότι ένα δέντρο με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές.

5. Θεωρείστε το γράφημα G με σύνολο κορυφών όλες τις λέξεις μήκους n από 0 ή 1. Δύο λέξεις (κορυφές) συνδέονται μεταξύ τους με μια ακμή αν διαφέρουν ακριβώς σε μια θέση. Δείξτε ότι το G έχει κύκλωμα Hamilton.

6. Έστω ένα σύνολο από n άνδρες, ώστε κάθε k από αυτούς γνωρίζουν συνολικά τουλάχιστον $k-3$ γυναίκες. Δείξτε ότι εξαιρώντας το πολύ τρεις άνδρες μπορούμε να παντρέψουμε τους υπόλοιπους με γνωστές τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία. (29/1/2003)

Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων – `Διακριτα Μαθηματικα 1' – Τελικο Διαγωνισμα

1. Πόσες στήλες με 13 στοιχεία υπάρχουν που σε κάθε θέση έχουν 1, 2, ή X, τέτοιες ώστε το πλήθος των 1 να είναι ίδιο με το πλήθος των 2; Εκφράστε το αποτέλεσμα με όσο μπορείτε πιο απλό τρόπο.

2. Αποδείξτε με συνδυαστικό τρόπο την ταυτότητα

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

3. Έστω a_n ο αριρθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε n μπάλες από τρεις άπειρους σωρούς από κόκκινες, μπλε και άσπρες μπάλες, με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των κόκκινων μπαλών είναι πάντα άρτιος. Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ της ακολουθίας a_n.

4. Δέντρο είναι ένα απλό, συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε κάποιο γνωστό θεώρημα δείξτε ότι ένα δέντρο με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές.

5. Θεωρείστε το γράφημα G με σύνολο κορυφών όλες τις λέξεις μήκους n από 0 ή 1. Δύο λέξεις (κορυφές) συνδέονται μεταξύ τους με μια ακμή αν διαφέρουν ακριβώς σε μια θέση. Δείξτε ότι το G έχει κύκλωμα Hamilton.

6. Έστω ένα σύνολο από n άνδρες, ώστε κάθε k από αυτούς γνωρίζουν συνολικά τουλάχιστον $k-3$ γυναίκες. Δείξτε ότι εξαιρώντας το πολύ τρεις άνδρες μπορούμε να παντρέψουμε τους υπόλοιπους με γνωστές τους.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία. (29/1/2003)