1. Με πόσους τρόπους μπορείτε να επιλέξετε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A και B του $[n] = \{1, \ldots, n\}$ (το ζεύγος συνόλων A, B θεωρείται διαφορετικό από το ζεύγος B, A).

2. Αποδείξτε με συνδυαστικό τρόπο την ταυτότητα $\binom{2n+3}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 3\binom{2n}{n} + 3\binom{2n}{n-1} + \binom{2n}{n-2}$. Απαγορεύεται δηλ. να κάνετε πράξεις χρησιμοποιώντας τον τύπο για το $\binom{n}{k}$.

3. Έστω a_n ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε n μπάλες από τρεις άπειρους σωρούς από κόκκινες, μπλε και άσπρες μπάλες, με τον περιορισμό ότι ο αριθμός των κόκκινων μπαλών είναι πάντα άρτιος, και ο αριθμός των μπλέ είναι πάντα πολλαπλάσιο του 3. Βρείτε τη γεννήτρια συνάρτηση $A(x)$ της ακολουθίας a_n.

4. Δίνεται ένα απλό συνεκτικό γράφημα G. Επιλέγουμε ένα κύκλο του G και διαγράφουμε από το σύνολο ακμών του G μια οποιαδήποτε ακμή του κύκλου αυτού. Συνεχίζουμε να κάνουμε αυτή την πράξη μέχρι να υπάρχουν κύκλοι στο G. Δείξτε ότι η διαδικασία αυτή δε μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον και ότι στο τέλος της το G παραμένει συνεκτικό γράφημα.

5. Ένα γράφημα λέγεται διμερές αν το σύνολο κορυφών του μπορεί να διαμεριστεί σε δύο σύνολα A και B έτσι ώστε κάθε ακμή να συνδέει μια κορυφή του A με μια κορυφή του B. Δείξτε ότι τα γραφήματα χωρίς κύκλους είναι διμερή γραφήματα.

6. Αν r, s είναι φυσικοί αριθμοί το πλήρες διμερές γράφημα $K_{r,s}$ με r και s κορυφές έχει ως σύνολο κορυφών το $V = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\}$ και οι ακμές του είναι ακριβώς όλες οι ακμές που συνδέουν κάποια a_i κορυφή με κάποια b_j. Για ποιες τιμές των $r, s \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ έχει το $K_{r,s}$ κύκλωμα Hamilton;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία. (30/8/2003)