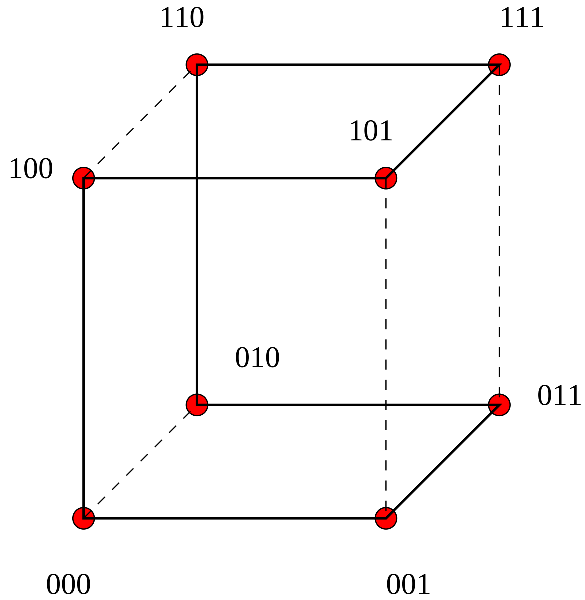
Διακριτα Μαθηματικα



Μιχαλης Κολουντζακης
Τμημα Μαθηματικων
Πανεπιστημιο Κρητης
Λεωφορος Κνωσου
714 09 Ηρακλειο

E-mail: `kolount@member.ams.org`
WWW: `http://fourier.math.uoc.gr/~mk`

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Επαγωγή

§1. Η μέθοδος στην απλή της μορφή

Η μέθοδος της *μαθηματικής επαγωγής* χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε προτάσεις οι οποίες εξαρτώνται, στην απλούστερη περίπτωση, από μια ακέραια μεταβλητή, η οποία συνήθως, αλλά όχι πάντα, συμβολίζεται με το γράμμα n. Συμβολίζουμε συνήθως με $P(n)$ την πρόταση αυτή. Έτσι, $P(0)$ σημαίνει ότι η πρόταση είναι αληθής για $n = 0$, $P(1)$ ότι είναι αληθής για $n = 1$, κ.ο.κ. Σκοπός μας είναι να δείξουμε την αλήθεια της $P(n)$, για $n \geq n_0$, όπου n_0 είναι ένας ακέραιος, συνήθως μη αρνητικός, αριθμός. Θέλουμε με άλλα λόγια να δείξουμε την αλήθεια των προτάσεων

$$P(n_0), P(n_0 + 1), P(n_0 + 2), \ldots.$$

Η μέθοδος, λοιπόν, της επαγωγής για την απόδειξη της πρότασης

$$\text{για κάθε } n \geq n_0 : \ P(n), \tag{1}$$

συνίσταται στην απόδειξη των εξής δύο προτάσεων:

$$P(n_0) \tag{2}$$

και

$$\text{για κάθε } n \geq n_0 : \ P(n) \Rightarrow P(n + 1). \tag{3}$$

Για να δείξουμε δηλ. ότι ισχύει η πρόταση για όλες τις τιμές του n που θέλουμε, δηλ. για $n \geq n_0$, δείχνουμε πρώτα ότι ισχύει για $n = n_0$ και επίσης δείχνουμε ότι αν ισχύει για μια τιμή του n τότε ισχύει και για την επόμενη, δηλ. για το $n + 1$. Η (2) ονομάζεται *αρχική* ή *βασική περίπτωση* και η (3) ονομάζεται *επαγωγικό βήμα*. Η υπόθεση $P(n)$ στο επαγωγικό βήμα ονομάζεται *επαγωγική υπόθεση*.

Παραδειγμα 1.1. Να δειχτεί ότι, για $n \geq 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1). \tag{4}$$

Εδώ η αρχική τιμή της παραμέτρου n είναι $n = 1$, οπότε ελέγχουμε πρώτα απ' όλα αν ισχύει η πρόταση για $n = 1$. Προφανώς το αρισερό μέλος ισούται με 1 ενώ, αντικαθιστώντας, βλέπουμε ότι το ίδιο ισχύει και για το δεξί. Άρα ισχύει η βασική περίπτωση και προχωρούμε να δείξουμε το επαγωγικό βήμα.

Η επαγωγική υπόθεση είναι τώρα η (4) (με την υπόθεση πάντα ότι $n \geq 1$) και πρέπει χρησιμοποιώντας την να δείξουμε την ίδια πρόταση όπου το n έχει αντικατασταθεί με $n + 1$, την ισότητα δηλαδή

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2). \tag{5}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας την (4) (αφαιρώντας την (4) από την (5) κατά μέλη) η (5) είναι ισοδύναμη με την ισότητα

$$n + 1 = \frac{1}{2}(n + 1)(n + 2) - \frac{1}{2}n(n + 1)$$

που εύκολα ελέγχουμε με απλές πράξεις ότι ισχύει. Δείξαμε λοιπόν και το επαγωγικό βήμα οπότε η επαγωγική απόδειξη είναι πλήρης.

Παρατηρηση 1.1. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι για να μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής πρέπει η παράμετρος της πρότασης (n στο προηγούμενο παράδειγμα) απαραίτητα να παίρνει τιμές σε ένα σύνολο (στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν οι φυσικοί αριθμοί) που να μπορεί να εξαντληθεί αν ξεκινήσουμε από τη βασική περίπτωση και προχωράμε κάθε φορά κατά ένα.

Έτσι δε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της επαγωγής όταν π.χ. η παράμετρος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

Ας δούμε, για παράδειγμα, την πρόταση

$$P(x): \text{ ο πραγματικός αριθμός } x \text{ είναι ακέραιος.}$$

Το $P(0)$ προφανώς ισχύει και το ίδιο ισχύει και η συνεπαγωγή $P(x) \Rightarrow P(x+1)$, δεν ισχύει όμως η πρόταση για όλες τις (πραγματικές) τιμές της παραμέτρου x, αλλά μόνο για όσες είναι *προσιτές* από το βασικό αριθμό 0 με διαδοχικές αυξήσεις κατά 1, είναι δηλ. αληθής για τους φυσικούς αριθμούς αλλά όχι για όλους τους πραγματικούς.

Ασκηση 1.1. Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \geq 1$ ισχύει

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \tag{6}$$

Παραδειγμα 1.2. Να δειχτεί ότι $2^n > n^3$ για $n \geq 10$.

Για την αρχική τιμή $n = 10$ πρέπει να δείξουμε

$$2^{10} = 1024 > 10^3 = 1000,$$

που ισχύει.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $n \geq 10$ και ότι $2^n > n^3$ και πρέπει να δείξουμε ότι $2^{n+1} > (n+1)^3$.

Πολλαπλασιάζοντας την επαγωγική μας υπόθεση με 2 παίρνουμε $2^{n+1} > 2n^3$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για $n \geq 10$, ισχύει $2n^3 \geq (n+1)^3$. Αυτή γράφεται ισοδύναμα ως

$$(2^{1/3}n)^3 \geq (n+1)^3,$$

ή

$$2^{1/3}n \geq n+1,$$

ή

$$n \geq \frac{1}{2^{1/3}-1},$$

που ισχύει για $n \geq 10$ αφού ισχύει για $n = 10$ (απλές πράξεις).

Ασκηση 1.2. Ας δείξουμε επαγωγικά την εξής πρόταση: για κάθε σύνολο από n άλογα ($n \geq 1$) όλα έχουν το ίδιο χρώμα. Για $n = 1$ άλογο η πρόταση είναι προφανώς αληθινή. Ας δείξουμε και το επαγωγικό βήμα. Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση για n άλογα και τη δείχνουμε για $n+1$. Έστω λοιπόν άλογα $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Από την επαγωγική υπόθεση τα n άλογα $a_1, \ldots, a_n$ έχουν όλα το ίδιο χρώμα. Επίσης από την επαγωγική υπόθεση τα n άλογα $a_2, \ldots, a_{n+1}$ έχουν όλα το ίδιο χρώμα. Άρα έχουν όλα τα άλογα το ίδιο χρώμα.

Πού είναι το λάθος;

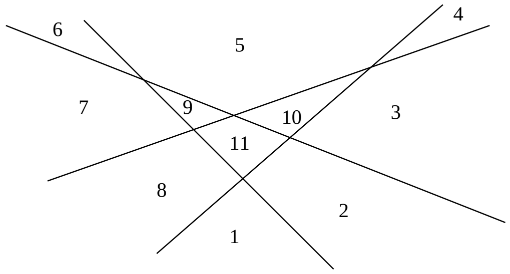
Ασκηση 1.3. Οι αριθμοί Fibonacci F_i, $i \geq 1$, ορίζονται αναδρομικά από

$$F_1 = F_2 = 1, \text{ και } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ για } n > 2.$$

Δείξτε με επαγωγή ότι για $n \geq 1$ ο αριθμός F_{3n} είναι άρτιος.

Ασκηση 1.4. Δίνονται n ευθείες στο επίπεδο. Σε πόσα το πολύ χωρία χωρίζουν αυτές το επίπεδο; (Δείτε το Σχήμα 1.)

Ασκηση 1.5. Σε μία χώρα κάθε μια από τις $n \geq 2$ πόλεις της συνδέεται με κάθε άλλη με ένα μονόδρομο. Δείξτε ότι υπάρχει τρόπος να ξεκινήσει κανείς από μία πόλη της χώρας αυτής και να επισκεφτεί κάθε άλλη, ακριβώς μία φορά, κινούμενος πάνω στο υπάρχον οδικό δίκτυο (και σεβόμενος τους μονόδρομους).



Σχήμα 1. Τέσσερεις ευθείες που ορίζουν 11 χωρία στο επίπεδο

Ασκηση 1.6. Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ισχύει ο τύπος για την *πεπερασμένη γεωμετρική σειρά*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad n \geq 1. \tag{7}$$

Από αυτό δείξτε ότι, αν $|x| < 1$, τότε για την *άπειρη γεωμετρική σειρά* ισχύει

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}. \tag{8}$$

1.1 Όλες οι προηγούμενες περιπτώσεις ως επαγωγική υπόθεση

Η μέθοδος της λεγόμενης *ισχυρής μαθηματικής επαγωγής* αποδεικνύει την αλήθεια μιας πρότασης $P(n)$, για $n \geq n_0$, δείχνοντας κατ΄ αρχήν την αλήθεια της πρότασης $P(n_0)$ (σε αυτό ταυτίζεται με τη συνηθισμένη επαγωγή) αλλά το επαγωγικό βήμα συνίσταται στην απόδειξη της συνεπαγωγής

$$P(n_0), P(n_0 + 1), \ldots, P(n - 1), P(n) \Rightarrow P(n + 1).$$

Με άλλα λόγια, για να δείξουμε την πρόταση $P(n+1)$ μας επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε την αλήθεια *όλων* των προηγουμένων περιπτώσεων, και όχι μόνο της αμέσως προηγούμενης.

Παραδειγμα 1.3. *Πρώτος* λέγεται ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 1 αν οι μόνοι διαιρέτες του είναι το 1 και ο εαυτός του. Δείχνουμε ότι κάθε φυσικός αριθμός $n \geq 2$ είναι γινόμενο πρώτων αριθμών (ισχύει και μοναδικότητα του *αναπτύγματος* αυτού αλλά δεν το αποδεικνύουμε αυτό εδώ).

Η βασική περίπτωση είναι η $n = 2$. Αφού το 2 είναι πρώτος αριθμός η πρόταση ισχύει. Έστω τώρα $n > 2$ και ας υποθέσουμε ότι η πρόταση ισχύει για όλες τις μικρότερες τιμές. Υποθέτουμε δηλ. ότι αν $2 \leq k < n$ τότε ο φυσικός αριθμός k μπορεί να γραφεί σα γινόμενο πρώτων αριθμών. Οφείλουμε να δείξουμε, χρησιμοποιώντας αυτή την υπόθεση, οτι και ο n γράφεται σα γινόμενο πρώτων.

Αν ο n είναι πρώτος αριθμός τότε ισχύει φυσικά αυτό. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε οτι ο n δεν είναι πρώτος. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει κάποιος φυσικός αριθμός k, διαφορετικός από το 1 και από το n, που διαιρεί το n. Αυτό συνεπάγεται ότι $1 < k < n$, άρα, σύμφωνα με την επαγωγική υπόθεση, οι αριθμοί k και n/k (για τον οποίο επίσης ισχύει $1 < n/k < n$) γράφονται σα γινόμενο πρώτων. Το ίδιο ισχύει συνεπώς και για τον n που ισούται με το γινόμενός τους.

Ασκηση 1.7. Κάθε ακέραια αξία $n \geq 12$ μπορεί να φτιαχτεί με κέρματα αξίας 4 και 5.

Ασκηση 1.8. Η ακολουθία a_n, $n \geq 1$, ορίζεται από τους τύπους

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\ (n \geq 3).$$

Δείξτε ότι $a_n < (7/4)^n$, για $n \geq 1$.

§2. Προχωρημένη χρήση της επαγωγής

2.1 Πολλαπλή επαγωγή

Πολλές φορές η πρόταση που θέλουμε να δείξουμε εξαρτάται από περισσότερες από μία παραμέτρους. Μπορεί, για παράδειγμα, να προκειται για μια πρόταση $P(m,n)$ που εξαρτάται από δύο παραμέτρους $m,n \geq 0$. Η μέθοδος της επαγωγής μπορεί μερικές φορές να εφαρμοστεί και σε τέτοιες περιπτώσεις. Στην απλούστερη περίπτωση το πρόβλημα αντιμετωπίζεται σα μια επαλληλία μονοπαραμετρικών προβλημάτων.

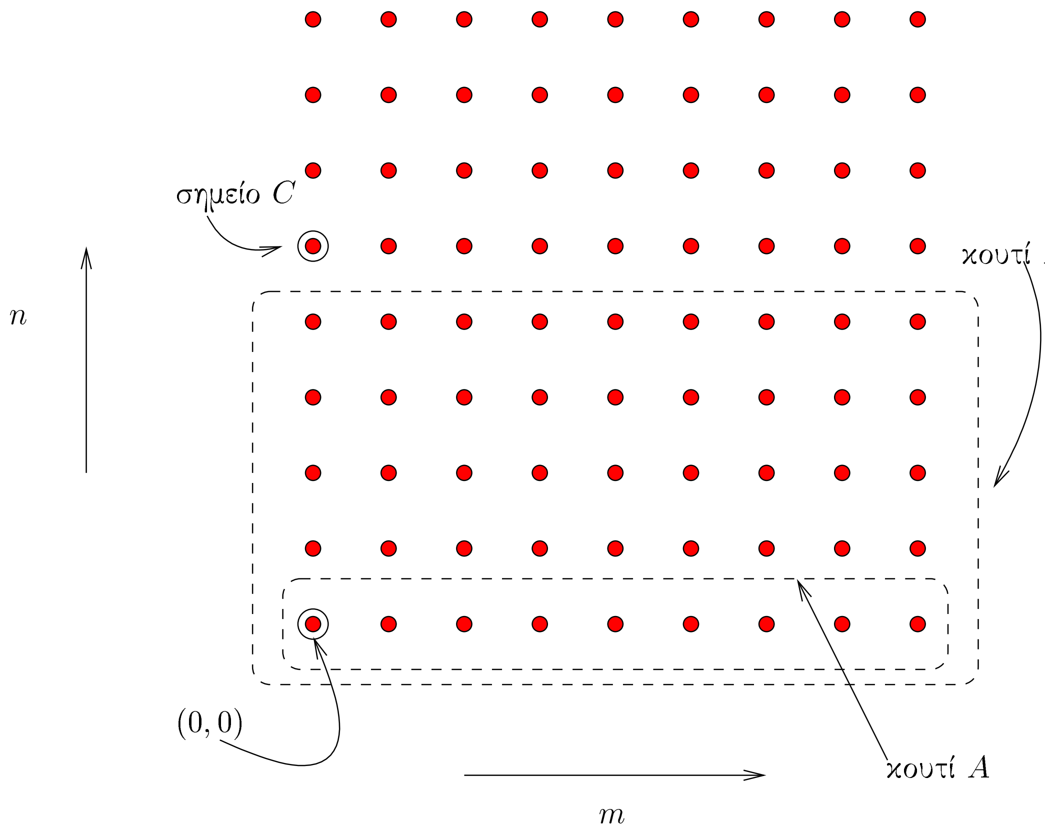
Σε μια τυπική τέτοια περίπτωση αποδεικνύεται πρώτα η πρόταση $P(0,0)$, και μετά δείχνουμε τη συνεπαγωγή

(9) $$P(m,n) \Rightarrow P(m+1,n).$$

Με μόνα αυτά τα δύο βήματα στο "οπλοστάσιό" μας δε μπορούμε ακόμη να ξεφύγουμε από τη γραμμή $n=0$. Αν όμως αποδείξουμε και τη συνεπαγωγή

(10) $$(\forall m \geq 0\ \forall k < n\ P(m,k)) \Rightarrow P(0,n),$$

τότε έχουμε μια πλήρη απόδειξη για όλα τα ζεύγη των τιμών (m,n).



Σχήμα 2. Διπλή επαγωγή

Ας περιγράψουμε λίγο το τι σημαίνουν αυτές οι συνεπαγωγές που μοιάζουν (και είναι) αρκετά αυθαίρετες. Αυτό που θέλουμε είναι να αποδείξουμε την αλήθεια της πρότασης $P(m,n)$ σε όλα τα ακέραια σημεία του τεταρτημορίου $m,n \geq 0$ του επιπέδου. Ας αναφερθούμε στο Σχήμα 2 όπου παριστάνεται σχηματικά το τεταρτημόριο αυτό.

Με το βασικό βήμα της επαγωγής αποδεικνύουμε την αλήθεια της $P(\cdot,\cdot)$ στο σημείο $(0,0)$. Μετά την απόδειξη της (9) μπορούμε επεκτείνουμε την αλήθεια της $P(\cdot,\cdot)$ σε όλο το (ημιάπειρο) "κουτί A", που αποτελείται από όλα τα σημεία του τύπου $(\cdot,0)$. Και αυτό γιατί το νόημα της συνεπαγωγής (9) είναι ότι η αλήθεια της πρότασης επεκτείνεται από κάθε σημείο στο αμέσως δεξιά του.

Για να επεκτείνουμε την αλήθεια της $P(\cdot,\cdot)$ και προς τα πάνω χρειάζεται να έχουμε και ένα "κανόνα" που να συνάγει την αλήθεια της $P(\cdot,\cdot)$ σε ένα σημείο γνωρίζοντας την αλήθεια αυτής σε σημεία που είναι αυστηρά χαμηλότερα. Αυτός είναι ακριβώς ο ρόλος της συνεπαγωγής (10). Αν, για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι η P αληθεύει στο "κουτί B", δηλ. σε όλα τα σημεία του τύπου (m,k), όπου το m είναι οτιδήποτε και $k < n$, συμπεραίνουμε τότε ότι η $P(0,n)$ (στο "σημείο C") ισχύει. Με σημείο αφετηρίας τώρα το σημείο

C και χρησιμοποιώντας ξανά τη συνεπαγωγή 9 επεκτείνουμε την αλήθεια της P στη γραμμή ακριβώς πάνω από το κουτί B. Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο επ΄ άπειρον βλέπουμε ότι η πρόταση αληθεύει παντού στο τεταρτημόριο που μας ενδιαφέρει.

Πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι υπάρχουν πολλοί τρόποι να γίνει η επαγωγή σε παραπάνω από μία μεταβλητή, και ότι αυτός που αναφέραμε παραπάνω είναι απλά ένας από αυτούς. Αυτό που χρειάζεται σε μια εφαρμογή της επαγωγής είναι ένα επαγωγικό βήμα που να μπορεί να "καλύψει" όλο το σύνολο των τιμών που παίρνουν οι παράμετροι (m και n στον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω) ξεκινώντας από μερικές απλές βασικές περιπτώσεις. Ιδού ένα άλλο παράδειγμα: ας υποθέσουμε ότι οι παράμετροι m και n της πρότασής μας παίρνουν όλες τους φυσικούς αριθμούς ως τιμές και ότι μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε την πρότασή μας αν $m = 0$ ή αν $n = 0$ (συνοριακές συνθήκες). Επίσης, για κάθε ζεύγος τιμών m και n όπου και τα δύο είναι τουλάχιστον 1, η αλήθεια της πρότασης προκύπτει από την αλήθεια της πρότασης στα σημεία $(m-1, n-1)$ και $(m-1, n)$ (τα σημεία ακριβώς αριστερά και αριστερά-κάτω από το (m, n) στο Σχήμα 2). Τότε η πρόταση αληθεύει για όλα τα $m, n \geq 0$ αφού για οποιοδήποτε τέτοιο ζεύγος μπορεί κανείς με διαδοχικές αναγωγές να οδηγηθεί να εξαρτάται από την αλήθεια της πρότασης στο σύνορο του τεταρτημορίου, όπου γνωρίζουμε ότι αυτή ισχύει. Δείτε και την Άσκηση 1.9.

Άσκηση 1.9. Η ακολουθία $a(n, k)$ ορίζεται για $n, k \geq 0$, και ικανοποιεί τα παρακάτω.

$$a(n,0) = 1,\ (n \geq 0),$$
$$a(n,k) = 0,\ (n < k),$$

και

$$a(n,k) = a(n-1,k-1) + a(n-1,k),\ (n \geq k \geq 1).$$

Δείξτε ότι για $n \geq k \geq 1$ ισχύει

$$a(n,k) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}.$$

2.2 Ενισχύοντας την πρόταση που θέλουμε να δείξουμε

Πολλές φορές, και παρ΄ ότι εκ πρώτης όψεως μπορεί να φαίνεται παράδοξο, όταν πάμε να δείξουμε με επαγωγή μια πρόταση P είναι ευκολότερο να δείξουμε μια *ισχυρότερη* πρόταση Q, μια πρόταση δηλ. για την οποία να ισχύει για κάθε n η συνεπαγωγή $Q(n) \Rightarrow P(n)$.

Αυτό δεν είναι και τόσο περίεργο αν σκεφτούμε ότι στο επαγωγικό βήμα (3) η πρόταση P εμφανίζεται στο συμπέρασμα αλλά και στην υπόθεση. Δηλ. ναι μεν δυσκολεύουμε κάπως τη ζωή μας (περνώντας από την P στην Q) αφού έχουμε να αποδείξουμε κάτι δυσκολότερο από πριν, ενισχύουμε όμως ταυτόχρονα και την επαγωγική μας υπόθεση οπότε δεν είναι προφανές ότι χάνουμε. Σε πολλές περιπτωσεις κερδίζουμε στην ευκολία απόδειξης.

Παράδειγμα 1.4. Να δειχτεί ότι ο αριθμός $1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1$ (άθροισμα των πρώτων n περιττών φυσικών αριθμών) είναι τέλειο τετράγωνο για $n \geq 1$.

Ας γράψουμε για απλότητα $S_n = 1 + 3 + \cdots + 2n - 1$, οπότε $S_{n+1} = S_n + 2n + 1$. Για $n = 1$ προφανώς ισχύει η πρόταση αφού $S_1 = 1 = 1^2$.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι ισχύει $S_n = t^2$ για κάποιο ακέραιο t. Έχουμε τότε

$$S_{n+1} = S_n + 2n + 1 = t^2 + 2n + 1.$$

Δυστυχώς από δω και πέρα δεν υπάρχει τρόπος να δείξουμε ότι η ποσότητα $t^2 + 2n + 1$ είναι τέλειο τετράγωνο.

Αν όμως αντί να δείξουμε την πρόταση

$$P(n):\ S_n \text{ είναι τέλειο τετράγωνο}$$

δείξουμε την ισχυρότερη πρόταση

$$Q(n):\ S_n = n^2,$$

η οποία προφανώς συνεπάγεται την $P(n)$, τότε μας λύνονται τα χέρια, αφού παραπάνω από την επαγωγική υπόθεση $t = n$ και σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα $t^2 + 2n + 1$ είναι ίση με $(n+1)^2$, και έχουμε λοιπόν δείξει το επαγωγικό βήμα.

Άσκηση 1.10. (Ανισότητα Bernoulli) Δείξτε με επαγωγή ως προς n ότι για κάθε φυσικό αριθμό $n \geq 0$ και πραγματικό αριθμό $x \geq -1$ ισχύει

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{11}$$

Δοκιμάστε τώρα να δείξετε με επαγωγή την ασθενέστερη ανισότητα $(1+x)^n \geq nx$.

§3. Εφαρμογή: Το θεώρημα του Γάμου (Hall)

Έστω X ένα, πεπερασμένο ή άπειρο, σύνολο και $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ ένα *σύστημα υποσυνόλων* του X. Για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το σύνολο X είναι πεπερασμένο, αν και όλες οι αποδείξεις ισχύουν και για άπειρο X (αλλά πάντα τα A_i πρέπει να είναι πεπερασμένα).

Ορισμός 1.1. Τα στοιχεία $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ ονομάζονται ένα *σύστημα ξένων αντιπροσώπων* (ΣΞΑ) για το σύστημα συνόλων $A_1, \ldots, A_n$ αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι όλα διαφορετικά.

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να βρούμε συνθήκες για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για ένα σύστημα συνόλων

$$\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}.$$

Η ονομασία 'θεώρημα του Γάμου' προέρχεται από την εξής αναλογία: υποθέτουμε ότι έχουμε n γυναίκες $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ και ότι A_i είναι το σύνολο των ανδρών που αποδέχεται η γυναίκα Γ_i ως συζύγους. Το ερώτημα είναι πότε μπορούμε να διαλέξουμε από ένα σύζυγο για κάθε γυναίκα, από αυτούς που αποδέχεται, και διαφορετικό για κάθε γυναίκα. Αυτό λοιπόν γίνεται αν και μόνο αν η οικογένεια υποσυνόλων $A_1, \ldots, A_n$ (του συνόλου όλων των ανδρών) έχει κάποιο σύστημα ξένων αντιπροσώπων.

Ορισμός 1.2. Για κάθε $J \subseteq [n]$ ορίζουμε

$$A(J) = A_{\mathcal{F}}(J) = \bigcup_{j \in J} A_j.$$

Ο δείκτης $\mathcal{F}$ θα παραλείπεται όταν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχισης.

Είναι φανερό πως αν το σύστημα $\mathcal{F}$ έχει ένα ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε έχουμε

$$\forall J \subseteq [n] : \quad |A(J)| \geq |J|. \tag{12}$$

Αυτό γιατί το σύνολο $A(J)$ περιέχει τουλάχιστον τα $x_j, j \in J$, τα οποία εξ ορισμού είναι όλα διαφορετικά.

Η συνθήκη (12) λέγεται συνθήκη του Hall και το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι εκτός από αναγκαία είναι και ικανή για την ύπαρξη ενός ΣΞΑ για το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$.

Θεώρημα 1.1. (Το θεώρημα του Γάμου)
Το σύστημα συνόλων $\mathcal{F}$ έχει ΣΞΑ αν και μόνο αν ισχύει η συνθήκη του Hall (12).

Απόδειξη. Επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ το θεώρημα είναι προφανές. Υποθέτουμε πως ισχύει μέχρι και $n-1$. Εστω $\mathcal{F} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X που ικανοποιεί την (12). Ενα σύνολο $J \subset [n]$, $J \neq \emptyset, [n]$, λέγεται *κρίσιμο* αν $|A(J)| = |J|$.

<u>Περίπτωση 1η</u>: Δεν υπάρχει κρίσιμο σύνολο J.
Από την (12) το A_1 έχει τουλάχιστον ένα στοιχείο, έστω x_1. Θεωρούμε τώρα το σύστημα υποσυνόλων του $X \setminus \{x_1\}$

$$\mathcal{F}' = \{A'_2, \ldots, A'_n\},$$

με $A'_j = A_j \setminus \{x_1\}$, $j = 2, \ldots, n$. Εστω $J \subseteq \{2, \ldots, n\}$. Αφού το J δεν είναι κρίσιμο για το σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned} |A_{\mathcal{F}'}(J)| &\geq |A_{\mathcal{F}}(J)| - 1 \\ &> |J| - 1 \\ &\geq |J|, \end{aligned}$$

άρα η συνθήκη του Hall (12) ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}'$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει ένα ΣΞΑ $x_2, \ldots, x_n$ για το $\mathcal{F}'$. Είναι εύκολο τότε να δεί κανείς πως τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$ είναι ένα ΣΞΑ για το $\mathcal{F}$.

Περίπτωση 2η: Υπάρχει κάποιο κρίσιμο σύνολο.
Εστω J ένα κρίσιμο σύνολο με το ελάχιστο δυνατό μέγεθος. Για απλούστευση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $J = \{1, \ldots, k\}$. Εχουμε τότε $|A(J)| = |J|$. Αφού η συνθήκη του Hall ισχύει για το σύστημα $\mathcal{F}$ είναι φανερό ότι θα ισχύει και για το σύστημα $A_1, \ldots, A_k$ υποσυνόλων του $A(J)$. Αφού $k < n$ συμπεραίνουμε από την επαγωγική υπόθεση πως υπάρχει ΣΞΑ $x_1, \ldots, x_k \in A(J)$ για τα $A_1, \ldots, A_k$.

Θα δείξουμε ότι υπάρχει και ένα ΣΞΑ για τα σύνολα $A_{k+1}, \ldots, A_n$ με όλους τους αντιπροσώπους $\notin A(J)$, και έτσι θα έχει ολοκληρωθεί η απόδειξη. Γιάυτό θα δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη του Hall για το σύστημα $\mathcal{F}' = \left\{A'_{k+1}, \ldots, A'_n\right\}$ υποσυνόλων του $X \setminus A(J)$, με

$$A'_j = A_j \setminus A(J), \quad j = k+1, \ldots, n.$$

Εστω λοιπόν $I \subseteq \{k+1, \ldots, n\}$. Πρέπει να δείξουμε $|A_{\mathcal{F}'}(I)| \geq |I|$.

Από τη συνθήκη του Hall για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$ έχουμε

$$|A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| \geq |I \cup J| = |I| + |J|.$$

Αλλά είναι φανερό ότι επίσης έχουμε

$$A_{\mathcal{F}}(I \cup J) = A_{\mathcal{F}'}(I) \cup A_{\mathcal{F}}(J),$$

όπου η ένωση είναι ξένη.

Επεται ότι

$$\begin{aligned}
|A_{\mathcal{F}'}(I)| &= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |A_{\mathcal{F}}(J)| \\
&= |A_{\mathcal{F}}(I \cup J)| - |J| \\
&\geq |I \cup J| - |J| \\
&= |I| + |J| - |J| \\
&= |I|,
\end{aligned}$$

που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε. Αρα το σύστημα $\mathcal{F}'$ έχει ΣΞΑ του οποίου η ένωση με το ΣΞΑ $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του συστήματος $A_1, \ldots, A_k$, μας δίνει ένα ΣΞΑ για το αρχικό σύστημα $\mathcal{F}$. □

§4. Πρότυπο Διαγώνισμα για άσκησή σας

Άσκηση 1.11. Δείξτε ότι ο αριθμός 8 διαιρεί το $9^k - 1$ για $k \geq 1$.

Άσκηση 1.12. Δείξτε ότι για $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$ έχουμε

$$\frac{d^k}{dx^k} x^n = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Άσκηση 1.13. Δείξτε επαγωγικά ότι για $n \geq 1$ ισχύει

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2. \tag{13}$$

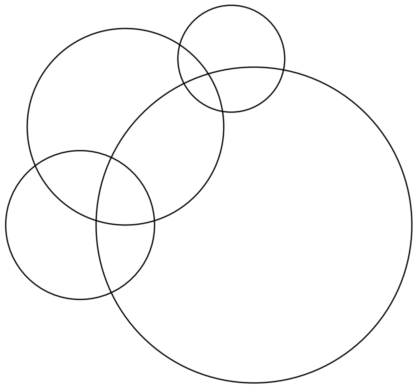
Άσκηση 1.14. Δείξτε την ισότητα

$$\sum_{\{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq [n]} \frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} = n,$$

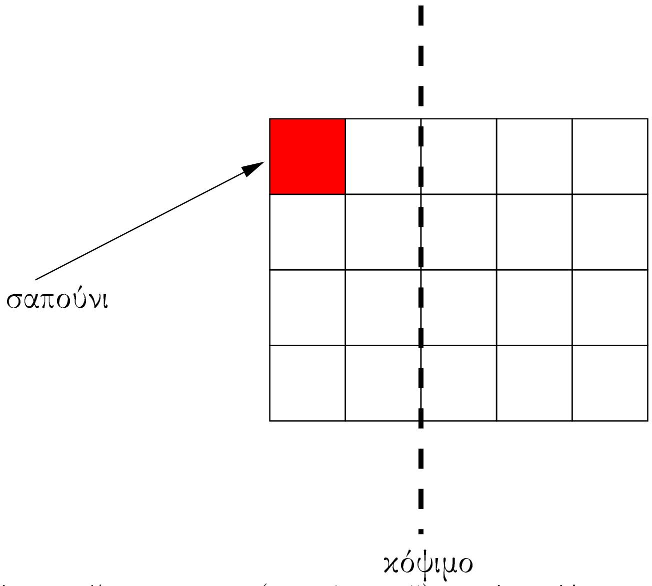
όπου στο άθροισμα υπάρχει ακριβώς ένας προσθετέος για κάθε ένα από τα υποσύνολα $\{a_1, \ldots, a_k\}$ του $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Άσκηση 1.15. Δίνονται n κύκλοι στο επίπεδο. (Δείτε το Σχήμα 3.) Αυτοί ορίζουν κάποια χωρία. Δείξτε ότι αυτά μπορούν να χρωματιστούν κόκκινα ή μπλέ με τέτοιο τρόπο ώστε χωρία που έχουν κοινό σύνορο (όχι απλώς κοινή γωνία αλλά ολόκληρο τόξο ως κοινό σύνορο) να έχουν διαφορετικό χρώμα.

Οι κύκλοι βρίσκονται σε *γενική θέση*: κάθε δύο από αυτούς είτε τέμνονται είτε είναι ξένοι (δεν μπορούν να εφάπτονται) και δεν υπάρχουν τριπλά σημεία τομής.



Σχήμα 3. Κύκλοι που ορίζουν χωρία στο επίπεδο



Σχήμα 4. Η σοκολάτα της Άσκησης 1.16 ($m = 4$, $n = 5$), και ένα κόψιμο από πάνω προς το κάτω.

Άσκηση 1.16. Έχουμε μια ορθογώνια σοκολάτα που αποτελείται από τετραγωνάκια τοποθετημένα σε m γραμμές και n στήλες. Το τετραγωνάκι όμως της πάνω αριστερά γωνίας (και μόνο αυτό) είναι φτιαγμένο από σαπούνι αντί για σοκολάτα.

Δύο παίκτες παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Όταν έρθει η σειρά κάποιου παίκτη αυτός κόβει ένα κομμάτι σοκολάτα και το τρώει. Η $m \times n$ σοκολάτα μπορεί να κοπεί είτε οριζόντια είτε κάθετα αλλά πλήρως, δηλ. αν η σοκολάτα κοπεί οριζόντια τότε αυτή χωρίζεται σε δύο ορθογώνιες σοκολάτες, μια $k \times n$ και μια $(m - k) \times n$, και ο παίκτης διαλέγει και τρώει ένα από τα δύο ορθογώνια κομμάτια. Ομοίως, αν η σοκολάτα κοπεί κάθετα τότε χωρίζεται σε δυο κομμάτια, ένα $m \times k$ και ένα $m \times (n - k)$. (Δείτε Σχήμα 4.)

Χάνει ο παίκτης που αναγκάζεται να φάει το τετραγωνάκι με το σαπούνι. Θα θέλατε να παίζατε πρώτος ή δεύτερος; Η απάντηση εξαρτάται από τα m και n. Βρείτε (π.χ. μαντέψτε) την απάντηση και αποδείξτε ότι έχετε δίκιο με επαγωγή ως προς το μέγεθος της σοκολάτας (mn).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βασικές αρχές απαρίθμησης

§1. Αρχή πολλαπλασιασμού ανεξάρτητων επιλογών

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος πίνει τον καφέ του με ή χωρίς ζάχαρη, με ή χωρίς γάλα. (Οι ποσότητες γάλατος και ζάχαρης που μπορεί κανείς να έχει είναι σταθερές. Δεν υπάρχει *με ολίγη*.) Πόσα διαφορετικά είδη από καφέ πρέπει να μπορεί να φτιαξει ένα καφενείο ώστε να μπορεί να εξυπηρετήσει όλους τους πελάτες;

Η απάντηση είναι 4:

(1) Χωρίς γάλα, χωρίς ζάχαρη
(2) Χωρίς γάλα, με ζάχαρη
(3) Με γάλα, χωρίς ζάχαρη
(4) Με γάλα, με ζάχαρη

Αν σκεφτούμε λίγο προσεκτικότερα θα συνειδητοποιήσουμε ότι $4 = 2 \cdot 2$ και ότι ο λόγος που η απάντηση είναι αυτή είναι ότι κάθε μια από τις δύο δυνατές επιλογές όσον αφορά το περιεχόμενο σε γάλα μπορεί να συνδυαστεί μα κάθε μία από τις δύο δυνατές επιλογές που αφορούν στο περιεχόμενο σε ζάχαρη.

Ασκηση 2.1. Ποια η απάντηση στο άνω "πρόβλημα του καφέ" αν οι επιλογές μας ως προς τη ζάχαρη δεν είναι πλέον οι ΝΑΙ, ΟΧΙ, αλλά μπορούμε είτε να μην έχουμε καθόλου ζάχαρη, είτε να έχουμε ένα φακελάκι, είτε δύο;

Ασκηση 2.2. Αν το αρχικό "πρόβλημα του καφέ" προστεθεί η επιλογή ΚΡΥΟΣ ή ΖΕΣΤΟΣ, την οποία μπορούμε να έχουμε ανεξάρτητα από το γάλα ή τη ζάχαρη που διαλέγουμε, ποια είναι η απάντηση;

Η αρχή του **πολλαπλασιασμού ανεξάρτητων επιλογών** κωδικοποιεί την απλή αυτή παρατήρηση που κάναμε:

> Ας υποθέσουμε ότι έχουμε να παραγματοποιήσουμε μια σύνθετη επιλογή, η οποία συνίσταται από την πραγματοποίηση k επί μέρους επιλογών, που πραγματοποιούνται *ανεξάρτητα* η μία από την άλλη, είναι δηλ. τέτοιες οι επί μέρους επιλογές ώστε η επιλογή τιμών για κάποιες από αυτές να μην επηρεάζει τις δυνατότητες που υπάρχουν για τις υπόλοιπες. Τότε το συνολικό πλήθος δυνατοτήτων που έχουμε για τη σύνθετή μας επιλογή είναι το γινόμενο των k δυνατοτήτων για τις επί μέρους επιλογές μας.

Σε πιο αυστηρή γλώσσα η αρχή του πολλαπλασιασμού ανεξαρτήτων επιλογών εκφράζεται ως εξής (γενικά με $|X|$ συμβολίζουμε τον πληθάριθμο–πόσα στοιχεία έχει–του συνόλου X):

Θεωρημα 2.1. *Έστω k φυσικός αριθμός και E το σύνολο όλων των διαφορετικών k-άδων*

$$(x_1, \ldots, x_k)$$

όπου $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_k \in E_k$, και τα E_j είναι όλα πεπερασμένα σύνολα. Τότε

$$|E| = |E_1| \cdot |E_2| \cdots |E_k|.$$

Αποδειξη. Απόδειξη με επαγωγή ως προς k. Αν $k = 1$ πρόκειται περί ταυτολογίας, αφού $E = E_1$. Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $k = n$ και τη δείχνουμε για $k = n + 1$. Θέλουμε να μετρήσουμε τα διατεταγμένα αντικείμενα της μορφής

$$(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \tag{14}$$

όπου $x_j \in E_j$, για $j = 1, \ldots, n+1$. Αν $E_{n+1} = \{e_1, \ldots, e_r\}$ αυτά τα αντικείμενα (14) χωρίζονται στις εξής *ξένες* μεταξύ τους r ομάδες: G_1 είναι εκείνα τα αντικείμενα που στην τελευταία θέση τους έχουν e_1, δηλ. όλα τα αντικείμενα της μορφής

$$(x_1, \ldots, x_n, e_1), \quad \text{με } x_j \in E_j, \tag{15}$$

G_2 είναι εκείνα τα αντικείμενα με e_2 στην τελευταία θέση, κ.ο.κ. Οι ομάδες αυτές είναι μεταξύ τους ισοπληθείς, αφού, π.χ. μπορεί η G_1 να τεθεί σε 1-1 και επί αντιστοιχία με τη G_2 μέση της απεικόνισης $G_1 \to G_2$

$$(x_1, \ldots, x_n, e_1) \to (x_1, \ldots, x_n, e_2).$$

Το συνολικό πλήθος λοιπόν των αντικειμένων τύπου (14) είναι

$$|G_1| \cdot r = |G_1| \cdot |E_{n+1}|. \tag{16}$$

Αλλά, είναι φανερό, το πλήθος στοιχείων της G_1 είναι όσα και τα διατεταγμένα αντικείμενα

$$(x_1, \ldots, x_n), \quad \text{με } x_j \in E_j,$$

που, λόγω της επαγωγικής υπόθεσης, είναι ίσο με $|E_1| \cdots |E_n|$. Αντικαθιστώντας στην (16) παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Άσκηση 2.3. Πόσους δεκαδικούς ακεραίους με το πολύ τρία ψηφία μπορεί κανείς να γράψει χρησιμοποιώντας μόνο τα γράμματα 2,3,5;

Άσκηση 2.4. Πόσες διαφορετικές στήλες ΠΡΟ-ΠΟ υπάρχουν (μήκους 13, με 1,2 ή X σε κάθε θέση);

Άσκηση 2.5. Πόσες διαφορετικές τριάδες γραμμάτων μπορούν να εμφανιστούν σε ελληνικές πινακίδες αυτοκινήτων; (Σε αυτές χρησιμοποιούνται μόνο γράμματα που ανήκουν και στο ελληνικό και στο λατινικό αλφάβητο.) Αν κάθε τέτοια τριάδα ακολουθείται από ένα τετραψήφιο φυσικό αριθμό (με πρώτο ψηφίο διαφορετικό από το 0) πόσα το πολύ αυτοκίνητα μπορούν να ταξινομηθούν στην Ελλάδα;

Άσκηση 2.6. Αν ρίχνετε συνεχώς ένα ζευγάρι τίμια ζάρια, πόσο συχνά περιμένετε να φέρετε δύο άσους; Άσο και δύο;

1.1 Πλήθος υποσυνόλων ενός πεπερασμένου συνόλου

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή της αρχής πολλαπλασιασμού των ανεξάρτητων επιλογών είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.2. *Έστω σύνολο A με n στοιχεία, και $\mathcal{P}(A)$ το* δυναμοσύνολο *του A, δηλ. το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A. Τότε*

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Απόδειξη. Μπορεί κανείς εύκολα να αποδείξει το Θεώρημα με επαγωγή ως προς το n, αλλά ας δούμε πώς αποδεικνύεται εφαρμόζοντας την αρχή πολλαπλασιασμού. Η βασική παρατήρηση είναι ότι το πλήθος όλων των υποσυνόλων του $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ μπορεί να τεθεί σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων

$$(x_1, \ldots, x_n) \quad \text{με } x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}. \tag{17}$$

Όντως, η 1-1 και επί αυτή αντιστοιχία είναι αυτή που στέλνει το τυχόν υποσύνολο $B \subseteq A$ στη n-άδα $(x_1, \ldots, x_n)$ όπου $x_j = 1$ αν και μόνο αν $j \in B$ (βεβαιωθείτε ότι αυτή η απεικόνιση όντως είναι 1-1 και επί).

Αντί να μετρήσουμε λοιπόν τα στοιχεία του

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των n-άδων (17). Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.

Για να μετρήσουμε τώρα τις n-άδες (17) σκεφτόμαστε ως εξής: για να επιλέξουμε μια τυχούσα n-άδα πρέπει να κάνουμε n ανεξάρτητες επιλογές, μια για κάθε x_j, και σε κάθε μια από αυτές τις επιλογές έχουμε δύο δυνατότητες. Άρα, το πλήθος δυνατοτήτων για τη συνολική επιλογή είναι $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n} = 2^n$. □

Άσκηση 2.7. Δώστε επαγωγική απόδειξη (ως προς το n) του Θεωρήματος 2.2.

Παραδειγμα 2.1. Μέ πόσους τρόπους μπορεί κανείς να επιλέξει δύο *ξένα* μεταξύ τους υποσύνολα A και B του συνόλου $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$; (Άσκηση στο διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 2003)

Τα σύνολα αυτά μπορούν αν είναι και κενά.

Για να απαντήσουμε σκεφτόμαστε ως εξής, και ο τρόπος αυτός σκέψης αποτελεί υπόδειγμα για το πώς σκεφτόμαστε στην πλειονότητα των περιπτώσεων. Για να μετρήσουμε λοιπόν τα συγκεκριμένα αντικείμενα βρίσκουμε, κατ΄ αρχήν, μια διαδικασία για να τα κατασκευάσουμε. Αυτή η διαδικασία πρέπει να είναι τέτοια ώστε

- Να κωδικοποιείται με μια ακολουθία από επιλογές μετά από τις οποίες καταλήγουμε σε ένα από τα αντικείμενα της κλάσης που προσπαθούμε να μετρήσουμε,
- Για κάθε μια από τις δυνατές ακολουθίες επιλογών που κάνουμε να προκύπτει και ένα διαφορετικό αντικείμενο από την κλάση, και
- Για κάθε στοιχείο της κλάσης των προς μέτρηση αντικειμένων υπάρχει μια ακολουθία επιλογών (που είναι και μοναδική, από την προηγούμενη απαίτηση) που μας δίνει το στοιχείο αυτό.

Η κατασκευή που δίνουμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι η εξής. Προχωράμε για $i = 1$ έως $i = n$ και για κάθε i επιλέγουμε αν θα είναι στο σύνολο A, στο σύνολο B ή αν δε θα είναι σε κανένα από αυτά. Δε μπορεί να είναι και στα δύο αφού τα A και B τα θέλουμε ξένα μεταξύ τους.

Είναι φανερό πως αν έχουμε δύο διαφορετικές ακολουθίες από τις n αυτές επιλογές, τότε αυτές οδηγούν σε δύο διαφορετικά αντικείμενα, σε δύο διαφορετικά δηλ. ζεύγη ξένων υποσυνόλων $A, B \subseteq [n]$. Έτσι, το πλήθος των αντικειμένων που μας ενδιαφέρει είναι ίσο με το πλήθος των δυνατών ακολουθιών επιλογών μας. Είναι επίσης φανερό ότι οι n απλές επιλογές που απαρτίζουν αυτή την ακολουθία επιλογών είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αφού κάθε φορά, και ότι και να έχουμε επιλέξει μέχρι στιγμής, τρείς είναι οι δυνατές επιλογές μας για τον τρέχοντα αριθμό i, δηλ. να επιλέξουμε $i \in A$, $i \in B$ ή $i \notin A \cup B$. Έτσι, το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\underbrace{3 \cdots 3}_{n} = 3^n.$$

Ασκηση 2.8. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο υποσύνολα A και B του $[n]$ ώστε $A \subseteq B$;

Ασκηση 2.9. Ποια η απάντηση στο ερώτημα του Παραδείγματος 2.1 αν απαιτήσουμε τα σύνολα A και B να είναι μη κενά; (*Υπόδειξη:* αφαιρέσετε από την απάντηση που δόθηκε στο Παράδειγμα 2.1 μια κατάλληλη ποσότητα που αντιπροσωπεύει επιλογές που δεν πληρούν το κριτήριο της μη κενότητας που έχουμε θέσει.)

1.2 Πλήθος συναρτήσεων από σύνολο A σε σύνολο B

Μια συνάρτηση από το σύνολο A στο σύνολο B είναι απλά μια αντιστοίχιση *κάθε* στοιχείου του A σε *κάποιο* στοιχείο του B. Αν $|A| = m$ και $|B| = n$ πόσες τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν; Η απάντηση είναι n^m:

Θεωρημα 2.3. *Αν A και B είναι δύο πεπερασμένα σύνολα, και με B^A συμβολίσουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το A στο B, τότε*

$$\left|B^A\right| = |B|^{|A|}.$$

Αποδειξη. Το να επιλέξουμε μια συνάρτηση από το A στο B (ένα μέλος δηλ. του συνόλου B^A) σημαίνει απλούστατα να επιλέξουμε την εικόνα κάθε στοιχείου του A ανάμεσα σε όλα τα στοιχεία του B. Οι επιλογές αυτές είναι προφανώς ανεξάρτητες μεταξύ τους αφού δεν έχουμε θέσει κανένα περιορισμό στο τι είδους συναρτήσεις θέλουμε (π.χ., θα μπορούσαμε να θέλουμε 1-1 συναρτήσεις μόνο–σε αυτή την περίπτωση οι επιλογές δε θα ήταν φυσικά ανεξάρτητες). Έτσι το πλήθος των δυνατών επιλογών είναι

$$\underbrace{|B| \cdots |B|}_{|A|} = |B|^{|A|}.$$

□

Άσκηση 2.10. Ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $[n] \to \{0,1\}$; Περιγράψτε μια φυσιολογική σχέση με τα υποσύνολα του $[n]$;

Άσκηση 2.11. Πόσοι $m \times n$ πίνακες υπάρχουν με στοιχεία 0, 1 ή 3;

Άσκηση 2.12. Ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $f : [n] \to \mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$ που πληρούν την ανισότητα $f(k) < k$ για κάθε $k \in [n]$;

Άσκηση 2.13. Αν $A = \{-n, -n+1, \ldots, n-1, n\}$ ποιο το πλήθος των συναρτήσεων $A \to A$ που είναι άρτιες, πληρούν δηλ. $f(-x) = f(x)$ για όλα τα $x \in A$;

Άσκηση 2.14. Πόσοι ακέραιοι αριθμοί, μικρότεροι από 10^6, έχουν κάποιο 2 στο δεκαδικό τους ανάπτυγμα; (*Υπόδειξη:* Πόσοι *δεν* έχουν;)

Άσκηση 2.15. Πόσους διαιρέτες έχει ο φυσικός αριθμός

$$n = p_1^{\nu_1} \cdots p_k^{\nu_k}; \tag{18}$$

Ο n έχει γραφεί σαν γινόμενο δυνάμεων ξένων μεταξύ τους πρώτων[1] αριθμών p_j. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το θεμελιώδες θεώρημα που λέει ότι κάθε φυσικός αριθμός n γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή (18), εκτός ίσως από τη σειρά των παραγόντων.

§2. Αρχή πολλαπλασιασμού ημι-ανεξάρτητων επιλογών

Είδαμε στην §1 ότι όταν έχουμε να παραγματοποιήσουμε μια σύνθετη επιλογή που αποτελείται από πολλές επί μέρους επιλογές, οι οποίες είναι ανεξάρτητες η μια από την άλλη, μπορούμε δηλ. να πραγματοποιήσουμε τις επί μέρους επιλογές όλες ταυτόχρονα, τότε το πλήθος δυαντοτήτων για τη σύνθετη επιλογή ισούται με το γινόμενο των δυανατοτήτων για τις επί μέρους επιλογές.

Η αρχή πολλαπλασιασμού γίνεται πολύ χρησιμότερη μετά από την εξής παρατήρηση. Δε χρειάζεται οι επί μέρους επιλογές μας να είναι ανεξάρτητες. Μπορούμε να επιτρέψουμε η πρώτη μας επί μέρους επιλογή να επηρεάζει τις δυνατότητές μας για τη δεύτερη (ή κάποια άλλη) επιλογή, αρκεί να μην επηρεάζει το *πλήθος* των δυνατοτήτων για την επιλογή αυτή. Δεν απαιτούμε δηλ. να μένει το σύνολο δυνατοτήτων της κάθε επί μέρους επιλογής αναλλοίωτο από κάθε προηγούμενή μας απόφαση, αρκεί να μένει το μέγεθος του συνόλου αναλλοίωτο. Λέμε τότε ότι οι επί μέρους επιλογές μας είναι *ημι-ανεξάρτητες*[2].

Παράδειγμα 2.2. Ας υποθέσουμε ότι, παράλληλα με τις υποθέσεις της Άσκησης 2.1, σε ένα περιέργο τόπο ο κόσμος δεν πίνει ποτέ σκέτο καφέ χωρίς γάλα και ότι δεν πίνει επίσης ποτέ γλυκό (2 φακελάκια ζάχαρη) με γάλα. Το πλήθος των δυνατών τύπων καφέ είναι πάλι $2 \cdot 2$ αν και τώρα οι επιλογές (γάλα, ζάχαρη) δεν είναι πλέον ανεξάρτητες, αφού αν κάποιος επιλέξει πρώτα καφέ χωρίς γάλα οι επιλογές του ως προς τη ζάχαρη είναι 1 ή 2 φακελάκια ενώ αν επιλέξει καφέ με γάλα οι επιλογές του ως προς τη ζάχαρη είναι 0 ή 1 φακελάκι. Οι επιλογή δηλ. που κάνουμε για το γάλα επηρεάζει τις επιλογές μας για τη ζάχαρη, αλλά όχι το πλήθος των επιλογών αυτών, είναι δηλ. η επιλογή της ζάχαρης ημιανεξάρτητη από την επιλογή του γάλακτος.

Παρατήρηση 2.1. Είναι πάρα πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε εδώ ότι η έννοια της ημι-ανεξαρτησίας όπως την ορίσαμε περιγραφικά εδώ *εξαρτάται* από τη σειρά με την οποία πραγματοποιούνται οι επί μέρους επιλογές. Αν στο Παράδειγμα 2.2 επιλέξει κανείς πρώτα το επίπεδο ζάχαρης και μετά το αν θα έχει ο καφές του γάλα ή όχι, παύει η ημι-ανεξαρτησία. Αν επιλέξει κάποιος ο καφές του να είναι σκέτος (καθόλου ζάχαρη) τότε έχει μία επιλογή για το γάλα: πρέπει οπωσδήποτε να βάλει. Αν επιλέξει 1 φακελάκι ζάχαρη μπορεί βάλει γάλα ή όχι, ενώ αν επιλέξει 2 φακελάκια ζάχαρη πάλι έχει 1 επιλογή: να μη βάλει γάλα. Αν αθροίσουμε το πλήθος των επιλογών τότε παίρνουμε πάλι $1+2+1 = 4$ φυσικά. Αλλά παρατηρείστε ότι αυτός ο τρόπος μετρήματος είναι πιο περίπλοκος μια και δεν μπορούμε πλέον να πολλαπλασιάσουμε τις επιλογές, αλλά πρέπει να αθροίσουμε. Γι΄ αυτό και ένα μεγάλο κομμάτι από την τέχνη του μετρήματος έγκειται στο να διαλέξουμε μια καλή σειρά μετρήματος, που θα οδηγήσει σε απλό μέτρημα.

[1] *Πρώτος* λέγεται ένας ακέραιος μεγαλύτερος του 1 αν δεν έχει άλλους διαιρέτες παρά μόνο τον εαυτό του και το 1. Π.χ. πρώτοι αριθμοί είναι οι 2, 3, 5, 7, 11, 13, ενώ ο 6 δεν είναι πρώτος, αλλά *σύνθετος* αριθμός. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

[2] Ο όρος δεν είναι καθιερωμένος.

Παραδειγμα 2.3. Μια 10-μελής ομάδα επιλέγει αρχηγό και (διαφορετικό) υπαρχηγό. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Η απάντηση είναι με $10\cdot 9 = 90$ διαφορετικούς τρόπους. Πρώτα επιλέγεται ο αρχηγός και μετά ο υπαρχηγός. Για τον αρχηγό έχουμε 10 επιλογές. Αφού επιλεγεί αυτός, έστω ο x, στη θέση του υπαρχηγού μπορούμε να επιλέξουμε οποιονδήποτε εκτός του x, έχουμε δηλ. 9 επιλογές. Παρατηρείστε ότι οι δύο επιλογές δεν είναι ανεξάρτητες αφού η επιλογή του αρχηγού επηρεάζει το σύνολο των δυνατών επιλογών για υπαρχηγό, δεν επηρεάζει όμως το πλήθος των δυνατών υπαρχηγών. Είναι δηλ. οι δύο αυτές επιλογές ημι-ανεξάρτητες.

Ασκηση 2.16. Έστω μια ομάδα 5 ανδρών και μια ομάδα 7 γυναικών. Με πόσους τρόπους μπορούμε να παντρέψουμε και τους 5 άνδρες με γυναίκες από αυτή την ομάδα των 7; Ισχύουν οι συνήθεις κανόνες (όχι διγαμία).

Ασκηση 2.17. Για $m \le n$ πόσες 1-1 συνερτήσεις υπάρχουν από το $[m]$ στο $[n]$;

Ασκηση 2.18. Στην Άσκηση 2.16 αλλάξτε τους κοινωνικούς κανόνες ώστε να επιτρέπουν σε μια γυναίκα να παντρευτεί ταυτόχρονα όσους άντρες θέλει.

2.1 Πλήθος διατεταγμένων επιλογών. Μεταθέσεις συνόλου

Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε, κατά τρόπο διατεταγμένο, r άτομα από n;

Θεωρημα 2.4. *Το πλήθος των διατεταγμένων r-άδων ($r \le n$)*

$$(x_1, \ldots, x_r) \quad \text{με } x_j \in [n] \text{ όλα διαφορετικά} \tag{19}$$

είναι

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

Αποδειξη. Επιλέγουμε πρώτα το x_1. Γι' αυτό έχουμε n δυνατότητες. Έχοντας επιλέξει το x_1 δεν μπορούμε πλέον να διαλέξουμε το ίδιο στοιχείο και για x_2. Οι δυνατότητες που έχουμε άρα για το x_2 είναι μία λιγότερες, δηλ. $n-1$. Έχοντας επιλέξει τα x_1, x_2 οι δυνατότητες για το x_3 είναι πλέον $n-2$, κλπ. Παρατηρούμε ότι οι επιλογές είναι ημι-ανεξάρτητες. Δεν επηρεάζουν δηλ. οι μέχρι κάποια στιγμή επιλογές μας το *πλήθος* των μετέπειτα επιλογών μας. Εφαρμόζοντας την αρχή του πολλαπλασιασμού παίρνουμε το αποτέλεσμα, αφού για το x_r θα έχουμε $n-r+1 = n-(r-1)$ δυνατότητες αφού θα έχουν ήδη χρησιμοποιηθεί ακριβώς $r-1$ στοιχεία από τα n. □

Πορισμα 2.1. *Το πλήθος των τρόπων να διατάξουμε στη σειρά τα στοιχεία ενός συνόλου με n στοιχεία είναι*

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n.$$

Οι διαφορετικοί αυτοί τρόποι διάταξης όλων των στοιχείων ενός συνόλου λέγονται μεταθέσεις *του συνόλου.*

Αποδειξη. Το να διατάξουμε τα στοιχεία του συνόλου στη σειρά είναι το ίδιο πράγμα με το να διαλέξουμε μια διατεταγμένη n-άδα από αυτά. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 2.4 με $r = n$. □

Ασκηση 2.19. Γράψτε όλες τις μεταθέσεις του συνόλου $\{A, B, C\}$.

Ασκηση 2.20. Με πόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα ψηφία 1,2,3,4,5; Με πόσους τα ψηφία 1,1,3,4,5;

Ασκηση 2.21. Σε μια πόλη με εξαψήφια τηλέφωνα πόσα νούμερα το πολύ μπορεί να υπάρχουν χωρίς επαναλαμβανόμενα ψηφία;

2.2 Μη διατεταγμένες επιλογές. Συνδυασμοί

Πόσα υποσύνολα του συνόλου $[n]$ (ή, εν γένει, ενός συνόλου με n στοιχεία) υπάρχουν με μέγεθος k;

Θεωρημα 2.5. *Αν $0 \le k \le n$ τότε το σύνολο $[n]$ (ή οποιοδήποτε σύνολο με n στοιχεία) έχει*
$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
υποσύνολα μεγέθους k (ακολουθούμε τη σύμβαση ότι ένα γινόμενο με 0 παράγοντες ισούται με 1, έτσι $0! = 1$).

Το σύμβολο $\binom{n}{k}$ προφέρεται: n ανά k.

Πορισμα 2.2. *Αν n, k φυσικοί αριθμοί, $0 \le k \le n$, τότε α αριθμός*
$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$
είναι ακέραιος.

Αποδειξη. Αυτό που ζητάμε να μετρήσουμε είναι το πλήθος των μη διατεταγμένων k-άδων με διαφορετικά στοιχεία από το $[n]$. Λέγοντας ότι θέλουμε να μετρήσουμε 'μη διατεταγμένες' k-άδες εννούμε ότι αν δύο k-άδες διαφέρουν μόνο ως προς τη σειρά που εμφανίζονται τα στοιχεία τους, τότε αυτές τις θεωρούμε ίδιες και τις μετράμε μία φορά. Αν αυτό δεν ίσχυε, αν δηλ. διαφορετικά διατεταγμένες k-άδες θεωρούνταν διαφορετικές, τότε την απάντηση τη δίνει το Θεώρημα 2.4, δηλ. $n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Παρατρείστε τώρα ότι σε κάθε μη διατεταγμένη k-άδα, σε κάθε δηλ. k-μελές υποσύνολο του $[n]$, αντιστοιχούν ακριβώς $k!$ διατεταγμένες k-άδες, μια και με τόσους τρόπους μπορούν να διαταχθούν τα στοιχεία ενός k-μελούς συνόλου (Πόρισμα 2.1). Άρα, στον αριθμό $n(n-1)\cdots(n-k+1)$ κάθε k-μελές υποσύνολο του $[n]$ έχει μετρηθεί ακριβώς $k!$ φορές. Για να βρούμε συνεπώς το πλήθος των k-μελών υποσυνόλων του $[n]$ αρκεί να διαιρέσουμε αυτό τον αριθμό με $k!$. □

Παρατηρηση 2.2. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ ότι η προηγούμενη απόδειξη δουλεύει ακριβώς επειδή κάθε k-μελές σύνολο είχε μετρηθεί *τον ίδιο αριθμό φορών* στην ποσότητα $n(n-1)\cdots(n-k+1)$, και άρα δικαιούμασταν να διαιρέσουμε δια αυτό τον αριθμό φορών.

Ασκηση 2.22. Ποια είναι τα διμελή υποσύνολα του $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$.

Παραδειγμα 2.4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε τέσσερεις διαφορετικούς διψήφιους ακεραίους (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους) ούτως ώστε να χωρίζονται αυτοί σε δύο ζεύγη και οι αριθμοί κάθε ζεύγους να έχουν το ίδιο δεύτερο (χαμηλότερο) ψηφίο αλλά αριθμοί σε διαφορετικά ζεύγη να έχουν διαφορετικό δεύτερο ψηφίο;

Για να μετρήσουμε τους τρόπους σκεφτόμαστε με ποια διαδικασία θα παράγουμε μονοσήμαντα ένα τέτοιο αποτέλεσμα. Παρατηρούμε ότι στη δεύτερη θέση χρησιμοποιούνται ακριβώς δύο ψηφία, ένα στο ένα ζεύγος και ένα για το άλλο. Αποφασίζουμε λοιπόν κάθε τετράδα τέτοιων αριθμών να τη γράφουμε ως εξής:

$$xa, ya, zb, wb \tag{20}$$

όπου ισχύει

$$a, b \in \{0, \ldots, 9\},\ x, y, z, w \in \{1, \ldots, 9\},\ a > b,\ x > y,\ z > w. \tag{21}$$

Την τελευταία αυτή απαίτηση τη βάζουμε ώστε κάθε τετράδα από αυτές που θέλουμε να μετρήσουμε να γράφεται με *μοναδικό* τρόπο στη μορφή (20). Πάντα δηλ. όταν είναι να γράψουμε μια τετράδα κάτω γράφουμε πρώτα το ζευγάρι όπου το ψηφίο των μονάδων είναι το μεγαλύτερο, και μέσα σε κάθε ζευγάρι γράφουμε πρώτα αυτόν τον αριθμό του οποίο το ψηφίο των δεκάδων είναι το μεγαλύτερο.

Τα αντικείμενα δηλ. που θέλουμε να μετρήσουμε είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τις εξάδες

$$(a, b, x, y, z, w)$$

που ικανοποιούν την (21). Για να μετρήσουμε τις εξάδες αυτές μετράμε πρώτα πόσες είναι οι επιλογές μας για το ζεύγος a, b, πόσες για το ζεύγος x, y και πόσες για το ζεύγος z, w. Επειδή, λόγω της φύσης της συνθήκης (21), αυτές οι επιλογές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε. Αλλά για να επιλέξουμε το ζεύγος $a, b \in \{0, \ldots, 9\}$ με $a > b$ μπορούμε απλά να επιλέξουμε ένα διμελές υποσύνολο του $\{0, \ldots, 9\}$ και να ονομάσουμε a το μεγαλύτερο στοιχείο του και b το μικρότερο. Το πλήθος επιλογών μας δηλ. είναι $\binom{10}{2}$ και, ομοίως σκεπτόμενοι, βλέπουμε ότι για το ζεύγος x, y έχουμε $\binom{9}{2}$ επιλογές και ομοίως για το ζεύγος z, w.

Το τελικό αποτέλεσμα είναι λοιπόν

$$\binom{10}{2}\binom{9}{2}^2.$$

Παραδειγμα 2.5. Από μια συνηθισμένη τράπουλα με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε μαι εξάδα από φύλλα υπό τον περιορισμό ότι ακριβώς τρία από αυτά είναι σπαθιά (♣); Οι εξάδες που επιλέγουμε είναι μη διατεταγμένες.

Για να απαντήσουμε βρίσκουμε μια διαδικασία παραγωγής του τυπικού αποτελέσματος. Αφού λοιπόν πρέπει τρία από αυτά τα χαρτιά να είναι σπαθιά ξεκινάμε διαλέγοντας πρώτα απ΄ όλα αυτά. Τα τρία αυτά φύλλα επιλέγονται χωρίς κανένα περιορισμό από τα 13 συνολικά σπαθιά της τράπουλας. Άρα οι δυνατότητες γι΄ αυτή την επιλογή είναι $\binom{13}{3}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε τα υπόλοιπα τρία φύλλα που πρέπει απλά να μην είναι σπαθιά, επιλέγονται δηλ. από τα $3 \times 13 = 39$ φύλλα που δεν είναι σπαθιά, δίνοντάς μας $\binom{39}{3}$ δυνατότητες.

Επειδή η πρώτη επιλογή (των σπαθιών) είναι ανεξάρτητη από τη δεύτερη το τελικό αποτέλεσμα είναι

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{39}{3}.$$

Παραδειγμα 2.6. Είναι πολύ σημαντικό να τονίσουμε ότι η απαρίθμηση που κάναμε στο Παράδειγμα 2.5 είναι σωστή επειδή η μέθοδος κατασκευής έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- Είναι τέτοια ώστε διαφορετικές επί μέρους επιλογές (στη μέθοδο κατασκευής που περιγράψαμε οι επί μέρους επιλογές ήταν δύο: πρώτα η επιλογή των σπαθιών και μετά η επιλογή των μη σπαθιών) οδηγούν αναγκαστικά σε διαφορετικό αποτέλεσμα, και
- Κάθε δυνατό αποτέλεσμα είναι δυνατό να κατασκευαστεί με τη μέθοδό μας.

Οι δύο αυτές ιδιότητες μαζί εξασφαλίζουν ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα σε αυτά που κατασκευάζουμε και σε αυτά που θέλουμε να μετρήσουμε, άρα μπορούμε απλά να μετρήσουμε το πλήθος των αντικειμένων που κατασκευάζουμε.

Για να τονίσουμε το πόσο σημαντικές είναι αυτές οι δύο ιδιότητες και πόσο προσεκτικοί πρέπει να είμαστε σε αντίστοιχα μετρήματα, ας παραλλάξουμε λίγο το ερώτημα του Παραδείγματος 2.5. Ας ρωτήσουμε το ίδιο με μόνη διαφορά ότι τώρα δεν απαιτούμε *ακριβώς* τρία φύλλα να είναι σπαθιά αλλά *τουλάχιστον* τρία.

Ας βρούμε μια διαδικασία κατασκευής (σύνθετη επιλογή). Αφού οπωσδήποτε θέλουμε τρία σπαθιά ας ξεκινήσουμε επιλέγοντάς τα. Έχουμε πάλι $\binom{13}{3}$ δυνατότητες γι΄ αυτή την επιλογή. Στο δεύτερο στάδιο μένει απλά να επιλέξουμε άλλα τρία φύλλα από τα εναπομέναντα 49, αφού τώρα δε μας πειράζει να έχουμε επιπλέον σπαθιά. Στο δεύτερο στάδιο λοιπόν έχουμε $\binom{49}{3}$ δυνατότητες. Εφ΄ όσον τα δύο στάδια επιλογής είναι ημι-ανεξάρτητα (προηγουμένως ήταν ανεξάρτητα) μπορούμε και πάλι να πολλαπλασιάσουμε και παίρνουμε τελικό αποτέλεσμα

$$\binom{13}{3}\cdot\binom{49}{3}.$$

ΛΑΘΟΣ!

Και ο λόγος είναι ότι μπορούμε να έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα ακόμη κι αν η σύνθετη επιλογή μας αλλάξει. Για παράδειγμα, η κατασκευή μας μπορεί στο πρώτο στάδιο να μας δώσει 1 ♣, 2 ♣, 3 ♣ και στο δεύτερο 4 ♣, 1 ♡ και 2 ♡. Μπορεί επίσης να μας δώσει στο πρώτο στάδιο 1 ♣, 2 ♣, 4 ♣ και στο δεύτερο να μας δώσει 3 ♣, 1 ♡ και 2 ♡. Η τελική εξάδα είναι στις δύο αυτές περιπτώσεις η ίδια. Άρα ο αριθμός $\binom{13}{3}\cdot\binom{49}{3}$ που υπολογίσαμε προηγουμένως είναι αυστηρά (και μάλλον κατά πολύ) μεγαλύτερος της πραγματικότητας.

Πώς μπορούμε να διορθώσουμε τη μέθοδό μας; Μια απλή απάντηση είναι ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε τις δυνατές εξάδες σε τέσσερεις κατηγορίες: αυτές που έχουν ακριβώς 3, ακριβώς 4, ακριβώς 5 ή ακριβώς 6 σπαθιά. Μπορούμε εύκολα να μετρήσουμε τις εξάδες κάθε κατηγορίας, ουσιαστικά με τη μέθοδο του Παραδείγματος 2.5, και στο τέλος να προσθέσουμε αυτά τα τέσσερα νούμερα. Έτσι το αποτέλεσμα είναι

$$\binom{13}{3}\binom{39}{3}+\binom{13}{4}\binom{39}{2}+\binom{13}{5}39+\binom{13}{6}$$

όπου ο κάθε προσθετέος αντιπροσωπεύει και μια κατηγορία. (Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε αυτή την αντιστοιχία.)

Παραδειγμα 2.7. Αν αναπτύξουμε (γράψουμε δηλ. στη μορφή $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$) το πολυώνυμο $(1+x)^{10}$ ποιος είναι ο συντελεστής του x^4;

Ας σκεφτούμε λίγο πώς υπολογίζει κανείς το ανάπτυγμα ενός γινομένου, για απλότητα του $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ που έχει δύο μόνο παράγοντες και όχι 10 όπως αυτό που ζητάμε. Το βρίσκουμε παίρνοντας κάθε προσθετέο του πρώτου αθροίσματος πολλαπλασιασμένο με κάθε προσθετέο του δεύτερου, και αθροίζουμε τα αποτελέσματα. Αν λοιπόν ρωτήσουμε ποιός είναι ο συντελεστής του ab στο ανάπτυγμα, είναι σα να ρωτάμε με πόσους τρόπους μπορεί να εμφανιστεί το γινόμενο ab κάνοντας το ανάπτυγμα όπως παραπάνω.

Λόγω αντιμεταθατικότητας του πολλαπλασιασμού αυτό μπορεί να εμφανιστεί είτε ως ab είτε ως ba. Το ab εμφανίζεται ακριβώς μία φορά, όταν συνδυάζουμε στο ανάπτυγμα το a από την πρώτη παρένθεση με το b από τη δεύτερη. Δεν υπάρχει άλλος τρόπος. Ομοίως μία φορά εμφανίζεται και το ba όταν συνδυάζεται το b από την πρώτη παρένθεση με το a από τη δεύτερη. Άρα ο συντελεστής του ab στο ανάπτυγμα είναι $1+1=2$. Ομοίως τα a^2 και b^2 μπορούν το καθένα να προκύψουν με ένα μόνο τρόπο. Για το a^2, π.χ., πρέπει να επιλεγεί το a και από την πρώτη και από τη δεύτερη παρένθεση, ομοίως και για το b^2. Επιβεβαιώνεται έτσι ο γνωστός μας τύπος $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

Αν ρωτήσουμε για το συντελεστή του a^2b στο ανάπτυγμα του $(a+b)^3$ είναι σα να ρωτάμε με πόσους τρόπους μπορούμε να συνδυάσουμε ένα b με δύο a από τις τρείς παρενθέσεις $(a+b)$ που υπάρχουν στο γινόμενο. Αυτό μπορεί να γίνει με ακριβώς τρείς τρόπους μια και αρκεί να πούμε από ποια παρένθεση επιλέγουμε να πάρουμε το b. Αυτό προσδιορίζει ότι από τις άλλες δύο παίρνουμε από ένα a.

Επανερχόμαστε τώρα στο αρχικό μας ερώτημα και ρωτάμε για το συντελεστή του x^4 στο ανάπτυγμα του $(1+x)^{10}$. Στο ανάπτυγμα αυτό οι προσθετέοι προκύπτουν με επιλογή, ο καθένας, ενός 1 ή ενός x από κάθε μία από τις 10 παρενθέσεις. Το x^4 λοιπόν μπορεί να προκύψει με τόσους τρόπους όσοι είναι οι τρόποι να επιλέξουμε τις 4 παρενθέσεις, από τις οποίες θα πάρουμε τα x. Άρα το αποτέλεσμα είναι

$$\binom{10}{4}.$$

Ασκηση 2.23. Από μια ομάδα 10 ατόμων, με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί ένα τριμελές προεδρείο χωρίς διακριτούς ρόλους; Ένα 5μελές προεδρείο με πρόεδρο, αντιπρόεδρο και 3 μέλη; (*Υπόδειξη:* Για το δεύτερο ερώτημα, επιλέξτε το προεδρείο επιλέγοντας πρώτα τον πρόεδρο, μετά τον αντιπρόεδρο και, τέλος, τα τρία μέλη μαζί.)

Ασκηση 2.24. Μέ πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε, από μια συνηθισμένη τράπουλα με 52 φύλλα (που χωρίζονται σε 4 χρώματα και 13 είδη), πέντε φύλλα από τα οποία 2 κόκκινα ($\diamondsuit$ ή $\heartsuit$) και 3 σπαθιά; Δε μας ενδιαφέρει η σειρά επιλογής των φύλλων.

Ασκηση 2.25. Αν n άρτιο για ποιο $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ μεγιστοποιείται η ποσότητα $\binom{n}{k}$; Τι γίνεται αν n περιττός;

Ασκηση 2.26. Δείξτε την ταυτότητα

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n,$$

για κάθε $n \geq 0$.

Ασκηση 2.27. Δείξτε την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

για κάθε $n \geq 0$ και $0 \leq k \leq n$.

Ασκηση 2.28. Αν r, s, k είναι φυσικοί αριθμοί με $r \geq s$ δείξτε ότι ο αριθμός $s!$ είναι διαιρέτης του

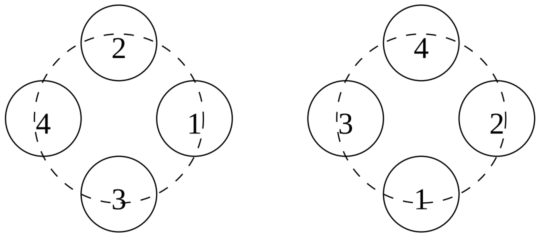
$$(k+1)(k+2)\cdots(k+r).$$

§3. Πρότυπο Διαγώνισμα για άσκησή σας

Αν γράφατε διαγώνισμα στην ύλη που έχει προηγηθεί μέχρι και το τέλος αυτών των σημειώσεων τα παρακάτω θέματα θα ήταν ενδεικτικά (2 ώρες, κλειστές σημειώσεις). Ελέγξτε τον εαυτό σας!

Άσκηση 2.29. Με πόσους τρόπους μπορούν να υπάρξουν n ζευγαρώματα ανάμεσα σε n άνδρες και n γυναίκες;

Άσκηση 2.30. Πόσους διαιρέτες έχει ο αριθμός 2^m; Ο αριθμός $2^m 3^n$;



Σχήμα 5. Οι δύο κυκλικές τοποθετήσεις των αριθμών 1,2,3,4 μπορούν να ταυτιστούν με μια στροφή 90 μοιρών, άρα θεωρούνται ίδιες κυκλικές μεταθέσεις

Άσκηση 2.31. Πόσες *κυκλικές μεταθέσεις* του συνόλου $[n]$ υπάρχουν; Μια κυκλική μετάθεση του $[n]$ είναι ένας τρόπος να γράφουμε τα στοιχεία του σε κύκλο (ώστε κάθε στοιχείο να έχει ένα προηγούμενο και ένα επόμενο), αλλά δύο κυκλικές μεταθέσεις που μπορούν να ταυτιστούν με μια στροφή του κύκλου θεωρούνται ίδιες. Για παράδειγμα, για $n = 4$, οι μεταθέσεις (1243) και (3124) θεωρούνται ίδιες. (Δείτε το Σχήμα 5.)

Άσκηση 2.32. Αν n είναι περιττός αριθμός δείξτε ότι

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots + \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots + \binom{n}{n}.$$

Άσκηση 2.33. Από μια συνηθισμένη τράπουλα με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 6 χαρτιά (δε μας ενδιαφέρει η σειρά τους) από τα οποία τα τρία να είναι κόκκινα ($\diamondsuit$ ή $\heartsuit$) και τα τρία μαύρα ($\spadesuit$ ή $\clubsuit$), και τα δύο από τα τρία κόκκινα να είναι ίδιου είδους (αριθμού).

Άσκηση 2.34. Πόσες διαφορετικές λέξεις με 10 γράμματα υπάρχουν που να έχουν μέσα τρία γράμματα Α, τέσσερα Β και στις υπόλοιπες λέξεις οποιαδήποτε άλλα γράμματα (από τα 24 κεφαλαία της ελληνικής γλώσσας);

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προχωρημένη απαρίθμηση

§1. Διαμερίσεις και συνδυασμοί με επανάθεση

Ας συμβολίσουμε με $P(n, r)$ το πλήθος των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να γράψουμε τον φυσικό αριθμό n ως άθροισμα r μη αρνητικών ακεραίων $x_1, \ldots, x_r$:

$$n = x_1 + \cdots + x_r.$$

Για παράδειγμα, αν $n = 3$ και $r = 2$ οι τρόποι αυτοί είναι οι

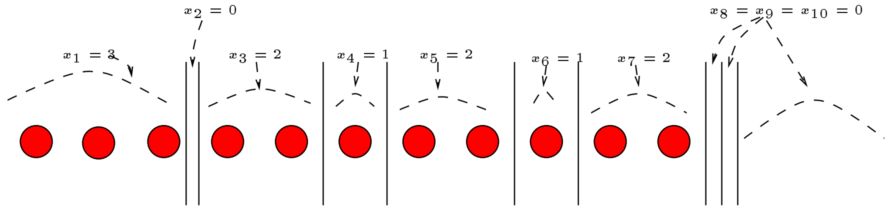
$$3 = 3 + 0 = 2 + 1 = 1 + 2 = 0 + 3 \tag{22}$$

και άρα $P(3, 2) = 4$. Η σειρά των προσθετέων $x_1, \ldots, x_r$ έχει σημασία. Την ποσότητα $P(n, r)$ την ονομάζουμε *πλήθος διαμερίσεων του n σε r κομμάτια*. Παρατηρείστε ότι δεν απαιτούμε το r να είναι $\le n$ αφού το μέγεθος των κομματιών μπορεί να είναι και 0.

Θεωρημα 3.1. *Αν $n \ge 0$ και $r \ge 0$ τότε ισχύει*

$$P(n, r) = \binom{n + r - 1}{n} = \binom{n + r - 1}{r - 1}. \tag{23}$$

Αποδειξη. Παριστάνουμε τον αριθμό n σα n μπάλες στη σειρά και την τυχούσα διαμέριση του n, δηλ. τον τυχόντα τρόπο να γράψουμε $n = x_1 + \cdots + x_r$, σαν ένα χωρισμό αυτής της σειράς από μπάλες με $r - 1$ τοιχώματα (δείτε Σχήμα 6).



Σχήμα 6. Χωρίζοντας $n = 11$ μπάλες σε $r = 10$ ομάδες με 9 ενδιάμεσα τοιχώματα

Η τιμή του x_1 βρίσκεται αν μετρήσουμε πόσες μπάλες υπάρχουν από το $-\infty$ έως το πρώτο τοίχωμα, το x_2 αν μετρήσουμε τις μπάλες από το πρώτο έως το δεύτερο τοίχωμα, κλπ. Τέλος το x_r βρίσκεται αν μετρήσουμε τις μπάλες από το τελευταίο (υπ΄ αριθμόν $r - 1$) τοίχωμα έως το $+\infty$.

Άρα, για να μετρήσουμε το πλήθος των διαμερίσεων $P(n, r)$ αρκεί να μετρήσουμε πόσα διαφορετικά σχήματα σαν και αυτό του Σχήματος 6 υπάρχουν, αφού είναι φανερό ότι σε κάθε τέτοιο σχήμα αντιστοιχεί και μια διαφορετική διαμέριση, και αντίστροφα.

Με ποια διαδικασία μπορούμε λοιπόν να κατασκευάσουμε μονοσήμαντα ένα τέτοιο σχήμα; το κάνουμε ως εξής: βάζουμε πρώτα στη σειρά $n + r - 1$ αντικείμενα και κατόπιν ονομάζουμε τα n από αυτά μπάλες και τα υπόλοιπα $r - 1$ τοιχώματα. Αυτό μπορεί να γίνει ακριβώς με $\binom{n+r-1}{n}$ τρόπους. Η δεύτερη ισότητα μέσα στο συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.1 είναι απλή συνέπεια της ταυτότητας $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$ (δείτε την Άσκηση 2.27). $\square$

Για παράδειγμα σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 ισχύει $P(3,2) = \binom{3+2-1}{3} = \binom{4}{3} = 4$ το οποίο συμφωνεί με την (22).

Άσκηση 3.1. Βρείτε όλες τις διαμερίσεις του 4 σε 3 κομμάτια.

Πέρα από τη σημασία που έχει το ίδιο το πρόβλημα του να μετρήσουμε το πλήθος των διαμερίσεων του n σε r κομμάτια, το ερώτημα αποκτά μεγαλύτερη σημασία γιατί είναι ένας ισοδύναμος τρόπος του να ρωτήσουμε το εξής:

> Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k από n στοιχεία όταν κάθε στοιχείο από τα n μπορεί να επιλεγεί ένα απεριόριστο αριθμό από φορές, και όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των επιλεγέντων στοιχείων;

Ένας ισοδύναμος τρόπος να θέσουμε το ίδιο ερώτημα είναι ο ακόλουθος. Έχουμε ένα σάκο που έχει μέσα n μπάλες. Οι μπάλες φέρουν η κάθε μια τον αριθμό της. Επαναλαμβάνουμε k φορές την πράξη:

> Παίρνουμε μια μπάλα από το σάκο και γράφουμε σ΄ ένα χαρτί τον αριθμό της. Έπειτα επανατοποθετούμε τη μπάλα στο σάκο.

Στο τέλος παρατηρούμε τους k αριθμούς που γράψαμε, χωρίς να μας εναδιαφέρει η σειρά τους. Πόσα είναι τα δυνατά διαφορετικά αποτελέσματα; Από αυτή την εναλλακτική περιγραφή προκύπτει και το όνομα *συνδυασμοί n στοιχείων ανά k με επανάθεση*. Το πλήθος αυτών των συνδυασμών συμβολίζεται με $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$.

Παράδειγμα 3.1. Οι συνδυασμοί του συνόλου $\{A,B\}$ ανά 3 με επανάθεση είναι οι

$$AAA, AAB, ABB, BBB.$$

Για παράδειγμα, ο συνδυασμός ABB θεωρείται ίδιος με τον BAB μια και τα στοιχεία διαφέρουν μόνο στη σειρά εμφάνισης.

Άσκηση 3.2. Δείξτε ότι για κάθε n ισχύει $\left\langle {n \atop 1} \right\rangle = n$. Επίσης ότι, για $n \geq 2$, ισχύει $\left\langle {n \atop 2} \right\rangle = n + \binom{n}{2}$.

Στο τέλος αυτής της διαδικασίας επιλογής k στοιχείων με επανάθεση έχουμε στα χέρια μας k αριθμούς, όχι κατ΄ ανάγκη διαφορετικούς μεταξύ τους, κάθε ένας από τους οποίους ανήκει στο σύνολο $\{1,\ldots,n\}$. Έστω x_i, $i = 1,\ldots,n$, το πλήθος αυτών των αριθμών που είναι ίσοι με i. Επειδή δε μας ενδιαφέρει η σειρά που εμφανίζεται κάθε ένα από τα νούμερα που επιλέγουμε, αλλά μόνο το πόσες φορές εμφανίζεται, γίνεται φανερό ότι

$$x_1 + \cdots + x_n = k \tag{24}$$

και ότι κάθε διαφορετικό αποτέλεσμα της επιλογής με επανάθεση αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική n-άδα $x_1,\ldots,x_n$ που ικανοποιεί την (24). Έχουμε έτσι αποδείξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.2. *Τα δυνατά αποτελέσματα επιλογής k αντικειμένων από n με επανάθεση είναι ίσα το πλήθος με τις δυνατές διαμερίσεις του k σε n κομμάτια. Έχουμε δηλαδή*

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \binom{n+k-1}{k}.$$

Άσκηση 3.3. Αν επιλέξουμε k αντικείμενα από n με επανάθεση και δεν αγνοήσουμε τη σειρά των επιλογών (π.χ., αν επιλέγουμε 3 αντικείμενα από τα A, B με επανάθεση, τα αποτελέσματα AAB και ABA θεωρούνται τώρα διαφορετικά), πόσες διαφορετικές επιλογές υπάρχουν;

Παράδειγμα 3.2. (Αλυσίδες DNA κατά Gamow) Μια αλυσίδα DNA είναι μια πεπερασμένη σειρά από χημικές βάσεις. Οι βάσεις αυτές είναι γνωστές με τα σύμβολα A, C, G και T. Ένα αμινοξύ είναι μια αλυσίδα DNA και είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακριβώς 20 αμινοξέα. Αν υποθέσουμε ότι όλα τα αμινοξέα είναι αλυσίδες με το ίδιο μήκος, τότε εύκολα βλέπουμε ότι το μήκος αυτό δε μπορεί να είναι 1 ή 2. Πράγματι υπάρχουν ακριβώς 4 αλυσίδες μήκους 1 (οι A, C, G και T) και $4^2 = 16$ αλυσίδες μήκους 2 (αυτό γιατί μια τέτοια αλυσίδα ορίζεται από δύο επιλογές με 4 δυνατότητες για την κάθε μία). Από την άλλη μεριά οι αλυσίδες DNA μήκους 3 είναι το πλήθος $4^3 = 64$, είναι δηλ. περισσότερες από 20.

Το 1954 ο G. Gamow πρότεινε ότι δύο αλυσίδες DNA κωδικοποιούν το ίδιο αμινοξύ αν και μόνο αν περιέχουν τις ίδιες βάσεις ανεξαρτήτως σειράς. Οι αλυσίδες δηλ. ACC και CAC, αν και διαφορετικές, κωδικοποιούν το ίδιο αμινοξύ. Αν η υπόθεση του Gamow είναι σωστή πόσα διαφορετικά αμινοξέα κωδικοποιούνται με αλυσίδες DNA μήκους 3; Με λίγη σκέψη βλέπουμε ότι το πλήθος των διαφορετικών αμινοξέων είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών συνδυασμών των τεσσάρων γραμμάτων A, C, G και T ανά τρία, με επανάθεση. Ο αριθμός αυτός είναι δηλ.

$$\left\langle {4 \atop 3} \right\rangle = \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} = 20,$$

συμφωνεί δηλ. η υπόθεση του Gamow με το πειραματικά διαπιστωμένο γεγονός ότι υπάρχουν ακριβώς 20 αμινοξέα. Όμως, για άλλους λόγους, η υπόθεση του Gamow έχει αποδειχθεί ότι δεν ισχύει.

Άσκηση 3.4. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε n όμοιες μπάλες σε k κουτιά που είναι αριθμημένα με τους αριθμούς 1 έως k;

Παράδειγμα 3.3. (Η κατανομή Bose-Einstein στη στατιστική μηχανική) Στη στατιστική μηχανική εξετάζουμε ένα σύστημα από t σωμάτια κάθε ένα από τα οποία μπορεί να βρίσκεται σε p διαφορετικές καταστάσεις, π.χ. σε p διαφορετικά ενεργειακά επίπεδα. Μια *κατάσταση* του συστήματος είναι περιγράφουμε σε ποια κατάσταση είναι το κάθε σωμάτιο. Όταν τα σωμάτια είναι ίδια μεταξύ τους υποθέτουμε συνήθως ότι δεν έχει σημασία ποια από τα t σωμάτια είναι στο κάθε ενεργειακό επίπεδο αλλά μόνο πόσα. Η υπόθεση ότι όλες αυτές οι καταστάσεις είναι εξ ίσου πιθανές λέγεται κατανομή Bose-Einstein.

Στο μοντέλο Bose-Einstein πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος υπάρχουν; Αν θέσουμε x_i, $i = 1, \ldots, p$, να είναι το πλήθος των σωματίων στο ενεργειακό επίπεδο i, τότε πρέπει απλά να διαλέξουμε τους μη αρνητικούς ακεραίους x_i ώστε να έχουν άθροισμα t. Δηλαδή το πλήθος καταστάσεων του συστήματος είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του t σε p κομμάτια, δηλ.

$$\binom{t+p-1}{t}.$$

Κάθε μια από αυτές τις καταστάσεις έχει συνεπώς ¨πιθανότητα' εμφάνισης ίση με το αντίστροφο αυτού του αριθμού.

Άσκηση 3.5. Στην κατανομή Fermi-Dirac υποθέτουμε ότι τα t σωμάτια είναι όλα όμοια και ότι δε μπορούν δύο σωμάτια να βρίσκονται στο ίδιο ενεργειακό επίπεδο (υπάρχουν p ενεργειακά επίπεδα). Αν $t \le p$ πόσες διαφορετικές καταστάσεις του συστήματος σωματίων υπάρχουν; (Δείτε το Παράδειγμα 3.3 και την Άσκηση 3.4.)

§2. Πολυωνυμικοί συντελεστές

Έχουμε δεί ότι αν θέλουμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από n, χωρίς επανάθεση, το πλήθος των τρόπων να γίνει αυτό είναι

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Τι γίνεται αν θέλουμε να επιλέξουμε, πάλι χωρίς επανάθεση, μια ομάδα στοιχείων του $\{1, \ldots, n\}$ μεγέθους k_1, μια ομάδα μεγέθους k_2, κλπ, και τέλος μια ομάδα μεγέθους k_r, όπου για $j = 1, \ldots, r$ έχουμε $0 \le k_j \le n$ και επιπλέον ισχύει $k_1 + \cdots + k_r = n$; Με πόσους τρόπους δηλ. μπορούμε να διαμερίσουμε το $\{1, \ldots, n\}$ σε ένα σύνολο μεγέθους k_1, σε ένα σύνολο μεγέθους k_2 και τέλος σε ένα σύνολο μεγέθους k_r;

Θεώρημα 3.3. *Το πλήθος τρόπων να διαμερίσουμε ένα σύνολο με n στοιχεία σε r σύνολα με μεγέθη $k_1, \ldots, k_r$, με $k_1 + \cdots + k_r = n$, όταν δε μας ενδιαφέρει η σειρά των στοιχείων μέσα στα σύνολα αυτά, είναι*

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}. \tag{25}$$

Απόδειξη. Το πρώτο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με

$$\binom{n}{k_1} = \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}$$

τρόπους. Μετά από την επιλογή του πρώτου συνόλου απομένουν $n - k_1$ στοιχεία αχρησιμοποίητα, άρα το δεύτερο σύνολο μπορεί να επιλεγεί με
$$\binom{n-k_1}{k_2} = \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}$$
τρόπους. Συνεχίζονας κατ΄ αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ότι η επιλογή του προτελευταίου συνόλου (με k_{r-1} στοιχεία) μπορεί να γίνει με
$$\binom{n-k_1-\cdots-k_{r-2}}{k_{r-1}!(n-k_1-\cdots-k_{r-1})!}$$
τρόπους. Επίσης, αφού έχουν επιλεγεί τα $r-1$ πρώτα σύνολα δεν υπάρχει πλέον καμιά επιλογή να γίνει αφου τα υπόλοιπα k_r στοιχεία που απομένουν ακόμη αχρησιμοποίητα αναγκαστικά πάνε στο τελευταίο σύνολο που πρέπει να επιλέξουμε.

Έτσι πολλαπλασιάζοντας τις δυνατότητες επιλογών μας για τα πρώτα $r-1$ σύνολα, και κάνοντας τις απλοποιήσεις παίρνουμε τον τύπο (25). $\square$

Το σύμβολο $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ ονομάζεται *πολυωνυμικός συντελεστής* (κατ΄ αναλογία με τα $\binom{n}{k}$ που ονομάζονται *διωνυμικοί συντελεστές*). Παρατηρείστε επίσης ότι
$$\binom{n}{k, n-k} = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Παρατηρηση 3.1. Ο πολυωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k_1,\ldots,k_r}$ δεν αλλάζει αν τα $k_1, \ldots, k_r$ αντικατασταθούν από μια μετάθεσή τους (αν αλλάξει δηλ. απλώς η σειρά τους).

Ασκηση 3.6. Έχουμε 10 αριθμημένες μπάλες και τρία κουτιά με χωρητικότητες 5, 3 και 2 μπάλες. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε τις μπάλες στα κουτιά; (Δεν υπάρχει εσωτερική σειρά στα κουτιά.)

§3. Τό Διωνυμικό Θεώρημα

Το Διωνυμικό Θεώρημα (Θεώρημα 3.4 είναι ένα ισχυρότατο εργαλείο για υπολογισμούς που αναφέρονται σε ποσότητες με διωνυμικούς συντελεστές. Είναι επίσης η πρώτη σύνδεση των συνδυαστικών ποσοτήτων που συναντάμε με αλγεβρικές μεθόδους. Αργότερα θα δούμε και τις γεννήτριες συναρτήσεις ακολουθιών σα μια φυσική επέκταση της μεθόδου.

Θεωρημα 3.4. *Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, και ακέραιο $n \geq 0$ ισχύει*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{26}$$

Αποδειξη. Το αριστερό μέλος είναι ένα γινόμενο n παραγόντων ίσων με $(a+b)$. Όταν κάνουμε όλες τις πράξεις, όταν δηλ. εφαρμόσουμε την επιμεριστική ιδιότητα, αυτό που κάνουμε είναι ότι σχηματίζουμε όλα τα γινόμενα που μπορούμε να φτιάξουμε διαλέγοντας ένα προσθετέο από κάθε παράγοντα (δείτε και Παράδειγμα 2.7) και τα προσθέτουμε, μαζεύοντας μαζί ίδια μονώνυμα.

Είναι φανερό ότι, εφόσον οι προσθετέοι από κάθε παράδειγμα είναι a ή b και το πλήθος των παραγόντων είναι n, όλα τα μονώνυμα που θα εμφανιστούν είναι της μορφής
$$a^k b^{n-k},\ (0 \leq k \leq n).$$
Το μονώνυμο αυτό εμφανίζεται οποτεδήποτε έχουμε επιλέξει το a από ακριβώς k από τους παράγοντες. Αλλά αυτό συμβαίνει με ακριβώς τόσους τρόπους όσοι είναι οι τρόποι να επιλεγούν k παράγοντες από τους n, δηλ. $\binom{n}{k}$, και αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος. $\square$

Ασκηση 3.7. Ποιο είναι το ανάπτυγμα του $(1+x)^5$ σε δυνάμεις του x;

Το Διωνυμικό Θεώρημα (Θεώρημα 3.4) έχει πολλές εφαρμογές σε υπολογισμούς αθροισμάτων.

Παραδειγμα 3.4. Θέτοντας $a = b = 1$ στην (26) παίρνουμε την ταυτότητα (δείτε και την Άσκηση 2.26)

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Παραδειγμα 3.5. Θέτοντας $a = 1, b = -1$ στην (26) και χωρίζοντας τους αρνητικούς από τους θετικούς όρους παίρνουμε ότι για κάθε n το άθροισμα των διωνυμικών συντελεστών $\binom{n}{k}$ για k άρτιο είναι ίσο με το άθροισμα για k περιττό

$$\sum_{\substack{0\le k\le n \\ k \text{ περιττό}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k \text{ άρτιο}}} \binom{n}{k}. \tag{27}$$

Αυτό είναι φανερό όταν το n είναι περιττό, μια και τότε οι διωνυμικοί συντελεστές με άρτιο k βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τους συντελεστές με περιττό k (αφού ισχύει πάντα $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$–δείτε και Άσκηση 2.27), αλλά δεν είναι εξ ίσου εύκολο για άρτιο k.

Παραδειγμα 3.6. Θέτουμε $a = x, b = 1$ στην (26) και παραγωγίζουμε τη σχέση που προκύπτει ως προς x. Παίρνουμε έτσι

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}.$$

Θέτοντας τώρα $x = 1$ παίρνουμε τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

Ασκηση 3.8. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k}$.

Ασκηση 3.9. Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$.

Ασκηση 3.10. Θέτοντας $a = x, b = 1/x$ και $2n$ στη θέση του n στην (26) δείξτε την ταυτότητα

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2,$$

εξετάζοντας το συντελεστή του σταθερού όρου.

Ασκηση 3.11. Ποιος ο συντελεστής του x^3y^5 στο ανάπτυγμα του $(1 + x + y)^{12}$; Εκφράστε την απάντησή σας με πολυωνυμικούς συντελεστές. (Δείτε την §2.)

§4. Συνδυαστικές αποδείξεις ταυτοτήτων

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε πώς μπορούμε πολλές φορές να αποδεικνύουμε ταυτότητες χωρίς ιδιαίτερες πράξεις, απλά ερμηνεύοντας το αριστερό και το δεξί μέλος με συνδυαστικό τρόπο και παρατηρώντας ότι απαριθμούν τα ίδια αντικείμενα (άρα είναι και ίσα). Αυτή η τεχνική ονομάζεται και *διπλό μέτρημα* μια και μετράμε τα ίδια αντικείμενα δύο φορές, άρα τα δύο αποτελέσματα είναι ίσα.

Παραδειγμα 3.7. (Τρίγωνο του Pascal) Δείξτε την ταυτότητα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \tag{28}$$

Το αριστερό μέλος μετράει τα k-μελή υποσύνολα του $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Αυτά όμως είναι δυο κατηγοριών: αυτά που περιέχουν το στοιχείο n και τα υπόλοιπα. Το πλήθος αυτών που περιέχουν το n είναι $\binom{n-1}{k-1}$ αφού κάθε ένα από αυτά τα k-μελή υποσύνολα καθορίζεται μονοσήμαντα από την τομή του με το σύνολο $[n-1] = \{1, \ldots, n-1\}$ που έχει μέγεθος $k - 1$. Τα υπόλοιπα υποσύνολα επίσης καθορίζονται μονοσήμαντα από την τομή τους με το $[n-1]$, μόνο που αυτή τώρα έχει μέγεθος k, άρα το πλήθος τους είναι $\binom{n-1}{k}$.

Παραδειγμα 3.8. Σε μια συγκέντρωση ο αριθμός των καλεσμένων που ανταλάσσουν περιττές το πλήθος χειραψίες είναι άρτιος.

Έστω $P_1, \ldots, P_n$ οι καλεσμένοι. Θεωρούμε το σύνολο των ζευγών (P_i, P_j) τέτοια ώστε ο P_i χαιρετάει τον P_j, και ας είναι x_i ο αριθμός των χειραψιών που ανταλάσσει ο P_i και y ο συνολικός αριθμός χειραψιών που ανταλλάσονται. Το πλήθος των ζευγών (P_i, P_j) ισούται, από τη μια μεριά, με $\sum_{i=1}^{n} x_i$, και, από την άλλη, με $2y$, αφού σε κάθε χειραψία αντιστοιχούν ακριβώς δύο ζευγάρια (P_i, P_j) και (P_j, P_i). Έτσι έχουμε

$$2y = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

άρα το πλήθος των περιττών x_i είναι αναγκαστικά άρτιο.

Παραδειγμα 3.9. Για $n_1, n_2 \geq 0$ ισχύει

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k} = \binom{n_1+n_2}{m}, \quad (m \leq \min\{n_1, n_2\}).$$

Δεξιά μετράμε τα υποσύνολα μεγέθους m του $[n_1 + n_2]$. Βάφουμε τα n_1 αντικείμενα άσπρα και τα άλλα μαύρα. Τα υποσύνολα μεγέθους m που μας ενδιαφέρουν χωρίζονται στις $m + 1$ το πλήθος κατηγορίες C_k, $k = 0, \ldots, m$. Η κατηγορία C_k περιλαμβάνει όλα τα m-μελή υποσύνολα του $[n_1 + n_2]$ που περιέχουν ακριβώς k άσπρα. Προφανώς έχουμε $|C_k| = \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{m-k}$ αφού για να φτιάξουμε ένα υποσύνολα κατηγορίας C_k πρέπει να επιλέξουμε k άσπρα και τα υπόλοιπα $n - k$ μαύρα. Άρα το αριστερό μέλος της ισότητας είναι ίσο με $\sum_{k=0}^{m} |C_k|$.

Παραδειγμα 3.10. Για κάθε $n \geq 2$ ισχύει:

$$\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2.$$

Αριστερά μετράμε διμελή υποσύνολα του $[2n]$. Έστω ότι χρωματίζουμε n από τα $2n$ αντικείμενα σε άσπρα και τα άλλα μαύρα. Τα διμελή υποσύνολα του $[2n]$ είναι τριών τύπων: (Α) δύο στοιχεία άσπρα, (Β) δύο στοιχεία μαύρα, (Γ) ένα άσπρο κι ένα μαύρο. Τα υποσύνολα τύπου (Α) είναι $\binom{n}{2}$ το πλήθος αφού διαλέγουμε δύο από τα n άσπρα. Τόσα είναι και τα υποσύνολα τύπου (Β). Τα σύνολα τύπου (Γ) είναι το πλήθος $n \cdot n$, μια και πρέπει να διαλέξουμε ένα από n άσπρα και ένα από n μαύρα. Το σύνολο για τις τρεις κατηγορίες συνόλων εμφανίζεται στο δεξί μέλος.

Παραδειγμα 3.11. Δείξτε ότι

$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \tag{29}$$

(δείτε επίσης το Παράδειγμα 3.6) αριθμώντας με δύο διαφορετικούς τρόπους τα ζεύγη (x, M) τέτοια ώστε $x \in M \subseteq [n]$.

Υπάρχουν $\binom{n}{k}$ σύνολα $M \subseteq [n]$ με μέγεθος k, και για κάθε ένα από αυτά μπορούμε να επιλέξουμε ως x οποιοδήποτε από τα k στοιχεία του, άρα το πλήθος των ζευγών (x, M) τέτοια ώστε $x \in M \subseteq [n]$ ισούται με το δεξί μέλος της (29).

Όμως τα ζεύγη αυτά μπορούν να αριθμηθούν επιλέγοντας πρώτα το x και μετά επιλέγοντας τα *υπόλοιπα* στοιχεία του M, το σύνολο δηλ. $M \setminus \{x\}$. Όμως όλα τα σημεία του $[n]$ εκτός το x συμμετέχουν στον καθορισμό του $M \setminus \{x\}$, και άρα οι δυνατότητες γι' αυτό είναι 2^{n-1}, άρα οι δυνατότητες για τα ζεύγη είναι $n2^{n-1}$, που είναι το αριστερό μέλος.

§5. Πρότυπο Διαγώνισμα για άσκησή σας

Αν γράφατε διαγώνισμα στην ύλη που έχει προηγηθεί μέχρι και το τέλος αυτών των σημειώσεων τα παρακάτω θέματα θα ήταν ενδεικτικά (2 ώρες, κλειστές σημειώσεις). Ελέγξτε τον εαυτό σας!

Ασκηση 3.12. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 21 διαφορετικά βιβλία στα άτομα Α, Β και Γ, ούτως ώστε οι Α και Β μαζί να πάρουν διπλάσια βιβλία από τον Γ;

Άσκηση 3.13. Μια ομάδα 20 ατόμων θέλει να φτιάξει τρεις, ξένες μεταξύ τους, επιτροπές με 6, 5 και 4 άτομα η κάθε μία. (Μέσα σε κάθε επιτροπή δεν υπάρχουν χωριστά αξιώματα–τα μέλη τους είναι ισοδύναμα.) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει αυτό;

Άσκηση 3.14. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Άσκηση 3.15. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Άσκηση 3.16. Δείξτε τις ταυτότητες

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l} \tag{30}$$

και

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}. \tag{31}$$

Άσκηση 3.17. Δείξτε ότι, για $n \geq 1$ ισχύει

$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}. \tag{32}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εισαγωγή στη θεωρία γραφημάτων

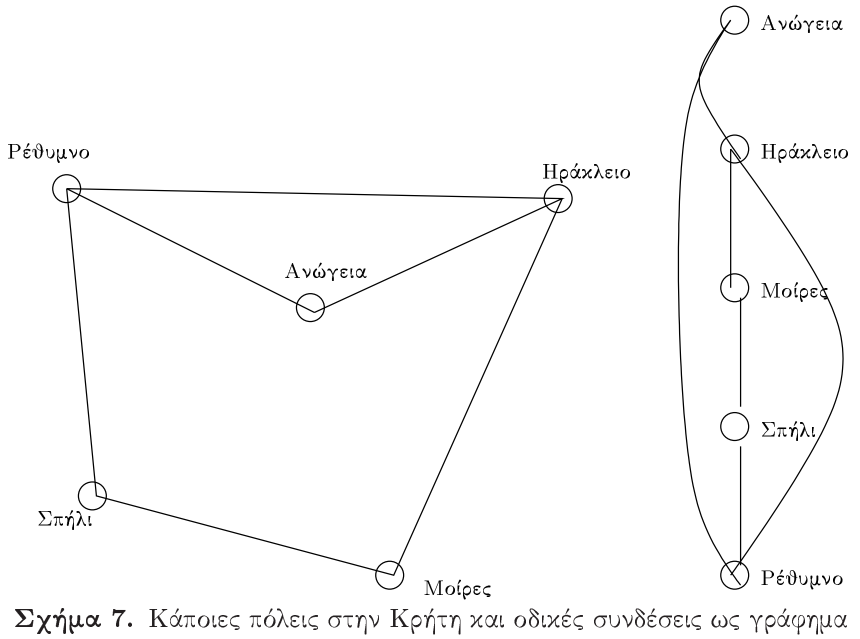
§1. Απλά γραφήματα

Ένα γράφημα (μερικές φορές στην ελληνική βιβλιογραφία γίνεται λόγος και για ένα γράφο) είναι ο βασικότερος, παραστατικότερος και πλέον εύχρηστος γενικός τρόπος στα Μαθηματικά (αλλά και στις Επιστήμες γενικότερα) να παραστήσει κανείς πληροφορία συνδεσμολογίας, να περιγράψει δηλ. μια ομάδα αντικειμένων μερικά από τα οποία συνδέονται μεταξύ τους, και ενδεχομένως και πληροφορίες για τη συνδεσμολογία.

Ορισμος 4.1. Απλό γράφημα Ενα *απλό γράφημα* $G = (V, E)$ αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών V και ένα σύνολο ακμών E, το οποίο είναι ένα σύνολο από *δισύνολα* του V. Γράφουμε επίσης $V = V(G)$ και $E = E(G)$ για τα σύνολα κορυφών και ακμών του γραφήματος G.

Μια ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές u και v αντιπροσωπεύει κάποια έννοια σύνδεσης των δύο κορυφών. Συνηθίζουμε να παριστάνουμε ένα γράφημα αντιστοιχώντας ένα σημείο του επιπέδου σε κάθε κορυφή και τραβώντας μια γραμμή που ενώνει δυο κορυφές αν και μόνο αν αυτές ενώνονται με μια ακμή στο G.

Επισημαίνουμε εδώ ότι αυτή η γραφική παράσταση ενός γραφήματος έχει εποπτική μόνο σημασία. Υπάρχουν γραφήματα στα οποία δε χρησιμοποιούμε ποτέ κάποια γραφική παράσταση (συνήθως λόγω μεγέθους) και τα γραφήματα που μπορούν να παρασταθούν γραφικά με διάφορους τρόπους.



Σχήμα 7. Κάποιες πόλεις στην Κρήτη και οδικές συνδέσεις ως γράφημα

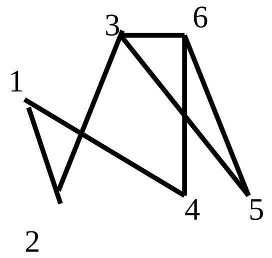
Για παράδειγμα, στο Σχήμα 7 δείχνουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους το ίδιο γράφημα που σκοπό έχει να δείξει την οδική συνδεσμολογία ανάμεσα σε πέντε πόλεις της Κρήτης. Η ύπαρξη μιας ακμής ανάμεσα σε δύο κορυφές (πόλεις) υποδηλώνει την ύπαρξη ενός δρόμου. Το σύνολο κορυφών σε αυτό το γράφημα είναι το

$$V = \{\text{Ηράκλειο, Ρέθυμνο, Ανώγεια, Μοίρες, Σπήλι}\}$$

ενώ το σύνολο ακμών είναι το

$$\begin{aligned} E &= \{\{\text{Ηράκλειο, Ρέθυμνο}\}, \{\text{Ηράκλειο, Ανώγεια}\}, \{\text{Ανώγεια, Ρέθυμνο}\}, \\ &\quad \{\text{Ρέθυμνο, Σπήλι}\}, \{\text{Σπήλι, Μοίρες}\}, \{\text{Μοίρες, Ηράκλειο}\}\}. \end{aligned}$$

Στην αριστερή γραφική παράσταση του γραφήματος έχουμε ζωγραφίσει τις πόλεις σε τέτοια θέση ώστε η σχετική τους θέση να μοιάζει με αυτή που έχουν πάνω στο χάρτη, ενώ δεξιά έχουμε ζωγραφίσει το ίδιο γράφημα βάζοντας απλά όλες τις πόλεις τη μια κάτω από την άλλη σε αλφαβητική σειρά. Τονίζουμε ξανά ότι και τα δύο σχέδια παριστάνουν το ίδιο γράφημα.



Σχήμα 8. Ενα απλό γράφημα με 6 κορυφές και 7 ακμές

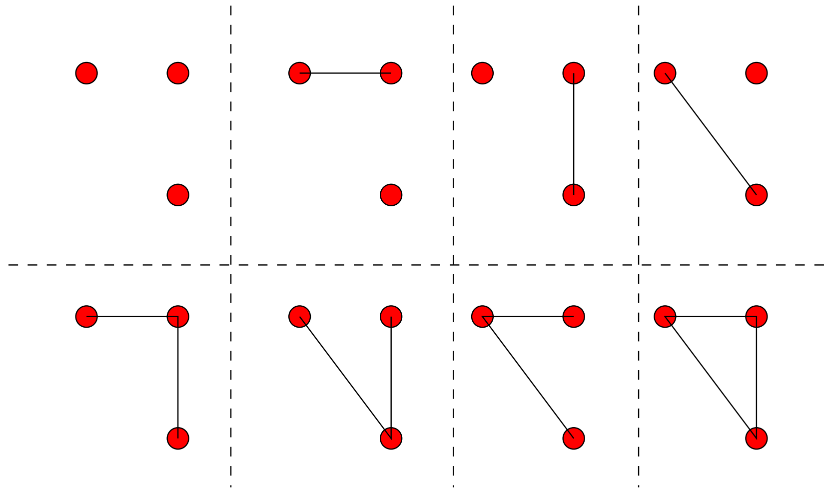
Παραδειγμα 4.1. Συνήθως τα ονόματα που επιλέγουμε για τις κορυφές είναι απλά αριθμοί. Ένα τυπικό γράφημα είναι π.χ. το γράφημα του Σχήματος 8 που έχει σύνολο κορυφών το

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

και σύνολο ακμών το

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}.$$

Παραδειγμα 4.2. Στο Σχήμα 9 δείχνουμε όλα τα διαφορετικά απλά γραφήματα με 3 κορυφές.



Σχήμα 9. Τα διαφορετικά απλά γραφήματα με 3 κορυφές

Ασκηση 4.1. Πόσα διαφορετικά γραφήματα υπάρχουν με n κορυφές; Πόσα με n κορυφές και k ακμές; $(0 \le k \le n)$

Αν δυο κορυφές u και v ενώνονται στο G (δηλ. αν $\{u, v\} \in E$) θα γράφουμε συνήθως $u \sim v$ ή και $u \overset{G}{\sim} v$ αν θέλουμε να τονίσουμε για ποιο γράφημα μιλάμε. Ομοίως θα γράφουμε $e_1 \sim e_2$ για δύο ακμές e_1 και e_2 αν αυτές μοιράζονται μια από τις δυό τους κορυφές.

Ορισμος 4.2. (Γειτονικές κορυφές και ακμές, γειτονιές) Δύο κορυφές που συνδέονται με ακμή (αντ. ακμές που έχουν μια κοινή κορυφή) θα λέγονται *γειτονικές* ή *γείτονες* και το σύνολο των γειτόνων μιας κορυφής (αντ. ακμής) u θα λέγεται η *γειτονιά* του u και θα συμβολίζεται συνήθως με $N(u)$.

Παραδειγμα 4.3. Στο γράφημα του Σχήματος 8 έχουμε

$$N(1) = \{2,4\},\ N(2) = \{1,3\},\ N(3) = \{2,5\},\ N(4) = \{1,6\},\ N(5) = \{3,6\},\ N(6) = \{3,5\}.$$

Η γειτονιά της ακμής $\{3,6\}$ είναι το σύνολο ακμών

$$N((3,6)) = \{\{2,3\},\{3,5\},\{4,6\},\{4,5\},\{3,6\}\}.$$

Παρατηρείστε ότι μια ακμή είναι πάντα γείτονας του εαυτού της σύμφωνα με τον ορισμό που έχουμε δώσει, ενώ μια κορυφή ποτέ δε γειτονεύει με τον εαυτό της σε ένα απλό γράφημα (αυτό αλλάζει αργότερα όταν θα εξετάζουμε γενικότερα γραφήματα).

Ορισμος 4.3. (Βαθμός κορυφής, ακμής. Κανονικό γράφημα.) *Βαθμός* μιας κορυφής $u \in V$ (θα συμβολίζεται με $\deg u$) λέγεται το πλήθος των ακμών που έχουν την u ως άκρο τους. Δηλ. $\deg u = |N(u)|$. Ομοίως ορίζεται ο βαθμός μιας ακμής.

Κανονικό ονομάζεται ένα γράφημα όταν όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό. Αν ο κοινός αυτός βαθμός είναι r τότε λέγεται r-*κανονικό*.

Παραδειγμα 4.4. Στο Σχήμα 8 όλες οι κορυφές έχουν βαθμό 2, άρα είναι το γράφημα αυτό 2-κανονικό. Στο Σχήμα 7 ο βαθμός των κορυφών Ηράκλειο και Ρέθυμνο είναι 3 και των άλλων κορυφών είναι 2.

Ασκηση 4.2. Γίνεται σε ένα γράφημα όλες οι κορυφές να έχουν διαφορετικό βαθμό;

Ασκηση 4.3. Πόσες ακμές έχει ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές; Υπάρχει 3-κανονικό γράφημα με 7 κορυφές;

Ασκηση 4.4. Δείξτε ότι σε ένα γράφημα $G = (V,E)$ το άθροισμα των βαθμών όλων των κορυφών ισούται με $2|E|$.

Ασκηση 4.5. Δείξτε ότι σε οποιοδήποτε γράφημα το πλήθος κορυφών με περιττό βαθμό είναι άρτιο.

§2. Μερικά ειδικά γραφήματα

Το κενό γράφημα με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών $[n] = \{1,\ldots,n\}$ και σύνολο ακμών $E = \emptyset$. Το συμβολίζουμε με E_n.

Το πλήρες γράφημα με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών $[n]$ και όλες τις δυνατές ακμές, δηλ. $E =$ όλα τα διμελή υποσύνολα του $[n]$. Συμβολίζεται με K_n και έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές. Το αριστερό γράφημα στο Σχ. 10 είναι το K_5.

Το πλήρες διμερές γράφημα με m και n κορυφές έχει σύνολο κορυφών το $V = A \cup B$, με $A = \{a_1,\ldots,a_m\}$, $B = \{b_1,\ldots,b_n\}$, και $a_i \sim b_j$, για κάθε $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Συμβολίζεται με $K_{m,n}$ και έχει $m \cdot n$ ακμές.

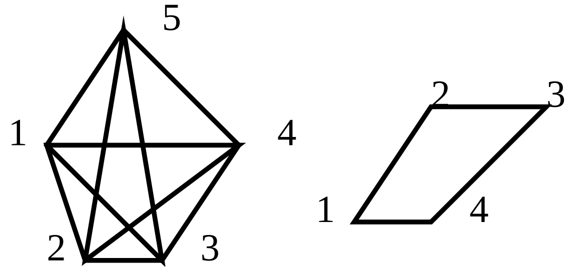
Ο κύκλος με n κορυφές έχει σύνολο κορυφών το $[n]$ και $i \sim j$ αν και μόνο αν $|i-j| = 1$ ή $\{i,j\} = \{1,n\}$. Συμβολίζεται με C_n και έχει n ακμές.

§3. Υπογραφήματα και ισομορφία

3.1 Υπογραφήματα

Ορισμος 4.4. (Υπογράφημα) Ενα γράφημα $G' = (V', E')$ θα λέγεται *υπογράφημα* ενός γραφήματος $G = (V,E)$ αν $V' \subseteq V$ και $E' \subseteq E$.

Με άλλα λόγια, το G' είναι υπογράφημα του G αν μπορούμε να το πάρουμε από το G αφαιρώντας κάποιες κορυφές και κάποιες ακμές. Εννοείται εδώ ότι αν αποφασίσουμε να αφαιρέσουμε από το G μια κορυφή u αυτόματα διαγράφουμε και όλες τις ακμές που περιέχουν την u, μια και δεν έχουν πλέον 'νόημα'.



Σχήμα 10. Το δεξί γράφημα είναι υπογράφημα του αριστερού

Παραδειγμα 4.5. Στο Σχήμα 10 το γράφημα δεξιά είναι υπογράφημα του γραφήματος αριστερά. Παρατηρείστε ότι το γράφημα δεξιά είναι ζωγραφισμένο 'διαφορετικά' απ΄ ότι το αντίστοιχό του αριστερά. Ας τονίσουμε εδώ ότι αυτό δεν έχει σημασία, μια και ένα γράφημα μπορεί να ζωγραφιστεί με πολλούς τρόπους στο επίπεδο. Αυτό που έχει σημασία είναι το ποια συνδεσμολογία (ποιες ακμές) υποδηλώνονται από το σχήμα. Από κει και πέρα είμαστε ελεύθεροι να επιλέξουμε να παραστήσουμε το γράφημα ως σχήμα με όποιο τρόπο προσφέρεται για τους σκοπούς μας.

Ορισμος 4.5. (Πλήρες γράφημα) Το *πλήρες γράφημα* K_n με n κορυφές είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών $V = \{1, \ldots, n\}$ και σύνολο ακμών το σύνολο όλων των διμελών υποσυνόλων του V. Υπάρχουν δηλ. όλες οι δυνατές ακμές. (Στο Σχήμα 10, αριστερά, φαίνεται το K_5.)

Ασκηση 4.6. Πόσες ακμές έχει το πλήρες γράφημα K_n; Πόσα υπογραφήματα έχει το K_n; (Η απάντηση στο τελευταίο είναι ένα άθροισμα που μάλλον δεν απλοποιείται.)

Μια ειδική κατηγορία υπογραφημάτων είναι τα λεγόμενα *επαγόμενα* υπογραφήματα, τα οποία προκύπτουν από ένα γράφημα διαγράφοντας απλώς ορισμένες κορυφές και χωρίς περιττές διαγραφές ακμών.

Ορισμος 4.6. Αν $V' \subseteq V$, τότε το υπογράφημα του $G = (V, E)$ που *επάγεται* από το σύνολο κορυφών V' είναι το γράφημα $G' = (V', E')$, με

$$E' = \{e = \{u, v\} \in E : \quad u, v \in V'\}.$$

Στο Σχήμα 10 το γράφημα δεξιά δεν είναι επαγόμενο υπογράφημα αφού λείπουν οι ακμές $\{2, 4\}$ και $\{1, 3\}$. Αν τις προσθέσουμε σε αυτό τότε γίνεται το υπογράφημα του αριστερού γραφήματος που επάγεται από το σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4\}$.

Ασκηση 4.7. Πόσα επαγόμενα υπογραφήματα έχει ένα γράφημα με n κορυφές;

3.2 Ισομορφία γραφημάτων

Ορισμος 4.7. Δύο γραφήματα $G = (V, E)$ και $G' = (V', E')$ λέγονται *ισόμορφα* αν υπάρχει μια 1-1 και επί $f : V \to V'$ τέτοια ώστε να έχουμε

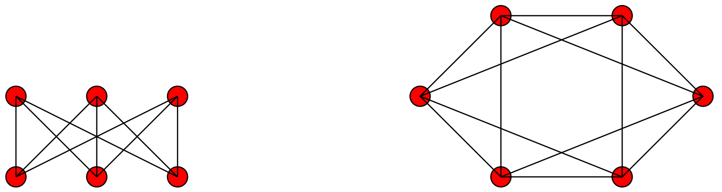
$$\forall u, v \in V : \left(u \overset{G}{\sim} v \Longleftrightarrow f(u) \overset{G'}{\sim} f(v) \right). \tag{33}$$

Με άλλα λόγια, δυο γραφήματα λέγονται ισόμορφα αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις κορυφές τους 1-1 με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρείται η συνδεσμολογία.

Ασκηση 4.8. Δείξτε ότι η ισομορφία γραφημάτων είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Δηλ. αν F, G και H είναι απλά γραφήματα τότε:

- *Ανακλαστική ιδιότητα:* F είναι ισόμορφο με το F,
- *Συμμετρική ιδιότητα:* Αν το F είναι ισόμορφο με το G τότε και το G είναι ισόμορφο με το F, και
- *Μεταβατική ιδιότητα:* Αν F ισόμορφο με το G και G ισόμορφο με το H τότε και το F είναι ισόμορφο με το H.

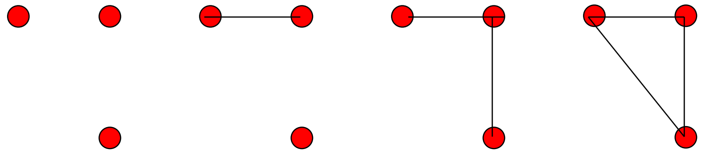
Ασκηση 4.9. Δείξτε ότι τα δύο γραφήματα του Σχήματος 11 δεν είναι ισόμορφα.



Σχήμα 11. Δείξτε ότι τα δύο γραφήματα δεν είναι ισόμορφα

Παραδειγμα 4.6. Το γράφημα του Σχήματος 13 και το γράφημα του Σχήματος 22 είναι ισόμορφα, και μάλιστα με $f(i) = i$.

Παραδειγμα 4.7. Στο Σχήμα 12 δείχνουμε όλα τα μη-ισόμορφα μεταξύ τους γραφήματα με 3 κορυφές. Κάθε άλλο δηλ. γράφημα με 3 κορυφές (φαίνονται στο Σχήμα 9) είναι ισόμορφο ακριβώς με ένα από τα 4 αυτά γραφήματα. Παρατηρείστε ότι το πλήθος τους είναι κατά πολύ μικρότερο του πλήθος όλων των γραφημάτων με 3 κορυφές, ισομόρφων μεταξύ τους ή όχι.



Σχήμα 12. Τα μη-ισόμορφα γραφήματα με 3 κορυφές

Η απεικόνιση f (που ονομάζεται *ισομορφισμός*) δεν είναι μοναδικά καθορισμένη και ούτε είναι συνήθως προφανής η ύπαρξή της. Π.χ. η απεικόνιση f από το γράφημα του Σχήματος 13 στο γράφημα του Σχήματος 22 που έχει

$$f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 6, f(4) = 7, f(5) = 4, f(6) = 3, f(7) = 2,$$

είναι κι αυτή ένας ισομορφισμός από το πρώτο γράφημα στο δεύτερο.

Οσον αφορά τη θεωρία γραφημάτων, δύο ισόμορφα γραφήματα συνήθως δεν τα ξεχωρίζουμε μεταξύ τους. Π.χ. θα θεωρούμε ένα γράφημα G υπογράφημα ενός γραφήματος G' αν το G είναι ισόμορφο με κάποιο υπογράφημα του G'. Ετσι το γράφημα

$$\alpha --- \beta --- \gamma$$

(τρείς κορυφές και δύο ακμές) θεωρείται υπογράφημα του γραφήματος του Σχήματος 22 παρά το ότι το σύνολο κορυφών του δεν είναι καν υποσύνολο του συνόλου των κορυφών του Σχήματος 22.

Ασκηση 4.10. Θεωρείστε το γράφημα W που έχει ως κορυφές τις ημέρες της εβδομάδας, και όπου δύο μέρες συνδυέονται μεταξύ τους με ακμή αν και μόνο αν η μια είναι η επόμενη της άλλης. Επίσης το γράφημα S με σύνολο κορυφών το $\{0, 1, \ldots, 6\}$ όπου δύο κορυφές συνδέονται μεταξύ τους αν και μόνο αν η διαφορά τους mod 7 ισούται με 3. Δείξτε ότι τα γραφήματα W και S είναι ισόμορφα.

Ασκηση 4.11. Θεωρείστε το γράφημα Q που έχει ως κορυφές του τις κορυφές ενός τρισδιάστατου κύβου, και το γράφημα B που έχει ως κορυφές όλες τα στοιχεία του συνόλου $\{0, 1\}^3$, όλες δηλ. τις τριάδες από 0 ή 1. Δύο τριάδες συνδέονται στο B αν και μόνο αν διαφέρουν σε μια ακριβώς συντεταγμένη. Δείξτε ότι τα Q και B είναι ισόμορφα.

Το να αποφασίσει κανείς ότι δύο γραφήματα είναι ισόμορφα απαιτεί συνήθως αρκετή δουλειά, μια και, κατ΄ αρχήν τουλάχιστον, πρέπει να εξετάσει κάθε μια από τις δυνατές συναρτήσεις που απεικονίζουν τις κορυφές του ενός γραφήματος στις κορυφές ενός άλλου και να ελέγξει αν είναι ισομορφισμός. Όμως πολλές φορές μπορεί κανείς να αποφανθεί ότι δύο γραφήματα *δεν* είναι ισόμορφα χρησιμοποιώντας κάποια απλά κριτήρια, όπως αυτά της Άσκησης 4.12.

Ασκηση 4.12. Έστω G και H δύο απλά γραφήματα. Δείξτε ότι σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις αυτά δεν είναι ισόμορφα.

(1) $|V(G)| \neq |V(H)|$

(2) $|E(G)| \neq |E(H)|$
(3) Ο μέγιστος βαθμός κορυφής του G είναι διαφορετικός από το μέγιστο βαθμό κορυφής του H.
(4) κάθε κορυφή του G συνδέεται με κάθε άλλη με κάποιο μονοπάτι, ενώ υπάρχουν δύο κορυφές του H που δε συνδέονται μεταξύ τους με μονοπάτι.

Δείξτε επίσης ότι υπάρχουν δύο μη ισόμορφα γραφήματα G και H στα οποία δεν ισχύει κανένα από τα παραπάνω κριτήρια μη ισομορφίας.

Με άλλα λόγια δύο γραφήματα είναι ισόμορφα, αν και μόνο αν, μπορεί κανείς να πάρει από το ένα το άλλο, απλά με μια μετονομασία των κορυφών τους.

Ασκηση 4.13. Βρείτε όλα τα μη-ισόμορφα γραφήματα με τέσσερεις κορυφές.

§4. Συνεκτικότητα και αποστάσεις πάνω σε γραφήματα

Ορισμος 4.8. (Μονοπάτι και μήκος του) *Μονοπάτι* στο G θα λέγεται μια ακολουθία κορυφών

$$u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n,$$

όπου η ακμή e_j συνδέει τις κορυφές u_j και u_{j+1}, $j = 1, \ldots, n-1$. Το πλήθος των ακμών $(n-1)$ που εμφανίζονται σε ένα μονοπάτι θα λέγεται *μήκος* του μονοπατιού.

Παραδειγμα 4.8. Ενα μονοπάτι σε ένα απλό γράφημα μπορούμε να το περιγράψουμε αναφέροντας μόνο τις κορυφές u_j αφού οι ακμές εννοούνται. Π.χ. στο γράφημα του σχήματος 8 το $1 \to 2 \to 3 \to 6$ είναι ένα μονοπάτι. Στο γράφημα του Σχήματος 7 το Ηράκλειο – Ανώγεια – Ρέθυμνο είναι ένα μονοπάτι μήκους δύο.

Ασκηση 4.14. Στο γράφημα B της Άσκησης 4.11 βρείτε ένα μονοπάτι που να συνδέει τις κορυφές $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.

Ορισμος 4.9. (Κύκλωμα, κύκλος) *Κύκλωμα* λέγεται ένα μονοπάτι όπου η τελευταία κορυφή είναι ίδια με την πρώτη. Οταν θέλουμε να μιλήσουμε για κυκλώματα χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές θα τα αποκαλούμε *κύκλους*.

Παραδειγμα 4.9. Στο Σχήμα 8 το $1 \to 2 \to 3 \to 6 \to 4 \to 1$ είναι ένα κύκλωμα που είναι ταυτόχρονα και κύκλος αφού καμιά από τις ακμές που συμμετέχουν σε αυτό δεν επαναλαμβάνεται. Στο Σχήμα 7 το Ηράκλειο $\to$ Ανώγεια $\to$ Ηράκλειο $\to$ Ρέθυμνο $\to$ Ανώγεια $\to$ Ηράκλειο είναι επίσης ένα κύκλωμα μήκους 5, αλλά όχι κύκλος αφού η ακμή Ηράκλειο – Ανώγεια χρησιμοποιείται 3 φορές.

Ορισμος 4.10. (Προσιτή κορυφή) Θα λέμε ότι η κορυφή v είναι *προσιτή* από την κορυφή u αν υπάρχει μονοπάτι που να ξεκινάει από την u και να καταλήγει στην v.

Παραδειγμα 4.10. Στα γραφήματα των Σχημάτων 7 και 8 όλες οι κορυφές είναι προσιτές από όλες.

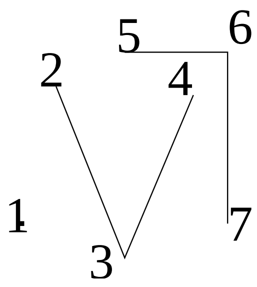
Είναι εύκολο να δειχτεί ότι η σχέση 'v προσιτό από u' είναι μία σχέση ισοδυναμίας πάνω στο σύνολο V των κορυφών. Άρα το σύνολο V διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας που τις ονομάζουμε *συνεκτικές συνιστώσες*. Με άλλα λόγια δύο κορυφές ενός γραφήματος είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα αν και μόνο αν υπάρχει μονοπάτι που τις ενώνει.

Παραδειγμα 4.11. Στο σχήμα 13 δείχνουμε ένα γράφημα του οποίου οι συνεκτικές συνιστώσες είναι οι $\{1\}$, $\{2,3,4\}$ και $\{5,6,7\}$.

Ορισμος 4.11. (Συνεκτικό γράφημα) Ενα γράφημα ονομάζεται *συνεκτικό* αν έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα, αν δηλ. κάθε κορυφή συνδέεται με κάθε άλλη μέσω ενός μονοπατιού.

Παραδειγμα 4.12. Τα γραφήματα των Σχημάτων 7 και 8 είναι συνεκτικά ενώ αυτό του Σχήματος 13 δεν είναι.

Ασκηση 4.15. Δείξτε ότι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και λιγότερες από n ακμές έχει αναγκαστικά μια κορυφή βαθμού 1.



Σχήμα 13. Ενα γράφημα με 3 συνεκτικές συνιστώσες

Άσκηση 4.16. Δείξτε ότι αν έχουμε ένα συνεκτικό γράφημα που περιέχει ένα κύκλο, και διαγράψουμε μια ακμή αυτού του κύκλου, το γράφημα παραμένει συνεκτικό. Κάτι τέτοιο δε συμβαίνει, εν γένει, αν το γράφημα δεν έχει κύκλο (δώστε παράδειγμα).

Θα ορίσουμε τώρα μια συνάρτηση $d : V \times V \to \mathbb{R}$ που θα έχει την έννοια της απόστασης. Η ποσότητα δηλ. $d(u,v)$ θα 'μετράει' το πόσο κοντά είναι οι δύο κορυφές u και v του γραφήματος.

Ορισμος 4.12. (Απόσταση κορυφών) Αν η κορυφή u δεν είναι προσιτή από την κορυφή v τότε ορίζουμε $d(u,v) = d(v,u) = +\infty$, η απόσταση δηλ. ανάμεσα σε δύο κορυφές u και v που δε συνδέονται με κανένα μονοπάτι θεωρείται άπειρη. Αλλιώς ορίζουμε $d(u,v)$ να είναι το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού που συνδέει τις u και v, δηλ. του μονοπατιού εκείνου με τις λιγότερες ακμές.

Για παράδειγμα στο Σχήμα 13 $d(2,4) = d(5,7) = 2$, $d(3,2) = 1$, και $d(1,x) = +\infty$, για κάθε $x \in \{2,\ldots,7\}$. Επίσης στο Σχήμα 10, αριστερά, $d(u,v) = 1$, για κάθε $u,v \in \{1,\ldots,5\}$, $u \neq v$.

Οπως κάθε φυσιολογική έννοια απόστασης στα Μαθηματικά, η συνάρτηση απόστασης που μόλις ορίσαμε ικανοποιεί τη λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα*:

$$\forall u,v,w \in V : \quad d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v). \tag{34}$$

Για να δεί κανείς γιατί ισχύει αυτό, παρατηρείστε ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε μονοπάτι από το u στο w και το συνεχίσουμε με ένα οποιοδήποτε μονοπάτι από το w στο v, τότε παίρνουμε ένα μονοπάτι από το u στο v. Οι λεπτομέρειες της απόδειξης αφήνονται στον αναγνώστη.

Άσκηση 4.17. Αποδείξτε την (34) με όλες τις λεπτομέρειες της απόδειξης.

Εχοντας ορίσει μια έννοια απόστασης, μπορούμε τώρα να μιλήσουμε για τη *διάμετρο* ενός γραφήματος $G = (V,E)$, που τη συμβολίζουμε με $\operatorname{diam} G$.

Ορισμος 4.13. (Διάμετρος) Η *διάμετρος* ενός γραφήματος G ορίζεται να είναι η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δυό κορυφές του G:

$$\operatorname{diam} G = \max_{u,v \in V} d(u,v). \tag{35}$$

Είναι φανερό ότι ένα γράφημα G είναι συνεκτικό αν και μόνο αν διαμ $G < \infty$. Για παράδειγμα, το αριστερό γράφημα του Σχήματος 4 έχει διάμετρο 1 ενώ το δεξιό έχει διάμετρο 2.

Άσκηση 4.18. Ποια η διάμετρος του γραφήματος B της Άσκησης 4.11;

Άσκηση 4.19. Δείξτε ότι η διάμετρος ενός συνεκτικού γραφήματος με n κορυφές είναι το πολύ $n-1$. Περιγράψτε, με πλήρη απόδειξη, όλα τα γραφήματα με n κορυφές και διάμετρο $n-1$. Επίσης όλα τα γραφήματα με διάμετρο $n-2$ και όλα τα γραφήματα με διάμετρο 1.

Άσκηση 4.20. Όλοι οι κάτοικοι μιας χώρας, της οποίας το αλφάβητο έχει 10 γράμματα, έχουν ως όνομα μια λέξη μήκους ακριβώς 7. Αν G είναι το γράφημα με κορυφές τους κατοίκους, και δύο κάτοικοι συνδέονται με ακμή αν και μόνο αν τα ονόματά τους διαφέρουν σε ακριβώς μια θέση, ποια είναι η μέγιστη τιμή της διαμέτρου του G;

Άσκηση 4.21. Ένα γράφημα έχει ως κορυφές τα 64 τετραγωνάκια μιας συνηθισμένης σκακιέρας, και δύο τετραγωνάκια συνδέονται μεταξύ τους με ακμή αν και μόνο αν έχουν μια πλευρά κοινή. Ποια η διάμετρος του γραφήματος;

Άσκηση 4.22. Δείξτε ότι σε κάθε συνεκτικό γράφημα υπάρχει μια κορυφή τέτοια ώστε αν διαγράψουμε αυτή την κορυφή και τις ακμές που καταλήγουν σε αυτή το εναπομένον γράφημα παραμένει συνεκτικό.

Άσκηση 4.23. Αν σε ένα γράφημα υπάρχουν ακριβώς δύο κορυφές με περιττό βαθμό, αυτές πρέπει αναγκαστικά να συνδέονται με κάποιο μονοπάτι. (Δείτε την Άσκηση 4.5.)

Άσκηση 4.24. Ο απλούστερος ίσως τρόπος, αν και όχι πάντα ο πιο αποτελεσματικός από άποψη υπολογιστική, για να παραστήσει κανείς ένα απλό γράφημα είναι με το λεγόμενο *πίνακα συνδεσμολογίας*. Εστω $G=(V,E)$ ένα απλό γράφημα με $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$. Ο πίνακας συνδεσμολογίας A είναι τότε ένας $n\times n$ πίνακας με

$$A_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{αν } v_i\sim v_j, \\ 0 & \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

Βάζουμε δηλ. 1 στη θέση i,j αν και μόνο αν η i-οστή και η j-οστή κορυφή συνδέονται με κάποια ακμή. Από τον ορισμό προκύπτει αμέσως ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός και έχει 0 παντού πάνω στη διαγώνιο.

Με επαγωγή ως πρός k δείξετε ότι Ο πίνακας A^k, $k\ge 0$, (γινόμενο του πίνακα A με τον εαυτό του k φορές) έχει στη θέση i,j τον αριθμό s αν και μόνο αν ο αριθμός των μονοπατιών μήκους k από την κορυφή i στην j είναι ακριβώς s. (*Παρατήρηση:* Ενα μονοπάτι μήκους k από το u στο v μπορεί να επαναλαμβάνει ακμές. Για παράδειγμα, αν $u\sim u_1\sim v$, τότε το μονοπάτι $u\to u_1\to u\to u_1\to v$ είναι ένα μονοπάτι από το u στο v μήκους 4.)

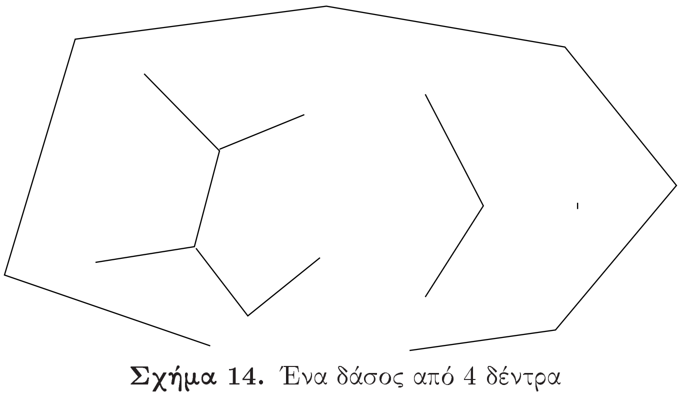
Άσκηση 4.25. Αν G είναι ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές, μέγιστο βαθμό d τότε

$$n\le 1+d\frac{(d-1)^{\operatorname{diam} G}-1}{d-2}.$$

§5. Δέντρα και δάση

Τα δέντρα είναι, κατά κάποιο τρόπο, τα συνεκτικά γραφήματα χωρίς περιττές ακμές.

Ορισμός 4.14. (Δέντρα, δάση) Ενα συνεκτικό γράφημα που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται *δέντρο*. Ενα γράφημα, συνεκτικό ή μη, που δεν περιέχει κύκλους ονομάζεται *δάσος*.

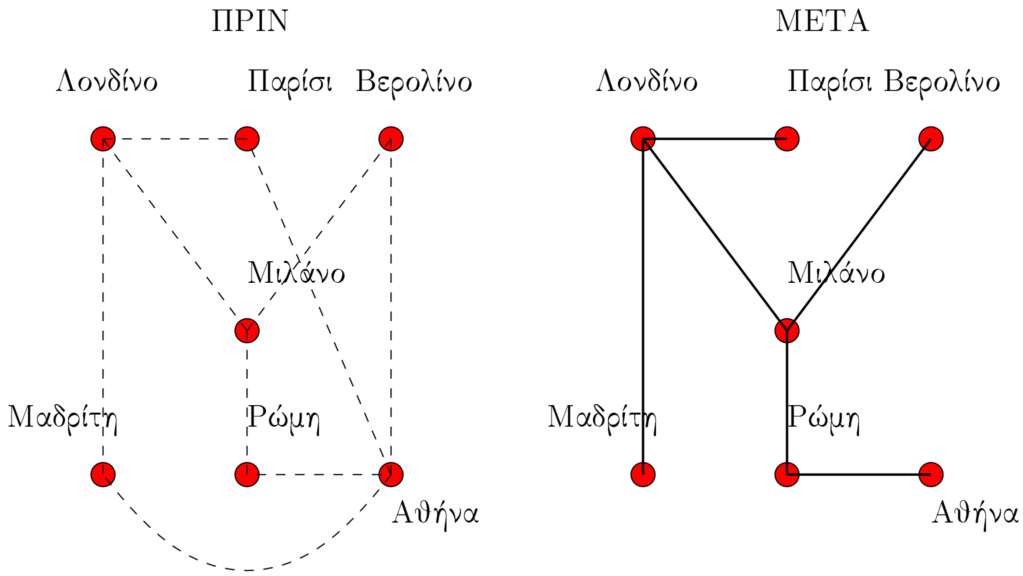


Σχήμα 14. Ένα δάσος από 4 δέντρα

Η δεύτερη ονομασία είναι συμβατή με την πρώτη αφού κάθε τέτοιο γράφημα μπορεί να το δει κανείς σαν το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του. Αλλά κάθε τέτοια συνεκτική συνιστώσα εξακολουθεί να μην περιέχει κύκλους (αφού είναι υπογράφημα του αρχικού), άρα είναι ένα δέντρο, δηλ. κάθε γράφημα χωρίς κύκλους είναι μια 'ξένη' (δηλ. χωρίς μεταξύ τους συνδέσεις) ένωση από δέντρα. Με άλλα λόγια, ένα γράφημα είναι δάσος αν και μόνο είναι μια ένωση από, ασύνδετα μεταξύ τους, δέντρα.

Τα δέντρα έχουν ενδιαφέρον επειδή, κατά κάποια έννοια, είναι τα 'ελάχιστα' συνεκτικά γραφήματα: κάθε συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει ένα υπογράφημα με τις ίδιες κορυφές, συνεκτικό και χωρίς κύκλους (άρα δέντρο).

Παραδειγμα 4.13. Ας πούμε ότι έχουμε ένα γράφημα (Σχήμα 15) με τα δρομολόγια που εκτελεί μια αεροπορική εταιρεία ανάμεσα σε N πόλεις. Κάποιες πόλεις συνδέονται μεταξύ τους απ΄ ευθείας, κάποιες με μία ενδιάμεση στάση, κ.λ.π.



Σχήμα 15. Τα δρομολόγια μιας αεροπορικής εταιρείας, πριν και μετά τις περικοπές

Σε κάποια άσχημη οικονομική συγκυρία η εταιρεία αποφασίζει πως δεν είναι πλέον σε θέση να εκτελεί τόσο πολλά δρομολόγια και ότι πρέπει να καταργήσει όσο πιο πολλά μπορεί. Η εταιρεία δε θα εισαγάγει νέα δρομολόγια, απλώς θα καταργήσει μερικά. Για λόγους πολιτικής όμως η εταιρεία δε μπορεί να σταματήσει να εξυπηρετεί καμία από τις N πόλεις που μέχρι τότε εξυπηρετούσε. Επίσης, προσεγγιστικά, όλες οι πτήσεις κοστίζουν το ίδιο στην εταιρεία, ανεξάρτητα από την απόσταση.

Δείχνουμε στο Σχήμα 15 τη λύση που επέλεξε τελικά η εταιρεία. Παρατηρείστε ότι:

- Για τις 7 πόλεις χρησιμοποιούνται πλέον 6 πτήσεις (ακμές στο γράφημα).
- Για κάθε ζεύγος πόλεων εξακολουθεί να είναι δυνατό να πάει κανείς από τη μια στην άλλη, με κατάλληλες ενδιάμεσες στάσεις, και
- Για κάθε ζεύγος πόλεων υπάρχει μόνο ένας τρόπος να ταξιδέψει κανείς από τη μια στην άλλη (χωρίς, εννοείται, να πετάει μπρος πίσω).

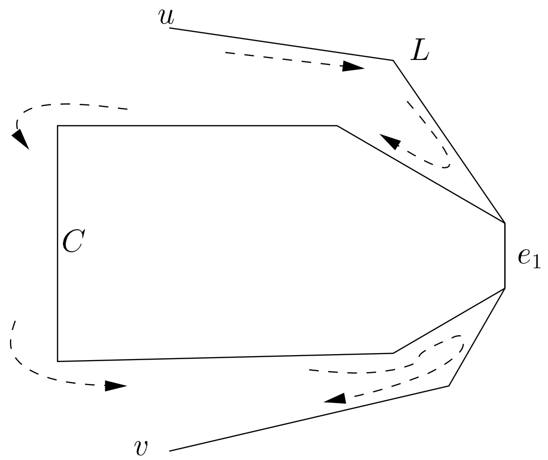
Ορισμος 4.15. (Δέντρα και δάση που παράγουν) Ενα δέντρο T, υπογράφημα του G και με τις ίδιες κορυφές, λέγεται *δέντρο που παράγει το* G (spanning tree). Αν το T δεν είναι δέντρο αλλά είναι δάσος, και κάθε συνεκτική συνιστώσα του G παράγεται από κάποιο δέντρο του T, τότε το T λέγεται *δάσος που παράγει*.

Θεωρημα 4.1. *Κάθε συνεκτικό γράφημα* G *περιέχει ένα δέντρο που το παράγει.*

Αποδειξη. Εστω ότι το συνεκτικό γράφημα $G = (V, E)$ περιέχει κάποιο κύκλο

$$C:\ u_1 \xrightarrow{e_1} u_2 \xrightarrow{e_2} \cdots \xrightarrow{e_{n-1}} u_n = u_1.$$

Ας επιλέξουμε τυχαία μια από τις ακμές του κύκλου, π.χ. την e_1, και ας τη σβήσουμε από το γράφημα. Ισχυριζόμαστε ότι το γράφημα παραμένει συνεκτικό. (Δείτε και την Άσκηση 4.16.) Πραγματικά, ας υποθέσουμε πως η ακμή e_1 που σβήσαμε συμμετείχε στο γράφημα G σε κάποιο μονοπάτι L που συνέδεε δύο κορυφές v και u, όπως φαίνεται στο Σχ. 16.



Σχήμα 16. Διαγραφή της e_1 διατηρεί τη συνεκτικότητα

Είναι φανερό ότι, παρά το ότι τώρα πια η ακμή e_1 έχει διαγραφεί, μπορούμε και πάλι να πάμε από το v στο u διανύοντας το μονοπάτι όπως και πριν αλλά όταν θα χρειαστεί να περάσουμε την e_1 μπορούμε να την αντικαταστήσουμε διαγράφοντας το υπόλοιπο του κύκλου C.

Την πράξη αυτή, που μόλις δείξαμε ότι διατηρεί τη συνεκτικότητα, την ονομάζουμε 'σπάσιμου του κύκλου C στην ακμή e_1'. Επαναλαμβάνοντας αυτή την πράξη όσο εξακολουθούν να υπάρχουν κύκλοι στο γράφημα, και αφού μετά από κάθε τέτοια πράξη οι ακμές λιγοστεύουν κατά μία, είναι φανερό (εφόσον μιλάμε για πεπερασμένα γραφήματα) ότι θα φτάσουμε σε ένα υπογράφημα του G με τις ίδιες κορυφές (αυτές δεν αλλάζουν με την πράξη της διαγραφής της ακμής), συνεκτικό και χωρίς πλέον κύκλους, δηλ. σε ένα δέντρο.

Αν το γράφημα G δεν είναι συνεκτικό εφαρμόζουμε το πρώτο κομμάτι (που μόλις αποδείξαμε) του Θεωρήματος 4.1 σε κάθε συνεκτική του συνιστώσα και παίρνουμε έτσι από ένα δένδρο για κάθε συνιστώσα, που την παράγει. $\square$

Το επόμενο θεώρημα μας λέει ότι, αντίθετα με τα γενικά γραφήματα, το πλήθος των ακμών σε ένα δέντρο είναι πλήρως καθορισμένο από το πλήθος των κορυφών του.

Θεωρημα 4.2. *Κάθε δέντρο με n κορυφές έχει ακριβώς $n-1$ ακμές.*

Αποδειξη. Με επαγωγή ως πρός n. Για $n = 1$ είναι προφανές. Εστω G δέντρο με n κορυφές.

Ισχυρισμός: Υπάρχει κορυφή του G με βαθμό 1.
Εστω ότι όλες οι κορυφές έχουν βαθμό ≥ 2 (αφού καμία δεν έχει βαθμό 0 λόγω συνεκτικότητας). Μπορούμε τότε να βρούμε μονοπάτια οσουδήποτε μεγάλου μήκους στο G στα οποία ποτέ δεν εμφανίζεται κάτι της μορφής

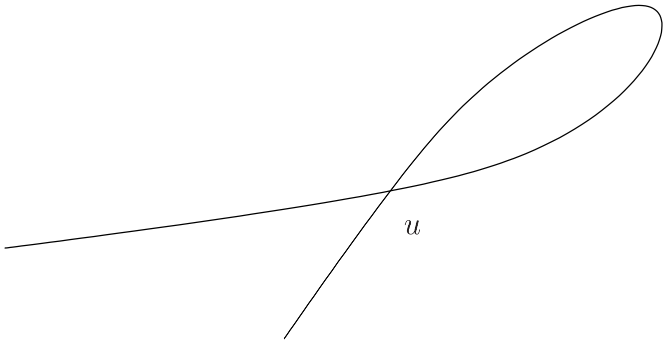
$$\cdots u \xrightarrow{e} v \xrightarrow{e} u \cdots$$

αφού πάντα μπορούμε να φύγουμε από κάποια κορυφή χρησιμοποιώντας κάποια άλλη ακμή από αυτή που χρησιμοποιήσαμε για να μπούμε, και μπορούμε να κινούμαστε έτσι επ' άπειρον. Αν το μονοπάτι έχει αρκετά μεγάλο μήκος θα υπάρχει σίγουρα κάποια κορυφή που εμφανίζεται εκεί πάνω από μία φορά. Επιλέγουμε μια τέτοια κορυφή u που έχει επιπλέον την ιδιότητα ότι η απόσταση ανάμεσα στις δύο εμφανίσεις της είναι ελάχιστη.

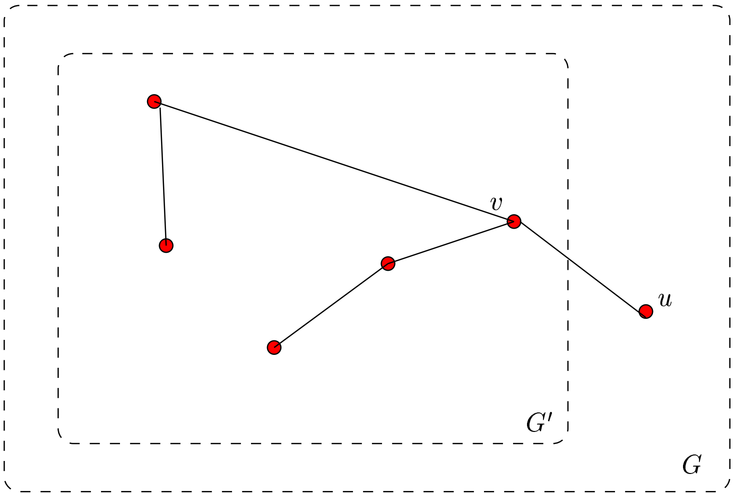
Η κατάσταση απεικονίζεται στο Σχήμα 17. Η επιπλέον ιδιότητα αυτή της u συνεπάγεται ότι στο κύκλωμα που απεικονίζεται στο σχήμα πάνω από το u δεν υπάρχει άλλη επαναλαμβανόμενη κορυφή ή ακμή, άρα αυτό το κύκλωμα είναι κύκλος, πράγμα που απαγορεύεται σε δέντρο, και έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό. [1]

Εστω λοιπόν $\deg u = 1$ και ορίζουμε το υπογράφημα G' του G που επάγεται από τις υπόλοιπες κορυφές $V \setminus \{u\}$, σβήνουμε δηλ. την u και τη μοναδική ακμή που καταλήγει στην u. (Δείτε Σχήμα 18.)

[1] Δείτε και την Άσκηση 4.15



Σχήμα 17. Ενα μονοπάτι με μια επαναλαμβανόμενη κορυφή u



Σχήμα 18. Σβήνουμε την κορυφή u και τη μοναδική ακμή που καταλήγει σε αυτή για να πάρουμε το υπογράφημα G' από το G.

Ως υπογράφημα, το G' προφανώς δεν έχει κύκλους και εξακολουθεί να είναι συνεκτικό αφού είναι φανερό ότι, επειδή η u έχει βαθμό 1, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη σύνδεση δύο άλλων κορυφών. Αλλά το G' έχει $n-1$ κορυφές και από την επαγωγική μας υπόθεση έχει συνεπώς $n-2$ ακμές. Αρα το G έχει $n-1$ (αυτές του G' συν αυτή που καταλήγει στην u). □

Ασκηση 4.26. Αποδείξτε ότι ένα δάσος με n κορυφές και m συνεκτικές συνιστώσες (m δέντρα δηλαδή) έχει ακριβώς $n-m$ ακμές.

Ασκηση 4.27. Δείξτε ότι κάθε ζεύγος κορυφών ενός δέντρου ενώνονται μεταξύ τους με ένα μοναδικό μονοπάτι το οποίο δεν περνά δύο φορές από την ίδια ακμή. Δείξτε επίσης ότι αν ισχύει αυτό για ένα γράφημα G τότε αυτό είναι αναγκαστικά δέντρο.

Ασκηση 4.28. Δείξτε ότι αν προσθέσουμε μια ακμή σε ένα δέντρο τότε δημιουργούμε ακριβώς ένα κύκλο.

Εύκολα έχουμε τώρα:

Πορισμα 4.1. Αν ένα συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές τότε είναι δέντρο.

Αποδειξη. Το G περιέχει κάποιο δέντρο που παράγει, έστω T, το οποίο έχει $n-1$ ακμές σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2. Αρα $G = T$. □

Ασκηση 4.29. Ένα γράφημα λέγεται *διπλά συνεκτικό* αν παραμένει συνεκτικό ακόμη κι αν σβήσουμε μια οποιαδήποτε ακμή του. Πόσες, το λιγότερο, ακμές πρέπει να έχει ένα τέτοιο γράφημα με n κορυφές; Βρείτε ένα γράφημα που να 'πιάνει' τον ελάχιστο αυτό αριθμό ακμών.

Άσκηση 4.30. Δείξτε ότι ένα γράφημα G είναι διπλά συνεκτικό (δείτε Άσκηση 4.29) αν και μόνο αν δεν έχει κορυφές με βαθμό 0 (απομονωμένες κορυφές όπως λέμε) και κάθε ζεύγος ακμών βρίσκεται πάνω σ᾽ ένα κύκλο.

§6. Γενικεύσεις της έννοιας του γραφήματος

Ορισμός 4.16. (Κατευθυνόμενα γραφήματα) *Κατευθυνόμενα γραφήματα* είναι ζευγάρια (V, E), όπου και πάλι V είναι ένα σύνολο κορυφών, αλλά το σύνολο E των ακμών είναι τώρα όχι ένα σύνολο διμελών υποσυνόλων του V αλλά ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών με στοιχεία από το V, δηλ. $E \subseteq V \times V$.

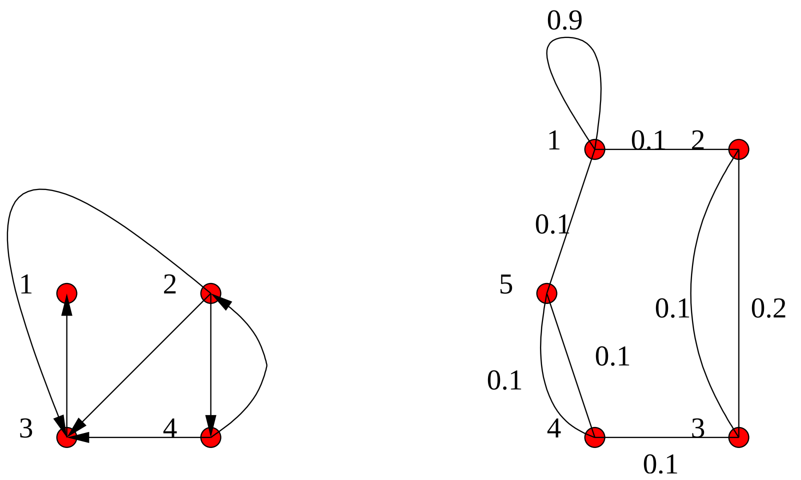
Ανάλογα με την περίπτωση μπορεί κανείς να επιτρέπει ή όχι και ζευγάρια της μορφής (v, v) (τέτοιες ακμές ονομάζονται *βρόγχοι*). Το σημαντικό πάντως είναι ότι δε μπορεί πλέον κανείς να λέει ότι 'i συνδέεται με το j' αλλά πρέπει να προσδιορίζει και την κατεύθυνση της σύνδεσης.

Ορισμός 4.17. (Πολλαπλές ακμές) *Γραφήματα με πολλαπλές ακμές* είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία μια ακμή μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, να υπάρχει μια φορά, δυο φορές, κλπ. Ο αριθμός των φορών που εμφανίζεται μια ακμή λέγεται πολλαπλότητα της ακμής.

Γραφήματα με αυτοσυνδέσεις είναι αυτά στα οποία επιτρέπουμε μια κορυφή να συνδέεται με τον εαυτό της.

Ορισμός 4.18. (Βάρη στις ακμές) *Γραφήματα με βάρη/κόστη* είναι αυτά (κατευθυνόμενα ή μη) στα οποία κάθε ακμή έχει και ένα βάρος/κόστος.

Αυτά τα βάρη είναι συνήθως μη αρνητικοί αριθμοί, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο και εξαρτάται από την εφαρμογή. Για παράδειγμα, αν οι κορυφές παριστάνουν πόλεις σε μία χώρα και οι ακμές κάποιους δρόμους που τις συνδέουν, τα βάρη μπορούν να παριστάνουν τα μήκη των δρόμων.



Σχήμα 19. Μη απλά γραφήματα

Στο Σχήμα 19 δείχνουμε δύο γραφήματα. Το αριστερό είναι ένα κατευθυνόμενο γράφημα, και το δεξί είναι ένα γράφημα με πολλαπλές ακμές, αυτοσυνδέσεις και βάρη. Είναι φανερό ότι μπορούν να υπάρξουν διάφοροι τέτοιοι συνδυασμοί.

Η έννοια του μονοπατιού είναι σχεδόν ταυτόσημη με αυτή που ισχύει στα απλά γραφήματα, αν όμως το γράφημα είναι κατευθυνόμενο τότε φυσιολογικά απαιτούμε οι ακμές να έχουν όλες φορά από μια κορυφή του μονοπατιού προς την επόμενη.

Ειδικά για τα γραφήματα με μη αρνητικά βάρη υπάρχει μια επιπλέον έννοια της απόστασης ανάμεσα σε δύο κορυφές που λαμβάνει υπόψη της τα 'μήκη' (ή βάρη) των ακμών.

Ορισμός 4.19. (Απόσταση σε γραφήματα με βάρη) Ετσι, το *μήκος* ενός μονοπατιού σε ένα γράφημα με βάρη είναι απλώς το άθροισμα των βαρών των ακμών που συμμετέχουν στο μονοπάτι. Η *απόσταση* ανάμεσα στις κορυφές u και v ορίζεται ως το ελάχιστο μήκος μονοπατιού που συνδέει τις u και v ($+\infty$ αν δεν συνδέονται με κάποιο μονοπάτι), και η *διάμετρος* του γραφήματος G ορίζεται ως η μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο κόμβους του G, όπως και πριν.

Άσκηση 4.31. Δείξτε ότι η τριγωνική ανισότητα (34) εξακολουθεί να ισχύει και για τη νέα έννοια απόστασης.

§7. Ο αλγόριθμος του Kruskal για ελάχιστα δέντρα που παράγουν σε γραφήματα με βάρη

Εστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό γράφημα με μη αρνητικά βάρη στις ακμές του

$$w : E \to \mathbb{R}^+.$$

Μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε εκείνο το δέντρο T από όλα τα δυνατά δέντρα που παράγουν το G που το βάρος του, δηλ. το άθροισμα των ακμών που συμμετέχουν στο δέντρο, να είναι όσο γίνεται πιο μικρό. Θέλουμε δηλ. να ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα

$$w(T) = \sum_{e \in T} w(e),$$

όπου το άθροισμα παίρνεται πάνω απ'όλες τις ακμές που εμφανίζονται στο δέντρο, και το T είναι ένα δέντρο που παράγει το G.

Αν και η ποσότητα $w(T)$ έχει μοναδικό ελάχιστο, αυτό μπορεί να 'πιάνεται' για παραπάνω από ένα δέντρα που παράγουν. Ολα αυτά τα δέντρα με ελάχιστο βάρος τα ονομάζουμε *ελάχιστα δέντρα* του G.

Μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να δείξει ότι ο παρακάτω αλγόριθμος όντως βρίσκει ένα ελάχιστο δέντρο που παράγει στο G.

Ο αλγόριθμος του Kruskal

(1) Δημιουργούμε ένα δάσος F από δέντρα όπου κάθε κορυφή του G αποτελεί και ένα δέντρο.
(2) Δημιουργούμε ένα σύνολο S που περιέχει όλες τις ακμές του G, διατεταγμένες σε αύξουσα σειρά βάρους.
(3) Όσο ισχύει $S \neq \emptyset$ επαναλαμβάνουμε τα παρακάτω:
  (α') Αφαιρούμε την πρώτη ακμή του S (που είναι μια από αυτές που έχουν το ελάχιστο βάρος ανάμεσα στις ακμές που περιέχονται στο S).
  (β') Αν αυτή η ακμή ενώνει μεταξύ τους δύο διαφορετικά δέντρα του δάσους F, τότε προσθέτουμε αυτή την ακμή στο F, ενώνοντας έτσι σε ένα δύο δέντρα του F. Αλλιώς την πετάμε αυτή την ακμή.

Στο τέλος του αλγορίθμου το δάσος F περιέχει μόνο ένα δέντρο που είναι ένα ελάχιστο δέντρο του G.[2]

Θεώρημα 4.3. *Ο αλγόριθμος του Kruskal που περιγράψαμε προηγουμένως όντως βρίσκει ένα ελάχιστο δέντρο για το γράφημα G.*

Απόδειξη. Το ότι το γράφημα που παράγεται από τον αλγόριθμο του Kruskal είναι ανά πάσα χρονική στιγμή ένα δάσος είναι φανερό, αφού κάθε τέτοιο γράφημα προκύπτει από το προηγούμενο με την προσθήκη μιας ακμής η οποία ενώνει δύο διαφορετικά δέντρα του προηγουμένου, και επειδή είναι φανερό ότι αν ενώσουμε με μια ακμή δύο δέντρα με διαφορετικό σύνολο κορυφών παίρνουμε πάλι ένα δέντρο.

Επίσης το δάσος F είναι, στο τέλος του αλγορίθμου, ένα και μόνο δέντρο. Αλλιώς το F θα περιείχε τις συνεκτικές συνιστώσες $C_1, \ldots, C_k$, $k > 1$, και, από τον τρόπο που δουλεύει ο αλγόριθμος, αυτό συνεπάγεται ότι καμιά από τις ακμές του G δεν ενώνει μεταξύ τους δύο διαφορετικά C_j. Αυτό σημαίνει όμως ότι το G δεν είναι συνεκτικό, άτοπο.

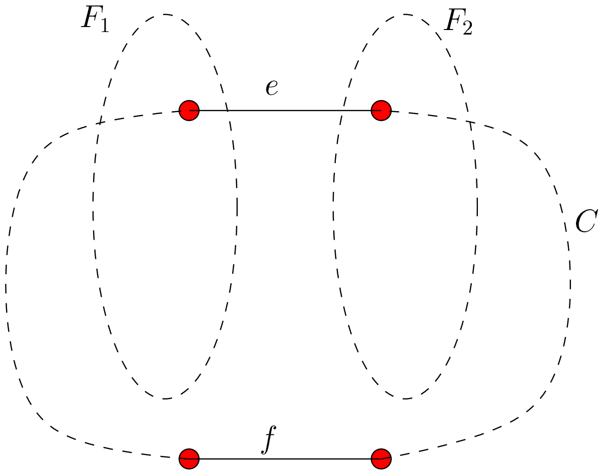
[2] Με τις κατάλληλες δομές δεδομένων ο αλγόριθμος του Kruskal χρειάζεται χρόνο $O(m \log m)$ για να τελειώσει, όπου m είναι το πόσες ακμές έχει το γράφημα G.

Είναι λοιπόν το F ένα και μόνο δέντρο και μάλιστα παράγει το G και μένει να δειχτεί ότι το F είναι επιπλέον και ελάχιστο δέντρο που παράγει το G. Ας είναι λοιπόν T ένα ελάχιστο δέντρο από αυτά που παράγουν το G που το επιλέγουμε ούτως ώστε να συμφωνεί με το F για το μέγιστο δυνατό διάστημα Το διάστημα συμφωνίας είναι ο χρόνος μέχρι να βρεθεί η πρώτη ακμή (με τη διάταξη του S) η οποία ανήκει στο ένα αλλά όχι στο άλλο. Αν όλες οι ακμές τους ταυτίζονται τότε έχουμε $F = T$ και άρα το F είναι και αυτό ελάχιστο. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει μια ακμή e που περιέχεται στο F και όχι στο T, και ας πάρουμε να είναι η e η πρώτη από τις ακμές που κοιτάει ο αλγόριθμος για την οποία συμβαίνει αυτό.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι

$$e \in F \setminus T. \tag{36}$$

Ο λόγος είναι ότι όταν μια ακμή εξετάζεται από τον αλγόριθμο του Kruskal και απορρίπτεται αυτό συνεπάγεται ότι εκείνη τη στιγμή τα δύο άκρα της είναι ήδη συνδεδεμένα στο F. Αλλά, μέχρι εκείνη τη στιγμή το T συμφωνεί με το F, άρα τα δύο άκρα της e είναι ήδη συνδεδεμένα και στο T, πράγμα που απαγορεύει στην e να ανήκει στο T αφού αυτό είναι δέντρο. Άρα η ακμή αυτή δεν απορρίπτεται από τον αλγόριθμο και ισχύει η (36).



Σχήμα 20. Βοηθητικό σχήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3

Ας εστιάσουμε την προσοχή μας στη χρονική στιγμή που εξετάζεται από τον αλγόριθμο η ακμή e και ας είναι F_1 και F_2 τα δύο δέντρα του (τρέχοντος) F τα οποία η ακμή αυτή ενώνει. Αφού $e \notin T$ αν την προσθέσουμε στο T δημιουργείται ένας κύκλος C και έπεται ότι υπάρχει κάποια από τις ακμές του $C \setminus \{e\}$, έστω η f, που έχει βάρος

$$w(f) \geq w(e).$$

Αυτό συμβαίνει γιατί στην αντίθετη περίπτωση όλες οι ακμές του $C \setminus \{e\}$ θα είχαν εξεταστεί από τον αλγόριθμο πριν από την e, και, λόγω της συμφωνίας μεταξύ F και T ως εκείνη τη στιγμή, και επειδή οι ακμές του $C \setminus \{e\}$ ανήκουν όλες στο T, έπεται ότι θα ανήκουν και στο F, πράγμα ασυμβίβαστο με το ότι η e συνδέει δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες F_1 και F_2. (Δείτε το Σχήμα 20.)

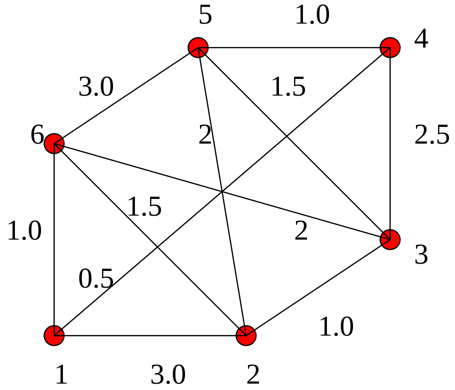
Θεωρούμε τώρα το δέντρο

$$T' = T \cup \{e\} \setminus f.$$

Αυτό το δέντρο είναι επίσης ελάχιστο και επίσης συμφωνεί με το F για παραπάνω χρόνο απ' ότι το T, άτοπο διότι το T είχε υποτεθεί ότι μεγιστοποιεί αυτό το χρόνο συμφωνίας. Άρα $F = T$ και το F είναι ελάχιστο. □

Άσκηση 4.32. Εφαρμόστε με το χέρι τον αλγόριθμο του Kruskal στο γράφημα του Σχήματος 21 και βρείτε ένα ελάχιστο δέντρο που το παράγει.

Άσκηση 4.33. Υλοποιείστε τον αλγόριθμο του Kruskal στην αγαπημένη σας γλώσσα προγραμματισμού με τρόπο ώστε ο χρόνος εκτέλεσης να είναι της τάξης του $m \log m$, όπου m είναι το πλήθος των ακμών (που αναγκαστικά είναι τουλάχιστον $n - 1$, όπου n είναι το πλήθος των κορυφών, μια και το γράφημα υποτίθεται συνεκτικό. Εξηγείστε το χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου.



Σχήμα 21. Ένα γράφημα με βάρη

Ο αλγόριθμος του Kruskal ανήκει σεκείνη την κατηγορία αλγορίθμων που ονομάζονται 'μυωπικοί' (greedy) μια και προσπαθούν να πετύχουν μια συνολική βελτιστοποίηση (στην περίπτωσή μας την εύρεση ενός ελάχιστου δέντρου) βελτιστοποιώντας, κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης τους, κάθε επιλογή που έχουν να κάνουν με κάποια κριτήρια 'της στιγμής'. Τέτοιοι αλγόριθμοι σπανίως βελτιστοποιούν το συνολικό πρόβλημα, και αυτός ο αλγόριθμος για ελάχιστα δέντρα είναι μια από τις εξαιρέσεις όπου αποδεδειγμένα επιτυγχάνεται συνολική βελτιστοποίηση.

§8. Ο αλγόριθμος Floyd-Warshall για εύρεση αποστάσεων πάνω σε γραφήματα

Εδώ θα περιγράψουμε ένα αλγόριθμο που βρίσκει όλες τις αποστάσεις ανάμεσα σε κάθε ζευγάρι κορυφών, σε ένα γράφημα G με (μη αρνητικά) βάρη στις ακμές του. Πρέπει να τονίσουμε ότι το πρόβλημα που λύνουμε εδώ αλγοριθμικά είναι το πρόβλημα των αποστάσεων από 'οποιαδήποτε σε οποιαδήποτε' κορυφή. Στο τέλος του αλγορίθμου δηλ. θα μπορούμε να απαντήσουμε άμεσα (σε σταθερό χρόνο, όπως λέμε) σε κάθε ερώτημα 'ποια είναι η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές i και j του γραφήματος;'. Αν δε μας ενδιέφερε αυτή η γενικότητα αλλά θέλαμε, π.χ., να γνωρίζουμε, μετά το πέρας του αλγορίθμου, όλες τις αποστάσεις από την κορυφή 1 προς όλες τις άλλες, τότε θα χρησιμοποιούσαμε διαφορετικό αλγόριθμο. Ο αλγόριθμος που δίνουμε σε αυτή την παράγραφο θα αποτελούσε 'overkill' για ένα τέτοιο ερώτημα: υπολογίζει πολλά αδιάφορα πράγματα.

Θεωρούμε, ως συνήθως, το σύνολο κορυφών του γραφήματος να είναι το $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ και γράφουμε $w(i, j)$ για το βάρος της ακμής (i, j) (το οποίο συμφωνούμε να θεωρούμε $+\infty$ αν η ακμή αυτή δεν υπάρχει).

Ο παρακάτω αλγόριθμος τροποποιεί σε κάθε επανάληψή του τον $n \times n$ πίνακα A ο οποίος παίρνει αρχικές τιμές στο βήμα 1 και ενημερώνεται n φορές στο βήμα 3. **Αλγόριθμος Floyd-Warshall**

(1) Θέτουμε $A_{ij}^{(0)} = w(i, j)$, για $i, j = 1, \ldots, n$.
(2) Επαναλαμβάνουμε για $k = 1, 2, \ldots, n$ το παρακάτω βήμα.
(3) $A_{ij}^{(k)} = \min\left\{A_{ij}^{(k-1)}, A_{ik}^{(k-1)} + A_{kj}^{(k-1)}\right\}$, για $i, j = 1, \ldots, n$.

Θεωρημα 4.4. *Στο τέλος του προηγούμενου αλγορίθμου η απόσταση ανάμεσα στις κορυφές i και j είναι ίση με $A_{ij}^{(n)}$.*

Αποδειξη. Θα δείξουμε με επαγωγή ως προς το k ότι $A_{ij}^{(k)}$ ισούται με $L_{ij}^{(k)}$ = το μήκος του ελάχιστου μονοπατιού από το i στο j το οποίο όμως χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές μόνο από το σύνολο $\{1, \ldots, k\}$.

Για $k = 0$ το παραπάνω σύνολο είναι κενό και ο ισχυρισμός σημαίνει ότι $A_{ij}^{(0)}$ ισούται με το βάρος της πλευράς (i, j) μια και το σύνολο των μονοπατιών από το i στο j που *δε* χρησιμοποιούν καμία ενδιάμεση κορυφή αποτελείται από την ακμή (i, j) και μόνο. Άρα ο ισχυρισμός είναι αληθής για $k = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο ισχυρισμός ισχύει μέχρι και για $k-1$, θεωρούμε ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο j που χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές μόνο από το σύνολο $\{1,\ldots,k\}$, και ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις.
(α) Το ελάχιστο αυτό μονοπάτι δε χρησιμοποιεί την κορυφή k.
(β) Χρησιμοποιεί την κορυφή k.

Στην πρώτη περίπτωση έχουμε φυσικά $L_{ij}^{(k)} = L_{ij}^{(k-1)}$.

Εστω ότι ισχύει το (β). Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι όποιο και να είναι το ελάχιστο μονοπάτι από το i στο j περιέχει το k ακριβώς μια φορά (αν το περιέχει δυο ή παραπάνω μπορούμε να το μικράνουμε το μονοπάτι παραλείποντας ένα κομμάτι ανάμεσα σε δύο εμφανίσεις του k). Επίσης, το κομμάτι του μονοπατιού από το i στο k είναι ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο k που χρησιμοποιεί ενδιάμεσες κορυφές από το σύνολο $\{1,\ldots,k-1\}$. Αρα το μήκος του είναι $L_{ik}^{(k-1)}$ και, ομοίως, το μήκος του μονοπατιού από το k στο j είναι $L_{kj}^{(k-1)}$. Το συνολικό μήκος του μονοπατιού είναι λοιπόν σαύτή την περίπτωση

$$L_{ij}^{(k)} = L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)}.$$

Επίσης, σε κάθε περίπτωση, έχουμε τις ανισότητες

$$L_{ij}^{(k)} \le L_{ij}^{(k-1)} \ \text{ και } \ L_{ij}^{(k)} \le L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)},$$

η πρώτη από τον ορισμό του του συμβόλου L και μόνο και η δεύτερη παρατηρώντας ότι μπορούμε να πάμε από το i στο j (με ενδιάμεσους από το $[k]$) ακολουθώντας πρώτα ένα ελάχιστο μονοπάτι από το i στο k και μετά ένα ελάχιστο μονοπάτι από το k στο j (με ενδιάμεσους από το $[k-1]$).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$L_{ij}^{(k)} = \min\left\{L_{ij}^{(k-1)}, L_{ik}^{(k-1)} + L_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

και άρα, από τον τρόπο υπολογισμού των πινάκων $A^{(k)}$, έχουμε $A(k)_{ij} = L_{ij}^{(k)}$, για κάθε $i,j = 1,\ldots,n$, $k = 0,\ldots,n$. □

Μπορεί κανείς εύκολα να δεί ότι ο αλγόριθμος Floyd-Warshall που περιγράψαμε παίρνει περίπου n^3 υπολογιστικά βήματα για να τελειώσει.

Ασκηση 4.34. Πόσες πράξεις (προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς) χρειάζεται ο αλγόριθμος Floyd-Warshall για να υπολογίσει το ζητούμενο; Πόσο χώρο (θέσεις για αριθμούς) χρειάζεται ο αλγόριθμος αυτός;

Ασκηση 4.35. Γράψτε ένα πρόγραμμα που θα υλοποιεί τον αλγόριθμο Floyd-Warshall και εφαρμόστε τον στο γράφημα του Σχήματος 21.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Διμερή γραφήματα και ταιριάσματα

§1. Διμερή γραφήματα

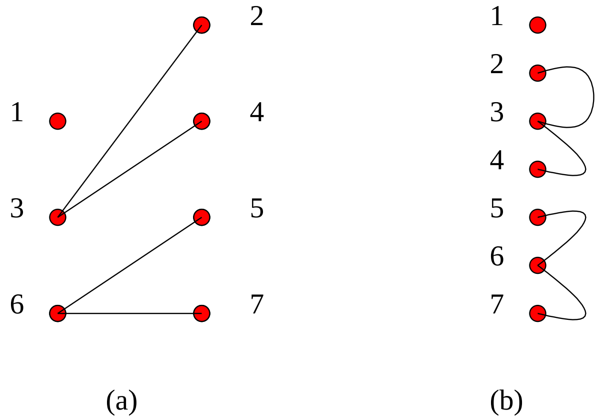
Η κλάση των διμερών γραφημάτων κωδικοποιεί φυσιολογικά σχέσεις ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς πληθυσμούς. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο ξένα πεπερασμένα σύνολα: το A, που είναι ένα σύνολο δασκάλων, και το B, που είναι ένα σύνολο μαθητών. Ορίζουμε ένα γράφημα με σύνολο κορυφών το $V = A \cup B$ το οποίο θα κωδικοποιεί τη σχέση διδασκαλίας, βάζουμε δηλ. μια ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές $u, v \in V$ αν και μόνο αν το u διδάσκει το v ή αντίστροφα. Είναι φανερό ότι όλες οι ακμές στο γράφημα αυτό συνδέουν μεταξύ τους μια κορυφή του A και μια του B. Δεν υπάρχουν δηλ. ακμές που να συνδέουν ανάμεσά τους δύο κορυφές του A ή δύο του B. Μία άλλη περίπτωση, αρκετά κοινή στην πράξη, είναι αυτή όπου έχουμε ένα γράφημα που περιγράφει τη σχέση ανάμεσα σε εξυπηρετητές (servers) και εξυπηρετούμενους (clients).

Ορισμος 5.1. (Διμερές γράφημα) Ενα γράφημα $G = (V, E)$ θα ονομάζεται *διμερές* αν υπάρχει μια διαμέριση των κορυφών

$$V = A \cup B, \quad \text{με } A \cap B = \emptyset,$$

τέτοια ώστε οι γείτονες κάθε κορυφής του A ανήκουν στο B (το οποίο συνεπάγεται ότι και οι γείτονες κάθε κορυφής του B ανήκουν στο A). Δεν υπάρχουν δηλ. ακμές από το A στο A ή από το B στο B.

Παραδειγμα 5.1. Σε ένα σύνολο ανθρώπων η σχέση του γάμου ορίζει ένα διμερές γράφημα. Αν έχουμε δηλ. ένα γράφημα με σύνολο κορυφών V κάποιο σύνολο ανθρώπων, και βάλουμε μια ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές αν αυτές αντιπροσωπεύουν συζύγους, τότε το γράφημα είναι διμερές με σύνολο κορυφών A το σύνολο των γυναικών και σύνολο κορυφών B το σύνολο των ανδρών.



Σχήμα 22. Ένα διμερές γράφημα, σχεδιασμένο με δύο τρόπους

Παρατηρηση 5.1. Τα διμερή γραφήματα τα σχεδιάζουμε συνήθως (αλλά όχι πάντα) με τις δύο ομάδες (A και B) των κορυφών τους σαφώς χωρισμένες, συνήθως σε αριστερά και δεξιά. Για παράδειγμα, το γράφημα στο Σχ. 22(a) είναι διμερές με

$$A = \{1, 3, 6\}, \quad B = \{2, 4, 5, 7\}.$$

Δεν είναι πάντα προφανές, απλά κοιτώντας ένα γράφημα, αν είναι αυτό διμερές ή όχι. Το γράφημα στο Σχ. 22(b) είναι το ίδιο με το γράφημα στο (a) αλλά πρέπει κανείς να σκεφτεί για να δεί ότι όντως είναι διμερές.

Παρατηρηση 5.2. Παρατηρείστε ότι η διαμέριση $V = A \cup B$ δεν είναι μοναδική, μια και θα μπορούσαμε να είχαμε τοποθετήσει, για παράδειγμα, το 1 στο σύνολο B αντί για το A.

Ασκηση 5.1. Βρείτε μια μέθοδο για να αποφασίζετε αν ένα τυχόν απλό γράφημα είναι διμερές ή όχι.

Θεωρημα 5.1. *Όλα τα δέντρα είναι διμερή γραφήματα.*

Αποδειξη. Η απόδειξη είναι με επαγωγή ως προς το $n = |V|$. Αν $n = 1$, τότε το μοναδικό δέντρο είναι αυτό με μια κορυφή u και καμιά ακμή. Ορίζουμε τότε το διαμερισμό του συνόλου $V = \{u\}$ στα σύνολα $A = \{u\}$ και $B = \emptyset$.

Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η πρόταση ισχύει αν το δέντρο έχει το πολύ $n-1$ κορυφές και παίρνουμε ένα δέντρο T με n κορυφές. Θέλουμε να δείξουμε ότι είναι διμερές. Γνωρίζουμε όμως (δείτε τον ισχυρισμό μέσα στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2) ότι κάθε δέντρο έχει μια κορυφή βαθμού 1. Έστω u μια τέτοια κορυφή του δέντρου T, και v ο μοναδικός γείτονάς της. Αν από το T αφαιρέσουμε την κορυφή u και την ακμή uv, τότε το γράφημα που προκύπτει, έστω T' είναι και πάλι δέντρο (αφού εξακολουθεί να παραμένει συνεκτικό γράφημα, χωρίς κύκλους) με $n-1$ κορυφές. Από την επαγωγική μας υπόθεση έπεται ότι το T' είναι διμερές με σύνολα κορυφών τα A' και B' (όλες οι ακμές του T' δηλ. πάνε από το A' στο B'). Η κορυφή v ανήκει σε ένα από τα δύο αυτά σύνολα, έστω στο A'.

Ισχυριζόμαστε τώρα ότι το δέντρο T είναι διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών τα $A = A'$ και $B = B' \cup \{u\}$. Για να το ελέγκσουμε αυτό, και εφόσον γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν ακμές από το A' στο B', αρκεί να ελέγκσουμε ότι δεν υπάρχουν ακμές από το u προς κάποια κορυφή του B'. Αυτό όμως είναι προφανές αφού το u έχει μόνο ένα γείτονα, το v, ο οποίος είναι στο A. □

Ασκηση 5.2. Αν ένα γράφημα είναι διμερές τότε και κάθε υπογράφημά του είναι.

Ασκηση 5.3. Ο κύκλος C_n είναι το γράφημα με σύνολο κορυφών το $\{1, 2, \ldots, n\}$ και σύνολο ακμών το

$$E = \{(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)\}.$$

Δείξτε ότι το C_n είναι διμερές γράφημα αν και μόνο αν το n είναι άρτιο.

Ασκηση 5.4. Το πλήρες διμερές γράφημα με m και n κορυφές, που το συμβολίζουμε με K_{mn} είναι ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ και $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, όπου το σύνολο των ακμών είναι το μέγιστο δυνατό.

(1) Πόσες ακμές έχει το K_{mn};
(2) Για ποιες τιμές των m και n είναι το K_{mn} κανονικό; (Θυμίζουμε ότι ένα γράφημα λέγεται κανονικό αν όλες οι κορυφές του έχουν τον ίδιο βαθμό.)
(3) Περιγράψτε το συμπληρωματικό γράφημα του K_{mn}. (*Συμπληρωματικό* ενός γραφήματος G είναι το γράφημα G' με ίδιο σύνολο κορυφών και τέτοιο ώστε μια ακμή υπάρχει στο G' αν και μόνο αν δεν υπάρχει στο G.)

Ασκηση 5.5. Μπορεί ένα δέντρο να είναι πλήρες διμερές γράφημα; (Δείτε ορισμό στην Άσκηση 5.4.)

Ασκηση 5.6. Δείξτε ότι αν οι συνεκτικές συνιστώσες ενός γραφήματος είναι διμερή γραφήματα τότε και το όλο γράφημα είναι διμερές.

Τα διμερή γραφήματα χαρακτηρίζονται από τα μήκη των κυκλωμάτων τους:

Θεωρημα 5.2. *Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλα τα κυκλώματά του έχουν άρτιο μήκος.*

Αποδειξη. Έστω G διμερές γράφημα και C κύκλωμα σε αυτό:

$$C: \ u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_n \to u_1.$$

Το μήκος του C είναι n και θέλουμε να δείξουμε ότι αυτό είναι άρτιο. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το u_1 ανήκει στο σύνολο κορυφών A. Άρα το u_2 ανήκει στο σύνολο κορυφών B, το u_3 ανήκει πάλι στο A, κλπ. Δηλ. τα u_j με άρτιο j ανήκουν στο B και αυτά με περιττό j στο A. Όμως το u_n είναι γείτονας του u_1, άρα ανήκει στο B, το οποίο συνεπάγεται ότι το n είναι άρτιο.

Αντίστροφα, έστω G ένα γράφημα, με σύνολο κορυφών V, στο οποίο όλα τα κυκλώματα έχουν άρτιο μήκος. Υποθέτουμε πρώτα ότι το G είναι συνεκτικό και σταθεροποιούμε μια κορυφή του u. Ορίζουμε

$$A = \{v \in V : \ d(u,v) \text{ άρτιο}\}$$

και

$$B = V \setminus A.$$

Δείχνουμε ότι το G είναι διμερές με σύνολα κορυφών τα A και B. Γι΄ αυτό αρκεί να δείξουμε ότι είναι αδύνατο να υπάρχει ακμή ανάμεσα σε δύο κορυφές του A ή ανάμεσα σε δύο κορυφές του B. Έστω a_1 και a_2 δύο κορυφές του A (επιχειρηματολογούμε τελείως όμοια για δύο κορυφές του B) και ας υποθέσουμε, αντίθετα με αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε, ότι υπάρχει στο G η ακμή a_1a_2. Έστω π_1 και π_2 δύο ελάχιστα μονοπάτια στο G από την u στις κορυφές a_1 και a_2. Θεωρούμε τον κύκλο C που απαρτίζεται από το π_1 ακολουθούμενο από την ακμή a_1a_2 και τέλος από το π_2 διανυμένο με ανάποδη σειρά. Το μήκος του C είναι

$$|C| = |\pi_1| + 1 + |\pi_2|,$$

που είναι φανερό ότι είναι περιττός αριθμός, πράγμα άτοπο.

Έχουμε λοιπόν δείξει τη συνεπαγωγή ‘άρτια κυκλώματα συνεπάγεται διμερές γράφημα’ στην περίπτωση που το G είναι συνεκτικό. Αν το G δεν είναι συνεκτικό παρατηρούμε ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του είναι διμερής, άρα και το ίδιο το G (δείτε Άσκηση 5.6). □

Άσκηση 5.7. Ο *χρωματικός αριθμός* ενός γραφήματος G, που συμβολίζεται με $\chi(G)$, είναι ο ελάχιστος ακέραιος k τέτοιος ώστε να μπορεί κανείς με k διαφορετικά χρώματα να χρωματίσει τις κορυφές του G, με τέτοιο τρόπο ώστε αν δύο κορυφές συνδέονται με ακμή τότε να έχουν διαφορετικά χρώματα. Για παράδειγμα ο χρωματικός αριθμός ενός τριγώνου (K_3) είναι 3. Δείξτε ότι ένα γράφημα G είναι διμερές αν και μόνο αν $\chi(G) \le 2$.

Άσκηση 5.8. Αν $A = \{1, \ldots, m\}$ και $B = \{1, \ldots, n\}$, πόσα διμερή γραφήματα υπάρχουν με σύνολα κορυφών τα A και B;

Άσκηση 5.9. Αν $A = \{1, \ldots, m\}$ και $B = \{1, \ldots, n\}$, για ποιες τιμές των m, n και r υπάρχει r-κανονικό γράφημα με σύνολα κορυφών τα A και B;

Άσκηση 5.10. Τι μορφή έχει ο πίνακας συνδεσμολογίας ενός διμερούς γραφήματος (μετά από κατάλληλη αρίθμηση των κορυφών του);

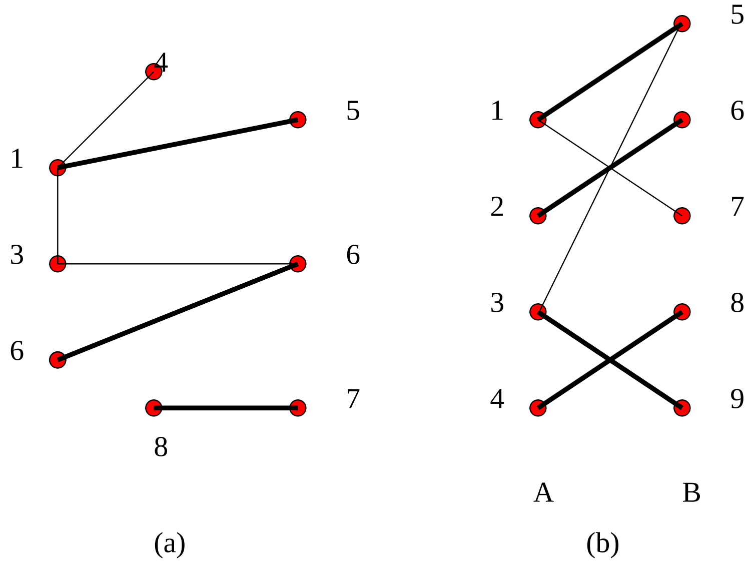
§2. Ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα

Μια πολύ χρήσιμη έννοια είναι η έννοια του ταιριάσματος σε ένα γράφημα.

Ορισμός 5.2. (Ανεξάρτητες ακμές, Ταιριάσματα) Δύο ακμές λέγονται *ανεξάρτητες* αν δεν έχουν κοινή κορυφή. Ένα σύνολο ανεξαρτήτων ακμών M σε ένα γράφημα λέγεται ταίριασμα (matching). Αν το γράφημα είναι διμερές με σύνολα κορυφών A και B τότε ένα ταίριασμα M λέγεται *πλήρες ταίριασμα* του A (ομοίως για το B) αν κάθε κορυφή του A περιέχεται σε κάποια ακμή του M.

Παράδειγμα 5.2. Στο Σχ. 23(a) το σύνολο των ακμών που έχουν σχεδιαστεί έντονα αποτελεί ένα ταίριασμα. Στο Σχ. 23(b) έχουμε ένα διμερές γράφημα με ένα ταίριασμα του πλήρες συνόλου κορυφών A (αριστερές κορυφές). Το ταίριασμα αυτό δεν αποτελεί πλήρες ταίριασμα του B αφού η κορυφή 9 του B δεν ‘καλύπτεται’ από ακμή του ταιριάσματος.

Παράδειγμα 5.3. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε προκηρύξει κάποιες θέσεις εργασίας $J_1, \ldots, J_n$ και ότι έχουν κάνει αίτηση γι΄ αυτές κάποιοι υποψήφιοι $C_1, \ldots, C_m$, με $m \ge n$. Δεν έχει κατ΄ ανάγκην κάνει αίτηση ο κάθε υποψήφιος για όλες τις θέσεις, αλλά κάθε υποψήφιος έχει κάνει αίτηση για κάποιες από τις προσφερόμενες θέσεις. Σκοπός μας είναι να γεμίσουμε όλες τις θέσεις εργασίας. Δε μπορούμε φυσικά να προσλάβουμε για μια θέση εργασίας κάποιον που δεν έχει κάνει αίτηση γι΄ αυτή. Φτιάχνουμε ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών $A = \{J_1, \ldots, J_n\}$ και $B = \{C_1, \ldots, C_m\}$ και βάζουμε μια ακμή ανάμεσα στις κορυφές J_k και C_l αν και μόνο αν ο υποψήφιος C_l έχει κάνει αίτηση για τη θέση J_k. Είναι φανερό τώρα ότι μπορούμε να γεμίσουμε όλες τις θέσεις εργασίας αν και μόνο αν υπάρχει πλήρες ταίριασμα του A στο γράφημα αυτό.



Σχήμα 23. Οι ακμές με έντονη γραμμή αποτελούν ταίριασμα

Άσκηση 5.11. Αν ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B έχει πλήρες ταίριασμα του A τότε $|B| \geq |A|$.

Παρατήρηση 5.3. Έστω ένα πεπερασμένο σύνολο X και σύστημα $A_1, \ldots, A_n$ υποσυνόλων του. Υπάρχει ένας πολύ φυσιολογικός τρόπος να αντιστοιχίσουμε σε αυτό το σύστημα υποσυνόλων ένα διμερές γράφημα:

> σύνολο αριστερών κορυφών είναι τα σύνολα $A_1, \ldots, A_n$ και σύνολο δεξιών κορυφών είναι το X. Ενώνουμε την αριστερή κορυφή A_i με τη δεξιά κορυφή x αν και μόνο αν $x \in A_i$.

Είναι φανερό ότι σε διαφορετικά συστήματα υποσυνόλων του X αντιστοιχούν διαφορετικά διμερή γραφήματα κατασκευασμένα κατά αυτόν τον τρόπο και είναι επίσης φανερό πώς να κατασκευάσουμε ένα σύστημα υποσυνόλων όταν μας δώσουν ένα διμερές γράφημα.

Ορισμός 5.3. Σε ένα διμερές γράφημα, για κάθε σύνολο J αριστερών κορυφών, συμβολίζουμε με $N(J)$ το σύνολο όλων των δεξιών κορυφών που ενώνονται με κάποια κορυφή από το J.

Το αποτέλεσμα που ακολουθεί περιγράφει ακριβώς πότε ένα διμερές γράφημα έχει πλήρες ταίριασμα της μιας πλευράς του.

Θεώρημα 5.3. *Σε ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B υπάρχει πλήρες ταίριασμα του A αν και μόνο αν για κάθε υποσύνολο $J \subseteq A$ ισχύει*

$$|N(J)| \geq |J|. \tag{37}$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα 5.3 αποτελεί ουσιαστικά μια αναδιατύπωση του Θεωρήματος του Γάμου (Θεώρημα 1.1). Φτιάχνουμε από το διμερές μας γράφημα ένα σύστημα υποσυνόλων του B, όπως στην Παρατήρηση 5.3. Η συνθήκη του Θεωρήματος 5.3 αποτελεί απλά αναδιατύπωση της συνθήκης (12) του Hall. Το γράφημά μας έχει πλήρες ταίριασμα του A αν και μόνο αν το σύστημα υποσυνόλων του B που φτιάξαμε έχει σύστημα ξένων αντιπροσώπων, πράγμα που, σύμφωνα με το Θεώρημα του Γάμου, ισχύει ακριβώς όταν ισχύει η συνθήκη του Hall, δηλ. η συνθήκη που διατυπώνεται στο Θεώρημα 5.3. □

Άσκηση 5.12. Σε ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B ισχύει

$$|N(J)| \geq |J| - 5, \quad \text{για κάθε } J \subseteq A.$$

Δείξτε ότι υπάρχει ταίριασμα M που να περιέχει τουλάχιστον $|A| - 5$ κορυφές του A.

Μια εύκολη συνέπεια του θεωρήματος του Γάμου είναι η εξής:

Πόρισμα 5.1. Κάθε κανονικό διμερές γράφημα έχει ταίριασμα.

Απόδειξη. Εστω ότι το $G = (A \cup B, E)$ είναι r-κανονικό, $r \geq 1$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η υπόθεση του Θεωρήματος 5.3. Εστω $J \subseteq A$ και E_1 το σύνολο των ακμών που ξεκινούν από κάποια κορυφή του J. Επειδή το G είναι r-κανονικό έχουμε ότι $|E_1| = r|J|$.

Εστω επίσης E_2 το σύνολο των ακμών που καταλήγουν σε κάποια από τις κορυφές του $N(J)$, δηλ. σε κάποιο από τους γείτονες του J. Ξανά έχουμε $|E_2| = r|N(J)|$.

Αλλά προφανώς ισχύει $E_1 \subseteq E_2$. Αρα $r|J| \leq r|N(J)|$, το οποίο συνεπάγεται

$$|N(J)| \geq |J|.$$

□

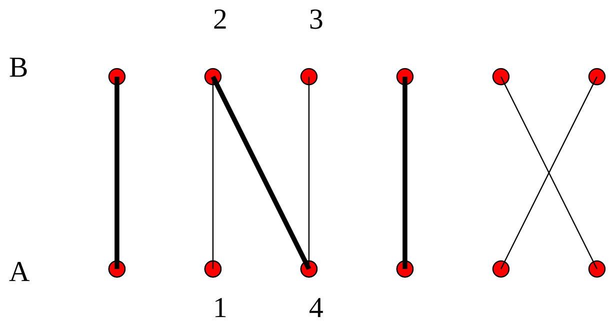
§3. Μέγιστα ταιριάσματα

Υπάρχουν πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις διμερών γραφημάτων που δεν έχουν πλήρη ταιριάσματα του συνόλου κορυφών A. Σέ τέτοια περίπτωση ενδιαφερόμαστε να βρούμε *μέγιστα ταιριάσματα*, ταιριάσματα δηλ. που καλύπτουν το μέγιστο δυνατό αριθμό κορυφών (εναλλακτικά, που έχουν όσο γίνεται περισσότερες ακμές).

Ορισμος 5.4. (Εναλλακτικά μονοπάτια, επαυξάνοντα μονοπάτια) Μια κορυφή ενός διμερούς γραφήματος που δεν καλύπτεται από κάποια ακμή ενός ταιριάσματος λέγεται *αταίριαστη* (ως προς το ταίριασμα αυτό).

Σε ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B και ένα ταίριασμα M ένα μονοπάτι, χωρίς επαναλαμβανόμενες ακμές, που αρχίζει από μια αταίριαστη κορυή του A, και περιέχει εναλλακτικά ακμές από το $E \setminus M$ και το M, λέγεται *εναλλακτικό μονοπάτι*.

Αν ένα εναλλακτικό μονοπάτι τελειώνει σε μια αταίριαστη κορυφή του B τότε λέγεται *επαυξάνον μονοπάτι*.



Σχήμα 24. Το μονοπάτι 1243 είναι επαυξάνον για το σημειωμένο ταίριασμα

Παραδειγμα 5.4. Στο Σχ. 24 το μονοπάτι 1243 είναι επαυξάνον για το ταίριασμα που έχει σημειωθεί με έντονες γραμμές.

Παρατηρηση 5.4. Τα επαυξάνοντα μονοπάτια είναι σημαντικά γιατί η ύπαρξη ενός τέτοιου μονοπατιού συνεπάγεται την ύπαρξη ενός μεγαλύτερου ταιριάσματος από το υπάρχον. Πράγματι, σε ένα επαυξάνον μονοπάτι οι ακμές είναι εναλλακτικά εκτός του M, από το M, εκτός του M, κ.ο.κ., και τελειώνουν με μια ακμή εκτός του M, μια και η τελευταία κορυφή του μονοπατιού είναι στο B και αταίριαστη στο ταίριασμα M. Αν λοιπόν αφαιρέσουμε από το M τις ακμές του που συμμετέχουν σε ένα επαυξάνον μονοπάτι π και προσθέσουμε στο M τις ακμές του π που δεν ανήκαν στο M, παίρνουμε ένα άλλο σύνολο ακμών M' που είναι μεγαλύτερο του M κατά μία ακμή. Το σημαντικό εδώ είναι ότι και το M' είναι ταίριασμα, άρα, χρησιμοποιώντας το π καταφέραμε να αυξήσουμε το μέγεθος του δοθέντος ταιριάσματος.

Παραδειγμα 5.5. Στο ταίριασμα του Σχ. 24 αν αφαιρέσουμε την ακμή 24 και προσθέσουμε τις 12 και 34 παίρνουμε πάλι ένα ταίριασμα κατά μία ακμή μεγαλύτερο από πριν.

Ασκηση 5.13. Αποδείξτε τον ισχυρισμό της Παρατήρησης 5.4, ότι το σύνολο ακμών M' είναι ταίριασμα. Συνεπώς αν το M είναι μέγιστο ταίριασμα τότε δεν υπάρχουν επαυξάνοντα μονοπάτια.

Είναι σημαντικό ότι ισχύει και το αντίστροφο της Άσκησης 5.13, και αυτό δεν είναι καθόλου προφανές.

Θεωρημα 5.4. *Αν ένα ταίριασμα δεν έχει επαυξάνοντα μονοπάτια τότε είναι μέγιστο ταίριασμα.*

Αποδειξη. Έστω M_1 ένα ταίριασμα (ενός διμερούς γραφήματος G, με σύνολα κορυφών A και B) που δεν έχει επαυξάνοντα μονοπάτια, και M_2 ένα μέγιστο ταίρασμα. Θεωρούμε το γράφημα G' με σύνολο ακμών το $M_1 \nabla M_2$ (το σύνολο αυτό είναι η *συμμετρική διαφορά* των M_1 και M_2, οι ακμές εκείνες του G δηλ. που ανήκουν σε ακριβώς ένα από τα σύνολα M_1 και M_2).

Επειδή τα M_1 και M_2 είναι ταιριάσματα έπεται ότι οι κορυφές του G' έχουν όλες βαθμό 1 ή 2 (στο G', όχι στο G). Από αυτό προκύπτει ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του G' είναι είτε ένας κύκλος είτε ένα μονοπάτι. Και στις δύο αυτές περιπτώσεις οι ακμές σε κάθε συνεκτική συνιστώσα προέρχονται εναλλάξ από το M_1 και το M_2. Όταν η συνιστώσα είναι κύκλος χρησιμοποιούνται σε αυτή ίσο πλήθος ακμών από το M_1 και το M_2. Όταν η συνιστώσα δεν είναι κύκλος αλλά μονοπάτι, ο μόνος τρόπος να εμφανίζονται σε αυτή λιγότερες M_1-ακμές απ' ότι M_2-ακμές είναι το μονοπάτι αυτό να αρχίζει και να τελειώνει με M_2-ακμή, πράγμα που θα σήμαινε ότι το μονοπάτι αυτό θα ήταν επαυξάνον για το ταίριασμα M_2, με ενδεχόμενη εναλλαγή των ρόλων των πλευρών A και B.

Επειδή έχουμε υποθέσει ότι επαυξάνοντα μονοπάτια δεν υπάρχουν έπεται ότι και σε αυτή την περίπτωση (η συνιστώσα είναι μονοπάτι καί όχι κύκλος) χρησιμοποιούνται τουλάχιστον τόσες M_1-ακμές όσες και M_2. Και αφού το M_2 είναι μέγιστο ταίριασμα έπεται ότι το πλήθος ακμών του M_1 είναι ίσο με αυτό του M_2 και άρα είναι κι αυτό μέγιστο, όπως έπρεπε να δείξουμε. □

Παρατηρηση 5.5. Λόγω του Θεωρήματος 5.4 μπορούμε να ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία για την εύρεση ενός μέγιστου ταιριάσματος ενός διμερούς γραφήματος: ξεκινάμε από ένα οποιοδήποτε ταίριασμα (π.χ. το κενό) και ψάχνουμε να βρούμε επαυξάνοντα μονοπάτια. Κάθε φορά που βρίσκουμε ένα τέτοιο ακολουθούμε τη διαδικασία της Παρατήρησης 5.4 ώστε να αυξήσουμε κατά μία το σύνολο των ακμών που συμμετέχουν στο ταίριασμά μας. Όταν δε μπορούμε πλέον να βρούμε επαυξάνον μονοπάτι είμαστε σίγουροι, από το Θεώρημα 5.4 ότι έχουμε βρεί ένα μέγιστο ταίριασμα.

Ορισμος 5.5. (Κάλυμμα κορυφών) Ένα σύνολο κορυφών U σε ένα γράφημα G λέγεται *κάλυμμα κορυφών* του G αν κάθε ακμή του G έχει μια τουλάχιστον κορυφή στο U.

Παραδειγμα 5.6. Στο Σχ. 23(a) το σύνολο $\{1, 6, 8\}$ είναι κάλυμμα κορυφών.

Θεωρημα 5.5. (König, 1931, και Egerváry, 1931) *Σε ένα διμερές γράφημα το μέγεθος ενός μεγίστου ταιριάσματος ισούται με το μέγεθος ενός ελαχίστου καλύμματος κορυφών.*

Αποδειξη. Έστω G διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών τα A και B και M ένα ταίριασμα του G με μέγιστο πλήθος ακμών. Θα κατασκευάσουμε ένα σύνολο κορυφών U, μεγέθους $|U| = |M|$, που θα είναι κάλυμμα κορυφών του G. Αυτό θα σημαίνει ότι το ελάχιστο μέγεθος καλύμματος κορυφών του G είναι το πολύ $|M|$. Από την άλλη μεριά όμως, εύκολα βλέπει κανείς ότι κάθε κάλυμμα κορυφών πρέπει να έχει τουλάχιστον $|M|$ κορυφές, οπότε η απόδειξη του Θεωρήματος 5.5 θα είναι πλήρης.

Επιλέγουμε λοιπόν να βάλουμε στο σύνολο U μια ακριβώς κορυφή από κάθε ακμή του M. Έστω $uv \in M$, με $u \in A, v \in B$. Αν υπάρχει εναλλακτικό μονοπάτι που καταλήγει στο v τότε βάζουμε την κορυφή v στο σύνολο U, αλλιώς βάζουμε την κορυφή u. Είναι φανερό ότι με αυτή την κατασκευή ισχύει

$$|U| = |M|.$$

Απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο U που κατασκευάσαμε είναι κάλυμμα κορυφών του γραφήματος. Έστω λοιπόν ab μια ακμή του γραφήματος με $a \in A, b \in B$. Πρέπει να δείξουμε ότι τουλάχιστον ένα από τα a, b ανήκει στο U. Αν $ab \in M$ αυτό είναι προφανές οπότε υποθέτουμε ότι $ab \notin M$. Επειδή το M είναι μέγιστο ταίριασμα έπεται ότι υπάρχει $a'b' \in M$, με $a = a'$ ή $b = b'$. Αν η a είναι αταίριαστη τότε $b = b'$ και η ακμή ab αποτελεί εναλλακτικό μονοπάτι, οπότε η κορυφή της $a'b'$ που επιλέχτηκε για το U ήταν η $b' = b$, και άρα πάλι δείξαμε αυτό που θέλουμε.

Μπορούμε συνεπώς να υποθέσουμε ότι $a = a'$. Αν το $a = a'$ δεν είναι στο U τότε $b' \in U$, άρα υπάρχει κάποιο εναλλακτικό μονοπάτι π που καταλήγει στο b'. Τότε όμως υπάρχει και κάποιο εναλλακτικό μονοπάτι που καταλήγει στο b: είτε το $\pi' = \pi b$ (αν $b \in \pi$) είτε το $\pi' = \pi b' a' b$. Επειδή το M είναι μέγιστο το π' πέρα από εναλλακτικό δε μπορεί να είναι και επαυξάνον μονοπάτι, άρα το b είναι ταιριασμένο στο M και είχε επιλεγεί για το U. □

Παρατηρηση 5.6. Το Θεώρημα 5.5 μας δίνει τη δυνατότητα να *πιστοποιήσουμε* ένα μέγιστο ταίριασμα. Φανταστείτε για παράδειγμα ότι έχετε μια εταιρεία που πουλάει μέγιστα ταιριάσματα σε διμερή γραφήματα. Έρχεται δηλ. ο πελάτης σας και σας δίνει ένα (τεράστιο) διμερές γράφημα, και ζητά από σας να βρείτε ένα μέγιστο ταίριασμα γι΄ αυτό. Για να σας πληρώσει όμως ζητάει και εγγυήσεις ότι το ταίριασμα που του βρήκατε είναι όντως μέγιστο. Τότε εσείς δεν έχετε παρά να του δώσετε, μαζί με το ταίριασμα M που υπολογίσατε, και ένα σύνολο κορυφών U, με τόσες κορυφές όσες το ταίριασμα έχει ακμές, και τέτοιο ώστε το U να είναι κάλυμμα όλων των ακμών του γραφήματος (κάθε ακμή του γραφήματος δηλ. να περιέχει κάποια κορυφή του U). Τέτοιο σύνολο κορυφβν U υπάρχει λόγω του Θεωρήματος 5.4. Τότε, πάλι λόγω του Θεωρήματος 5.4, ο πελάτης σας (ο οποίος εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει τον ισχυρισμό σας ότι $|U| = |M|$ και ότι το U είναι κάλυμμα κορυφών) είναι βέβαιος ότι το M είναι μέγιστο ταίριασμα.

Ασκηση 5.14. Δίδεται ένας $m \times n$ πίνακας A με στοιχεία $A_{ij} \in \{0, 1\}$. Με *ευθεία* του πίνακα εννούμε μαι οποιαδήποτε γραμμή ή στήλη του. Δείξτε ότι το ελάχιστο πλήθος ευθειών που περιέχει όλα τα 1 του A είναι ίσο με το μέγιστο πλήθος από 1 που ανά δύο δε βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

Παρατηρηση 5.7. Ας δείξουμε τώρα ότι το Θεώρημα 5.3 μπορεί να αποδειχθεί εύκολα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.5.

Πράγματι ας υποθέσουμε ότι σε ένα διμερές γράφημα ισχύει η συνθήκη (37) αλλά δεν υπάρχει πλήρες ταίριασμα του A. Από το Θεώρημα 5.5 υπάρχει σύνολο κορυφών U, με $|U| < |A|$, που είναι κάλυμμα κορυφών, έστω $U = A' \cup B'$ με $A' \subseteq A$ και $B' \subseteq B$. Έπεται ότι $|B'| < |A \setminus A'|$. Επειδή το U είναι κάλυμμα κορυφών έχουμε ότι δεν υπάρχουν στο G ακμές ανάμεσα στα σύνολα $A \setminus A'$ και $B \setminus B'$, άρα

$$|N(A \setminus A')| \leq |B'| < |A \setminus A'|,$$

και αυτό αντιφάσκει με την συνθήκη (37) για το σύνολο $J = A \setminus A'$.