Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 6 – 3-11-2016. Παραδοτέες 10-11-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $f_t(x) = f(x-t)$ δείξτε ότι αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ τότε $f_t \to f$ για $t \to 0$ όπου η σύγκλιση είναι στον $L^1(\mathbb{R})$.

Πρόβλημα 2. Σε ένα χώρο Hilbert ο M είναι κλειστός υπόχωρος. Δείξτε ότι $(M^\perp)^\perp = M$.

Πρόβλημα 3. Στο χώρο Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ δώστε ένα παράδειγμα *γνήσιου* γραμμικού υπόχωρου M (αναγκαστικά όχι κλειστού) ώστε να ισχύει $M^\perp = \{0\}$.

Πρόβλημα 4. Αν $R > 0$ και $B = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \|x\| \le R\right\}$ δείξτε ότι το σύνολο B είναι κλειστό αλλά όχι συμπαγές.

Πρόβλημα 5. Αν e_n είναι μια ορθοκανονική βάση σε ένα χώρο Hilbert και $f_n \in H$ είναι μια ακολουθία που έχει την ιδιότητα

$$\sum_n \|e_n - f_n\|^2 < 1,$$

δείξτε ότι οι (πεπερασμένοι) γραμμικοί συνδυασμοί των f_n είναι πυκνοί στον H.

Υπόδειξη: Αρκεί να δείξετε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικό $x \in H$ που να είναι ορθογώνιο σε όλα τα f_n.

Πρόβλημα 6. Δείξτε ότι αν οι πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ είναι όλοι διαφορετικοί τότε οι συναρτήσεις $e_j(x) = e^{i\lambda_j x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες (ως στοιχεία του διανυσματικού χώρου των συναρτήσεων $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

Πρόβλημα 7. (α) Αν $a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots, N$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ δείξτε

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

(β) Αν $a_n \to 0$ είναι φθίνουσα πραγματική ακολουθία και τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_n b_n$ είναι φραγμένα δείξτε ότι η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει.

Πρόβλημα 8. Αν $c_n \in [0, \infty)$ έχει το 0 ως σημείο συσσώρευσης δείξτε ότι υπάρχει αρίθμηση των ρητών $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{r_n \le x} c_n$$

να είναι παντού πεπερασμένη.