Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 7 – 10-11-2016. Παραδοτέες 24-11-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι το θεώρημα του Baire δεν ισχύει στο μετρικό χώρο των ρητών αριθμών (ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης).

Πρόβλημα 2. Αν V είναι ένας χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης (με άλλα λόγια, αν V είναι ο $\mathbb{C}^n$ ή ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με κάποια νόρμα) τότε όλοι οι γραμμικοί τελεστές πάνω στο V είναι φραγμένοι.

Υπόδειξη: Στο χώρο $\mathbb{R}^n$ ή $\mathbb{C}^n$ κάθε κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι συμπαγές.

Πρόβλημα 3. Δεν είναι εύκολο το να βρει κανείς μη φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή ή τελεστές πάνω σε ένα χώρο Banach. Αν ο χώρος δεν είναι πλήρης, είναι απλά δηλ. ένας χώρος με νόρμα, τότε είναι πιο απλό. Πάρτε, για παράδειγμα, το χώρο $X = C^1([0,1])$ των συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων $[0,1] \to \mathbb{C}$, με τη νόρμα $\|\cdot\|_\infty$. Δείξτε ότι ο X δεν είναι πλήρης χώρος. Δείξτε επίσης ότι η απεικόνιση $X \to \mathbb{C}$ που στέλνει $f \to f'(1/2)$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές αλλά όχι συνεχές (φραγμένο).

Πρόβλημα 4. Σε ένα χώρο με νόρμα δείξτε ότι κάθε γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης είναι κλειστός.

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι ο χώρος X των ακολουθιών $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ που συγκλίνουν στο 0 και με τη νόρμα $\|(a_1, a_2, \ldots)\| = \sup_n |a_n|$ είναι πλήρης.

Πρόβλημα 6. Η ακολουθία $a_n \in \mathbb{R}$ είναι τέτοια ώστε οποτεδήποτε η ακολουθία πραγματικών b_n συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_n a_n b_n$ συγκλίνει επίσης. Δείξτε ότι $\sum_n |a_n| < \infty$.

Πρόβλημα 7. Ας είναι X ένας γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με δύο νόρμες $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, και πλήρης και με τις δύο νόρμες. Αν υπάρχει πεπερασμένη σταθερά M τέτοια ώστε $\|x\|_2 \le M\|x\|_1$ για κάθε $x \in X$, τότε υπάρχει και πεπερασμένη σταθερά M' ώστε να ισχύει $\|x\|_1 \le M'\|x\|_2$ για κάθε $x \in X$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης.

Πρόβλημα 8. Αν X είναι χώρος Banach και οι φραγμένοι τελεστές $T_n : X \to Y$ συγκλίνουν για κάθε $x \in X$ (δηλ. υπάρχει το όριο $\lim_n T_n x$ για κάθε $x \in X$), τότε ορίζεται ο τελεστής

$$Tx = \lim_n T_n x$$

που εύκολα βλέπουμε ότι είναι γραμμικός. Δείξτε ότι ο T είναι φραγμένος.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Θεώρημα Banach-Steinhaus.

Πρόβλημα 9. Ας είναι X ο γραμμικός χώρος όλων των πολυωνύμων της μορφής $p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n$, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$, και $p_j \in \mathbb{C}$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η ποσότητα $\|p\| = \max_j |p_j|$ είναι νόρμα στο χώρο αυτό. Δείξτε ότι ο χώρος αυτός δεν είναι πλήρης.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος Banach-Steinhaus αποτυγχάνει για κατάλληλη επιλογή φραγμένων συναρτησοειδών Λ_n στον X.

Πρόβλημα 10. Ας είναι $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε για κάθε αναδιάταξη π των φυσικών αριθμών (αυτό σημαίνει $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ είναι 1-1 και επί) η σειρά $\sum_{n=1}^\infty a_{\pi(n)}$ συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό. Δείξτε ότι $\sum_n |a_n| < \infty$.

Πρόβλημα 11. Αν μ είναι ένα Borel θετικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ με $\mu(\mathbb{R}) < \infty$ ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του μ ως τη μιγαδική συνάρτηση

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x}\, d\mu(x) \qquad (\xi \in \mathbb{R}).$$

Δείξτε ότι η συνάρτηση $\widehat{\mu}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$, είναι απολύτως μικρότερη από $\mu(\mathbb{R})$ αλλά δεν τείνει απαραίτητα στο 0 για $|\xi| \to +\infty$.

Υπόδειξη: Υπολογίστε το μετ. Fourier του μέτρου δ_0, που ορίζεται από: $\delta_0(A) = \mathbf{1}(0 \in A)$, για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.