Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Υπόδειγμα Διαγώνισματος – Για το διαγώνισμα της 3-11-2016

Πρόβλημα 1. Ας είναι X ένα σύνολο και Σ_1, Σ_2 δύο σ-άλγεβρες στο X. Ισχύει ή όχι ότι $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ είναι σ-άλγεβρα στο X; Ότι $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ είναι σ-άλγεβρα στο X; Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.

Πρόβλημα 2. Ας είναι X και Y δύο χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ μια γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι αν η T είναι συνεχής στο $0 \in X$ τότε είναι συνεχής παντού στο X.

Πρόβλημα 3. Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη δείξτε αν η $F(\xi) = \int \cos \xi x \cdot f(x)\, dx$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον πόντους αν δείξετε ομοιόμορφη συνέχεια.

Πρόβλημα 4. Τροποποιούμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου Cantor έτσι ώστε στο n-οστό βήμα της κατασκευής να μη «πετάμε» το μεσαίο 1/3 του κάθε εναπομείναντος διαστήματος αλλά το μεσαίο x_n κομμάτι (η συνήθης κατασκευή του συνόλου Cantor έχει όλα τα $x_n = \frac{1}{3}$). Κατά τα άλλα η κατασκευή παραμένει η ίδια.

Δείξτε ότι το σύνολο που προκύπτει κατ' αυτόν τον τρόπο έχει Lebesgue μέτρο θετικό αν και μόνο αν $\sum_n x_n < \infty$.

Πρόβλημα 5. Ένας πραγματικός αριθμός $x \in [0, 1]$ ονομάζεται *προσεγγίσιμος* αν υπάρχουν άπειροι μη αρνητικοί ρητοί $\frac{p}{q}$ τέτοιοι ώστε

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \le \frac{100}{q^3}.$$

Δείξτε ότι οι προσεγγίσιμοι πραγματικοί αριθμοί του $[0, 1]$ έχουν μέτρο 0.

- Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες. Κλειστές σημειώσεις.