ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρία Ομάδων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. (α) Δώστε τον ορισμό του ομομορφισμού και ισομορφισμού ομάδων.
(β) Ποια από τα παρακάτω ζεύγη είναι ζεύγη ισόμορφων ομάδων και γιατί (πλήρη αιτιολόγηση);

$$(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}),\ (\mathbb{Z}, \mathbb{Q}),\ (2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}),\ (\mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*)$$

(Με $\mathbb{R}^*$ και $\mathbb{C}^*$ συμβολίζονται οι πραγματικοί και οι μιγαδικοί αριθμοί χωρίς το 0. Στα τρία πρώτα ζεύγη η πράξη είναι η πρόσθεση ενώ στο τέταρτο ο πολλαπλασιασμός.)

2. (α) Ορίστε την εναλλάσουσα ομάδα $A_n \le S_n$ και δείξτε ότι είναι κανονική υποομάδα της S_n.
(β) Να βρεθεί η τάξη του στοιχείου $(2,0) + <(4,4)>$ της ομάδας

$$(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_8)/<(4,4)>.$$

3. (α) Δείξτε ότι η τομή οποιουδήποτε πλήθους κανονικών υποομάδων μιας ομάδας G είναι κανονική υποομάδα της G.
(β) Σε μια αβελιανή ομάδα G έστω A το σύνολο στοιχείων της G που έχουν πεπερασμένη τάξη. Δείξτε ότι το A είναι υποομάδα της G και μάλιστα κανονική. Δείξτε επίσης ότι η ομάδα πηλίκο G/A δεν έχει στοιχεία πεπερασμένης τάξης πέρα από το μοναδιαίο.

4. (α) Έστω X σύνολο πάνω στο οποίο δρα η ομάδα G. Να οριστούν τα τρία σύνολα που εμφανίζονται στην παρακάτω ισότητα και να αποδειχθεί αυτή:

$$|Gx| = (G : G_x).$$

(β) Έστω $|G| = p^n$, p πρώτος. Η ομάδα G δρα στο σύνολο X. Το σύνολο X είναι πεπαρασμένο και ο p διαιρεί το $|X|$. Δείξτε ότι αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $gx = x$, για κάθε $g \in G$, τότε υπάρχουν τουλάχιστον p τέτοια αναλλοίωτα στοιχεία x.

5. (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχει απλή ομάδα τάξης 45.
(β) Έστω ότι ο πρώτος p διαιρεί την τάξη της ομάδας G. Έστω H μια p-υποομάδα Sylow της G και K μια p-υποομάδα της G. Δείξτε ότι υπάρχει $g \in G$ τέτοιο ώστε $g^{-1}Kg \le H$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 3 Ιουνίου 2000