Ασκήσεις για το μεταπτυχιακό μάθημα "ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ"

Παραδοτέες Δευτέρα, 5/5/2003. Παρακαλώ να είστε εξαιρετικά λεπτομερείς και ακριβείς στις απαντήσεις σας. Από το φυλλάδιο αυτό θα εξαρτηθεί εν πολλοίς ο τελικός βαθμός σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 0

(α) Αν οι ΤΜ A, B είναι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί των $Z_1, \ldots, Z_n$ και οι Z_j είναι ανεξάρτητες κανονικές με μέση τιμή 0, και επίσης $\mathbf{E}[AB] = 0$ τότε και οι A, B είναι ανεξάρτητες κανονικές.

(β) Δώστε παράδειγμα δύο κανονικών ΤΜ A, B που δεν είναι ανεξάρτητες αλλά πληρούν τη συνθήκη $\mathbf{E}[AB] = 0$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Κατασκευή ανέλιξης Wiener με συναρτήσεις Haar για $t \in [0, 1]$)
Οι συναρτήσεις Haar στο $[0, 1]$ είναι οι συναρτήσεις $\phi_{00} = 1$ και

$$\phi_{ij}(x) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2} & \frac{2j-2}{2^i} \leq x \leq \frac{2j-1}{2^i} \\ -2^{(i-1)/2} & \frac{2j-1}{2^i} \leq x \leq \frac{2j}{2^i} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Δείξτε ότι η οικογένεια ϕ_{ij}, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $j = 1, \ldots, 2^{i-1}$, είναι ορθοκανονική βάση του $L^2[0, 1]$.

Ορίζουμε $\psi_{ij}(t) = \int_0^t \phi_{ij}(x)\, dx$ και, αν Y_{ij} είναι ανεξάρτητες ΤΜ με τυπική κανονική κατανομή, ορίζουμε επίσης $V_0(t) = Y_{00}\psi_{00}(t)$ και $V_i(t) = \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t)$ για $i \geq 1$.

(β) Δείξτε ότι η σειρά $X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $t \in [0, 1]$ με πιθανότητα 1, και άρα η συνάρτηση $X(t)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ σχεδόν σίγουρα.
(*Υπόδειξη:* Δείξτε $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{Pr}\left[\exists t \in [0, 1] :\ |V_i(t)| > \frac{1}{i^2}\right] < \infty$ με κατάλληλη άνω εκτίμηση του γενικού όρου.)

(γ) Η ΤΜ $X(t) - X(s)$ είναι κανονική για κάθε $s < t$.

(δ) $\mathbf{E}\left[(X(t) - X(s))^2\right] = t - s$.

(ε) Οι προσαυξήσεις της $X(t)$ είναι ανεξάρτητες.

Τα (α)-(ε) δείχνουν ότι η $X(t)$ είναι μια ανέλιξη Wiener.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2 (Ανάλυση Calderón–Zygmund με τεχνολογία martingales.)
Σκοπός είναι να δείξουμε ότι κάθε μη-αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ μπορεί να γραφεί, για κάθε $\alpha > 0$, σαν άθροισμα μιας συνάρτησης g (good) που είναι φραγμένη από α και μιας συνάρτησης b (bad), με φορέα ξένο από την g, που δεν είναι φυσικά φραγμένη, αλλά ο φορέας της b είναι μια ξένη ένωση από διαστήματα Q_j, $j = 1, 2, \ldots$, τέτοια ώστε σε κάθε Q_j ισχύει

$$\alpha \leq \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2\alpha.$$

(Η g δηλ. είναι φραγμένη ενώ η b έχει φραγμένους μέσους όρους στα διαστήματα που απαρτίζουν το φορέα της.) Επιπλέον ισχύει $\left|\bigcup_j Q_j\right| \leq \alpha^{-1} \int f$.

Αυτή η ανάλυση της τυχούσας μη-αρνητικής $f \in L^1(0, 1)$ λέγεται ανάλυση Calderón–Zygmund και έχει πάρα πολλές εφαρμογές στην ανάλυση.

(α) Πάρτε ως δειγματικό χώρο $\Omega = [0, 1]$ και ορίστε τις σ-άλγεβρες

$$\mathcal{F}_n = \sigma\left\{[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}] :\ k = 0, \ldots, n-1\right\}.$$

Θεωρείστε την f ως μια ολοκληρώσιμη, μη-αρνητική ΤΜ πάνω στο Ω και ορίστε το martingale

$$f_n = \mathbf{E}[f \mid \mathcal{F}_n].$$

Περιγράψτε (χωρίς πιθανοθεωρητική ορολογία) τις συναρτήσεις f_n.

(β) Αν ορίσουμε $T = \inf\{n : \ f_n > \alpha\}$ δείξτε ότι το T είναι stopping-time, το $f_{\min\{n,T\}}$ είναι martingale, και περιγράψτε (χωρίς πιθανοθεωρητική ορολογία) τις συναρτήσεις $f_{\min\{n,T\}}$, όπως και τα σύνολα $\{T = n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, και $\{T = \infty\}$.

(γ) Χρησιμοποιείστε το θεώρημα σύγκλισης martingales στο σύνολο $\{T = \infty\}$ για να ορίσετε την g και ορίσετε $b = f - g$. Αποδείξτε τις ιδιότητες των g και b καθώς και την ανισότητα $\left|\bigcup_j Q_j\right| \le \alpha^{-1} \int f$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3 (Η δυαδική μεγιστική συνάρτηση Hardy–Littlewood με τεχνολογία martingales.) Έστω $f \in L^1(0,1)$ και $\mathcal{I}_n$ η συλλογή των διαστημάτων του $[0,1]$ με μήκος 2^{-n} και άκρα στα πολλαπλάσια του 2^{-n}. Για $x \in [0,1]$ γράφουμε $I_{x,n}$ για το αριστερότερο από τα διαστήματα της $\mathcal{I}_n$ που περιέχει το x.

(α) Δείξτε με το θεώρημα σύγκλισης των martingales (διαβάστε πρώτα το Πρόβλημα 2) ότι σχεδόν παντού ισχύει

$$\lim_n \frac{1}{|I_{x,n}|} \int_{I_{x,n}} f(t)\ dt = f(x).$$

(β) Η δυαδική μεγιστική συνάρτηση $M[f]$ της f ορίζεται ως η συνάρτηση

$$M[f](x) = \sup_n \int_{I_{x,n}} |f(t)|\ dt.$$

Χρησιμοποιώντας τη μεγιστική (maximal) ανισότητα του Doob δείξτε ότι

$$|\{x : \ M[f](x) > \lambda\}| \le \frac{C}{\lambda} \int_0^1 |f|,$$

για μια θετική σταθερά C.