Ασκήσεις για το μεταπτυχιακό μάθημα ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΑΝΕΛΙΞΕΙΣ

Παραδοτέες τη Δευτέρα, 23/6/2003.

Στο φυλλάδιο αυτό θα μελετήσουμε ιδιότητες τυχαίων περιπάτων πάνω σε (μη κατευθυνόμενα) γραφήματα Ένα τέτοιο γράφημα G είναι απλά ένα πεπερασμένο σύνολο V, $|V| = n$, από *κορυφές* κι ένα σύνολο E, $|E| = m$, από *ακμές*. Μια ακμή δε είναι απλά ένα δισύνολο από στοιχεία του V. Οι γείτονες μιας κορυφής $v \in V$ είναι το σύνολο $N(v) = \{u \in V : \{u, v\} \in E\}$, και ο βαθμός $d(v) = |N(v)|$ μιας κορυφής είναι το πλήθος των γειτόνων της.

Οι τυχαίοι περίπατοι πάνω στο G ξεκινούν από κάποια κορυφή του G και σε κάθε χρονική στιγμή επιλέγουν την επόμενη θέση τους ομοιόμορφα ανάμεσα στους γείτονες της τρέχουσας θέσης, και ανεξαρτητα από τις προηγούμενές τους επιλογές. Αποτελεί έτσι ένας τέτοιος τυχαίος περίπατος μια ομογενή αλυσίδα Markov με σύνολο καταστάσεων το V.

Πρόβλημα 1. *Ένα γράφημα λέγεται συνεκτικό αν μπορεί κανείς να πάει από μια οποιαδήποτε κορυφή του σε οποιαδήποτε άλλη κινούμενος μονάχα πάνω στις ακμές του γραφήματος. Λέγεται δε ένα γράφημα* διμερές *αν μπορεί το σύνολο των κορυφών V να διαμεριστεί σε δύο μη κενά σύνολα V_1 και V_2, τέτοια ώστε όλες οι ακμές πηγαίνουν από το ένα V_i στο άλλο και ποτέ μέσα στο ίδιο V_i.*

Δείξτε ότι αν ένα γράφημα είναι συνεκτικό και όχι διμερές τότε η αλυσίδα Markov που αντιστοιχεί στον τυχαίο περίπατο πάνω στο γράφημα είναι ανάγωγη και απεριοδική.

Όλα τα γραφήματα τα οποία μελετούμε από δω και πέρα σε αυτό το φυλλάδιο είναι συνεκτικά και όχι διμερή, χωρίς απαραίτητα να το αναφέρουμε αυτό κάθε φορά.

Πρόβλημα 2. *Να βρεθεί η μοναδική στάσιμη κατανομή πιθανότητας στις κορυφές του G για τον τυχαίο περίπατο πάνω στο G.*

Αν $u, v \in V$ συμβολίζουμε με h_{uv} το μέσο χρόνο που μεσολαβεί μέχρι την πρώτη επίσκεψη στην κορυφή v αν ο τυχαίος μας περίπατος ξεκινήσει από την κορυφή u.

Πρόβλημα 3. *Αν $\pi_v, v \in V$ είναι η στάσιμη κατανομή δείξτε ότι $h_{vv} = 1/\pi_v$.*

Συμβολίζουμε με $C_{uv} = h_{uv} + h_{vu}$ (mean commute time) το μέσο χρόνο που απαιτείται για μια επίσκεψη στο v και πίσω στο u, ξεκινώντας από το u. Με $\mathcal{C}_u(G)$ (mean cover time from u) συμβολίζουμε το μέσο χρόνο που απαιτείται, ξεκινώντας από την κορυφή u, για να επισκεφθούμε *όλες* τις κορυφές του G. Τέλος γράφουμε (mean cover time)

$$\mathcal{C}(G) = \max_{u \in V} \mathcal{C}_u(G).$$

Πρόβλημα 4. *Αν μια αλυσίδα Markov έχει πίνακα μετάβασης που είναι διπλά στοχαστικός, τα αθροίσματα δηλ. των στοιχείων των γραμμών και των στηλών του είναι 1, τότε η στάσιμη κατανομή της είναι αναγκαστικά η ομοιόμορφη καταναμή πάνω στις καταστάσεις.*

Πρόβλημα 5. *Οι* κατευθυνόμενες *ακμές του G προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε κάθε ακμή του G με δύο ακμές που συνδέουν τις ίδιες κορυφές αλλά με αντίστροφες φορές. Για ένα τυχαίο περίπατο στο G ορίζουμε ένα νέο,* παράλληλο, *τυχαίο περίπατο πάνω στις κατευθυνόμενες ακμές του G. Τη χρονική στιγμή t, $t \geq 1$, η τρέχουσα θέση αυτού του νέου τυχαίου περιπάτου είναι η κατευθυνόμενη ακμή που μόλις διένυσε ο αρχικός μας τυχαίος περίπατος (που κινείται από κορυφή σε κορυφή). Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης, καθώς και η μοναδική στάσιμη κατανομή.*

Στο νέο αυτό τυχαίο περίπατο ποιος είναι ο χρόνος $C_{\alpha\alpha}$, όπου α μια ακμή του G;

Πρόβλημα 6. *Δείξτε ότι αν οι κορυφές u και v συνδέονται στο γράφημα G με μια ακμή τότε ισχύει $h_{uv} + h_{vu} \leq 2m$.*

Ας θυμηθούμε λίγο σχολική φυσική: ένα *ηλεκτρικό δίκτυο αντιστάσεων* είναι ένα μη κατευθυνόμενο γράφημα G του οποίου οι ακμές έχουν η καθεμία και μια ωμική αντίσταση R (μετριέται σε ohm). Στο δίκτυο αυτό κυκλοφορεί ηλεκτρικό ρεύμα I (μετριέται σε Ampére (A)) και ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε κορυφές του υπάρχει μια διαφορά δυναμικού (τάση) V (μετριέται σε Volt (V)).

Ισχύει ο νόμος του Kirchhoff, που λέει ότι σε κάθε κορυφή όσο ρεύμα μπαίνει άλλο τόσο βγαίνει, και ο νόμος του Ohm, που προσδιορίζει τη σχέση ανάμεσα σε ρεύμα, τάση και αντίσταση ανάμεσα σε δύο σημεία: $V = IR$. Γνωρίζοντας τις αντιστάσεις των ακμών του δικτύου μπορούμε να υπολογίσουμε την αντίσταση ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε κορυφές χρησιμοποιώντας τους νόμους αυτούς, και την αντίσταση αυτή τη συμβολίζουμε με R_{uv}. Για παράδειγμα, με χρήση αυτών των δύο νόμων προκύπτει ότι σε σύνδεση αντιστάσεων σε σειρά προστίθενται αυτές, ενώ σε παράλληλη σύνδεση προστίθενται τα αντίστροφά των για να δώσουν το αντίστροφο της συνολικής αντίστασης.

Πρόβλημα 7. *Έστω ένα γράφημα G. Αντιστοιχίζουμε σε αυτό ένα ηλεκτρικό δίκτυο αντιστάσεων με τις ίδιες κορυφές και δίνοντας σε κάθε ακμή αντίσταση 1 ohm. Εξωτερικά του δικτύου εισάγουμε ρεύμα εντάσεως $d(x)$ A σε κάθε κορυφή του δικτύου $x \in V$ και αφαιρούμε ρεύμα εντάσεως $2m$ A από την κορυφή v. Έστω ϕ_{uv} η τάση στην κορυφή u ως προς την v.*

Χρησιμοποιώντας τους νόμους Kirchhoff και Ohm δείξτε ότι

$$d(u) = \sum_{w \in N(u)} \phi_{uv} - \phi_{wv}.$$

Δείξτε επίσης, για τον τυχαίο περίπατο στο G, ότι ισχύει

$$h_{uv} = \sum_{w \in N(u)} \frac{1}{d(u)}(1 + h_{wv}).$$

Δείξτε, τέλος, ότι $h_{uv} = \phi_{uv}$.

Πρόβλημα 8. *Δείξτε ότι $C_{uv} = 2mR_{uv}$, για κάθε δύο κορυφές $u, v \in V$. Επίσης ότι $C_{uv} \leq n^3$.*

Δέντρο είναι ένα συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους. *Δέντρο που παράγει ένα γράφημα G* είναι ένα δέντρο με σύνολο κορυφών ίσο με αυτό του G και που κάθε ακμή του δέντρου είναι και ακμή του V. Κατά κάποιο τρόπο ένα δέντρο που παράγει ένα συνεκτικό γράφημα G είναι μια ελάχιστη συλλογή από ακμές που μπορούμε να κρατήσουμε, από τις ακμές του G, που διατηρεί το γράφημα συνεκτικό.

Πρόβλημα 9. *Δείξτε ότι δέντρο με n κορυφές έχει $n-1$ ακμές. Δείξτε ότι κάθε συνεκτικό γράφημα έχει δέντρο που το παράγει.*

Ένα δέντρο T που παράγει ένα γράφημα G μπορεί να διανυθεί, ξεκινώντας από μια οποιαδήποτε κορυφή v, με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ακμή του T να διανυθεί ακριβώς μια φορά σε κάθε κατεύθυνση. Μια τέτοια διάνυση του δέντρου ορίζει μια αρίθμηση πάνω στις κορυφές

$$v = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{2n-2},$$

στην οποία κάθε κορυφή εμφανίζεται ενδεχομένως και περισσότερες από μια φορές. Χρησιμοποιείστε αυτή την αρίθμηση για να δείξετε.

Πρόβλημα 10. $\mathcal{C}(G) \leq 2m(n-1)$.