Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Μέτρου

Μιχάλης Κολουντζάκης – Φθινοπωρινό εξάμηνο 2000-2001

ΠΡΩΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου δείξτε ότι αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει θετικό μέτρο τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα διάστημα I τέτοιο ώστε $\left|E \cap I\right|_e \geq (1-\epsilon)|I|$.

2. (α) Αν $0 \leq \phi \in L^1$ δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|E| < \delta$ συνεπάγεται $\int_E \phi < \epsilon$.
(β) Οι συναρτήσεις f_n και f είναι ορισμένες στο $[0,1]$ και $f_n \to f$, κατά μέτρο. Επίσης υπάρχει μια $\phi \in L^1$ τέτοια ώστε $|f_n|, |f| \leq \phi$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ στην L^1 μετρική.

3. (α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις του τύπου $\sum_{j=1}^N a_j \chi_{I_j}$, όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και I_j φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ (δηλ. τμηματικά σταθερές συναρτήσεις) είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R})$.
(β) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$c_\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos \lambda x \; dx.$$

Δείξτε ότι $|c_\lambda(f)| \leq \|f\|_{L^1}$ και ότι $\lim_{\lambda\to\infty} c_\lambda(f) = 0$.

4. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2} \; dx.$$

5. Θεωρείστε την υποομάδα $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}^2$. Για $x, y \in \mathbb{R}^2$ γράφουμε $x \sim y$ αν υπάρχει $w \in G$ τέτοιο ώστε $x = y + w$.
(α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας του $\mathbb{R}^2$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο $Q = [-10, 10]^2$.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας το οποίο επιπλέον ανήκει στο Q. Δείξτε ότι το A δεν είναι μετρήσιμο.

6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει άπειρη και αριθμήσιμη σ-άλγεβρα υποσυνόλων κάποιου συνόλου.

7. Για $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|}.$$

Δείξτε ότι αν $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο αν και μόνο αν $d(f_n, f) \to 0$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 4 Νοεμβρίου 2000