Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Μέτρου

Μιχάλης Κολουντζάκης – Φθινοπωρινό εξάμηνο 2000-2001

ΔΕΥΤΕΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. Έχουμε $f, f_k \in L^p$, $(1 < p < \infty)$, και $f_k \to f$, σχεδόν παντού. Επίσης υπάρχει σταθερά $M < \infty$ τέτοια ώστε $\|f_k\|_p \le M$, για κάθε k. Δείξτε ότι αν $g \in L^{p'}$, με $1/p + 1/p' = 1$, τότε

$$\int f_k g \to \int f g.$$

2. Δίδονται δύο σύνολα E_1 και E_2 στο επίπεδο με θετικό μέτρο. Δείξτε ότι υπάρχει διάστημα $I = [a, b] \times [c, d]$ που περιέχεται στο $E_1 - E_2 = \{x_1 - x_2 :\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.

3. Δίδονται μιγαδικές συναρτήσεις $g, g_n \in L^2$, τέτοιες ώστε $g_n \to g$ στο L^2. Δείξτε ότι $|g_n|^2 \to |g|^2$ στο L^1.

4. Δίδεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0, R] \to \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο και $f(0) = 0$. Δείξτε ότι

$$\int_0^R |f|^2 \le \frac{1}{2} R^2 \int_0^R |f'|^2.$$

5. Δίδεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων $f_n \in L^2(0, 1)$. Δείξτε ότι αυτό είναι πλήρες αν και μόνο αν για κάθε $x \in [0, 1]$

$$\sum_n \left| \int_0^x f_n(t)\, dt \right|^2 = x.$$

6. Δίδεται ένα ορθοκανονικό σύστημα συναρτήσεων $f_n \in L^2(0, 1)$. Δείξτε ότι αυτό είναι πλήρες αν και μόνο αν

$$\sum_n \int_0^1 \left| \int_0^x f_n(t)\, dt \right|^2 dx = \frac{1}{2}.$$

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 4 ώρες. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε το βιβλίο σας μόνο, κι αυτό όχι για την πρώτη άσκηση, την οποία πρέπει να γράψετε και να μου παραδώσετε μέσα στην πρώτη μισή ώρα.

Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 9 Δεκεμβρίου 2000