Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θεωρία Μέτρου

Μιχάλης Κολουντζάκης – Φθινοπωρινό εξάμηνο 2000-2001

ΠΡΩΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ – ΛΥΣΕΙΣ

1. Χρησιμοποιώντας μόνο τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου δείξτε ότι αν $E \subseteq \mathbb{R}^n$ έχει θετικό μέτρο τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα διάστημα I τέτοιο ώστε $|E \cap I|_e \ge (1-\epsilon)|I|$.

Λύση του 1. Έστω $0 < a = |E|_e$ και $\epsilon > 0$ δεδομένο. Τότε υπάρχει ακολουθία διαστημάτων I_k τ.ώ. $E \subseteq \bigcap I_k$ και $\sum |I_k| < (1+\epsilon)a$. Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που ζητάμε, υποθέτουμε δηλ. ότι για κάθε k έχουμε $|E \cap I_k| < (1-\epsilon)|I_k|$. Αθροίζοντας για όλα τα k παίρνουμε

$$a \le \sum_k |E \cap I_k|_e < (1-\epsilon)\sum_k |I_k| \le (1-\epsilon)(1+\epsilon)a = (1-\epsilon^2)a,$$

που είναι προφανώς αδύνατο.

2. (α) Αν $0 \le \phi \in L^1$ δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|E| < \delta$ συνεπάγεται $\int_E \phi < \epsilon$.
(β) Οι συναρτήσεις f_n και f είναι ορισμένες στο $[0,1]$ και $f_n \to f$, κατά μέτρο. Επίσης υπάρχει μια $\phi \in L^1$ τέτοια ώστε $|f_n|, |f| \le \phi$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ στην L^1 μετρική.

Λύση του 2. (α) Έστω $\epsilon > 0$ δεδομένο. Ορίζουμε $\phi_n = \phi\chi_{\{\phi > n\}}$ η οποία ακολουθία φθίνει στο 0. Από ιτο Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης έχουμε ότι υπάρχει n τέτοιο ώστε $\int_{\{\phi>n\}} \phi = \int \phi_n < \epsilon/2$. Ορίζουμε $\delta = \epsilon/(2n)$ και έστω σύνολο E με μέτρο το πολύ δ. Τότε $\int_E \phi = \int_{E\cap\{\phi\le n\}} \phi + \int_{E\cap\{\phi>n\}} \phi = A + B$. Αλλά $A \le n|E| \le \epsilon/2$ και $B \le \int_{\{\phi>n\}} \phi \le \epsilon/2$.
(β) Έχουμε $\int |f_n - f| = \int_{|f_n-f|>\epsilon/2} |f_n - f| + \int_{|f_n-f|\le\epsilon/2} |f_n - f| = A + B$. Επειδή $|f_n - f| \le 2\phi$ μπορούμε να βρούμε από το (α) ένα $\delta > 0$ τ.ώ. $|E| < \delta$ συνεπάγεται $\int_E \phi < \epsilon/4$, άρα και $\int_E |f_n - f| < \epsilon/2$. Αν λοιπόν διαλέξουμε το n αρκετά μεγάλο, από τη σύγκλιση κατά μέτρο έχουμε ότι $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} < \delta$ και άρα $A < \epsilon/2$. Για το B πάντα έχουμε $B \le \epsilon/2$. Δηλ. για n αρκετά μεγάλο έχουμε $A + B \le \epsilon$ που είναι ακριβώς αυτό που ζητάγαμε.

3. (α) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις του τύπου $\sum_{j=1}^N a_j\chi_{I_j}$, όπου $a_j \in \mathbb{R}$ και I_j φραγμένα διαστήματα στο $\mathbb{R}$ (δηλ. τμηματικά σταθερές συναρτήσεις) είναι πυκνές στον $L^1(\mathbb{R})$.
(β) Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$c_\lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\cos\lambda x\ dx.$$

Δείξτε ότι $|c_\lambda(f)| \le \|f\|_{L^1}$ και ότι $\lim_{\lambda\to\infty} c_\lambda(f) = 0$.

Λύση του 3. (α) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απλή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ προσεγγίζεται στην L^1 μετρική από τμ. σταθερές συναρτήσεις. Επειδή κάθε απλή συνάρτηση είναι πεπερασμένος γραμ. συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συνόλων (που αναγκαστικά θα έχουν πεπερασμένο μέτρο, επειδή μιλάμε για ολοκληρώσιμες απλές) αρκεί να προσεγγίσουμε στο L^1 την χαρακτηριστική τυχόντος μετρήσιμου συνόλου E με $|E| < \infty$. Αν G είναι ένα ανοιχτό που περιέχει το E και $|G \setminus E| < \epsilon$ τότε $\int |\chi_G - \chi_E| = |G \setminus E| < \epsilon$, άρα οι χαρακτηριστικές ανοιχτών προσεγγίζουν όλες τις χαρακτηριστικές στην L^1 μετρική. Αρκεί δηλ. να προσεγγίσουμε την χαρακτηριστική ενός ανοιχτού $G \subseteq \mathbb{R}$ στο L^1. Αλλά ένα τυχόν ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ γράφεται σα ξένη ένωση ανοιχτών διαστημάτων, αριθμήσιμα το πλήθος. Παίρνοντας μια αρκετά μεγάλη πεπερασμένη ένωση από αυτά μπορούμε να κάνουμε το μέτρο του υπολοίπου οσοδήποτε μικρό θέλουμε. Η χαρακτηριστική αυτής της πεπερασμένης ένωσης είναι μια τμημ. σταθερή συνάρτηση και η L^1 διαφορά της από την χ_G είναι ακριβώς το μέτρο των διαστημάτων που δε συμπεριλάβαμε, δηλ. οσοδήποτε μικρή θέλουμε εμείς.
(β) Το ότι $|c_\lambda(f)| \le \int |f|$ είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας. Παρατηρείστε ότι $c_\lambda(\alpha f + \beta g) = \alpha c_\lambda(f) + \beta c_\lambda(g)$ για κάθε $f, g \in L^1$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Έστω $f \in L^1$ και ϵ δεδομένο. Βρίσκουμε τμημ. σταθερή $g = \sum_{j=1}^J a_j\chi_{I_j}$ τ.ώ. $\int |f - g| < \epsilon/2$. Τότε $|c_\lambda(f - g)| < \epsilon/2$ και $c_\lambda(g) = \sum_{j=1}^J a_j c_\lambda(\chi_{I_j})$. Αν $I = (b, c)$

είναι ένα φραγμένο διάστημα τότε $c_\lambda(\chi_I) = (\sin\lambda b - \sin\lambda a)/\lambda$ άρα $c_\lambda(g) \to 0$ όταν $\lambda \to \infty$. Έχουμε άρα $|c_\lambda(f)| \le |c_\lambda(f-g)| + |c_\lambda(g)| = A + B$. Έχουμε δεί ήδη ότι $A < \epsilon/2$ και παίρνοντας το λ αρκετά μεγάλο μπορούμε να έχουμε και ότι το $B < \epsilon/2$. Έχουμε δείξει ότι για κάθε ϵ για αρκετά μεγάλο λ ισχύει $|c_\lambda(f)| < \epsilon$, το οποίό και ζητούσαμε.

4. Υπολογίστε, με πλήρη αιτιολόγηση, το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\, dx.$$

Λύση του 4. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}$. Έχουμε ότι $f_n(x) \to e^{-x/2}$. Για $x \in [0, n)$ έχουμε $\log f_n(x) = x/2 + n\log(1 - x/n)$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα $\log(1-\theta) \le -\theta$, που ισχύει για $\theta < 1$, παίρνουμε $\log f_n(x) \le -x/2$, άρα $0 \le f_n(x) \le e^{-x/2} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έπεται ότι $\lim_n \int_{\mathbb{R}^+} f_n(x) = \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx = 2$.

5. Θεωρείστε την υποομάδα $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ του $\mathbb{R}^2$. Για $x, y \in \mathbb{R}^2$ γράφουμε $x \sim y$ αν υπάρχει $w \in G$ τέτοιο ώστε $x = y + w$.
(α) Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας και ότι κάθε κλάση ισοδυναμίας του $\mathbb{R}^2$ περιέχει τουλάχιστον ένα στοιχείο που βρίσκεται μέσα στο τετράγωνο $Q = [-10, 10]^2$.
(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ σύνολο που περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας το οποίο επιπλέον ανήκει στο Q. Δείξτε ότι το A δεν είναι μετρήσιμο.

Λύση του 5. (α) Είναι σχεδόν προφανές ότι η σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας. Αν K είναι μια κλάση ισοδυναμίας και $(x, y) \in A$ τότε $(x - \lfloor x \rfloor, y - \lfloor y \rfloor) \in K \cap Q$.
(β) Έστω A μετρήσιμο. Αν $g_1, g_2 \in G, g_1 \ne g_2$, τότε τα σύνολα $A + g_1$ και $A + g_2$ είναι ξένα αφού αν υπήρχε $x \in (A + g_1) \cap (A + g_2)$ τότε θα έπρεπε να υπάρχουν $a_1, a_2 \in A$, τ.ώ. $x = a_1 + g_1 = a_2 + g_2$. Τότε $a_1 - a_2 = g_2 - g_1 \in G$, και άρα τα a_1, a_2 ανήκουν στην ίδια κλάση. Αφού όμως το A έχει ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε κλάση έπεται $a_1 = a_2$ και άρα $g_1 = g_2$, άτοπο. Άρα $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g\in G}(A+g)$ είναι μια διαμέριση του επιπέδου, σε αριθμήσιμο πλήθος συνόλων, αφού G αριθμήσιμη. Έχουμε επίσης πως τα μέτρα των $A + g$ είναι όλα ίσα με $|A|$, άρα το μέτρο του A δεν μπορεί να είναι 0, αφού τότε θα είχαμε και ότι το μέτρο του επιπέδου είναι 0. Άρα $|A| > 0$. Θεωρούμε τώρα τα στοιχεία $g_n = (0, 1/n)$, $n \ge 1$, της G και τα σύνολα $A + g_n$. Αυτά είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται όλα στο τετράγωνο $[-20, 20]^2$. Επειδή όμως αυτά είναι άπειρα το πλήθος και έχουν το ίδιο, θετικό μέτρο, συνεπάγεται ότι το $[-20, 20]^2$ έχει κι αυτό άπειρο μέτρο, άτοπο. Άρα το A δεν είναι μετρήσιμο.

6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει άπειρη και αριθμήσιμη σ-άλγεβρα υποσυνόλων κάποιου συνόλου.

Λύση του 6. Έστω ότι $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ είναι μια άπειρη αριθμήσιμη σ-άλγεβρα υποσυνόλων ενός συνόλου Ω. Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας πάνω στα στοιχεία του Ω: $x \sim y$ αν και μόνο αν τα x και y ανήκουν ακριβώς στα ίδια στοιχεία της $\mathcal{A}$. Το Ω διαμερίζεται έτσι σε κάποιες κλάσεις ισοδυναμίας K. Καθένα από τα A_i είναι τότε μια ένωση από τέτοιες κλάσεις γιατί αν $x \in A_i$ και $x \sim y$ τότε και $y \in A_i$. Επίσης κάθε κλάση K μπορούμε να τη γράψουμε ως

$$K = \bigcap_{x\in A_i} A_i \cap \bigcap_{x\notin A_i} A_i^c,$$

όπου x ένα τυχόν στοιχείο της K, άρα $K \in \mathcal{A}$ αφού το παραπάνω είναι μια αριθμήσιμη τομή. Τέλος, το πλήθος των κλάσεων είναι άπειρο αφού αν ήταν πεπερασμένο η $\mathcal{A}$ θα ήταν επίσης πεπερασμένη, αφού κάθε στοιχείο της είναι ένωση κλάσεων. Υπάρχουν λοιπόν τουλάχιστον οι κλάσεις K_i, $i \in \mathbb{N}$, και άρα η $\mathcal{A}$ περιέχει τουλάχιστον τα σύνολα $\bigcup_{i\in I} K_i$, όπου I τυχόν υποσύνολο του $\mathbb{N}$, και όλα αυτά είναι διαφορετικά μεταξύ τους και το πλήθος τους είναι υπεραριθμήσιμο (όσο και το δυναμοσύνολο του $\mathbb{N}$).

7. Για $f, g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}.$$

Δείξτε ότι αν $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο αν και μόνο αν $d(f_n, f) \to 0$.

Λύση του 7. Έστω $d(f_n, f) \to 0$ και $A_n = \{|f_n - f| \ge \epsilon\}$, για κάποιο $\epsilon > 0$. Υποθέστε ότι για μια άπειρη ακολουθία n_k έχουμε $|A_{n_k}| > c > 0$. Τότε

$$d(f_{n_k}, f) \ge \int_{A_{n_k}} \frac{|f_{n_k} - f|}{1 + |f_{n_k} - f|} \ge \int_{A_{n_k}} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \ge c\frac{\epsilon}{1+\epsilon},$$

πράγμα αδύνατο από την υπόθεση. Η προτελευταία ανισότητα δικαιολογείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση $x/(1+x)$ είναι αύξουσα. Αυτό δείχνει ότι $|A_n| \to 0$ και άρα $f_n \to f$ κατά μέτρο. Αντίστροφα, αν $|A_n| \to 0$, έχουμε

$$d(f_n, f) = \int_{A_n} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} + \int_{A_n^c} \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \le |A_n| + \epsilon,$$

επειδή ο ολοκληρωτέος είναι πάντα ≤ 1. Άρα $\limsup_n d(f_n, f) \le \epsilon$, για κάθε $\epsilon > 0$, άρα $d(f_n, f) \to 0$.

Ηράκλειο, 6 Νοεμβρίου 2000