Διαγώνισμα Σεπτεμβρίου

Τετάρτη 16 Σεπτεμβρίου 2015

Πρόβλημα 1. (10 μονάδες)
Δείξτε ότι οι ακέραιοι της μορφής $9\nu + 5$, $\nu \in \mathbb{Z}$, δεν είναι ποτέ τέλεια τετράγωνα.
Λύση: Έστω ότι υπάρχει $\nu, x \in \mathbb{Z}$ τ.ώ. $x^2 = 9\nu + 5$. Παίρνοντας υπόλοιπα $\bmod 9$ βλέπουμε ότι $(x \bmod 9)^2 = 5 \bmod 9$. Όμως, υπολογίζοντάς τα, βλέπουμε ότι κανένα από τα $0^2, 1^2, \ldots, 8^2$ δεν είναι ίσο με $5 \bmod 9$, άρα αυτό είναι αδύνατο.

Πρόβλημα 2. (10 μονάδες)
Αποδείξτε ότι ο αριθμός $+5^{1/3}$ δεν είναι ρητός.
Λύση: Αν όχι τότε $5^{1/3} = \frac{m}{n}$ για κάποιους $m, n \in \mathbb{N}$. Υψώνοντας στον κύβο παίρνουμε την εξίσωση

$$5n^3 = m^3.$$

Όμως αριστερά το πλήθος των πρώτων παραγόντων που είναι ίσοι με 5 είναι κάποιο πολλαπλάσιο του 3 συν 1, ενώ δεξιά είναι πολλαπλάσιο του 3. Αυτά δεν μπορούν να είναι ίδια, άρα αυτό δε γίνεται.

Πρόβλημα 3. (10 μονάδες)
Η ακολουθία a_n ορίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_2 &= 1, \\ a_n &= a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{για } n \geq 3. \end{aligned}$$

Αποδείξτε την ισοδυναμία $2 \mid a_n \Longleftrightarrow 3 \mid n$.
Λύση: Πρέπει να αποδείξουμε ότι το a_n είναι άρτιο ακριβώς όταν ο δείκτης n είναι πολλαπλάσιο του 3. Ισοδύναμα, πρέπει να αποδείξουμε την πρόταση:

P_k: Οι αριθμοί a_{3k-2}, a_{3k-1} είναι περιττοί και ο a_{3k} είναι άρτιος,

για $k \geq 1$. Για $k = 1$ ισχύει αφού $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$.

Αποδεικνύουμε την P_k επαγωγικά ως προς k. Έστω ότι ισχύει για το k και πάμε να την αποδείξουμε για το $k+1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n \geq 4$ έχουμε

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} = (a_{n-2} + a_{n-3}) + a_{n-2} = 2a_{n-2} + a_{n-3}$$

(εφαρμόσαμε την αναδρομική εξίσωση ορισμού της a_n δύο φορές) και συμπεραίνουμε από αυτή την ισότητα ότι το a_n είναι άρτιο αν και μόνο αν το a_{n-3} είναι άρτιο. Αυτό αποδεικνύει ότι τα $a_{3k+1}, a_{3k+2}, a_{3k+3}$ είναι περιττό, περιττό, άρτιο αφού τα $a_{3k-2}, a_{3k-1}, a_{3k}$ είναι τέτοια. Η P_{k+1} αποδείχτηκε.

Πρόβλημα 4. (10 μονάδες)
Αν $a = b \bmod m_1$ και $a = b \bmod m_2$ δείξτε ότι $a = b \bmod [m_1, m_2]$.
Λύση: $a = b \bmod m_1$ σημαίνει ότι $m_1 \mid a - b$ και $a = b \bmod m_2$ σημαίνει $m_2 \mid a - b$. Όμως το ΕΚΠ δύο αριθμών διαιρεί κάθε κοινό τους πολλαπλάσιο, άρα $[m_1, m_2] \mid a - b$, δηλ. $a = b \bmod [m_1.m_2]$.

Πρόβλημα 5. (10 μονάδες)

(1) Αν p είναι πρώτος αριθμός βρείτε όλους τους ακεραίους x ώστε να ισχύει

$$x^2 = x \bmod p.$$

(2) Αν p είναι *περιττός* πρώτος αριθμός βρείτε όλους τους ακεραίους x ώστε να ισχύει

$$x^2 = x \bmod (2p).$$

Λύση: 1. $x^2 = x \bmod p$ σημαίνει $x^2 - x = 0 \bmod p$ δηλ. $p \mid x(x-1)$. Αφού p πρώτος αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$p \mid x \ \text{ ή } \ p \mid x-1.$$

Οι λύσεις δηλ. είναι όλοι οι ακέραιοι της μορφής 0 ή 1 mod p.

2. $x^2 = x \bmod 2p$ σημαίνει $x^2 - x = 0 \bmod 2p$ δηλ. $2p \mid x(x-1)$. Επειδή οι $2, p$ είναι μεταξύ τους πρώτοι αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν

$$2 \mid x(x-1) \text{ και } p \mid x(x-1).$$

Όλα τα $x \in \mathbb{Z}$ ικανοποιούν την πρώτη απαίτηση αφού ένας από τα $x, x-1$ είναι πάντα αρτιος. Άρα η πρώτη απαίτηση ισχύει πάντα και μπορεί να παραλειφθεί. Οι λύσεις είναι λοιπόν όλα τα x για τα οποία $p \mid x(x-1)$, δηλ. όπως και στο 1) οι αριθμοί της μορφής

$$kp \ \text{ ή } \ kp+1.$$

Πρόβλημα 6. (10 μονάδες)
Ας είναι $p > 6$ πρώτος αριθμός. Ποια είναι τα δυνατά υπόλοιπα $p \bmod 6$; Δείξτε ότι το σύνολο

$$\mathcal{P} = \{p : \ p \text{ πρώτος}, \ p = 5 \bmod 6\}$$

είναι άπειρο.

Υποδειξη: Αρνηθείτε το συμπέρασμα και έστω $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$. Ορίστε τον ακέραιο $n = 6p_1p_2\cdots p_k - 1$. Παρατηρείστε επίσης ότι το γινόμενο δύο αριθμών που είναι $1 \bmod 6$ είναι επίσης $1 \bmod 6$ και καταλήξτε σε άτοπο.

Λύση: Τα δυνατά υπόλοιπα δια 6 ενός πρώτου $p > 6$ είναι μόνο τα 1 και 5, αφού ο 6 έχει κοινούς παράγοντες με τα 0, 2, 3, 4. Ο αριθμός $n = 6p_1p_2\cdots p_k - 1$ είναι $5 \bmod 6$. Επίσης κανένα από τα στοιχεία του $\mathcal{P}$ δε διαιρεί το n αφού σε αυτή την περίπτωση θα έπρεπε να διαιρεί το 1. Άρα όλοι οι πρώτοι παράγοντες του n είναι πρώτοι της μορφής $1 \bmod 6$ ή οι αριθμοί 2 και 3. Ας γράψουμε λοιπόν

$$n = 2^k 3^l m,$$

όπου ο αριθμός m είναι το γινόμενο των πρώτων παραγόντων του n της μορφής $1 \bmod 6$. Παίρνοντας mod 6 σε αυτή τη σχέση παίρνουμε (αφού, συμφωνα με την παρατήρηση $m = 1 \bmod 6$)

$$5 = 2^k 3^l \bmod 6.$$

Όμως αυτό είναι αδύνατο αφού οι μόνες δυνατές τιμές mod 6 του 2^k3^l είναι οι 0, 2, 3, 4 και δε μπορεί ποτέ να ισούται με 5 αφού ένας αριθμός της μορφής $5 \bmod 6$ δεν εχεί κοινούς παράγοντες με το 6.

Πρόβλημα 7. (20 μονάδες)
Ας είναι $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Ένας ακέραιος αριθμός $T > 0$ ονομάζεται *περίοδος* της συνάρτησης f αν ισχύει

$$f(x) = f(x+T), \quad \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Σε αυτή την περίπτωση η f ονομάζεται *περιοδική συνάρτηση.*

(1) Αν $k \geq 1$ ακέραιος δείξτε ότι και το kT είναι περίοδος της f.
(2) Αν είναι $\tau > 0$ η *μικρότερη περίοδος* της f δείξτε ότι κάθε άλλη περίοδος είναι πολλαπλάσιο της τ.
(3) Αν f και g είναι δύο περιοδικές συναρτήσεις επί των ακεραίων με ελάχιστες περιόδους a και b αντίστοιχα, με $(a,b) = 1$, δείξτε ότι και η συνάρτηση $f+g$ είναι περιοδική και έχει ελάχιστη περίοδο το ab.

Λύση: 1. $f(x+kT) = f(x+(k-1)T+T) = f(x+(k-1)T) = \cdots = f(x)$. (Ομοίως για αρνητικά k.)

2. Ας είναι $T > \tau$ μια περίοδος της f. Κάνουμε την ακέραια διαίρεση $T = k\tau + r$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ και $r \in \{0, 1, \ldots, \tau - 1\}$. Αφού $k\tau$ περίοδος της f έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = f(x+T) = f(x+k\tau+r) = f(x+r),$$

πράγμα που σημαίνει ότι το r είναι περίοδος της f (αν είναι θετικό). Όμως $r < \tau$ άρα αυτό δε μπορεί να συμβεί και το υπόλοιπο r είναι 0, δηλ., $\tau \mid T$.

3. Ας είναι T μια περίοδος της $f+g$. Ισχύει δηλ. για κάθε $x \in \mathbb{Z}$

$$f(x) + g(x) = f(x+T) + g(x+T),$$

και άρα, σύμφωνα με το 1),

$$f(x) + g(x) = f(x+nT) + g(x+nT),$$

για κάθε $x, n \in \mathbb{Z}$. Επιλέγοντας $n = a$ έχουμε

$$f(x) + g(x) = f(x+aT) + g(x+aT),$$

για κάθε $x \in \mathbb{Z}$. Όμως aT είναι πολλαπλάσιο του a, άρα περίοδος της f και συνεπώς μπορούμε να διαγράψουμε τους f όρους από την προηγούμενη ισότητα και παίρνουμε

$$g(x) = g(x+aT), \quad \forall x \in \mathbb{Z},$$

παίρνουμε δηλ., ότι aT είναι περίοδος της g, και άρα διαιρείται από το b σύμφωνα με το 2)

$$b \mid aT.$$

όμως $(a,b) = 1$ άρα ισχύει επίσης $b \mid T$. Ομοίως αποδεικνύουμε $a \mid T$, είναι δηλ. το T κάποιο κοινό πολλαπλάσιο των a, b, και άρα διαιρείται από το ab που είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a, b. Επίσης από το 2) έχουμε ότι το ab είναι περίοδος της $f+g$ αφού είναι περίοδος και της f και της g (το ab είναι πολλαπλάσιο και του a και του b). Αφού το ab διαιρεί οποιαδήποτε άλλη περίοδο της $f+g$ είναι η ελάχιστη περίοδος αυτής της συνάρτησης.

• Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Οι αιτιολογήσεις σας να είναι πλήρεις και καθαρές. **Απαντήσεις χωρίς πλήρη αιτιολόγηση δε παίρνουν μονάδες.** Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικών μέσων. **Διάρκεια 2 ώρες.** Το άριστα είναι 80 μονάδες. Αν σκοπός σας είναι απλά να περάσετε το μάθημα τότε επικεντρωθείτε κυρίως στις 5 πρώτες ασκήσεις.