Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

1. Έχουμε ένα πραγματικό $n \times n$ πίνακα A. Πρώτα διατάσσουμε τα περιεχόμενα κάθε γραμμής κατ᾽ αύξουσα σειρά. Μετά διατάσσουμε τα περιεχόμενα κάθε στήλης κατ᾽ αύξουσα σειρά. Δείξτε ότι μετά τη δεύτερη πράξη οι γραμμές εξακολουθούν να είναι διατεταγμένες κατ᾽ αύξουσα σειρά.

2. Η ακολουθία F_n ορίζεται από την αναδρομική σχέση $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, για $n > 1$, $F_0 = 0$, και $F_1 = 1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}, \quad \sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$$

3. Δίνονται n σημεία στο επίπεδο με την ιδιότητα ότι κάθε τρίγωνο που σχηματίζεται από αυτά έχει εμβαδό μικρότερο ή ίσο του 1. Δείξτε ότι υπάρχει ένα τρίγωνο εμβαδού το πολύ 4 μέσα στο οποίο περιέχονται όλα τα n αυτά σημεία.

4. Οι φυσικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_{15}$ είναι μεγαλύτεροι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 2000. Είναι επίσης μεταξύ τους πρώτοι. Δείξτε ότι κάποιος από αυτούς είναι πρώτος.

5. Δύο παίκτες παίζουν το εξής παιχνίδι. Ξεκινάνε με n σωρούς από τραπουλόχαρτα. Έστω a_i το πλήθος των χαρτιών στον i-οστό σωρό. Όταν παίζει κάποιος παίκτης διαλέγει ένα σωρό με πάνω από ένα χαρτιά και τον σπάει σε δυο σωρούς. Χάνει όποιος δεν μπορεί να παίξει. Υπό ποιες συνθήκες έχει ο πρώτος παίκτης νικητήρια στρατηγική και υπό ποιες ο δεύτερος;

6. Θεωρείστε την εξής παραλλαγή του παιχνιδιού στο προηγούμενο πρόβλημα. Όταν έρθει η σειρά κάποιου να παίξει τότε αυτός σπάει **όλους** τους σωρούς με πάνω από ένα χαρτί σε δύο κομμάτια. Έστω M το πλήθος χαρτιών του μέγιστου σωρού. Δείξτε ότι αν ο ακέραιος M δεν είναι της μορφής $M = 2^k - 1$, όπου $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, τότε ο πρώτος παίκτης έχει νικητήρια στρατηγική.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 5 Ιουνίου 2000