Πανεπιστημιο Κρητης – Μαθηματικο Τμημα

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1

1. Δύο αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα από δύο πόλεις που απέχουν 20 χμ και κινούνται το καθένα προς το άλλο με ταχύτητα 5 χμ/ώρα. Ταυτόχρονα με την εκκίνησή τους ξεκινά και μια μύγα από το αριστερό αυτοκίνητο να κινείται προς το δεξί με ταχύτητα 15 χμ/ώρα. Μόλις η μύγα συναντήσει ένα αυτοκίνητο αλλάζει κατεύθυνση και κινείται προς το άλλο με την ίδια ταχύτητα. (α) Πόσες φορές θα αλλάξει κατεύθυνση η μύγα; (β) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει η μύγα έως ότου τα δύο αυτοκίνητα συναντηθούν;

2. Έχουμε δύο ίδιες κούπες που περιέχουν ίσες ποσότητες καφέ, η μία, και τσαγιού, η άλλη. Παίρνουμε ένα κουταλάκι, το βουτάμε στην κούπα με τον καφέ και αδειάζουμε τα περιεχόμενά του στην κούπα με το τσάι. Κατόπιν παίρνουμε ένα ίδιο κουταλάκι από την κούπα με το τσάι και το αδειάζουμε στον καφέ. Ποια από τις δύο κούπες θα περιέχει περισσότερο από το αρχικό της περιεχόμενο;

3. Παίρνουμε μια τράπουλα, τη γυρνάμε προς τα κάτω και επαναλαμβάνουμε το εξής: τραβάμε ένα τραπουλόχαρτο 'αξίας' x (τα 'γραμμένα' μετράνε πάντα ως 10), το τοποθετούμε προς τα κάτω και μετά από πάνω του τοποθετούμε, γυρισμένα προς τα κάτω επίσης, τόσα τραπουλόχαρτα μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό 12. Για παράδειγμα, αν το χαρτί που τραβήξαμε λέει επάνω 9 τότε ο σωρός που φτιάχνουμε θα έχει το 9 στον πάτο και από πάνω του άλλα 3 τραπουλόχαρτα. Το κάνουμε αυτό μέχρι να τελειώσει η τράπουλα. Αν κατά τη διάρκεια σχηματισμού ενός σωρού τελειώσει η τράπουλα προτού συμπληρωθεί ο σωρός μέχρι το 12, τότε φτιάχνουμε ένα ξεχωριστό σωρό με τα υπόλοιπα (τον ασυμπλήρωτο δηλ. σωρό). Γυρνάμε μετά όλους τους συμπληρωμένους σωρούς προς τα επάνω ώστε να φαίνονται τα χαρτιά που είναι στον πάτο και προσθέτουμε τις αξίες αυτών. Βρείτε ένα τρόπο να μαντέψετε το άθροισμα γνωρίζοντας μόνο το πλήθος των συμπληρωμένων σωρών και το πληθος των υπολοίπων (το μέγεθος του ασυμπλήρωτου σωρού).

4. Τοποθετούμε 11 χαρτιά σε ένα κύκλο πάνω σε ένα τραπέζι ώστε να κοιτάνε προς τα κάτω. Αναποδογυρίζουμε ένα χαρτί στην τύχη. Μπορούμε να αναποδογυρίσουμε ένα χαρτί από δω και πέρα μόνο ξεκινώντας από ένα μη αναποδογυρισμένο χαρτί και μετρώντας έως το 4 προς τη θετική φορά του κύκλου. Προφανώς ο μέγιστος αριθμών χαρτιών που μπορούμε να γυρίσουμε είναι το πολύ 10 μια και το τελευταίο χαρτί δεν πρόκειται ποτέ να το γυρίσουμε αφού δεν υπάρχει άλλο μη αναποδογυρισμένο χαρτί από το οποίο να ξεκινήσουμε το μέτρημα. Βρείτε ένα τρόπο ώστε να αναποδογυρίσετε συνολικά 10 χαρτιά. Επαναλάβετε το παιχνίδι με 15 χαρτιά αντί για 11.

5. Έχουμε μια ορθογώνια σοκολάτα που αποτελείται από τετραγωνάκια τοποθετημένα σε m γραμμές και n στήλες. Το τετραγωνάκι όμως της πάνω αριστερά γωνίας (και μόνο αυτό) είναι φτιαγμένο από σαπούνι αντί για σοκολάτα. Δύο παίκτες παίζουν το ακόλουθο παιχνίδι. Όταν έρθει η σειρά κάποιου παίκτη αυτός κόβει ένα κομμάτι σοκολάτα και το τρώει. Η $m \times n$ σοκολάτα μπορεί να κοπεί είτε οριζόντια είτε κάθετα αλλά πλήρως, δηλ. αν η σοκολάτα κοπεί οριζόντια τότε αυτή χωρίζεται σε δύο ορθογώνιες σοκολάτες, μια $k \times n$ και μια $(m-k) \times n$, και ο παίκτης διαλέγει και τρώει ένα από τα δύο ορθογώνια κομμάτια. Ομοίως, αν η σοκολάτα κοπεί κάθετα τότε χωρίζεται σε δυο κομμάτια, ένα $m \times k$ και ένα $m \times (n-k)$. Χάνει ο παίκτης που αναγκάζεται να φάει το τετραγωνάκι με το σαπούνι. Θα θέλατε να παίζατε πρώτος ή δεύτερος; Η απάντηση εξαρτάται από τα m και n.

6. Δίνεται σύνολο A από $n+1$ διαφορετικούς ακεραίους, υποσύνολο του $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο στοιχεία του A που έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1.

7. Ένας θετικός ακέραιος λέγεται πρώτος αν οι μόνοι θετικοί ακέραιοι που τον διαιρούν είναι το 1 και ο εαυτός του. Υποθέτοντας το αντίθετο δείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι ακέραιοι.

8. Διαλέξτε την αγαπημένη σας γλώσσα προγραμματισμού (π.χ. Pascal, C, Basic, κλπ). Δείξτε ότι υπάρχει μια συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ για την οποία δεν υπάρχει πρόγραμμα στη γλώσσα προγραμματισμού που επιλέξατε που να την υπολογίζει.

Ηράκλειο, 20 Ιαν. 2000