Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4

1. Σας δίνεται ένα άπειρο πλήθος από ίδια τούβλα διαστάσεων $30 \times 10 \times 10$ cm. Δείξτε ότι μπορείτε να φτιάξετε ένα σωρό από αυτά ο οποίος (α) να ισορροπεί, (β) να έχει ένα τούβλο σε κάθε οριζόντιο επίπεδο και (γ) προβαλλόμενος κατακόρυφα κάτω να φτάνει 100m μακριά. (Προσπαθείστε να δώσετε μια λύση χωρίς πράξεις, στηριζόμενοι σε «φυσικά» επιχειρήματα.)

2. (α) Πόσα υποσύνολα έχει το σύνολο

$$[n] = \{1, 2, \ldots, n\};$$

(β) Πόσα υποσύνολα μεγέθους k έχει;
(γ) Με πόσους τρόπους μπορούμε να διατάξουμε τα στοιχεία του $[n]$;

3. Έχουμε 100 μπουκάλια με νερό ακριβώς ένα από τα οποία είναι μολυσμένο με μια ουσία Α. Η ύπαρξη της ουσίας αυτής ανιχνεύεται από ένα τεστ Τ, σε οσοδήποτε μικρή ποσότητα. Σκοπός μας είναι να αποφασίσουμε ποιό από τα 100 μπουκάλια είναι το μολυσμένο. Ο τρόπος που γίνεται αυτό είναι ο εξής: ετοιμάζουμε n δοκιμαστικούς σωλήνες των οποίων τα περιεχόμενο προέρχονται από ενδεχομένως παραπάνω από ένα μπουκάλια και τους στλενουμε στο εργαστήριο, απ΄ όπου παίρνουμε πίσω n απαντήσεις για το αν το κάθε ένα από τα δείγματα που στείλαμε περιέχει την ουσία Α ή όχι. Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός δειγμάτων n που μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το μπουκάλι. Διευκρινίζουμε ότι τα δείγματα πάνε ακριβώς μια φορά στο εργαστήριο!

4. Για κάθε φυσικό αριθμό n ορίζουμε ως διαμέρισή του κάθε τρόπο να τον γράψουμε ως άθροισμα

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k,$$

με a_i θετικούς ακέραιους και $a_i \geq a_{i+1}$. (Δε μας ενδιαφέρει δηλ. η σειρά των προσθετέων και τους διατάσσουμε πάντα με φθίνοντα τρόπο.)
(α) Δείξτε ότι το πλήθος των διαμερίσεων του n το πολύ σε r προσθετέους είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του n με οσουσδήποτε το πλήθος προσθετέους μεγέθους μέχρι r ο καθένας.
(β) Το πλήθος των διαμερίσεων του n σε ακριβώς m προσθετέους είναι ίσο με το πλήθος των διαμερίσεων του $n - m$ το πολύ σε m προσθετέους.

5. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε υποσύνολα μεγέθους k από το $[n]$ που δεν περιέχουν δυο διαδοχικούς ακεραίους;

6. Πόσες είναι οι μη φθίνουσες συναρτήσεις

$$f : [n] \to [n];$$

7. Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε παρενθέσεις γύρω από τους όρους του γινομένου

$$x_1 x_2 \cdots x_n$$

ώστε κάθε παρένθεση να περιέχει μέσα της ακριβώς 2 παράγοντες (κάποια x_i ή άλλες παρενθέσεις); Για παράδειγμα ($n = 4$) ο τρόπος $((x_1x_2)(x_3x_4))$ είναι αποδεκτός ενώ ο $(x_1x_2(x_3x_4))$ δεν είναι.

8. Μια τριγωνοποίηση ενός κυρτού n-γώνου είναι ένα σύνολο από $n - 3$ διαγωνίους του που δεν τέμνονται στο εσωτερικό του και άρα χωρίζουν το πολύγωνο σε $n - 2$ ξένα ανά δύο τρίγωνα. Πόσες τριγωνοποιήσεις ενός κυρτού n-γώνου υπάρχουν;

9. Μια 3-διαμέριση του $[n]$ είναι μια διαμέρισή του σε τρία ξένα ανά δύο σύνολα. Δύο 3-διαμερίσεις του $[n]$, οι

$$[n] = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = B_1 \cup B_2 \cup B_3,$$

λέγονται συμβατές αν δύο από τα A_i περιέχονται σε ένα από τα B_i (παρατηρείστε ότι αυτό συνεπάγεται και ότι δύο από τα B_i περιέχονται σε ένα από τα A_i). Έστω ένα σύνολο από k συμβατές ανά δύο 3-διαμερίσεις του $[n]$. Δείξτε ότι $k \leq n - 2$.

10. Έστω n ένας σταθερός φυσικός αριθμός. Μια «μηχανή (αύξουσας) ταξινόμησης» τάξης n είναι μια ακολουθία από ζεύγη $(a_i, b_i) \in [n]^2$, με $a_i < b_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, αν για κάθε συνάρτηση $f : [n] \to \mathbb{R}$ ο αλγόριθμος ο οποίος ελέγχει διαδοχικά τις τιμές $f(a_i)$ και $f(b_i)$ και αν δεν είναι στη σωστή σειρά τις εναλάσσει (δηλ. αν $f(a_i) > f(b_i)$ τότε αλλάζουμε τη σύνάρτηση f στα σημεία a_i και b_i ώστε η νέα τιμή στο a_i να είναι η παλιά του b_i και ομοίως η νέα τιμή του b_i είναι η παλιά του a_i) το τελικό αποτέλεσμα (μετά από τον έλεγχο και των k ζευγαριών) είναι μια συνάρτηση που είναι μη φθίνουσα. Δείξτε ότι αν μια ακολουθία από ζεύγη (a_i, b_i) «δουλεύει» για όλες τις συναρτήσεις $f : [n] \to \{0, 1\}$ τότε είναι μηχανή ταξινόμησης.

Ηράκλειο, 28 Φεβ. 2000