Πανεπιστημιο Κρητησ – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6

1. Δείξτε ότι δεν υπάρχει ένα προς ένα και επί συνάρτηση $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2} < \infty.$$

2. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης λέγεται *υφαρμονική* αν σε κάθε σημείο του επιπέδου ισχύει

$$\Delta f := f_{xx} + f_{yy} \geq 0.$$

Αν η συνάρτηση f είναι υφαρμονική δείξτε ότι δεν υπάρχει σημείο (x_0, y_0) του επιπέδου, που σε κάποια γειτονιά του οποίου οι τιμές της f είναι αυστηρά μικρότερες από το $f(x_0, y_0)$.

Υπόδειξη: Υποθέστε πρώτα ότι $\Delta f > 0$ παντού.

3. Δίνεται $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} 3^k (f(x+ky) - f(x-ky)) \right| \leq 1.$$

Δείξτε ότι η f είναι σταθερή.

4. Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι μιγαδικοί αριθμοί και ο $n \times n$ πίνακας A έχει $A_{ij} = x_i^{j-1}$, τότε

$$\det A = \prod_{i>j} (x_i - x_j).$$

5. Για τους μιγαδικούς αριθμούς $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ ορίζουμε

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

Βρείτε τις ιδιοτιμές και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του T. (*Υπόδειξη:* Εξετάστε διανύσματα του τύπου $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ για κατάλληλο μιγαδικό x.)

6. Αν $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ δείξτε ότι

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j \right)^2 \geq \frac{\sum_{i>j} a_i a_j}{\binom{n}{2}}.$$

7. Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{Z}$ λέγεται *σύνολο χωρίς αθροίσματα* (sum free set) αν δεν υπάρχουν $x, y, z \in A$, όχι κατ' ανάγκη διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε $x + y = z$. Για παράδειγμα το σύνολο των περιττών ακεραίων είναι σύνολο χωρίς αθροίσματα. Έστω $B \subseteq \mathbb{Z}$, $|B| = n$. Δείξτε ότι υπάρχει υποσύνολο A του B, χωρίς αθροίσματα, και με τουλάχιστον $n/3$ στοιχεία.

Υπόδειξη: Αν ένα σύνολο ακεραίων είναι σύνολο χωρίς αθροίσματα, αν κοιτάξουμε τα στοιχεία του mod m, για κάποιο θετικό ακέραιο m, τότε είναι σύνολο χωρίς αθροίσματα. (Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση

$$x + y = z \bmod m$$

δεν έχει λύση στο A.) Επιλέξτε ως το m κάποιο μεγάλο πρώτο και δείτε τι επίδραση έχει στο A ο πολλαπλασιασμός mod m με κάποιο ακέραιο από τους $1, 2, \ldots, m-1$.

8. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{N}$ και υποθέστε ότι $a, \epsilon > 0$, είναι τέτοια ώστε

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in ((1+\epsilon)a, 3(1-\epsilon)a).$$

Ορίστε

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \cos(\lambda_j x).$$

Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $A(\epsilon) > 0$ τέτοια ώστε

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) \leq -A(\epsilon) N.$$

9. Δίνεται μια ακολουθία διαστημάτων $I_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, 2, \cdots$, και έστω $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Υποθέστε επίσης ότι η ακολουθία $b_j - a_j$ συγκλίνει στο 0 κατά φθίνοντα τρόπο. Δείξτε ότι μπορεί κανείς να επιλέξει μια υπακολουθία από τα I_j που να είναι ξένα ανά δύο και που αν κανείς τα τριπλασιάσει (κρατήσει δηλ. το κέντρο ενός διαστήματος το ίδιο και τριπλασιάσει το μήκος του) καλύπτουν το U.

Ηράκλειο, 3 Απρ. 2000