Πεπερασμένες στάσιμες αλυσίδες Markov

Μιχάλης Κολουντζάκης
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Λεωφόρος Κνωσού
714 09 Ηράκλειο

E-mail: `kolount@member.ams.org`

Άνοιξη 2002-03

Περιεχόμενα

Τα παρακάτω αποτελούν μια σύνοψη όσων μάθαμε για πεπερασμένες στάσιμες αλυσίδες Markov. Δεν αποσκοπούν να υποκαταστήσουν το βιβλίο σας.

1 Στοχαστικές Ανελίξεις

Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (ΤΜ) που είναι παραμετρισμένη από μια παράμετρο t, που μπορεί να είναι διακριτή ($t \in \mathbf{N}$) ή συνεχής ($t \in [0, +\infty)$), καλείται *στοχαστική ανέλιξη* (ΣΑ). Εν γένει, ως ΣΑ θα θεωρούμε ένα οποιοδήποτε σύνολο από τυχαίες ποσότητες που εξελίσσονται μαζί στο χρόνο.

2 Ανελίξεις τύπου Markov σε διακριτό χρόνο και με διακριτές τιμές

Μια ΣΑ $X_t \in \mathbf{Z}$, $t \in \mathbf{N}$, λέγεται ότι έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα, αν οποιαδήποτε πληροφορία μας δίνεται για τις τιμές της X_t και η οποία αφορά τις προγενέστερες χρονικές στιγμές

$$t_1 < \cdots < t_n, \quad (t_n < t),$$

μπορεί ουσιαστικά να αντικατασταθεί με πληροφορία που αφορά μόνο την τελευταία στιγμή t_n.

Ο τυπικός ορισμός είναι ότι για κάθε $n = 1, 2, 3, \ldots$, κάθε $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$, και κάθε $a_1, a_2, \ldots, a_n, a \in \mathbf{Z}$ ισχύει

$$\mathbf{Pr}\left[X_t = a \mid X_{t_1} = a_1, \ldots, X_{t_n} = a_n\right] = \mathbf{Pr}\left[X_t = a \mid X_{t_n} = a_n\right]. \tag{1}$$

Οποιαδήποτε πληροφορία δηλ. για τα προγενέστερα $X_{t_1}, \ldots, X_{t_{n-1}}$ είναι περιττή (όσον αφορά την πιθανότητα να συμβαίνει κάτι για το X_t) εφόσον γνωρίζουμε την *κατάσταση* (αυτός είναι ο όρος που χρησιμοποιείται) της ΣΑ την τελευταία στιγμή t_n.

Με άλλα λόγια, το μέλλον εξαρτάται από το παρόν αλλά όχι από το παρελθόν.

3 Πεπερασμένες στάσιμες αλυσίδες Markov

Μια πεπερασμένη αλυσίδα Markov M είναι μια ΣΑ X_t, $t = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $X_t \in S$, $n = |S| < \infty$ και το πεπερασμένο σύνολο S λέγεται το σύνολο καταστάσεων της αλυσίδας. Πρέπει επίσης να ισχύει η ιδιότητα Markov (1).

Αν, επιπλέον, για κάθε $i, j \in S$ η ποσότητα

$$p_{i,j,t} = \mathbf{Pr}\left[X_{t+1} = j | X_t = i\right]$$

δεν εξαρτάται από το t τότε η αλυσίδα λέγεται ομογενής ή στάσιμη και μόνο με τέτοιες αλυσίδες θα ασχοληθούμε από εδώ και πέρα. Γράφουμε έτσι απλά γι΄ αυτές

$$p_{i,j} = \mathbf{Pr}\left[X_{t+1} = j | X_t = i\right],$$

και ο $n \times n$ πίνακας (όπου $n = |S|$) P με (i,j) στοιχείο το $p_{i,j}$ λέγεται *πίνακας μετάβασης* της αλυσίδας.

Αν γνωρίζουμε τον πίνακα P γνωρίζουμε ουσιαστικά τα πάντα για την αλυσίδα.

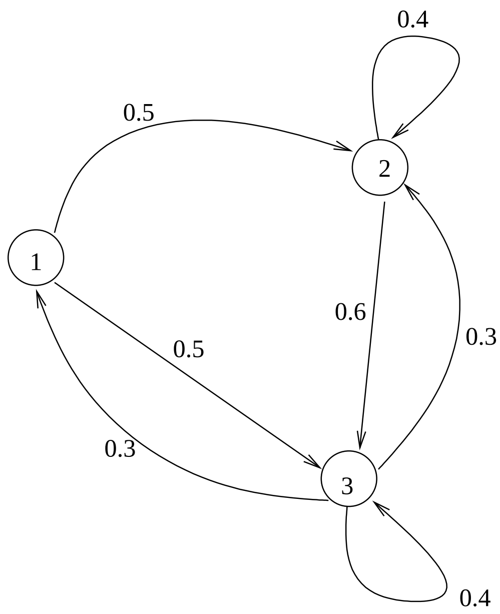
4 Το γράφημα μιας αλυσίδας

Ένας αρκετά βοηθητικός τρόπος να περιγράφουμε μια αλυσίδα Markov είναι μέσω του γραφήματός της το οποίο έχει τα στοιχεία του S (τις καταστάσεις) ως κορυφές και για κάθε δύο κορυφές i και j για τις οποίες $p_{ij} > 0$ έχει μια ακμή που κατευθύνεται από το i στο j και έχει βάρος την πιθανότητα p_{ij}.

Όπως ακριβώς στον πίνακα P το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι 1 (ο πίνακας ονομάζεται γι΄ αυτό το λόγο *στοχαστικός*) έτσι ακριβώς και στο γράφημα μιας αλυσίδας το σύνολο των βαρών των ακμών που ξεκινούν από μια κορυφή i πρέπει πάντα να είναι 1.

Στο Σχήμα 1 παρακάτω φαίνεται το γράφημα της αλυσίδας M με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.4 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$



Σχήμα 1. Το γράφημα της αλυσίδας M

5 Πιθανότητες μετάβασης ανώτερης τάξης

Γράφουμε

$$p_{ij}^{\nu} = \mathbf{Pr}\,[X_{t+\nu} = j \mid X_t = i].$$

Λόγω στασιμότητας της αλυσίδας η ποσότητα αυτή δεν εξαρτάται από το t.

Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov:

$$p_{ij}^{\nu+\mu} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{\nu} p_{kj}^{\mu}.$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov επανειλλημένα για $\mu = 1$ παίρνουμε εύκολα ότι p_{ij}^{ν} δεν είναι τίποτε άλλο από το (i, j) στοιχείο της ν-οστής δύναμης του πίνακα μετάβασης P:

$$p_{ij}^{\nu} = (P^{\nu})_{ij}.$$

6 Διάνυσμα κατανομής στις καταστάσεις

Αν $n = |S|$ τότε ένα διάνυσμα-γραμμή $\pi = [\pi_1, \ldots, \pi_n]$ με $\pi_j \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} \pi_j = 1$, αυτό λέγεται 'κατανομή' πάνω στην αλυσίδα και το π_j παριστάνει την πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση j.

Αν συμβολίσουμε με π_0 την αρχική κατανομή τότε η κατανομή σε χρόνο 1 δίνεται από $\pi_1 = \pi_0 P$, σε χρόνο 2 από $\pi_2 = \pi_1 P = \pi_0 P^2$, και, σε χρόνο t από

$$\pi_t = \pi_0 P^t.$$

7 Επικοινωνία καταστάσεων

Αν i και j είναι δύο καταστάσεις μιας αλυσίδας τότε γράφουμε $i \to j$ αν υπάρχει $\nu \geq 1$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^{\nu} > 0$. Ισοδύναμα, αν υπάρχει μονοπάτι πάνω στο γράφημα της αλυσίδας (ακολουθία ακμών, το τέλος της μιας είναι αρχή της επόμενης) που πηγαίνει από το i στο j. Λέμε τότε ότι η j είναι *προσιτή* από την i.

Αν έχουμε $i \to j$ και $j \to i$ τότε λέμε ότι οι i και j επικοινωνούν και γράφουμε $i \leftrightarrow j$. Εύκολα βλέπουμε ότι η σχέση $\leftrightarrow$ επικονωνίας είναι μια σχέση ισοδυναμίας, και το σύνολο S των καταστάσεων της S χωρίζεται έτσι σε *κλάσεις επικοινωνίας*.

Μια αλυσίδα λέγεταια *ανάγωγη* αν όλες οι καστάσεις της είναι ισοδύναμες με την παραπάνω σχέση επικοινωνίας.

8 Περιοδικότητα καταστάσεων

Μια κατάσταση i λέγεται *περιοδική με περίοδο* $d > 1$ αν οποτεδήποτε $p_{ii}^{\nu} > 0$ έπεται ότι $d \mid \nu$ (το d διαιρεί το ν). Αν δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος d τότε η κατάσταση λέγεται *απεριοδική*.

Πάνω στο γράφημα η περιοδικότητα μιας κατάστασης i με περίοδο d ισοδυναμεί με το ότι όλα τα μονοπάτια που ξεκινούν και τελειώνουν στο i έχουν μήκος πολλαπλάσιο του d (μήκος ενός μονοπατιού είναι το πλήθος των ακμών που το απαρτίζουν).

9 Επισκέψεις και επάνοδοι

Γράφουμε

$$f_{ij}^{\nu} = \mathbf{Pr}\,[X_\nu = j \mid \forall r = 1, 2, \ldots, j-1 \; X_r \neq j, X_0 = i],$$

δηλ. η f_{ij}^{ν} είναι η πιθανότητα ξεκινώντας από το i να πρωτοεπισκεφτούμε το j τη χρονική στιγμή ν.

Επίσης

$$f_{ij} = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{ij}^{\nu},$$

είναι η πιθανότητα ξεκινώντας από το i να επισκεφτούμε *κάποτε* το j (χωρίς κανένα περιορισμό στο πότε).

Μια κατάσταση j λέγεται *έμμονη* άν $f_{jj} = 1$, αλλιώς λέγεται *μεταβατική*. Για μια μεταβατική κατάσταση δηλ. υπάρχει θετική πιθανότητα ότι ξεκινώντας από αυτήν δε ξαναγυρνάμε ποτέ σε αυτήν, ενώ για μια έμμονη κατάσταση αυτό δε συμβαίνει. Ξαναγυρνάμε κάποτε πίσω σχεδόν σίγουρα (δηλ. με πιθανότητα 1).

Γράφουμε επίσης

$$\mu_j = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu f_{jj}^{\nu}$$

για το *μέσο χρόνο πρωτης επανόδου* μιας έμμονης κατάστασης j ενώ αν η j είναι μεταβατική ορίζουμε $\mu_j = \infty$.

10 Χαρακτηρισμός μεταβατικότητας

Αποδεικνύοντας πρώτα

$$p_{ij}^{\nu} = \sum_{r=1}^{\nu} f_{ij}^{r} p_{ij}^{\nu-r}$$

δείχνουμε το εξής βασικό.

$$f_{jj} < 1 \Leftrightarrow \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{jj}^{\nu} < \infty. \tag{2}$$

11 Μεταβατικότητα, περιοδικότητα και επικοινωνία καταστάσεων

Επίσης δείχνουμε τα εξής

1. Αν j μεταβατική τότε για κάθε i έχουμε
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ij}^{\nu} < \infty.$$
2. Αν j έμμονη και $j \leftrightarrow k$ τότε και η k είναι έμμονη.
3. Αν j είναι d-περιοδική και $j \leftrightarrow k$ τότε και η k είναι d-περιοδική.
4. Αν $j \leftrightarrow k$ τότε οι j, k, έχουν τον ίδιο τύπο μεταβατικότητας (έμμονη ή περιοδική) και τον ίδιο τύπο περιοδικότητας (ή κι οι δύο απεριοδικές ή έχουν την ίδια περίοδο).
5. Αν j έμμονη και k μεταβατική τότε η k δεν είναι προσιτή από την j. Το ανάποδο δεν ισχύει.

12 Πλήθος επανόδων

Έστω R_i το πλήθος των επανόδων στην κατάσταση i ξεκινώντας από την κατάσταση i.

Παρατηρούμε $\mathbf{E}[R_i] = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ii}^{\nu}$, άρα η i είναι έμμονη αν και μόνο αν $\mathbf{E}[R_i] = \infty$.

Αποδείξαμε όμως και το εξής ισχυρότερο: αν η i είναι έμμονη κατάσταση τότε σχεδόν σίγουρα $R_i = \infty$. Αυτό είναι πολύ ισχυρότερο από το να πούμε ότι $\mathbf{E}[R_i] = \infty$.

13 Υποδιαίρεση συνόλου καταστάσεων και αντίστοιχη μορφή πίνακα

Το σύνολο καταστάσεων S διαμερίζεται στα σύνολα T (μεταβατικές καταστάσεις, που είτε επικοινωνούν μεταξύ τους είτε όχι) και $R_1, \ldots, R_k$ (οι κλάσεις επικοινωνίας που περιλαμβάνουν μεταβατικές καταστάσεις). Όλες οι καταστάσεις ενός R_i επικοινωνούν μεταξύ τους και με καμία άλλη κατάσταση. Οι καταστάσεις του T μπορούν να επικοινωνούν με οποιεσδήποτε καταστάσεις.

Ο πίνακας μετάβασης P της αλυσίδας, μετά από κατάλληλη αναρίθμηση των καταστάσεων ώστε οι καταστάσεις της R_1 να είναι αριθμημένες πρώτες, οι καταστάσεις της R_2 μετά, και τέλος οι καταστάσεις της T, παίρνει τη block μορφή:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & & & \\ & P_2 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & P_k & \\ & & Q & & \end{bmatrix}$$

όπου οι πίνακες $P_1, \dots, P_k$ είναι τετράγωνοι, ο πίνακας Q έχει n στήλες και τόσες γραμμές όσες καταστάσεις έχει το σύνολο T, και στο υπόλοιπο του πίνακα υπάρχουν μηδενικά.

Μια αλυσίδα με τον παραπάνω πίνακα ουσιαστικά 'σπάει' σε πολλές ανάγωγες αλυσίδες με πίνακες μετάβασης P_i. Οι μεταβατικές καταστάσεις συνήθως δεν παίζουν κανένα ρόλο, όσο τουλάχιστον αφορά την ασυμπτωτική (τι συμβαίνει για μεγάλο χρόνο) συμπεριφορά της αλυσίδας αφού αυτές εμφανίζονται σχεδόν σίγουρα πεπερασμένες φορές. Άρα μετά από κάποιο χρονικό διάστημα μια τέτοια αλυσίδα έχει 'εγκλωβιστεί' μέσα σε μια από τις ανάγωγες συνιστώσες της με πίνακες $P_1, \dots, P_k$, και δε φεύγει πλέον από εκεί.

14 Ανάγωγες και περιοδικές αλυσίδες

Αν M είναι d-περιοδική και ανάγωγη τότε το σύνολο καταστάσεών της S διαμερίζεται στα σύνολα $S_j = \{$ εκείνες οι καταστάσεις που ενώνονται με την κατάσταση 1 με κάποιο μονοπάτι μήκους $l = j \bmod d\}$. Αποδεικνύεται ότι τα σύνολα αυτά ($j = 0, 1, 2, \dots, d-1$) είναι ξένα ανά δύο και η ένωσή τους είναι το S.

Επίσης αν από την κορυφή i μπορούμε σε χρόνο 1 να μεταβούμε στην κορυφή j (υπάρχει δηλ. η ακμή $i \to j$ στο γράφημα) και $i \in S_k$ τότε αναγκαστικά $j \in S_m$, όπου $m = k+1$ αν $k \neq d-1$ και $m = 0$ αν $k = d-1$.

Για μια τέτοια αλυσίδα ο πίνακας παίρνει τη block-κυκλική μορφή

$$P = \begin{bmatrix} & P_{0,1} & & & \\ & & P_{1,2} & & \\ & & & \dots & \\ & & & & P_{d-2,d-1} \\ P_{d-1,0} & & & & \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας $P_{i,i+1}$ έχει $|S_i|$ γραμμές και $|S_{i+1}|$ στήλες και περιγράφει όλες τις πιθανότητες μετάβασης από κορυφές του συνόλου S_i που είναι αναγκαστικά προς το σύνολο S_{i+1}.

15 Οριακές κατανομές

Μια κατανομή πιθανοτήτων π πάνω στο S λέγεται *οριακή κατανομή* αν υπάρχει αρχική κατανομή π_0 τέτοια ώστε

$$\pi = \lim_n \pi_0 P^n.$$

Εύκολα φαίνεται ότι αν π είναι οριακή τότε $\pi = \pi P$, δηλ. το διάνυσμα-γραμμή π είναι αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα P που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1.

16 Θεώρημα Perron-Frobenius

Θεώρημα 1 (Perron-Frobenius)
Αν P είναι στοχαστικός $n \times n$ πίνακας με $p_{ij} > 0$ για κάθε i και j τότε

1. *Το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του P.*

2. *Μπορούμε να διαλέξουμε το αριστερό ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1 ώστε να έχει όλες του τις συντεταγμένες θετικές.*

3. *Οι υπόλοιπες $n-1$ ιδιοτιμές του P έχουν απόλυτη τιμή μικρότερη του 1.*

Από το 1 του Θεωρήματος 1 έπεται ότι αν υπάρχει οριακή κατανομή αυτή είναι μοναδική μια και το 1 είναι απλή ιδιοτιμή.

17 Μορφή Jordan πίνακα

Αν P είναι ένας τυχαίος $n \times n$ πίνακας τότε αυτός έχει πάντα n ιδιοτιμές, εν γένει μιγαδικές. Η μορφή Jordan είναι μια κανονική μορφή για τον τετράγωνο πίνακα: υπάρχει πάντα ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας Q τέτοιος ώστε

$$QPQ^{-1} = J \tag{3}$$

όπου ο πίνακας J είναι της μορφής

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$

όπου τα blocks J_i είναι τετράγωνα και καθένα από αυτά είναι είτε της μορφής

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \tag{4}$$

δηλ. διαγώνιος με μια από τις ιδιοτιμές του P στη διαγώνιο (την ίδια σε όλες τις γραμμές), είτε της μορφής

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \dots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \tag{5}$$

δηλ. με μια σταθερή ιδιοτιμή στη διαγώνιο, άσους στην υπερδιαγώνιο και 0 παντού αλλού.

Επίσης, το σύνολο των λ που υπάρχουν στη διαγώνιο του J είναι ακριβώς το σύνολο των ιδιοτιμών του P.

Λόγω του θεωρήματος Perron-Frobenius γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση που ο P είναι ένας στοχαστικός πίνακας με όλα τα στοιχεία του θετικά τότε ένα από τα blocks, ας πούμε το J_1 είναι 1×1 και έχει την ιδιοτιμή 1, και σε όλα τα υπόλοιπα blocks τα λ είναι απολύτως μικρότεροι του 1 μιγαδικοί αριθμοί.

18 Οι δυνάμεις P^n

Υψώνοντας την (3) στη n δύναμη παίρνουμε

$$QP^nQ^{-1} = \begin{bmatrix} J_1^n & & & \\ & J_2^n & & \\ & & \dots & \\ & & & J_k^n \end{bmatrix}$$

οπότε πρέπει να μελετήσουμε τις δυνάμεις J_i^n.

Στην περίπτωση (4) έχουμε απλούστατα

$$J_i^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & & & \\ & \lambda^n & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda^n \end{bmatrix}$$

Άρα, εκτός από την περίπτωση του J_1, του οποίου οι δυνάμεις παραμένουν σταθερές, έχουμε $J_i^n \to 0$.

Στην περίπτωση (5) γράφουμε τον πίνακα $J_i = \Lambda + T$, όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda)$ ($|\lambda| < 1$) και T έχει παντού μηδενικά και μόνο στην υπερδιαγώνιο έχει άσους.

Χρησιμοποιώντας το διωνυμικό θεώρημα παίρνουμε (υποθέτουμε ότι J_i είναι $d \times d$)

$$\begin{aligned} J_i^n = (\Lambda + T)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Lambda^k T^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{d} \binom{n}{k} \Lambda^{n-k} T^k. \end{aligned}$$

Το άθροισμα πάει μόνο μέχρι d γιατί οι δυνάμεις του T με εκθέτη d και πάνω είναι 0 (ο T^k έχει παντού μηδενικά εκτός από μια υπερδιαγώνιο σε απόσταση k από τη διαγώνιο, όπου έχει άσους).

Παίρνουμε έτσι και πάλι $J_i^n \to 0$ μια και το άθροισμα έχει ένα σταθερό πλήθος όρων της μορφής $\binom{n}{k}\Lambda^{n-k}T^k$ (με k σταθερό και $n \to \infty$) και ενώ το $\binom{n}{k}$ είναι πολυώνυμο του n βαθμού k ο όρος Λ^{n-k} φθίνει εκθετικά με το n άρα το γινόμενό τους πάει στο 0.

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι

$$\lim_n QP^nQ^{-1} = \lim_n J^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

ή

$$\lim_n P^n = Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} Q.$$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι η 1η στήλη του Q^{-1} είναι η $[1, 1, \ldots, 1]^\top$ (το δεξί ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής 1) και ότι η 1η γραμμή του Q είναι το αριστερό ιδιοδιάνυσμα π της ιδιοτιμής 1. Χρησιμοποιώντας αυτά η τελευταία ισότητα γίνεται

$$\lim_n P^n = \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ \ldots \\ \pi \end{bmatrix},$$

δηλ. ο πίνακας $\lim_n P^n$ έχει όλες τις γραμμές του ίδιες και ίσες με το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του 1.

Αν τώρα π_0 είναι οποιοδήποτε διάνυσμα-κατανομή προκύπτει

$$\lim_n \pi_0 P^n = \pi_0 \begin{bmatrix} \pi \\ \pi \\ \ldots \\ \pi \end{bmatrix} = \pi.$$

Έχουμε δηλ. δείξει το εξής:

Θεώρημα 2 *Αν M είναι μια αλυσίδα Markov της οποίας ο πίνακας μετάβασης P έχει μόνο θετικά στοιχεία τότε έχει μια και μοναδική οριακή κατανομή π (το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του P που αντιστοιχεί στο 1) και μάλιστα για κάθε αρχική κατανομή π_0 ισχύει $\lim_n \pi_0 P^n = \pi$.*

19 Περίπτωση απεριοδικής και ανάγωγης αλυσίδας

Είναι φυσικά δυνατό να μην ισχύει η βασική προϋπόθεση για το προηγούμενο θεώρημα, να μην είναι δηλ. όλοι οι συντελεστές του πίνακα P θετικοί και κάποιοι να είναι 0. Και στην επόμενη περίπτωση όμως έχουμε το ίδιο συμπέρασμα.

Θεώρημα 3 *Αν υπάρχει δύναμη k τέτοια ώστε ο πίνακας P^k να μην έχει μηδενικά στοιχεία τότε ισχύουν τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2.*

Ο λόγος είναι ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα P^k είναι ακριβώς οι ποσότητες της μορφής λ^k, όπου λ διατρέχει τις ιδιοτιμές του P. Αφού λοιπόν το Θεώρημα 2 ισχύει για τον P^k προκύπτει ότι και πάλι το 1 είναι απλή ιδιοτιμή του P και ότι οι άλλες ιδιοτιμές έχουν όλες απόλυτη τιμή μικρότερη του 1, και αυτά είναι μόνο που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 2. Άρα τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 2 ισχύουν και για τον P.

Πότε μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι για κάποια δύναμη του P θα έχουμε όλα τα στοιχεία μη μηδενικά;

Θεώρημα 4 *Αν μια αλυσίδα είναι ανάγωγη και απεριοδική τότε για κάποιο εκθέτη k ισχύει $(P^k)_{ij} > 0$ για όλα τα i, j.*

Αφού η αλυσίδα είναι απεριοδική και ανάγωγη έπεται ότι για κάθε κατάσταση i το σύνολο φυσικών

$$K(i) = \left\{k \in \mathbf{N} : \; p_{ii}^k > 0\right\}$$

έχει μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1 (αφού κανείς αριθμός $d > 1$ δεν διαιρεί όλα τα στοιχεία του $K(i)$). (Το σύνολο αυτό είναι μη κενό επειδή η αλυσίδα είναι ανάγωγη και άρα όλες οι καταστάσεις της είναι έμμονες.)

Λήμμα 1 *Αν οι φυσικοί $a_1, \ldots, a_m$ έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη το 1 τότε το σύνολο*

$$\{k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m : \; k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}\}$$

περιέχει ένα τελικό κομμάτι του $\mathbf{N}$.

Εύκολα βλέπει κανείς ότι αν ένα άπειρο σύνολο έχει ΜΚΔ 1 τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο αυτού με ΜΚΔ 1. Έστω λοιπόν $a_1, \ldots, a_m$ στοιχεία του $K(i)$ με ΜΚΔ 1. Είναι φανερό ότι αν $x, y \in K(i)$ τότε $x + y \in K(i)$ (σκεφτείτε πάνω στο γράφημα της αλυσίδας). Άρα το σύνολο

$$\{k_1 a_1 + \cdots + k_m a_m : \; k_1, \ldots, k_m \in \mathbf{N}\}$$

περιέχεται στο $K(i)$ και περιέχει ένα τελικό κομμάτι του $\mathbf{N}$ έστω το $[N(i), \infty)$. Έστω τώρα

$$M_1 = \max\{N(1), \ldots, N(n)\}$$

και

$$M_2 = \max_{i,j} \min\left\{k : \; p_{ij}^k > 0\right\}.$$

Ισχυριζόμαστε ότι αν $M = M_1 + M_2$ τότε για κάθε δύο i και j στο σύνολο των καταστάσεων υπάρχει ένα μονοπάτι μήκους M που ενώνει την i με την j, ή, με άλλα λόγια, $p_{ij}^M > 0$ για κάθε i και j.

Σταθεροποιούμε δύο i και j και έστω $k \le M_2$ τέτοιο ώστε $p_{ij}^k > 0$, ή, με άλλα λόγια, υπάρχει μονοπάτι στο γράφημα από το i στο j μήκους k. Τότε όμως μπορούμε να πάμε από το i στο j σε χρόνο ακριβώς M αν ακολουθήσουμε το προαναφερθέν μονοπάτι μήκους k από το i στο j και, πριν σταματήσουμε, ακολουθήσουμε και ένα μονοπάτι από το j στο j μήκους $M - k$ πράγμα που είναι δυνατό αφού $M - k \ge M_1$, και από τον ορισμό του M_1 για κάθε $l \ge M_1$ κάθε κορυφή μπορεί να συνδεθεί με τον εαυτό της σε χρόνο l.
□