Ανάλυση ΙΙ: Τελικό διαγώνισμα

Μιχ. Κολουντζάκης

Ηράκλειο, 26 Ιαν. 2000

1. α) Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος, $a,b \in X$, $a \neq b$, και έστω $F \subseteq X$ το σύνολο εκείνων των σημείων του X που απέχουν απόσταση ≤ 1 από το a και ≤ 2 από το b. Δείξτε ότι το F είναι κλειστό.
β) Έστω $f : (X,\rho) \to (Y,d)$ συνεχής, $K \subseteq X$ συμπαγές. Δείξτε ότι το σύνολο $f(K) = \{f(x) : x \in K\}$ είναι συμπαγές στο μετρικό χώρο Y.

2. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται Lipschitz άν υπάρχει μια θετική σταθερά L τέτοια ώστε $\forall x,y \in A$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$.
α) Δείξτε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
β) Δώστε παράδειγμα ομοιόμορφα συνεχούς συνάρτησης $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ που να μην είναι Lipschitz.

3. α) Αποφανθείτε για τη σύγκλιση των παρακάτω σειρών:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n},\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{10}},\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}.$$

β) Να βρεθεί για ποια x συγκλίνουν οι σειρές:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log n (x-1)^n,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{n}(x-1)^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n^3}(x-1)^n.$$

4. α) Βρείτε το κατά σημείο όριο και αποφανθείτε για το ομοιόμορφο της σύγκλισης για τις ακολουθίες συναρτήσεων:

$$f_n(x) = x^{1/n},\ x \in (0.1, 10),$$

και

$$g_n(x) = x^{-n} e^x,\ x \in [2, \infty).$$

β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς, και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$, και $x_n \to x$. Δείξτε ότι $f_n(x_n) \to f(x)$.

5. α) Δώστε παάδειγμα $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που να συγκλίνουν κατά σημείο σε κάποια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, αλλά να υπάρχει ακολουθία σημείων $x_n \to x$ χωρίς η ακολουθία $f_n(x_n)$ να συγκλίνει στο $f(x)$.

β) Υποθέστε ότι υπάρχει συνάρτηση $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, με $|k(x)| \leq 1$ παντού, $k(x) = 1$, για $|x| \leq 1$, $k(x) = 0$, για $|x| \geq 2$. Δίδεται συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Δείξτε ότι η f μπορεί να προσεγγισθεί ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ από παραγωγίσιμες συναρτήσεις (χρησιμοποιήσετε το Θ. Stone-Weierstrass).

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες, με κλειστές όλες τις σημειώσεις.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ