Πρόοδος για την Ανάλυση ΙΙ

Μιχ. Κολουντζάκης

Ηράκλειο, 15 Νοεμβρίου 1999

1. (α) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $a_n \in A'$ (σημ. συσσώρευσης του A). Υποθέστε επίσης πως $a_n \to a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $a \in A'$.
(β) Έστω (X, ρ) μετρικός χώρος και $A \subseteq X$. Το σύνολο $B \subseteq X$ ορίζεται ως εκείνα τα $x \in X$ για τα οποία υπάρχει $y \in A$ με $\rho(x, y) < 1$. Δείξτε ότι το B είναι ανοιχτό.

2. (α) Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής, $K \subset \mathbb{R}$ συμπαγές. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in K$ τ.ώ. $f(x) = \sup_{y \in K} f(y)$. Δηλ. για κάθε $y \in K$ έχουμε $f(x) \geq f(y)$.
(β) Δείξτε ότι σε ένα μετρικό χώρο X οποιαδήποτε ένωση ανοιχτών είναι ανοιχτό σύνολο και οποιαδήποτε τομή κλειστών είναι κλειστό σύνολο.

3. (α) Για ποια $x \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{50} x^n$.
(β) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$ συγκλίνει.
(γ) Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $\alpha > 1$. Συνιστάται να χρησιμοποιήσετε το κριτήριο του ολοκληρώματος.

4. (α) Χρησιμοποιείστε την ανισότητα Cauchy - Schwartz στο $\mathbb{R}^n$ για να δείξετε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |b_n| < \infty.$$

(β) Δείξτε ότι αν $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ τότε έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty$ για κάθε $p \geq 1$.

5. Ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν και γιατί·

- (α) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$.
- (β) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2}$.
- (γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}$.
- (δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.
- (ε) $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, όπου $s_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 3 ώρες, με κλειστές όλες τις σημειώσεις.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ