Μιχαηλ Αρβανιτακης

Το θεωρημα Fatou

Αρμονικες Συναρτησεις

Μεταπτυχιακη Εργασια

Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών
Ηράκλειο Κρήτης 22 Δεκεμβρίου 2022

Εισηγητης: Μιχαήλ Παπαδημητράκης

Επιτροπη

Μιχαήλ Παπαδημητράκης

Θεμιστοκλής Μήτσης

Γεώργιος Κωστάκης

Στους γονείς μου!

Περιεχόμενα

Το θεώρημα Fatou

Σε αυτή την μεταπτυχιακή εργασία, θα ασχοληθούμε με αρμονικές συναρτήσεις, δηλαδή μιγαδικές συναρτήσεις σε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, οι οποίες είναι συνεχείς με $\Delta f = 0$. Θα μιλήσουμε επίσης για ένα ολοκλήρωμα αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathbf{U}$, το ολοκλήρωμα Poisson. Θα δούμε ακόμη διάφορες ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων στο $\mathbf{U}$, και θα επεκτείνουμε ορισμένες από τις ιδιότητες αυτές, και σε αυθαίρετους κυκλικούς δίσκους με απλή αλλαγή μεταβλητών. Στο δεύτερο μέρος, θα ασχοληθούμε με την συνοριακή συμπεριφορά φραγμένων ολόμορφων συναρτήσεων στο U. Θα μιλήσουμε για μη-εφαπτομενικά προσεγγιστικά χωρία, και θα ορίσουμε κάποιες μεγιστικές στον μοναδιαίο κύκλο. Με την βοήθεια αυτών, θα δούμε βασικά θεωρήματα που σχετίζονται με την μη-εφαπτομενική οριακή συμπεριφορά του ολοκληρώματος Poisson, τόσο των συναρτήσεων $L^1(\mathbf{T})$, όσο και των θετικών 2π-περιοδικών μέτρων Borel στο $\mathbb{R}$. Ακόμη, θα δούμε κάποια θεωρήματα αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων στον μοναδιαίο δίσκο, τα οποία θα τα χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του κεντρικού θεωρήματος αυτής της εργασίας, το θεώρημα του Fatou. Τέλος, θα μιλήσουμε για φραγμένες ολόμορφες συναρτήσεις στον μοναδιαίο δίσκο, και χρησιμοποιώντας όλα τα παραπάνω θα αποδείξουμε το θεώρημα του Fatou.

Μ. Αρβανιτάκης, Ηράκλειο 2022.

Μέρος I

Αρμονικές Συναρτήσεις

Κεφάλαιο 1

Αρμονικές Συναρτήσεις

1.1 Οι εξισώσεις των Cauchy-Riemann

Οι τελεστές ∂ και $\overline{\partial}$. Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση που ορίζεται σε ένα ανοιχτό σύνολο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Θεωρούμε την f σαν μετασχηματισμό του Ω στο $\mathbb{R}^2$ και υποθέτουμε ότι έχει παράγωγο με την πραγματική έννοια, σε κάποιο σημείο $z_0 \in \Omega$. Η υπόθεση της παραγωγισιμότητας με την πραγματική έννοια, είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη δύο μιγαδικών αριθμών α και β έτσι ώστε :

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \eta(z)(z - z_0),$$

όπου $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ και $\eta(z) \longrightarrow 0$ όταν $z \longrightarrow z_0$. Εφόσον $2x = z + \overline{z}$ και $2iy = z - \overline{z}$ μπορούμε να γράψουμε :

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + \alpha\frac{(z - z_0) + (\overline{z} - \overline{z}_0)}{2} + \beta\frac{(z - z_0) - (\overline{z} - \overline{z}_0)}{2i} + \eta(z)(z - z_0) \\ &= f(z_0) + \frac{\alpha - i\beta}{2}(z - z_0) + \frac{\alpha + i\beta}{2}(\overline{z} - \overline{z}_0) + \eta(z)(z - z_0). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε ότι η παραγωγισιμότητα με την πραγματική έννοια της f στο z_0 είναι ισοδύναμη με

$$f(z) = f(z_0) + \frac{\alpha - i\beta}{2}(z - z_0) + \frac{\alpha + i\beta}{2}(\overline{z} - \overline{z}_0) + \eta(z)(z - z_0), \tag{1.1}$$

όπου $\eta(z) \longrightarrow 0$ όταν $z \longrightarrow z_0$.

Ορίζουμε τους διαφορικούς τελεστές :

$$\partial = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Παρατηρούμε ότι :

$$(\partial f)(z_0) = \frac{1}{2}(\alpha - i\beta), \qquad (\overline{\partial} f)(z_0) = \frac{1}{2}(\alpha + i\beta).$$

Έτσι, η (1.1) γίνεται :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = (\partial f)(z_0) + (\overline{\partial} f)(z_0)\frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} + \eta(z), \quad z \neq z_0.$$

Για $z - z_0$ πραγματικό ισχύει $\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = 1$. Ενώ, για $z - z_0$ φανταστικό ισχύει $\frac{\bar{z}-\bar{z}_0}{z-z_0} = -1$. Επομένως, το $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ έχει όριο στο z_0 αν και μόνον αν $(\overline{\partial} f)(z_0) = 0$. Γνωρίζουμε ότι, αν υπάρχει το όριο του $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ στο z_0 τότε λέμε ότι η f έχει παράγωγο με την μιγαδική έννοια στο z_0, η απλά παράγωγο στο z_0, και συμβολίζουμε:

$$f^{'}(z_0) = \lim_{z \longrightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Επίσης, αν η f έχει παράγωγο σε κάθε σημείο του Ω, τότε λέμε ότι η f είναι ολόμορφη στο Ω και γράφουμε $f \in \mathbf{H}(\Omega)$. Βάσει των προηγούμενων έχουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό ολόμορφων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση σε ένα χωρίο Ω η οποία έχει παράγωγο με την πραγματική έννοια σε κάθε σημείο του Ω. Τότε $f \in \boldsymbol{H}(\Omega)$ αν και μόνον αν ισχύει*

$$(\overline{\partial} f)(z) = 0 \tag{1.2}$$

για κάθε $z \in \Omega$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε :

$$f'(z) = (\partial f)(z), \quad z \in \Omega. \tag{1.3}$$

Αν $f = u + iv$ με u, v πραγματικές συναρτήσεις, η (1.2) χωρίζεται στο ζεύγος των εξισώσεων,

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x,$$

όπου οι δείκτες αναφέρονται στην μερική παράγωγο ως προς την υποδεικνυόμενη μεταβλητή. Αυτές είναι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann, οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται από το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης.

1.2 H Laplacian

Έστω f μια μιγαδική συνάρτηση σε ένα ανοιχτό χωρίο Ω έτσι ώστε οι f_{xx}, f_{yy} να υπάρχουν σε κάθε σημείο του Ω. Η Laplacian της f ορίζεται να είναι :

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}. \tag{1.4}$$

Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο Ω και αν $\Delta f = 0$ σε κάθε σημείο του Ω , τότε λέμε ότι η f είναι αρμονική στο Ω.

Εφόσον η Laplacian μιας πραγματικής συνάρτησης είναι πραγματική (εάν υπάρχει), είναι ξεκάθαρο ότι μια μιγαδική συνάρτηση είναι αρμονική στο Ω αν και μόνον αν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της είναι αρμονικές συναρτήσεις στο Ω. Μετά από λίγες πράξεις βλέπουμε ότι

$$\Delta f = 4\partial\overline{\partial} f, \tag{1.5}$$

υπό την προϋπόθεση ότι $f_{xy} = f_{yx}$, και αυτό συμβαίνει για όλες τις f που έχουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης.

Αν η f είναι ολόμορφη, τότε $\overline{\partial} f = 0$, και γνωρίζουμε ότι η f έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Επομένως η (1.5) δείχνει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.1. *Κάθε ολόμορφη συνάρτηση είναι αρμονική.*

1.3 Το ολοκλήρωμα Poisson

Τώρα θα στρέψουμε την προσοχή μας σε ένα ολοκλήρωμα αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων, το οποίο σχετίζεται στενά με τον τύπο του Cauchy για ολόμορφες συναρτήσεις. Αυτό θα δείξει, μεταξύ άλλων, ότι κάθε πραγματική αρμονική συνάρτηση είναι τοπικά το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης.

Ο Πυρήνας Poisson είναι η συνάρτηση :

$$\mathbf{P}_r(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int}, \quad 0 \leq r < 1, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathbf{P}_r(t)$ σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών, του r και του t ή σαν μια οικογένεια συναρτήσεων του t με δείκτη r. Αν $z = re^{i\theta}$ με $0 \leq r < 1$ και $\theta \in \mathbb{R}$ υπολογίζοντας έχουμε :

$$\begin{aligned} P_r(\theta - t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta - t)} = Re\Big[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Big] \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta - t)+r^2} = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

διότι

$$\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{(e^{it}-z)(e^{-it}-\overline{z})} = \frac{1-r^2+2ir\sin(\theta-t)}{1+r^2-2r\cos(\theta-t)}$$

και άρα

$$Re\Big[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Big] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}.$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} &= 1 + \sum_{-\infty}^{n=-1} r^{-n} e^{in(\theta-t)} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)} \\ &= 1 + 2Re\Big[\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in(\theta-t)}\Big] = 1 + 2Re\Big[\sum_{n=1}^{\infty} z^n e^{-int}\Big] \\ &= 1 + 2Re\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{z}{e^{it}}\Big)^n\Big] = 1 + 2Re\Big[\frac{z/e^{it}}{1-z/e^{it}}\Big] \\ &= Re\Big[1 + \frac{2z}{e^{it}-z}\Big] = Re\Big[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Big]. \end{aligned}$$

Από την (1.6) βλέπουμε ότι :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t)dt = 1, \quad 0 \leq r < 1,$$

καθώς "επιβιώνει" από την ολοκλήρωση μόνο ο όρος με $n = 0$.

Είναι προφανές ότι η $\mathbf{P}_r$ είναι 2π-περιοδική συνάρτηση. Από την (1.7) έχουμε ότι

$$\mathbf{P}_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Άρα η $\mathbf{P}_r$ είναι άρτια συνάρτηση, ισχύει

$$0 < \mathbf{P}_r(t) < \mathbf{P}_r(\delta), \quad 0 < \delta < |t| \le \pi,$$

και επίσης,

$$\lim_{r \longrightarrow 1} \mathbf{P}_r(\delta) = 0, \quad 0 < \delta \le \pi.$$

Τον ανοιχτό μοναδιαίο δίσκο $\mathbf{D}(0;1)$ θα τον συμβολίζουμε με $\mathbf{U}$, και τον μοναδιαίο κύκλο με $\mathbf{T}$. Όταν θα γράφουμε $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T})$, $\;1 \le p \le \infty$, θα εννοούμε ότι η f είναι 2π-περιοδική lebesque μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt < +\infty$, αν $1 \le p < +\infty$, και ουσιωδώς φραγμένη, αν $p = +\infty$. Όταν θα γράφουμε $f \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$ θα εννοούμε ότι η f είναι 2π-περιοδική και συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Το Ολοκλήρωμα Poisson. Αν $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ τότε ορίζουμε :

$$\mathbf{P}[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) f(t) dt, \quad 0 \le r < 1, \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Η $\mathbf{P}[f]$ που ορίζεται στο δίσκο $\mathbf{U}$, ονομάζεται ολοκλήρωμα Poisson της f. Αν η f είναι πραγματική, τότε :

$$\mathbf{P}[f](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re\Big[\frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\Big] f(t) dt = Re\Big[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t) dt\Big].$$

Έστω

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t) dt, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε εύκολα ότι η g είναι συνεχής στο $\mathbf{U}$. Επίσης, από το θεώρημα Fubini έχουμε για οποιοδήποτε τρίγωνο $\Delta \subseteq \mathbf{U}$ ότι

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Delta} g(z) dz &= \int_{\partial\Delta} \Big[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} f(t) dt\Big] dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \Big[\int_{\partial\Delta} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dz\Big] dt = 0\end{aligned}$$

διότι από το θεώρημα Cauchy για τρίγωνα έχουμε ότι $\int_{\partial\Delta} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} dz = 0$ αφού η $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbf{U}$. Επομένως, από το θεώρημα του Morera προκύπτει $g \in \mathbf{H}(\mathbf{U})$. Συνεπώς, η $\mathbf{P}[f] = Reg$ είναι αρμονική στο $\mathbf{U}$. Φυσικά, αυτό επεκτείνεται και για μιγαδική $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$. Άρα :

Θεώρημα 1.3.1. *Αν $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$, τότε το ολοκλήρωμα Poisson $\boldsymbol{P}[f]$ είναι αρμονική συνάρτηση στο $\boldsymbol{U}$.*

Θεώρημα 1.3.2. *Αν $f \in \boldsymbol{C}(\boldsymbol{T})$ και αν η Hf ορίζεται στον κλειστό δίσκο $\overline{U}$ ως*

$$(Hf)(re^{i\theta}) = \begin{cases} f(\theta), & r = 1, \\ \boldsymbol{P}[f](re^{i\theta}), & 0 \le r < 1, \end{cases} \tag{1.9}$$

τότε η Hf είναι συνεχής στο $\overline{U}$ και $||Hf||_{\overline{U}} = ||f||_{\boldsymbol{T}}$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$. Τότε :

$$|\mathbf{P}[f](re^{i\theta})| = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)f(t)dt\Big| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)|f(t)|dt$$
$$\leq \sup_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)dt = ||f||_{\mathbf{T}},$$

αφού

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi}\mathbf{P}_r(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(t)dt = 1.$$

Άρα $||\mathrm{H}f||_{\mathbf{U}} \leq ||f||_{\mathbf{T}}$. Προφανώς, $||\mathrm{H}f||_{\mathbf{T}} = ||f||_{\mathbf{T}}$. Επομένως :

$$||Hf||_{\overline{U}} = \max\{||Hf||_{\mathbf{U}}, ||Hf||_{\mathbf{T}}\} = ||f||_{\mathbf{T}}.$$

Τώρα, αν $g(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\theta}$ είναι κάποιο τριγωνομετρικό πολυώνυμο, τότε για $0 \leq r < 1$:

$$\mathrm{H}g(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|m|}e^{im(\theta-t)}\sum_{n=-N}^{N}c_n e^{int}dt$$
$$= \sum_{n=-N}^{N}c_n\sum_{-\infty}^{\infty}r^{|m|}e^{im\theta}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{it(n-m)}dt = \sum_{n=-N}^{N}c_n r^{|n|}e^{in\theta}.$$

Άρα $\mathrm{H}g \in \mathbf{C}(\overline{U})$. Τώρα, έστω $f \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$. Από το θεώρημα του Fejer υπάρχει ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων g_k ώστε $||g_k - f||_{\mathbf{T}} \longrightarrow 0$. Όμως, τότε :

$$||\mathrm{H}g_k - Hf||_{\overline{U}} = ||g_k - f||_{\mathbf{T}} \longrightarrow 0.$$

Έτσι η $Hg_k \in \mathbf{C}(\overline{U})$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\mathrm{H}f$. Άρα $\mathrm{H}f \in \mathbf{C}(\overline{U})$.

□

Αυτό το θεώρημα δίνει τη λύση στο Πρόβλημα Dirichlet :*Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση u στο $\boldsymbol{T}$, και θέλουμε να βρούμε μια αρμονική συνάρτηση w στο $\boldsymbol{U}$ έτσι ώστε η w μαζί με την u να ορίζουν συνεχή συνάρτηση στο $\overline{U}$.* Το θεώρημα παρουσιάζει μία λύση μέσω του ολοκληρώματος Poisson της u και δηλώνει ακριβέστερα τη σχέση ανάμεσα στις u και w. Δηλαδή

$$w(re^{i\theta}) = \begin{cases} u(e^{i\theta}), & r = 1, \\ \mathbf{P}[u](re^{i\theta}), & 0 \leq r < 1. \end{cases}$$

Η μοναδικότητα που αντιστοιχεί σε αυτό το θεώρημα ύπαρξης περιέχεται στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω u μία συνεχής πραγματική συνάρτηση στον κλειστό μοναδιαίο δίσκο $\overline{U}$ και υποθέτουμε ότι η u είναι αρμονική στο $\boldsymbol{U}$. Τότε στο $\boldsymbol{U}$*

η u είναι το ολοκλήρωμα Poisson του περιορισμού της στον $\boldsymbol{T}$ και η u είναι το πραγματικό μέρος της ολόμορφης συνάρτησης

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} u(e^{it})dt, \quad z \in \boldsymbol{U}. \tag{1.10}$$

Απόδειξη. Είδαμε πριν από το θεώρημα (1.3.1) (με την συνάρτηση g) ότι $f \in \mathbf{H}(\mathbf{U})$. Ορίζουμε την :

$$w(re^{i\theta}) = \begin{cases} u(e^{i\theta}), & r = 1, \\ Ref(re^{i\theta}) = \mathbf{P}[u](re^{i\theta}), & 0 \le r < 1, \end{cases} \tag{1.11}$$

και την $h = u - w$ στο $\overline{\mathbf{U}}$.
Η h είναι συνεχής στο $\overline{U}$ διότι η u είναι συνεχής στο $\overline{U}$ και από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι η w είναι συνεχής στο $\overline{U}$. Επίσης, η h είναι αρμονική στο $\mathbf{U}$ διότι η u και η $w = Ref$ είναι αρμονικές στο $\mathbf{U}$. Σε κάθε σημείο του $\mathbf{T}$ έχουμε $h = 0$ (αφού $w = u$ στο $\mathbf{T}$). Έστω ότι υπάρχει $z_0 \in \mathbf{U}$ ώστε $h(z_0) > 0$. Θεωρούμε ε ώστε $h(z_0) > \varepsilon > 0$. Τότε ορίζουμε :

$$g(z) = h(z) + \varepsilon|z|^2, \quad z \in \overline{U}.$$

Η g είναι συνεχής στο $\overline{U}$, ισχύει $g = \varepsilon$ στο $\mathbf{T}$ και

$$g(z_0) = h(z_0) + \varepsilon|z_0|^2 \geqslant h(z_0) > \varepsilon.$$

Άρα υπάρχει κάποιο $z_1 \in \mathbf{U}$ στο οποίο η g να έχει ολικό μέγιστο στο $\overline{U}$. Έτσι $g_{xx}(z_1) \le 0$ και $g_{yy}(z_1) \le 0$, οπότε $\Delta g(z_1) \le 0$. Όμως,

$$\Delta g(z_1) = \Delta h(z_1) + 4\varepsilon = 4\varepsilon$$

αφού η h είναι αρμονική στο U. Επομένως έχουμε αντίφαση. Έτσι, $u - w \le 0$. Με το ίδιο επιχείρημα μπορούμε να δείξουμε ότι $w - u \le 0$, και άρα $w = u$.

□

Μέχρι τώρα έχουμε περιορίσει την μελέτη μας σε συναρτήσεις ορισμένες στο μοναδιαίο δίσκο $\mathbf{U} = \mathbf{D}(0;1)$. Είναι σαφές ότι τα προηγούμενα μπορούν να μεταφερθούν σε αυθαίρετο κυκλικό δίσκο με απλή αλλαγή μεταβλητών. Ως εκ τούτου, απλώς θα συνοψίσουμε μερικά από τα αποτελέσματα. Αν η u είναι συνεχής συνάρτηση στο σύνορο του δίσκου $\mathbf{D}(\alpha;R)$ και εάν η u οριστεί στον $\mathbf{D}(\alpha;R)$ από το ολοκλήρωμα Poisson με τον τύπο

$$u(\alpha + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u(\alpha + Re^{it})dt, \quad 0 \le r < R, \tag{1.12}$$

τότε η u είναι συνεχής στον $\overline{D}(\alpha;R)$ και αρμονική στον $\mathbf{D}(\alpha;R)$.

Αν η u είναι αρμονική και πραγματική σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω και αν $\overline{D}(\alpha;R) \subseteq \Omega$, τότε η u ικανοποιεί την (1.12) στον $\mathbf{D}(\alpha;R)$ και υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f που ορίζεται στον $\mathbf{D}(\alpha;R)$, της οποίας το πραγματικό μέρος είναι η u. Η διαφορά δύο τέτοιων συναρτήσεων f είναι μια φανταστική σταθερά. Μπορούμε να συνοψίσουμε τα παραπάνω λέγοντας ότι κάθε πραγματική αρμονική συνάρτηση είναι τοπικά το πραγματικό μέρος μίας ολόμορφης συνάρτησης.

Συνεπώς, κάθε αρμονική συνάρτηση έχει μερικές παραγώγους όλων των τάξεων.

1.4 Θεώρημα του Harnack

Το ολοκλήρωμα Poisson επίσης δίνει πληροφορίες σχετικά με τις ακολουθίες αρμονικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.4.1. ***(Harnack).*** *Έστω ακολουθία αρμονικών συναρτήσεων u_n σε ένα χωρίο Ω.*

(i) *Αν $u_n \longrightarrow u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, τότε η u είναι αρμονική στο Ω.*

(ii) *Αν $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \ldots$ στο Ω, τότε είτε η u_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω ή $u_n(z) \longrightarrow \infty$ για κάθε $z \in \Omega$.*

Απόδειξη. (i). Έστω $\overline{D}(\alpha; R) \subseteq \Omega$. Τότε,

(1.13)
$$u_n(\alpha + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u_n(\alpha + Re^{it})dt, \quad 0 \leq r < R.$$

Αφού $u_n \longrightarrow u$ ομοιόμορφα στο συμπαγές $\partial\mathbf{D}(a; R) \subseteq \Omega$, ισχύει
$u_n(\alpha + Re^{it}) \longrightarrow u(\alpha + Re^{it})$ ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$. Οπότε

$$u_n(a + re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u_n(\alpha + Re^{it})dt \longrightarrow$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} u(\alpha + Re^{it})dt$$

στον δίσκο $\mathbf{D}(a; R)$. Επιπλέον η u_n συγκλίνει ομοιόμορφα στην u στα συμπαγή υποσύνολα του Ω, άρα και στο σημείο $a + re^{i\theta}$. Επομένως, $u_n(a + re^{i\theta}) \longrightarrow u(a + re^{i\theta})$. Συνεπώς η u ικανοποιεί την (1.12), οπότε η u είναι αρμονική στον $\mathbf{D}(a; R)$. Ο δίσκος ήταν τυχαίος, άρα η u είναι αρμονική στο Ω.
(ii). Έστω $u_1 \geq 0$ (αν όχι, αντικαθιστούμε την u_n με $u_n - u_1$). Θέτουμε

$$u = \sup_n u_n, \quad \mathrm{A} = \{z \in \Omega : u(z) < \infty\}, \quad \mathrm{B} = \Omega \setminus A.$$

Έστω τυχαίος δίσκος $\overline{D}(\alpha; R) \subseteq \Omega$. Τότε,

$$\frac{R - r}{R + r} \leq \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - t) + r^2} \leq \frac{R + r}{R - r}, \quad 0 \leq r < R.$$

Πολλαπλασιάζουμε την σχέση αυτή με $u_n(a + Re^{it})$ και, ολοκληρώνοντας ως προς t, παίρνουμε από την (1.12) ότι

$$\frac{R - r}{R + r}u_n(\alpha) \leq u_n(\alpha + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r}u_n(\alpha).$$

Παίρνοντας όριο έχουμε :

$$\frac{R - r}{R + r}u(\alpha) \leq u(\alpha + re^{i\theta}) \leq \frac{R + r}{R - r}u(\alpha). \tag{1.14}$$

Έστω $\alpha \in \Omega$ τότε είτε $\alpha \in A$ είτε $\alpha \in B$.
Άν $a \in A$, τότε $u(a) < \infty$. Από το δεξιό μέλος της (1.14) έχουμε $u(z) < \infty$ για

κάθε $z \in \mathbf{D}(a; R)$. Άρα $\mathbf{D}(a; R) \subseteq A$, και επομένως το A είναι ανοιχτό.
Αν $a \in B$, τότε $u(a) = \infty$. Από το αριστερό μέλος της (1.14) έχουμε $u(z) = \infty$ για κάθε $z \in \mathbf{D}(a; R)$. Άρα $\mathbf{D}(a; R) \subseteq B$, και επομένως το B είναι ανοιχτό.
Όμως το Ω είναι συνεκτικό και $\Omega = A \cup B$ με A, B ανοιχτά και ξένα. Άρα είτε $\mathrm{A} = \emptyset$ είτε $\mathrm{A} = \Omega$.
Αν $\mathrm{A} = \emptyset$ τότε, $u(z) = +\infty$ για κάθε $z \in \Omega$.
Έστω $\mathrm{A} = \Omega$. Τότε από την (1.13) το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης δείχνει ότι η u ικανοποιεί την (1.12), οπότε η u είναι αρμονική σε κάθε δίσκο $\mathbf{D}(\alpha; R)$ στο Ω και άρα η u είναι αρμονική στο Ω.

Θα δούμε τώρα ότι αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει μονότονα σε συνεχές όριο στο Ω, τότε η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.
Έστω $z_0 \in \Omega$ και $\varepsilon > 0$. Επειδή η u είναι συνεχής στο z_0, υπάρχει $\delta'_{z_0} > 0$ ώστε :

$$|u(z) - u(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in \mathbf{D}(z_0; \delta'_{z_0}). \tag{1.15}$$

Επειδή $u_n \uparrow u$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε :

$$|u_n(z_0) - u(z_0)| = u(z_0) - u_n(z_0) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad n \geq n_0.$$

Ειδικότερα,

$$|u_{n_0}(z_0) - u(z_0)| = u(z_0) - u_{n_0}(z_0) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.16}$$

Επίσης, η u_{n_0} είναι συνεχής στο z_0. Άρα υπάρχει $\delta''_{z_0} > 0$ ώστε :

$$|u_{n_0}(z) - u_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad z \in \mathbf{D}(z_0; \delta''_{z_0}). \tag{1.17}$$

Ορίζουμε $\delta_{z_0} = \min\{\delta'_{z_0}, \delta''_{z_0}\} > 0$.
Έτσι για κάθε $z \in \mathbf{D}(z_0; \delta_{z_0})$ και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε :

$$\begin{aligned}
|u(z) - u_n(z)| &= u(z) - u_n(z) \\
&= (u(z) - u(z_0)) + (u(z_0) - u_{n_0}(z_0)) + (u_{n_0}(z_0) - u_n(z)) \\
&\leq (u(z) - u(z_0)) + (u(z_0) - u_{n_0}(z_0)) + (u_{n_0}(z_0) - u_{n_0}(z)).
\end{aligned}$$

οπότε από τις (1.15),(1.16),(1.17) συνεπάγεται

$$|u(z) - u_n(z)| < \varepsilon.$$

Άρα για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$||u_n - u||_{\mathbf{D}(z_0; \delta_{z_0})} \leq \varepsilon.$$

Έστω $\mathrm{K} \subseteq \Omega$ συμπαγές. Τότε $K \subseteq \bigcup_{z \in K} \mathbf{D}(z; \delta_z)$. Επειδή το K είναι συμπαγές υπάρχουν $z_1, z_2, ..., z_m$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathbf{D}(z_i; \delta_{z_i})$. Για κάθε i υπάρχει $n_i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε :

$$||u_n - u||_{\mathbf{D}(z_i; \delta_{z_i})} \leq \varepsilon, \quad n \geq n_i.$$

Ορίζουμε $n_0 = \max_{1 \leq i \leq m}\{n_i\}$. Έτσι, για $n \geq n_0$ έχουμε :

$$||u_n - u||_{\mathbf{D}(z_i;\delta_{z_i})} \leq \varepsilon.$$

Επομένως, για $n \geq n_0$:

$$||u_n - u||_K \leq ||u_n - u||_{\bigcup_{i=1}^m \mathbf{D}(z_i;\delta_{z_i})} \leq \max_{1\leq i\leq m} ||u_n - u||_{\mathbf{D}(z_i;\delta_{z_i})} \leq \varepsilon.$$

Άρα η u_n συγκλίνει ομοιόμορφα στο τυχαίο συμπαγές $\mathrm{K} \subseteq \Omega$. □

1.5 Ιδιότητα της Μέσης Τιμής

Ορισμός: Λέμε ότι μια συνεχής συνάρτηση u σε ένα ανοιχτό χωρίο Ω έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής αν για κάθε $z \in \Omega$ υπάρχει ακολουθία $\{r_n\}$ έτσι ώστε $r_n > 0$, $r_n \longrightarrow 0$ καθώς $n \longrightarrow \infty$ και

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(z + r_n e^{it})dt, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

Με αλλά λόγια, η $u(z)$ είναι ίση με την μέση τιμή της u στον κύκλο ακτίνας r_n και κέντρου z.

Σημειώνουμε ότι ο τύπος του Poisson δείχνει ότι η (1.18) ισχύει για κάθε αρμονική συνάρτηση u και για κάθε $r_n = r$ με $0 \leq r < R$ και $\overline{D}(z;R) \subseteq \Omega$. Έτσι, οι αρμονικές συναρτήσεις ικανοποιούν μια πολύ ισχυρή ιδιότητα μέσης τιμής ισχυρότερη από αυτή που μόλις ορίσαμε. Τώρα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.5.1. *Αν μια συνεχής συνάρτηση u έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω, τότε η u είναι αρμονική στο Ω.*

Απόδειξη. Αρκεί να το δείξουμε για πραγματική u. Έστω $\overline{D}(\alpha;R) \subseteq \Omega$ τυχαίος δίσκος. Η u είναι συνεχής στο $\partial D(\alpha;R)$, άρα υπάρχει h συνεχής στον $\overline{D}(\alpha;R)$ ώστε η h να είναι αρμονική στον $\mathbf{D}(\alpha;R)$ και $h = u$ στο $\partial D(\alpha;R)$. Έστω

$$v = u - h$$

η οποία είναι συνεχής στον $\overline{D}(\alpha;R)$ και $v = 0$ στο $\partial\mathbf{D}(a;R)$.
Έστω $\mathrm{M} = \max_{z\in\overline{D}(\alpha;R)} v(z)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{M} > 0$. Έστω, επίσης

$$\mathrm{A} = \{z \in \overline{D}(\alpha;R) : v(z) = M\}.$$

Φυσικά, το Α είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{D}(a;R)$. Άρα, υπάρχει $z_0 \in A$ ώστε

$$|z_0 - \alpha| \geq |z - \alpha| \quad \text{για κάθε} \quad z \in A.$$

Το z_0 είναι συνοριακό σημείο του Α και κάθε κύκλος κέντρου z_0 έχει τουλάχιστον ένα ημικύκλιο του έξω από το Α.
Ορίζουμε :

$$\mathrm{K} = \{t \in [-\pi,\pi] : z_0 + r_n e^{it} \in A\}, \quad L = [-\pi,\pi] \setminus \mathrm{K}.$$

Τότε $|L| \geq \pi$. Έτσι έχουμε ότι :

$$\frac{1}{2\pi}\int_K v(z_0 + re^{it})dt = \mathrm{M}\frac{|\mathrm{K}|}{2\pi}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_L v(z_0 + re^{it})dt < \mathrm{M}\frac{|L|}{2\pi}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} = v(z_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(z_0 + re^{it})dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_K v(z_0 + re^{it})dt + \frac{1}{2\pi}\int_L v(z_0 + re^{it})dt < M(\frac{|\mathrm{K}|}{2\pi} + \frac{|L|}{2\pi}) = M.
\end{aligned}$$

Αντίφαση. Άρα $v(z) \leq 0$ και άρα $u(z) \leq h(z)$ για κάθε $z \in \mathbf{D}(\alpha; R)$. Ομοίως, $u(z) \geq h(z)$ για κάθε $z \in \mathbf{D}(a; R)$. Έτσι $u(z) = h(z)$ για κάθε $z \in D(\alpha; R)$, οπότε η u είναι αρμονική στον $D(\alpha; R)$. Επειδή ο $\mathbf{D}(a; R)$ είναι τυχαίος, η u είναι αρμονική στο Ω. □

1.6 Αρχή ανάκλασης του Schwarz

Το παραπάνω θεώρημα μας οδηγεί στην Αρχή Ανάκλασης του Schwarz για ολόμορφες συναρτήσεις. Με το άνω ημιεπίπεδο Π^+ εννοούμε το σύνολο όλων των $z = x + iy$ με $y > 0$. Ενώ με το κάτω ημιεπίπεδο Π^- εννοούμε το σύνολο όλων των $z = x + iy$ με $y < 0$.

Θεώρημα 1.6.1. ***Αρχή Ανάκλησης του Schwarz:*** *Έστω L ανοιχτό υποσύνολο του πραγματικού άξονα, Ω^+ ένα χωρίο στο Π^+,και έστω ότι κάθε $t \in L$ είναι το κέντρο ανοιχτού δίσκου D_t ώστε $\Pi^+ \cap D_t \subseteq \Omega^+$. Έστω Ω^- η ανάκλαση του $\Omega^+ : \Omega^- = \{z : \overline{z} \in \Omega^+\}$.*

Υποθέτουμε ότι η $f = u + iv$ είναι ολόμορφη συνάρτηση στο Ω^+ και

$$\lim_{n\to+\infty} v(z_n) = 0 \tag{1.19}$$

για κάθε $\{z_n\}$ στο Ω^+ η οποία συγκλίνει σε σημείο του L.

Τότε υπάρχει συνάρτηση F ολόμορφη στο $\Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$ ώστε $F(z) = f(z)$ στο Ω^+ και η F ικανοποιεί τη σχέση

$$F(\overline{z}) = \overline{F}(z), \quad z \in \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-. \tag{1.20}$$

Απόδειξη. Έστω $\Omega = \Omega^+ \cup L \cup \Omega^-$. Επεκτείνουμε την v στο Ω ως εξής :

$$v_0(z) = \begin{cases} v(z), & z \in \Omega^+, \\ 0, & z \in L, \\ -v(\overline{z}), & z \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.21}$$

Θα δούμε ότι η v_0 είναι συνεχής στο Ω. Η v_0 είναι αρμονική στο Ω^+ ώς φανταστικό μέρος της $f = u + iv$ που είναι ολόμορφη στο Ω^+. Άρα η v είναι συνεχής στο Ω^+. Επίσης, στο Ω^- η $v_0(z) = -v(\overline{z})$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Έστω $l \in L$. Θα αποδείξουμε ότι η v_0 είναι συνεχής στο l. Έστω $\varepsilon > 0$ θα προσδιορίσουμε $\delta > 0$ ώστε

$$|l - z| < \delta \Longrightarrow |v_0(z) - v_0(l)| = |v_0(z)| < \varepsilon. \tag{1.22}$$

Από (1.19) έχουμε ότι για κάθε $\{z_n\}$ στο Ω^+ με $z_n \longrightarrow l$ συνεπάγεται ότι $v(z_n) \longrightarrow 0$. Άρα, $\lim\limits_{\substack{z\longrightarrow l\\ z\in\Omega^+}} v(z) = 0$, οπότε υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ ώστε :

$$z \in \Omega^+, \quad |l - z| < \delta \Rightarrow |v_0(z)| < \varepsilon.$$

Λόγω συμμετρίας, με το ίδιο $\delta > 0$:

$$z \in \Omega^-, \quad |l - z| < \delta \Rightarrow |v_0(z)| < \varepsilon.$$

Επειδή v_0 είναι σταθερή 0 στο L, με το ίδιο $\delta > 0$:

$$z \in L, \quad |l - z| < \delta \Rightarrow |v_0(z)| < \varepsilon.$$

Από τα προηγούμενα συνεπάγεται η (1.22). Άρα η v_0 είναι συνεχής στο Ω.

Επίσης, η v_0 είναι αρμονική στο Ω. Στο Ω^+ η $v_0(z) = v(z)$ είναι αρμονική ως το φανταστικό μέρος της $f(z)$ που είναι ολόμορφη στο Ω^+. Στο Ω^- η $v_0(z) = -v(\overline{z})$ είναι αρμονική ως το φανταστικό μέρος της $\overline{f(\overline{z})}$ που είναι ολόμορφη στο Ω^-. Διότι, έστω τυχαίος δίσκος $\mathbf{D}(\alpha; R) \subseteq \Omega^-$ τότε $\mathbf{D}(\overline{\alpha}; R) \subseteq \Omega^+$. Αν $z \in \mathbf{D}(\alpha; R) \subseteq \Omega^-$ τότε $\overline{z} \in \mathbf{D}(\overline{\alpha}; R)$. Επειδή η f είναι παραστάσιμη ως δυναμοσειρά στον $\mathbf{D}(\overline{a}; R)$, ισχύει $f(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\overline{z} - \overline{\alpha})^n$ και άρα $\overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\alpha_n} (z - \alpha)^n$. Άρα η $\overline{f(\overline{z})}$ είναι παραστάσιμη ως δυναμοσειρά στον $\mathbf{D}(a; R)$ και άρα ολόμορφη στο Ω^-.

Τώρα, έστω $l \in L$. Θα δούμε ότι η v_0 έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής στο l. Πράγματι, $v_0(l) = 0$ και επιπλέον, για μικρά $r_n > 0$ έχουμε :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v_0(l + r_n e^{it}) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} v(l + r_n e^{-it}) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} v(l + r_n e^{it}) dt = 0.$$

Η v_0 είναι αρμονική στο Ω^+, οπότε έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής σε κάθε σημείο του Ω^+. Ομοίως η v_0 είναι αρμονική στο Ω^-, άρα έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής σε κάθε σημείο του Ω^-. Στα σημεία του L δείξαμε ότι η v_0 έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής. Άρα η v_0 έχει την ιδιότητα της μέσης τιμής στα σημεία του Ω, οπότε είναι αρμονική στο Ω.

Η v_0 είναι τοπικά το φανταστικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης. Για κάθε $t \in L$ υπάρχει $f_t \in \mathbf{H}(\mathbf{D}_t)$ ώστε, $Imf_t = v_0$ στο $\mathbf{D}_t$. Επιπλέον $Imf = v_0$ στο $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Άρα $Imf = Imf_t$ στο $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$, οπότε $Im(f - f_t) = 0$ στο $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$, έτσι η $f - f_t$ είναι μια ολόμορφη συνάρτηση με πραγματικές τιμές στο συνεκτικό $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Άρα η $f - f_t$ είναι πραγματική σταθερά c στο $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Ορίζουμε, με κάποιο σταθερό $z_0 \in \mathbf{D}_t \cap \Pi^+$,

$$g_t(z) = f_t(z) - f_t(z_0) + f(z_0), \quad z \in \mathbf{D}_t.$$

Τότε $g_t(z) - f(z) = \big(f_t(z) - f(z)\big) - \big(f_t(z_0) - f(z_0)\big) = c - c = 0$ για $z \in \mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Άρα $g_t = f$ στο $\mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Αναπτύσσουμε την g_t σε δυναμοσειρά στο $\mathbf{D}_t$ με κέντρο το t.

$$g_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - t)^n \quad \text{για} \quad z \in \mathbf{D}_t \quad \text{και} \quad \alpha_n \in \mathbb{C}.$$

Καθώς η $g_t \in \mathbf{H}(\mathbf{D}_t)$ και $Img_t(l) = v_0(l) = 0$ για κάθε $l \in L$, έπεται ότι όλες οι παράγωγοι της g_t είναι πραγματικοί αριθμοί στο t, και άρα $a_n \in \mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως, $g_t(\overline{z}) = \overline{g_t(z)}, z \in \mathbf{D}_t$.

Έστω τώρα $\mathbf{D}_s$ ώστε $\mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t \neq \emptyset$, τότε $g_s = f = g_t$ στο $\mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t \cap \Pi^+$. Το $\mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t$ είναι συνεκτικό. Άρα από την αρχή της Ταύτισης έχουμε ότι :

$g_t(z) = g_s(z)$ για $z \in \mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t$.
Θεωρούμε την συνάρτηση :

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega^+, \\ g_t(z), & z \in \mathbf{D}_t, \quad t \in L, \\ \overline{f(\overline{z})}, & z \in \Omega^-. \end{cases} \tag{1.23}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι, η F είναι καλώς ορισμένη. Διότι, για $z \in \mathbf{D}_t \cap \mathbf{\Pi}^+$ έχουμε ότι $g_t(z) = f(z)$. Για $z \in \mathbf{D}_t \cap \mathbf{\Pi}^-$ έχουμε ότι : $\overline{g}_t(z) = g_t(\overline{z}) \quad$ και $\quad g_t(\overline{z}) = f(\overline{z})$, οπότε προκύπτει ότι : $\overline{f}(\overline{z}) = g_t(z)$. Τέλος, όπως είδαμε, για $z \in \mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t$, με $\mathbf{D}_s \cap \mathbf{D}_t \neq \emptyset$ έχουμε ότι: $g_t(z) = g_s(z)$. Η F φυσικά είναι ολόμορφη στο Ω^- και άρα ολόμορφη στο Ω. $\square$

Κεφάλαιο 2

Συνοριακή συμπεριφορά φραγμένων ολόμορφων συναρτήσεων στο U

2.1 Συνοριακή Συμπεριφορά του Ολοκληρώματος Poisson

Το επόμενο μας αντικείμενο, είναι να βρούμε το ανάλογο του θεωρήματος (1.3.2) για το ολοκλήρωμα Poisson $\mathbf{L}^p$ συναρτήσεων και μέτρων στον $\mathbf{T}$.

Έστω u μια συνάρτηση στον $\mathbf{U}$. Τότε η οικογένεια των συναρτήσεων u_r στον $\mathbf{T}$ ορίζεται από την σχέση :

$$u_r(\theta) = u(re^{i\theta}), \quad 0 \le r < 1.$$

Έτσι, η u_r είναι ουσιαστικά ο περιορισμός της u στον κύκλο κέντρου 0 και ακτίνας r, αλλά θεωρούμενη ως 2π-περιοδική συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αν τώρα πάρουμε ένα $\varepsilon > 0$, μια $f \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$ και $F = \mathbf{P}[f]$, τότε όπως έχουμε δει από το θεώρημα (1.3.2) η Hf είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{\mathbf{U}}$. Συνεπώς,υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε $z_1, z_2 \in \overline{\mathbf{U}}$ με $|z_1 - z_2| < \delta$, έχουμε ότι $|\mathrm{H}f(z_1) - Hf(z_2)| < \varepsilon$. Άρα για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$, $\quad 1-\delta < r \le 1$ προκύπτει ότι $|F_r(\theta) - f(\theta)| = |\mathrm{H}f(re^{i\theta}) - \mathrm{H}f(\theta)| < \varepsilon$, και επομένως $||F_r - f||_\infty < \varepsilon$, για κάθε $1-\delta < r \le 1$. Το ε ήταν αυθαίρετο οπότε

$$\lim_{r \longrightarrow 1} ||F_r - f||_\infty = 0, \tag{2.1}$$

πού συνεπάγεται φυσικά,

$$\lim_{r \longrightarrow 1} F_r(\theta) = f(\theta) \tag{2.2}$$

για κάθε θ.

Θεώρημα 2.1.1. *Άν $1 \le p \le \infty$, $f \in \boldsymbol{L}^p(\boldsymbol{T})$, και $u = \boldsymbol{P}[f]$, τότε :*

$$||u_r||_p \le ||f||_p, \quad 0 \le r < 1. \tag{2.3}$$

Αν $1 \le p < \infty$, τότε :

$$\lim_{r \longrightarrow 1} ||u_r - f||_p = 0. \tag{2.4}$$

Απόδειξη. Αφού $u = \mathbf{P}[f]$, τότε $u_r(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathbf{P}_r(\theta - t)dt$.
Έστω η συνάρτηση $g(x) = x^p$, $x \geq 0$ και $1 \leq p < \infty$.
Ορίζουμε το μέτρο μ με τον τύπο :

$$\mu(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_A \mathbf{P}_r(\theta - t)dt,$$

για A Borel υποσύνολο του $(-\pi, \pi]$. Δηλαδή $d\mu(t) = \mathbf{P}_r(\theta - t)dt$. Επίσης $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 1$. Η g είναι κυρτή, οπότε από την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} g\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\mathbf{P}_r(\theta - t)dt\Big) &= g\Big(\int_{\mathbf{T}}|f(t)|d\mu(t)\Big) \\ &\leq \int_{\mathbf{T}} g\Big(|f(t)|\Big)d\mu(t) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\mathbf{P}_r(\theta - t)dt. \end{aligned}$$

Άρα,

$$|u_r(\theta)|^p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\mathbf{P}_r(\theta - t)dt.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς θ έχουμε ότι :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_r(\theta)|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\mathbf{P}_r(\theta - t)dt\Big]d\theta.$$

Από το θεώρημα του Fubini προκύπτει ότι :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|u_r(\theta)|^p d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta - t)d\theta\Big]dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^p dt.$$

Άρα : $||u_r||_p \leq ||f||_p$, για $1 \leq p < \infty$. Όταν $p = \infty$ ισχύει επίσης η (2.3) όπως έχουμε δει στην απόδειξη του θεωρήματος (1.3.2).

Τώρα, έστω $1 \leq p < \infty$ και $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι $||u_r - f||_p < \varepsilon$ αν το r είναι κοντά στο 1. Πράγματι, αφού $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T})$ τότε υπάρχει $g \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$ ώστε $||g - f||_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Έστω επίσης $v = \mathbf{P}[g]$. Τότε :

$$u_r - f = u_r - v_r + v_r - g + g - f$$

Έχουμε : $||u_r - v_r||_p = ||(u - v)_r||_p \leq ||f - g||_p < \frac{\varepsilon}{3}$. Έτσι,

$$\begin{aligned} ||u_r - f||_p &\leq ||u_r - v_r||_p + ||v_r - g||_p + ||g - f||_p \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + ||v_r - g||_\infty + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon \end{aligned}$$

διότι, $||v_r - g||_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ όταν το r είναι κοντά στο 1, αφού $v_r \longrightarrow g$ ομοιόμορφα καθώς $r \longrightarrow 1$.
Το ε ήταν αυθαίρετο, επομένως $\lim_{r\longrightarrow 1}||u_r - f||_p = 0$.

□

2.2 Μεγιστικές συναρτήσεις

Ολοκλήρωμα Poisson μέτρου. Έστω μ ένα μιγαδικό 2π-περιοδικό μέτρο στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα Poisson $u = \mathbf{P}[\mu]$ του μ ως :

$$u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) d\mu(t), \quad z \in \mathbf{U}, \tag{2.5}$$

όπου $\mathbf{P}(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$. Η u που ορίζεται από την (2.5) είναι αρμονική στο $\mathbf{U}$. Αυτό αποδεικνύεται με όμοιο τρόπο όπως στην περίπτωση του ολοκληρώματος Poisson των συναρτήσεων στον $\mathbf{L}^1(\mathbf{T})$. Αν θέσουμε $||\mu|| = |\mu|(\mathbf{T})$, το ανάλογο του πρώτου μισού του θεωρήματος (2.1.1) είναι

$$||u_r||_1 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u(re^{i\theta})| d\theta \leq ||\mu||.$$

Προσεγγιστικά χωρία. Για $0 < \alpha < 1$, ορίζουμε το Ω_α να είναι η ένωση του δίσκου $\mathbf{D}(0; \alpha)$ με τα ευθύγραμμα τμήματα από το 1 (χωρίς το 1) έως τα σημεία του $\mathbf{D}(0; \alpha)$. Με άλλα λόγια, το Ω_α είναι το μικρότερο κυρτό ανοιχτό σύνολο που περιέχει τον $\mathbf{D}(0; \alpha)$ και έχει το σημείο 1 στο σύνορο του. Κοντά στο 1, το Ω_a είναι μια γωνία με διχοτόμο την ακτίνα του $\mathbf{U}$ που τερματίζει στο 1 και με άνοιγμα 2θ, όπου $a = \sin\theta$. Όι καμπύλες που πλησιάζουν το 1 εντός του Ω_a δεν μπορούν να εφάπτονται στον $\mathbf{T}$. Γιαυτό το Ω_α ονομάζεται μη εφαπτομενικό προσεγγιστικό χωρίο με κορυφή το 1. Το χωρίο Ω_α μεγαλώνει όταν το α μεγαλώνει. Η ένωση των χωρίων Ω_α για $0 < \alpha < 1$ είναι το $\mathbf{U}$. Η τομή τους είναι το διάστημα $[0, 1)$. Το $e^{it}\Omega_\alpha = \{e^{it}z : z \in \Omega_\alpha\}$ είναι το Ω_α μετά από περιστροφή κατά e^{it}. Το $e^{it}\Omega_\alpha$ έχει κορυφή το e^{it} και είναι η ένωση του δίσκου $\mathbf{D}(0; a)$ με τα ευθύγραμμα τμήματα από το e^{it} έως τα σημεία του $\mathbf{D}(0; a)$.

Έστω $0 < \alpha < 1$ και έστω u μια μιγαδική συνάρτηση στο $\mathbf{U}$. Η μη-εφαπτομενική μεγιστική συνάρτηση $N_\alpha u$ ορίζεται στον $\mathbf{T}$ ώς :

$$(N_\alpha u)(t) = \sup_{z \in e^{it}\Omega_\alpha} |u(z)|. \tag{2.6}$$

Ομοίως, η ακτινική μεγιστική συνάρτηση της u είναι :

$$(M_{rad} u)(t) = \sup_{0 \leq r < 1} |u(re^{it})|. \tag{2.7}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $M_{rad} u \leq N_\alpha u$. Αν $u = \mathbf{P}[\mu]$, στο επόμενο θεώρημα θα δείξουμε ότι η $N_\alpha u$ ελέγχεται με τη σειρά της από την μεγιστική συνάρτηση $\mathrm{M}\mu$ που θα ορίσουμε παρακάτω. Ωστόσο, θα μας απλοποιούσε τον συμβολισμό αν αντικαθιστούσαμε το συνηθισμένο μέτρο Lebesgue m του $\mathbb{R}$ με το $\sigma = \frac{m}{2\pi}$. Τότε το σ είναι το αναλλοίωτο σε μεταφορές θετικό 2π-περιοδικό μέτρο Borel του $\mathbb{R}$, με $\sigma((-\pi, \pi]) = 1$.
Ορίζουμε την μεγιστική συνάρτηση του μέτρου μ με τον τύπο

$$(\mathrm{M}\mu)(\theta) = \sup_{\mathbf{I}} \frac{|\mu|(\mathbf{I})}{\sigma(\mathbf{I})} \tag{2.8}$$

όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα ανοιχτά διαστήματα $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο θ και $0 < \sigma(\mathbf{I}) \leq 1$. Ομοίως, η παράγωγος $D\mu$ του μέτρου μ είναι :

$$(D\mu)(\theta) = \lim_{\sigma(\mathbf{I}) \longrightarrow 0^+} \frac{\mu(\mathbf{I})}{\sigma(\mathbf{I})} \tag{2.9}$$

όπου το όριο το παίρνουμε πάνω στα ανοιχτά διαστήματα $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο θ. Το $e^{i\theta}$ είναι σημείο Lebesgue της $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ άν :

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma((\theta-\varepsilon, \theta+\varepsilon))} \int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} |f(t) - f(\theta)| d\sigma(t) = 0 \tag{2.10}$$

Αν $d\mu = f d\sigma + d\mu_s$ είναι η διάσπαση Lebesgue ενός μιγαδικού μέτρου Borel μ του $\mathbb{R}$, όπου $f \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$ και $\mu_s \perp \sigma$, από τα θεωρήματα Διαφόρισης του Lebesgue, Πυκνότητας του Lebesgue και από το Λήμμα του Wiener έχουμε ότι :

$$\sigma(\{\mathrm{M}\mu > \lambda\}) \leq \frac{3}{\lambda} ||\mu||, \tag{2.11}$$

και σχεδόν κάθε (ως προς το μέτρο Lebesgue) σημείο του $\mathbb{R}$ είναι σημείο Lebesgue της f και $D\mu = f, D\mu_s = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ (ως προς το μέτρο Lebesgue).

Τώρα, θα δούμε ότι για κάθε μιγαδικό μέτρο Borel μ 2π-περιοδικό στο $\mathbb{R}$, η μη-εφαπτομενική και η ακτινική μεγιστική συνάρτηση της αρμονικής συνάρτησης $u = \mathbf{P}[\mu]$ ελέγχονται από την $\mathrm{M}\mu$.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $0 < \alpha < 1$. Τότε υπάρχει σταθερά $c_\alpha > 0$ με τις ακόλουθες ιδιότητες : Αν το μ είναι ένα 2π-περιοδικό μιγαδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$, και $u = \boldsymbol{P}[\mu]$, τότε ισχύουν για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ οι ανισότητες :*

$$c_\alpha (N_\alpha u)(\theta) \leq (\mathrm{M}_{rad} u)(\theta) \leq (\mathrm{M}\mu)(\theta). \tag{2.12}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την (2.12) στην ειδική περίπτωση που $\theta = 0$. Για γενικό $\theta \in \mathbb{R}$, δείχνουμε την (2.12) από την ειδική περίπτωση εφαρμόζοντας το μέτρο μεταφοράς $\mu_{-\theta}(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{E} + \theta)$, E Borel υποσύνολο του $(-\pi, \pi]$. Αρχικά θα δείξουμε το αριστερό μέρος της (2.12). Η $u(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) d\mu(t)$, επιπλέον,

$$(N_\alpha u)(0) = \sup_{z \in \Omega_\alpha} |u(z)|$$

και

$$(\mathrm{M}_{rad} u)(0) = \sup_{0 \leq r < 1} |u(r)|.$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει σταθερά c_α ώστε να ισχύει :

$$c_\alpha \mathbf{P}(z, e^{it}) \leq \mathbf{P}(|z|, e^{it}) \quad \text{για κάθε} \quad z \in \Omega_\alpha, \quad e^{it} \in \mathbf{T}.$$

Ισοδύναμα,

$$c_\alpha |e^{it} - r|^2 \leq |e^{it} - z|^2, \quad r = |z|.$$

Από τον ορισμό του Ω_α ο λόγος $\frac{|z-r|}{1-r}$ είναι φραγμένος στο Ω_α. Έστω γ_α το φράγμα αυτό. Τότε :

$$|e^{it} - r| \leq |e^{it} - z| + |z - r| \leq |e^{it} - z| + (1-r)\gamma_\alpha \leq (1 + \gamma_\alpha)|e^{it} - z|.$$

Οπότε για $c_\alpha = (1+\gamma_\alpha)^{-2}$ ισχύει ότι : $c_\alpha \mathbf{P}(z,e^{it}) \leq \mathbf{P}(r,e^{it})$.
Ολοκληρώνοντας έχουμε ότι : $c_\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z,e^{it})d\mu(t) \leq \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(r,e^{it})d\mu(t)$ και άρα, $c_\alpha |u(z)| \leq |u(r)|$ για κάθε $z \in \Omega_\alpha$, $0 \leq r < 1$. Επειδή $|u(r)| \leq (\mathrm{M}_{rad}u)(0)$ συνεπάγεται $c_\alpha|u(z)| \leq (M_{rad}u)(0)$ για κάθε $z \in \Omega_\alpha$. Οπότε,

$$c_\alpha(\mathrm{N}_\alpha u)(0) \leq (\mathrm{M}_{rad}u)(0).$$

Για το δεξί μέρος της ανισότητας (2.12), έχουμε να δείξουμε ότι :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t)d\mu(t) \leq \mathrm{M}\mu(0) \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leq r < 1.$$

Έστω $0 \leq r < 1$. Διαλέγουμε ανοιχτά διαστήματα $\mathbf{I}_n \subseteq \mathbb{R}$ κέντρου 0 ώστε : $\mathbf{I}_1 \subseteq \mathbf{I}_2 \subseteq ... \subseteq \mathbf{I}_{n-1} \subseteq \mathbf{I}_n = (-\pi,\pi)$. Για $1 \leq k \leq n$, έστω $\chi_{\mathbf{I}_k}$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του $\mathbf{I}_k$ και h_k ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός ώστε : $h_k\chi_{\mathbf{I}_k} \leq \mathbf{P}_r$.

Ορίζουμε :

$$\mathrm{K} = \sum_{k=1}^{n}(h_k - h_{k+1})\chi_{\mathbf{I}_k},$$

με $h_{n+1} = 0$. Επειδή $\chi_{\mathbf{I}_k} \leq \chi_{\mathbf{I}_{k+1}}$, από την $h_{k+1}\chi_{\mathbf{I}_{k+1}} \leq \mathbf{P}_r$ συνεπάγεται $h_{k+1}\chi_{\mathbf{I}_k} \leq \mathbf{P}_r$. Άρα $h_{k+1} \leq h_k$.

Στο $\mathbf{I}_k - \mathbf{I}_{k-1}$ ισχύει $\chi_{\mathbf{I}_j} = 0$ για $j = 1,...,k-1$ και επομένως

$$\begin{aligned} K &= \sum_{j=1}^{n}(h_j - h_{j+1})\chi_{\mathbf{I}_j} = \sum_{j=k}^{n}(h_j - h_{j+1})1 \\ &= (h_k - h_{k+1}) + (h_{k+1} - h_{k+2}) + ... + (h_n - h_{n+1}) = h_k. \end{aligned}$$

Άρα $\mathrm{K} = h_k$ στο $\mathbf{I}_k - \mathbf{I}_{k-1}$. Επομένως, $\mathrm{K} = h_k\chi_{\mathbf{I}_k} \leq \mathbf{P}_r$ στο $\mathbf{I}_k - \mathbf{I}_{k-1}$. Άρα $\mathrm{K} \leq \mathbf{P}_r$ στο $(-\pi,\pi)$. Τώρα,

$$\mu(\mathbf{I}_k) \leq (\mathrm{M}\mu)(0)\sigma(\mathbf{I}_k). \tag{2.13}$$

Τότε :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} K(t)d\mu(t) &= \sum_{k=1}^{n}(h_k - h_{k+1})\mu(\mathbf{I}_k) \\ &\leq M\mu(0)\sum_{k=1}^{n}(h_k - h_{k+1})\sigma(\mathbf{I}_k) \\ &= M\mu(0)\int_{-\pi}^{\pi} K(t)d\sigma(t) \leq \mathrm{M}\mu(0)\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(t)d\sigma(t) = \mathrm{M}\mu(0). \end{aligned}$$

Για κάθε $m \in \mathrm{N}$ επιλέγουμε μια διαμέριση του $(-\pi,\pi)$ από διαστήματα $\mathbf{I}_k$, $1 \leq k \leq n$ όπως παραπάνω, παίρνοντας έτσι την αντίστοιχη συνάρτηση K_m. Όταν αυξάνει το m φροντίζουμε η αντίστοιχη διαμέριση να λεπταίνει. Εύκολα τώρα βλέπουμε ότι $K_m \uparrow \mathbf{P}_r$. Από το Θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι :

$$\int_{\mathbf{T}} K_m d\mu \longrightarrow \int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}_r d\mu, \quad \text{όταν το} \quad m \longrightarrow \infty.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι :

$$\int_{\mathbf{T}} \mathbf{P}_r d\mu \leq \mathrm{M}\mu(0).$$

□

2.3 Μη-εφαπτομενικά Όρια

Μια συνάρτηση F, που ορίζεται στο $\mathbf{U}$, θα λέμε ότι έχει μη-εφαπτομενικό όριο λ στο $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$, αν για κάθε $0 < \alpha < 1$,

$$lim_{j \longrightarrow \infty} F(z_j) = \lambda$$

για κάθε ακολουθία $\{z_j\}$ που συγκλίνει στο $e^{i\theta}$ και βρίσκεται στο $e^{i\theta}\Omega_\alpha$.

Θεώρημα 2.3.1. *Αν μ είναι ένα θετικό 2π-περιοδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $(D\mu)(\theta) = 0$ για κάποιο θ, τότε η $u = \boldsymbol{P}[\mu]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο 0 στο $e^{i\theta} \in \boldsymbol{T}$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση $(D\mu)(\theta) = 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει ανοιχτό διάστημα $\mathbf{I}_0 \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο θ ώστε :

$$\mu(\mathbf{I}) < \varepsilon\sigma(\mathbf{I}) \tag{2.14}$$

για κάθέ ανοιχτό διάστημα $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{I}_0$ με κέντρο θ.
Έστω μ_0 ο περιορισμός του μ στο $\mathbf{I}_0$ και στις μεταφορές του $\mathbf{I}_0$ στα $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και $\mu_1 = \mu - \mu_0$. Οπότε για κάθε ανοιχτό διάστημα $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{I}_0$ με κέντρο θ έχουμε ότι

$$\mu_0(\mathbf{I}) = \mu(\mathbf{I}). \tag{2.15}$$

Έστω επίσης, $u_i, i = 0, 1$ το ολοκλήρωμα Poisson του $\mu_i, i = 0, 1$. Ακόμη, έστω $\{z_j\}$ ακολουθία που συγκλίνει στο $e^{i\theta}$ σε κάποιο χωρίο $e^{i\theta}\Omega_\alpha$. Αν d_0 είναι η μικρότερη απόσταση του $e^{it} \in \mathbf{T} \setminus \{e^{is} : s \in \mathbf{I}_0\}$ από το $e^{i\theta}\Omega_\alpha$. Τότε

$$\mathbf{P}(z_j, e^{it}) = \frac{1 - |z_j|^2}{|e^{it} - z_j|^2} \leq \frac{1 - |z_j|^2}{{d_0}^2} \longrightarrow 0, \quad \text{όταν} \quad j \longrightarrow \infty,$$

ομοιόμορφα στο $(\theta - \pi, \theta + \pi] \setminus \mathbf{I}_0$, οπότε

$$u_1(z_j) = \int_{(\theta-\pi,\theta+\pi]\setminus\mathbf{I}_0} \mathbf{P}(z_j, e^{it}) d\mu(t) \longrightarrow 0, \quad \text{όταν} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Το μ_0 είναι θετικό 2π-περιοδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $u_0 = \mathbf{P}[\mu_0]$. Από το θεώρημα (2.2.1)

$$c_\alpha(N_\alpha u_0)(\theta) \leq (M_{rad}u_0)(\theta) \leq (M\mu_0)(\theta).$$

Έστω $\mathbf{J} \subseteq \mathbb{R}$ ανοιχτό διάστημα με κέντρο θ και $\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \cap \mathbf{J}$. Τότε, από τις (2.14),(2.15) έχουμε ότι :

$$\frac{\mu_0(\mathbf{J})}{\sigma(\mathbf{J})} = \frac{\mu(\mathbf{I})}{\sigma(\mathbf{J})} \leq \frac{\mu(\mathbf{I})}{\sigma(\mathbf{I})} < \varepsilon,$$

και από το θεώρημα (2.2.1) προκύπτει ότι :

$$c_\alpha(\mathrm{N}_\alpha u_0)(\theta) \leq (\mathrm{M}\mu_0)(\theta) < \varepsilon.$$

Τώρα για κάθε $z \in e^{i\theta}\Omega_\alpha$ έχουμε ότι :

$$u_0(z) \leq (N_\alpha u_0)(\theta) \quad \text{άρα,} \quad u_0(z_j) \leq \frac{\varepsilon}{c_\alpha} \quad \text{για κάθε} \quad j.$$

Επομένως,

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} u_0(z_j) \le \frac{\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Επειδή $u = u_0 + u_1$ προκύπτει ότι :

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} u(z_j) \le \limsup_{j\longrightarrow\infty} u_0(z_j) + \limsup_{j\longrightarrow\infty} u_1(z_j) \le \frac{\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Από $u(z_j) \ge 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$ συνεπάγεται

$$0 \le \liminf_{j\longrightarrow\infty} u(z_j) \le \limsup_{j\longrightarrow\infty} u(z_j) \le \frac{\varepsilon}{c_\alpha}.$$

Το ε ήταν αυθαίρετο, οπότε

$$\limsup_{j\longrightarrow\infty} u(z_j) = 0 = \liminf_{j\longrightarrow\infty} u(z_j).$$

Επομένως, $\lim_{j\longrightarrow\infty} u(z_j) = 0$. □

Θεώρημα 2.3.2. *Αν η $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$, τότε η $\boldsymbol{P}[f]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(\theta)$ σε $e^{i\theta} \in \boldsymbol{T}$ τέτοιο ώστε το θ να είναι σημείο Lebesgue της f, δηλαδή για σχεδόν κάθε θ.*

Απόδειξη. Έστω θ σημείο Lebesgue της f.

Τότε ορίζουμε το 2π-περιοδικό θετικό μέτρο Borel με τον τύπο :

$$\mu(\mathbf{E}) = \int_{\mathbf{E}} |f(t) - f(\theta)| d\sigma(t).$$

για $\mathbf{E}$ Borel υποσύνολο του $(-\pi, \pi]$. Τότε

$$(D\mu)(\theta) = \lim_{\sigma(\mathbf{I})\longrightarrow 0^+} \frac{\mu(\mathbf{I})}{\sigma(\mathbf{I})} = \lim_{\sigma(\mathbf{I})\longrightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma(\mathbf{I})} \int_{\mathbf{I}} |f(t) - f(\theta)| d\sigma(t) = 0$$

για διαστήματα $\mathbf{I}$ με κέντρο θ και $0 < \sigma(\mathbf{I}) \le 1$. Έστω $\{z_j\}$ ακολουθία στο $e^{i\theta}\Omega_\alpha$ που τείνει στο $e^{i\theta}$, από το θεώρημα (2.3.1) συνεπάγεται ότι η $u = \mathbf{P}[\mu]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο 0 στο $e^{i\theta}$. Τώρα επειδή

$$\begin{aligned}
\Big|\mathbf{P}[f](z_j) - f(\theta)\Big| &= \Big| \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z_j, e^{it}) f(t) dt - \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z_j, e^{it}) f(\theta) dt \Big| \\
&\le \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z_j, e^{it}) |f(t) - f(\theta)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z_j, e^{it}) d\mu(t) \\
&= \mathbf{P}[\mu](z_j) \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

έπεται ότι το $\mathbf{P}[f]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(\theta)$ στο $e^{i\theta}$ για κάθε σημείο Lebesgue θ της f. □

Θεώρημα 2.3.3. *Αν $d\mu = fd\sigma + d\mu_s$ είναι η διάσπαση Lebesgue ενός μιγαδικού 2π-περιοδικού μέτρου Borel μ του $\mathbb{R}$, όπου $f \in \boldsymbol{L}^1(\boldsymbol{T})$, και $\mu_s \perp \sigma$, τότε το $\boldsymbol{P}[\mu]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(\theta)$ στο $e^{i\theta}$ για σχεδόν κάθε θ.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα (2.3.1), για την θετική και την αρνητική κύμανση του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μ_s έχουμε ότι το $\mathbf{P}[\mu_s]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο 0 στο $e^{i\theta}$. για σχεδόν κάθε θ. Τώρα,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\mu](z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) d\mu(t) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it})(f d\sigma + d\mu_s)(t) \\ &= \mathbf{P}[f](z) + \mathbf{P}[\mu_s](z),\end{aligned}$$

οπότε από το θεώρημα (2.3.2), το $\mathbf{P}[\mu]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(\theta)$ στο $e^{i\theta}$ για σχεδόν κάθε θ.

$\square$

Θεώρημα 2.3.4. *Για $0 < \alpha < 1$ και $1 \leq p \leq \infty$, υπάρχει σταθερά $\mathrm{A}(\alpha, p) < \infty$ με τις ακόλουθες ιδιότητες :*

- *Αν το μ είναι ένα μιγαδικό μέτρο Borel στον $\boldsymbol{T}$ και $u = \boldsymbol{P}[\mu]$ τότε :*

$$\sigma(\{\mathrm{N}_\alpha u > \lambda\}) \leq \frac{\mathrm{A}(\alpha, 1)}{\lambda} ||\mu||, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

- *Αν $1 < p \leq \infty, f \in \boldsymbol{L}^p(\boldsymbol{T})$ και $u = \boldsymbol{P}[f]$, τότε :*

$$||N_\alpha u||_p \leq A(\alpha, p)||f||_p.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $p = 1$. Από γνωστό θεώρημα γνωρίζουμε ότι, αν το μ είναι ένα μιγαδικό 2π-περιοδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ και $0 < \lambda < +\infty$, τότε :

$$\sigma(\{\mathrm{M}\mu > \lambda\}) \leq 3\lambda^{-1}||\mu||.$$

Τώρα, αφού $u = \mathbf{P}[\mu]$ και το μ είναι μιγαδικό Borel μέτρο στον $\mathbf{T}$, από το θεώρημα (2.2.1) υπάρχει σταθερά $c_\alpha > 0$ έτσι ώστε :

$$c_\alpha(\mathrm{N}_\alpha u)(\theta) \leq (\mathrm{M}\mu)(\theta) \tag{2.16}$$

για κάθε θ.
Συνδυάζοντας το γνωστό θεώρημα με την (2.16) προκύπτει ότι :

$$\sigma(\{\mathrm{N}_\alpha u > \lambda\}) \leq \sigma(\{\mathrm{M}\mu > c_\alpha \lambda\}) \leq \frac{3}{c_\alpha \lambda}||\mu||, \quad 0 < \lambda < +\infty.$$

Επομένως, για $\mathrm{A}(\alpha, 1) = \frac{3}{c_\alpha}$ έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή :

$$\sigma(\{\mathrm{N}_\alpha u > \lambda\}) \leq \frac{\mathrm{A}(\alpha, 1)}{\lambda}||\mu||, \quad 0 < \lambda < +\infty.$$

Υποθέτουμε ότι $1 < p \leq \infty$. Ορίζουμε την μεγιστική συνάρτηση $\mathrm{M}f$ με τον τύπο

$$(\mathrm{M}f)(\theta) = \sup_{\mathbf{I}} \frac{1}{\sigma(\mathbf{I})} \int_{\mathbf{I}} |f(t)| d\sigma(t)$$

όπου το supremum το παίρνουμε πάνω σε όλα τα ανοιχτά διαστήματα $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ με κέντρο θ. Από γνωστό θεώρημα γνωρίζουμε ότι, αν $1 < p \leq \infty$ και $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T})$ τότε $\mathrm{M}f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T})$, και υπάρχει $0 < c_p < \infty$ ώστε :

$$||\mathrm{M}f||_p \leq c_p ||f||_p, \quad \text{για κάθε} \quad f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T}).$$

Αρχικά ορίζουμε το 2π-περιοδικό θετικό μέτρο Borel μ με τον τύπο :

$$\mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathbf{A}} |f(t)| d\sigma(t),$$

για $\mathbf{A}$ Borel υποσύνολο του $(-\pi, \pi]$. Έτσι $(\mathrm{M}f)(\theta) = (\mathrm{M}\mu)(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Έστω $v = \mathbf{P}[\mu]$. Για κάθε $z \in \mathbf{U}$ ισχύει :

$$|u(z)| \leq \mathbf{P}[|f|](z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t)|f(t)|dt = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) d\mu(t) = \mathbf{P}[\mu](z),$$

έτσι,

$$(N_\alpha u)(\theta) \leq (N_\alpha v)(\theta) \quad \text{για κάθε} \quad \theta \in \mathbb{R}. \tag{2.17}$$

Τώρα επειδή $v = \mathbf{P}[\mu]$, από το θεώρημα (2.2.1) υπάρχει σταθερά $c_\alpha > 0$ ώστε για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ να έχουμε ότι :

$$(N_\alpha v)(\theta) \leq \frac{1}{c_\alpha}(M\mu)(\theta).$$

Από την (2.17) και την ισότητα $(\mathrm{M}f)(\theta) = (\mathrm{M}\mu)(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ προκύπτει ότι : $(N_\alpha u)(\theta) \leq \frac{1}{c_\alpha}(\mathrm{M}f)(\theta)$, και επομένως :

$$||N_\alpha u||_p \leq \frac{1}{c_\alpha}||Mf||_p. \tag{2.18}$$

Έτσι λοιπόν, από το γνωστό θεώρημα η (2.18) γίνεται :

$$||\mathrm{N}_\alpha u||_p \leq \frac{c_p}{c_\alpha}||f||_p,$$

συνεπώς για $\mathrm{A}(\alpha, p) = \frac{c_\alpha}{c_p}$ έχουμε το ζητούμενο. □

2.4 Θεωρήματα Αναπαράστασης

Ορισμός: Έστω $\mathscr{F}$ μια συλλογή μιγαδικών συναρτήσεων σε ένα μετρικό χώρο $\mathbf{X}$ με μια μετρική d.

Θα λέμε ότι η $\mathscr{F}$ είναι ισοσυνεχής, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in \mathscr{F}$ και για όλα τα ζεύγη x, y με $d(x, y) < \delta$. Ειδικότερα, κάθε $f \in \mathscr{F}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θα λέμε ότι η $\mathscr{F}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, αν για κάθε $x \in \mathbf{X}$ υπάρχει $\mathbf{M}(x) < \infty$ έτσι ώστε : $|f(x)| \leq \mathbf{M}(x)$ για κάθε $f \in \mathscr{F}$.

Θεώρημα 2.4.1. ***(Arzela-Ascoli).*** *Έστω $\mathscr{F}$ κατά σημείο φραγμένη και ισοσυνεχής συλλογή μιγαδικών συναρτήσεων σε ένα μετρικό χώρο $\boldsymbol{X}$, ο οποίος έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\boldsymbol{E}$.*

Κάθε ακολουθία $\{f_n\}$ στην $\mathscr{F}$ έχει υποακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\boldsymbol{X}$.

Απόδειξη. Έστω $\{x_1, x_2, x_3, ...\}$ μια αρίθμηση του $\mathbf{E}$. Η $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη, επομένως είναι φραγμένη στο x_1. Από το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass η $f_n(x_1)$ έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Έστω $\{f_{1,n}(x_1)\}$ η υποακολουθία της και α_1 το όριο της. Τώρα η $\{f_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$, είναι κατά σημείο φραγμένη και επομένως είναι φραγμένη στο x_2. Πάλι από το θεώρημα των Bolzano-Weierstrass έχει συγκλίνουσα υποακολουθία. Έστω $\{f_{2,n}(x_2)\}$ η υποακολουθία της, και α_2 το όριο της. Συνεχίζοντας έτσι για κάθε $m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε την ακολουθία $\{f_{m,n}\}$ ώστε η $\{f_{m,n}(x_m)\}$ να συγκλίνει σε κάποιο $a_m \in \mathbb{C}$. Όμως η $\{f_{m,n}\}$ είναι υποακολουθία της $f_{i,n}$ για κάθε $i \leq m$, και άρα $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_{m,n}(x_i) = a_i$ για κάθε $i \leq m$. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $\{f_{n,n}\}$ και ένα $x_i \in \mathbf{E}$, με $i \in \mathbb{N}$, τότε η $\{f_{n,n}(x_i) : n \geq i\}$ είναι υποακολουθία της $\{f_{i,n}(x_i) : n \in \mathbb{N}\}$, με την δεύτερη να συγκλίνει στο α_i και επομένως και η πρώτη να συγκλίνει στον ίδιο αριθμό.

Έστω τώρα Κ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{X}$ και ένα $\varepsilon > 0$, τότε λόγω ισοσυνέχειας της $\{f_{n,n}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε :

$$|f_{n,n}(p) - f_{n,n}(q)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} \quad \text{και } p, q \in \mathbf{X} \quad \text{με } d(p,q) < \delta.$$

Καθώς $K \subseteq \bigcup_{x\in K} \mathbf{B}(x;\delta/2)$ και επειδή το Κ είναι συμπαγές, υπάρχουν $M \in \mathbb{N}$, x_i, $1 \leq i \leq M$ ώστε $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} \mathbf{B}(x_i;\delta/2)$. Θέτουμε $\mathbf{B}(x_i;\delta/2) = \mathbf{B}_i$. Οπότε $\mathrm{K} \subseteq \bigcup_{i=1}^{M} \mathbf{B}_i$.

Το $\mathbf{E}$ είναι πυκνό στο $\mathbf{X}$, άρα υπάρχουν $p_i \in \mathbf{E} \cap \mathbf{B}_i$, για κάθε $1 \leq i \leq M$. Επομένως το $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_{n,n}(p_i)$ υπάρχει για κάθε $1 \leq i \leq M$.
Ορίζουμε $\mathrm{N} = \max_{1\leq i\leq M} N_i$ οπού N_i ο φυσικός για τον οποίο ισχύει $|f_{n,n}(p_i) - f_{m,m}(p_i)| < \frac{\varepsilon}{3}$ για κάθε $n, m \geq N_i$. Επομένως,

$$|f_{n,n}(p_i) - f_{m,m}(p_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{για κάθε} \quad n, m \geq N.$$

Έστω $x \in K$, τότε υπάρχει κάποιο i με $1 \leq i \leq M$ ώστε $x \in \mathbf{B}_i$.
Με βάση τα παραπάνω και αν παρεμβάλουμε τους όρους $f_{m,m}(p_i)$, $f_{n,n}(p_i)$ μέσα στο $|f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)|$ προκύπτει εύκολα ότι :

$$|f_{m,m}(x) - f_{n,n}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \text{για κάθε } m, n \geq N.$$

Άρα, η $\{f_{n,n}\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy. Καθώς ο χώρος $\mathbf{C}(K)$ είναι πλήρης, υπάρχει $f_K \in \mathbf{C}(K)$ ώστε : $f_{n,n} \longrightarrow f_K$ ομοιόμορφα στο Κ.
Έστω Λ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{X}$, τότε υπάρχει $f_\Lambda \in \mathbf{C}(\Lambda)$ ώστε $f_{n,n} \longrightarrow f_\Lambda$ ομοιόμορφα στο Λ. Αν $\Lambda \cap \mathrm{K} \neq \emptyset$ και $x \in \Lambda \cap \mathrm{K}$ έχουμε ότι :

$$f_\Lambda(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f_{n,n}(x) = f_K(x).$$

Άρα οι f_K για τα διάφορα συμπαγή $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{X}$ ορίζουν μια συνάρτηση $f \in \mathbf{C}(\mathbf{X})$ ώστε $f_{n,n} \longrightarrow f$ ομοιόμορφα στο Κ για κάθε συμπαγές $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{X}$. □

Θεώρημα 2.4.2. *Υποθέτουμε ότι :*

(i) *Ο $\mathbf{X}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.*

(ii) *Η $\{\Lambda_n\}$ είναι ακολουθία γραμμικών συναρτησιακών.*

(iii) $\sup_n ||\Lambda_n|| = M < \infty$.

Τότε υπάρχει υποακολουθία $\{\Lambda_{n_j}\}$ *έτσι ώστε το όριο* $\lim_{j\longrightarrow\infty} \Lambda_{n_j}(x)$ *να υπάρχει στο* $\mathbb{C}$ *για κάθε* $x \in \boldsymbol{X}$ *ορίζοντας έτσι μια συνάρτηση* Λ *στο* $\boldsymbol{X}$ *ως :*

$$\Lambda(x) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \Lambda_{n_j}(x) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \boldsymbol{X}.$$

Επιπλέον, το Λ *είναι γραμμικό συναρτησιακό και ισχύει* $||\Lambda|| \leq \mathrm{M}$.

Απόδειξη. Αφού ο $\mathbf{X}$ είναι διαχωρίσιμος χώρος τότε έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο. Επίσης, το $\sup_n ||\Lambda_n|| = M < \infty$, άρα η $\{\Lambda_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία. Έτσι ισχύει,

$$|\Lambda_n(x)| \leq M||x||, \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbf{X},$$

και άρα

$$|\Lambda_n(x)-\Lambda_n(y)| = |\Lambda_n(x-y)| \leq M||x-y||, \text{για κάθε } x, y \in \mathbf{X} \quad \text{και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα η $\{\Lambda_n\}$ είναι ισοσυνεχής και κατά σημείο φραγμένη. Από το θεώρημα των Arzela-Ascoli υπάρχει υποακολουθία Λ_{n_j} της $\{\Lambda_n\}$, ώστε $\{\Lambda_{n_j}\}$ να συγκλίνει σε μια συνάρτηση Λ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{X}$. Εύκολα βλέπουμε ότι Λ είναι γραμμικό συναρτησιακό, και αφού για κάθε $x \in \mathbf{X}$ έχουμε ότι $|\Lambda_{n_j}(x)| \leq M||x||$, παίρνοντας όριο όταν $j \longrightarrow +\infty$ έπεται ότι $||\Lambda|| \leq \mathrm{M}$. ☐

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω* u *αρμονική στο* $\boldsymbol{U}$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *και*

$$\sup_{0<r<1} ||u_r||_p = M < \infty. \tag{2.19}$$

(i) *Αν* $p = 1$*, τότε υπάρχει μοναδικό* 2π*-περιοδικό μιγαδικό μέτρο Borel* μ *στο* $\mathbb{R}$ *έτσι ώστε* $u = \boldsymbol{P}[\mu]$.

(ii) *Αν* $p > 1$*, τότε υπάρχει μοναδική* $f \in \boldsymbol{L}^p(\boldsymbol{T})$ *έτσι ώστε* $u = \boldsymbol{P}[f]$.

(iii) *Κάθε θετική αρμονική συνάρτηση στο* $\boldsymbol{U}$*, είναι το ολοκλήρωμα Poisson ενός μοναδικού θετικού* 2π*-περιοδικού μέτρου Borel στο* $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. (i) Για κάθε $0 \leq r < 1$ και $g \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$, έχουμε ότι $u_r g \in \mathbf{L}^1(\mathbf{T})$, αφού $\int_{-\pi}^{\pi} |gu_r| d\sigma \leq ||g||_\infty ||u_r||_1 < +\infty$. Ορίζουμε λοιπόν το συναρτησιακό Λ_r στον $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ (δηλαδή, $\Lambda_r : \mathbf{C}(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$) με τον τύπο :

$$\Lambda_r(g) = \int_{-\pi}^{\pi} gu_r d\sigma, \quad \text{για κάθε} \quad 0 \leq r < 1, \quad g \in \mathbf{C}(\mathbf{T}). \tag{2.20}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $0 \leq r < 1$, το Λ_r είναι γραμμικό συναρτησιακό στο $\mathbf{C}(\mathbf{T})$. Φυσικά το Λ_r είναι φραγμένο, αφού για κάθε $g \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$, συνεπάγεται ότι : $|\Lambda_r(g)| \leq ||u_r||_1 ||g||_\infty$, που προφανώς μας δίνει ένα άνω φράγμα για την νόρμα του Λ_r.

$$||\Lambda_r|| \leq ||u_r||_1 \leq M.$$

Άρα $\sup_{0\leq r<1} ||\Lambda_r|| \leq M < +\infty$. Έστω λοιπόν οποιαδήποτε ακολουθία $\{r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ στο $[0, 1)$, με $r_n \longrightarrow 1$. Τότε, από το θεώρημα (2.4.2) υπάρχει υποακολουθία $\{r_{n_j}\}$, $j \in \mathbb{N}$, της $\{r_n\}$ και φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό Λ στο $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, με $\Lambda(g) = \lim_{j\longrightarrow\infty} \Lambda_{r_{n_j}}(g)$ για κάθε $g \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$ και $||\Lambda|| \leq \mathrm{M}$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδικό 2π-περιοδικό μιγαδικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$, με $||\mu|| = |\mu|(\mathbf{T}) = ||\Lambda|| \leq \mathrm{M}$ τέτοιο ώστε :

$$\Lambda(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g d\mu, \quad \text{για κάθε} \quad g \in \mathbf{C}(\mathbf{T}). \tag{2.21}$$

Επίσης, η συνάρτηση u είναι αρμονική, και επομένως για κάθε $j \in \mathbb{N}$, αν θέσουμε $h_{n_j}(z) = u(r_{n_j} z)$ για κάθε $z \in \overline{U}$ και $j \in \mathbb{N}$ τότε φυσικά, η συνάρτηση h_{n_j} είναι αρμονική στο $\mathbf{U}$. Επίσης η h_{n_j} είναι συνεχής στο $\overline{U}$. Πράγματι, για την απόδειξη αυτού, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η συνάρτηση $u(r_{n_j} z)$ είναι συνεχής στον $\mathbf{D}(0; \frac{1}{r_{n_j}}) \supseteq \overline{U}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Έτσι, από το θεώρημα (1.3.3), έχουμε ότι : h_{n_j} είναι το ολοκλήρωμα Poisson του περιορισμού της στο $\mathbf{T}$. Έστω τώρα $z \in \mathbf{U}$, και θεωρούμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, με τον τύπο :

$$g(t) = \mathbf{P}(z, e^{it}) = \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \in \mathbf{C}(\mathbf{T}), \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε από την (2.21) έπεται :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}[\mu](z) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) d\mu(t) = \Lambda(g) = \lim_{j \longrightarrow \infty} \Lambda_{r_{n_j}}(g) \\ &= \lim_{j \longrightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}(z, e^{it}) u_{r_{n_j}}(t) d\sigma(t) = \lim_{j \longrightarrow \infty} u(r_{n_j} z) = u(z), \end{aligned}$$

για κάθε $z \in \mathbf{U}$.

(ii) Έστω q ο δυϊκός εκθέτης του p. Ο $\mathbf{L}^q(\mathbf{T})$ είναι διαχωρίσιμος χώρος. Για κάθε $0 \leq r < 1$ και $g \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T})$, όπως πριν ορίζουμε το συναρτησιακό Λ_r (δηλαδή $\Lambda_r : \mathbf{L}^q(\mathbf{T}) \longrightarrow \mathbb{C}$) με τον τύπο :

$$\Lambda_r(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g u_r d\sigma \quad \text{για κάθε} \quad g \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T}).$$

Εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε $0 \leq r < 1$ το Λ_r είναι γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathbf{L}^q(\mathbf{T})$. Επίσης εύκολα ελέγχουμε ότι το Λ_r είναι φραγμένο, αφού για κάθε $g \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T})$ συνεπάγεται $|\Lambda_r(g)| \leq ||u_r||_p ||g||_q \leq M||g||_q$ και άρα $||\Lambda_r|| \leq M < +\infty$. Έστω πάλι οποιαδήποτε ακολουθία όπως πριν $\{r_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, στο $[0, 1)$ ώστε : $r_n \longrightarrow 1$. Τότε από το θεώρημα (2.4.2) υπάρχει υποακολουθία $\{r_{n_j}\}$, $j \in \mathbb{N}$ της $\{r_n\}$ και φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό Λ στο $\mathbf{L}^q(\mathbf{T})$, με $\Lambda(g) = \lim_{j \longrightarrow \infty} \Lambda_{r_{n_j}}(g)$ για κάθε $g \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T})$ και $||\Lambda|| \leq \mathrm{M}$. Τώρα από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μοναδική $f \in \mathbf{L}^p(\mathbf{T})$ με $||\Lambda|| = ||f||_p$ έτσι ώστε :

$$\Lambda(g) = \int_{-\pi}^{\pi} f g d\sigma \quad \text{για κάθε} \quad g \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T}). \tag{2.22}$$

Τώρα θέτουμε $h_{n_j}(z) = u(r_{n_j} z)$ για κάθε $z \in \overline{U}$, τότε η h_{n_j}, είναι αρμονική στο $\mathbf{U}$ και συνεχής στο $\overline{\mathbf{U}}$ όπως πριν (όταν $p = 1$). Έτσι από το θεώρημα (1.3.3) έχουμε ότι : h_{n_j} είναι το ολοκλήρωμα Poisson του περιορισμού της στο $\mathbf{T}$. Έστω τώρα $z \in \mathbf{U}$, και θεωρούμε την συνάρτηση g με τον τύπο :

$$g(t) = \mathbf{P}_r(\theta - t) \in \mathbf{L}^q(\mathbf{T}), \quad \theta \in [-\pi, \pi], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε από την (2.22) έπεται :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[f](z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)f(t)dt = \Lambda(g) = \lim_{j\longrightarrow\infty}\Lambda_{r_{n_j}}(g)\\ &= \lim_{j\longrightarrow\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)u_{r_{n_j}}(t)d\sigma(t) = \lim_{j\longrightarrow\infty}u(r_{n_j}z) = u(z),\end{aligned}$$

για κάθε $z\in\mathbf{U}$.

Τώρα μένει ακόμη να δείξουμε την μοναδικότητα. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathbf{P}[\mu]=0$ συνεπάγεται $\mu=0$. Έστω $f\in\mathbf{C}(\mathbf{T})$, θέτουμε $v=\mathbf{P}[f]$. Αρχικά έχουμε ότι :

$$v_r(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)f(t)dt.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς θ, από το θεώρημα του Fubini και από την ισότητα $\mathbf{P}(re^{i\theta},e^{it})=\mathbf{P}(re^{it},e^{i\theta})$, προκύπτει ότι :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}v_r(\theta)d\mu(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(\theta-t)f(t)d\sigma(t)\Big]d\mu(\theta)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}_r(t-\theta)d\mu(\theta)\Big]f(t)d\sigma(t)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\mathbf{P}[\mu](re^{it})f(t)d\sigma(t)\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}0f(t)d\sigma(t)=0.\end{aligned}$$

Επίσης, $v_r\longrightarrow f$ ομοιόμορφα όταν $r\longrightarrow 1$, οπότε προκύπτει ότι : $0=\int_{-\pi}^{\pi}v_r d\mu\longrightarrow\int_{-\pi}^{\pi}fd\mu$ και άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi}fd\mu=0\quad\text{για κάθε}\quad f\in\mathbf{C}(\mathbf{T}).$$

Επομένως $\mu=0$.

Τέλος, το (iii). Επειδή η $u>0$ από την ιδιότητα της μέσης τιμής για αρμονικές συναρτήσεις έχουμε ότι :

$$||u_r||_1=\int_{-\pi}^{\pi}|u_r|d\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}u_r d\sigma=u(0),\quad 0\le r<1.$$

Άρα από το (i) υπάρχει μοναδικό 2π-περιοδικό μέτρο Borel μ στο $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $u=\mathbf{P}[\mu]$. Επειδή το συναρτησιακό είναι θετικό, ισχύει $\int_{-\pi}^{\pi}u_{r_{n_j}}gd\sigma=\Lambda_{r_{n_j}}(g)\ge 0$ για $g\ge 0$. Παίρνοντας όριο όταν $j\longrightarrow\infty$ βρίσκουμε ότι $\int_{-\pi}^{\pi}gd\mu\ge 0$ για $g\ge 0$. Άρα $\mu\ge 0$. □

2.5 Φραγμένες ολόμορφες συναρτήσεις στο U

Με $\mathbf{H}^\infty$ θα συμβολίζουμε των χώρο όλων των φραγμένων ολομόρφων συναρτήσεων στο $\mathbf{U}$, με νόρμα :

$$||f||_\infty=\sup_{z\in\mathbf{U}}|f(z)|$$

και ο $\mathbf{H}^\infty$ είναι χώρος Banach.

Ο $\mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$ είναι ο χώρος όλων των φραγμένων συναρτήσεων στον $\mathbf{T}$ με νόρμα το essential supremum δηλαδή, $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$ τότε :

$$||g||_\infty = ess - \sup_{\mathbf{T}} |g|.$$

Θεώρημα 2.5.1. ***(Fatou).*** *Για κάθε $f \in \boldsymbol{H}^\infty$ το όριο $\lim_{r \longrightarrow 1} f(re^{i\theta})$ υπάρχει για σχεδόν κάθε θ και η f^* που ορίζεται από την*

$$f^*(\theta) = \lim_{r \longrightarrow 1} f(re^{i\theta}). \tag{2.23}$$

ανήκει στον $\boldsymbol{L}^\infty(\boldsymbol{T})$. Επίσης ισχύει η ισότητα

$$||f||_\infty = ||f^*||_\infty. \tag{2.24}$$

Αν η $f^*(\theta) = 0$ για σχεδόν κάθε θ σε κάποιο διάστημα $\boldsymbol{I} \subseteq \mathbb{R}$, τότε η $f(z) = 0$ για κάθε $z \in \boldsymbol{U}$.

Απόδειξη. Η $f \in \mathbf{H}^\infty$ άρα η f είναι φραγμένη και αρμονική (ως ολόμορφη). Από το θεώρημα (2.4.3), υπάρχει μοναδική $g \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$ έτσι ώστε, $f = \mathbf{P}[g]$. Τώρα από το θεώρημα (2.3.2) γνωρίζουμε ότι, το $\mathbf{P}[g]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $g(\theta)$ στο $e^{i\theta} \in \mathbf{T}$ όταν το θ είναι σημείο Lebesgue της g. Έτσι, $\lim_{r \longrightarrow 1} f(re^{i\theta}) = g(\theta)$. Άρα, για $f^*(\theta) = g(\theta)$ ισχύει η (2.23).

Για να δείξουμε την (2.24). Αρχικά θα δείξουμε ότι : $||f^*||_\infty \leq ||f||_\infty$. Πράγματι, $|f(re^{i\theta})| \leq ||f||_\infty$, για κάθε $0 \leq r < 1, \quad \theta \in [-\pi, \pi]$. Αν $e^{i\theta}$ σημείο Lebesgue της f^*, και πάρουμε όριο (όταν το $r \longrightarrow 1$) παραπάνω, λόγω της (2.23) θα έχουμε ότι : $|f^*(\theta)| \leq ||f||_\infty$. Τέλος παίρνοντας essential supremum, προκύπτει ότι :

$$||f^*||_\infty \leq ||f||_\infty.$$

Μένει να δείξουμε ακόμη ότι : $||f||_\infty \leq ||f^*||_\infty$. Πράγματι, επειδή η $f^* \in \mathbf{L}^\infty(\mathbf{T})$ και $f = \mathbf{P}[f^*]$ από το θεώρημα (2.1.1) προκύπτει ότι : $||f_r||_\infty \leq ||f^*||_\infty$ για κάθε $0 \leq r < 1$, και επομένως

$$||f||_\infty \leq ||f^*||_\infty.$$

Συνεπώς ισχύει, $||f^*||_\infty = ||f||_\infty$.

Αν η $f^* = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, από την (2.24) έπεται ότι $f = 0$ στο $\mathbf{U}$. Τώρα επιλέγουμε ένα θετικό ακέραιο n έτσι ώστε το μήκος του διαστήματος $\mathbf{I}$ να είναι μεγαλύτερο από $\frac{2\pi}{n}$. Αν θέσουμε $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ και ορίσουμε την συνάρτηση :

$$F(z) = \prod_{k=1}^{n} f(\alpha^k z), \quad z \in \mathbf{U}. \tag{2.25}$$

Τότε η $F \in \mathbf{H}^\infty$ άρα υπάρχει η F^* έτσι ώστε : $F^*(\theta) = \prod_{k=1}^n f^*(\frac{2k\pi}{n} + \theta)$.
Αν η $f^* = 0$ σχεδόν παντού στο διάστημα $\mathbf{I} \subseteq \mathbb{R}$ τότε $F^* = 0$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$, έτσι από τα παραπάνω $F(z) = F(re^{i\theta}) = \prod_{k=1}^n f(\alpha^k re^{i\theta}) = 0$, για κάθε $z \in \mathbf{U}$. Τώρα από την (2.25) και επειδή $F(z) = 0$, για κάθε $z \in \mathbf{U}$ υπάρχει κάποιο k_z με $1 \leq k_z \leq n$, έτσι ώστε : $f(\alpha^{k_z} z) = 0$.

Έστω, $\mathrm{E}_k = \{z \in \mathbf{U} : f(\alpha^k z) = 0\}$ και $\mathbf{U}_{\frac{1}{2}}$ ο δίσκος κέντρου 0 και ακτίνας 1/2. Έτσι, $\bigcup_{k=1}^n (E_k \cap \mathbf{U}_{\frac{1}{2}}) = \mathbf{U}_{\frac{1}{2}}$, και επειδή ο $\mathbf{U}_{\frac{1}{2}}$ είναι άπειρο σύνολο, τότε υπάρχει κάποιο k_0 με $1 \leq k_0 \leq n$, έτσι ώστε : $E_{k_0} \cap \mathbf{U}_{\frac{1}{2}}$ να είναι άπειρο. Άρα, άπειρα z με $|z| < 1/2$ αντιστοιχούν στο k_0. Οπότε, η ολόμορφη συνάρτηση $f(e^{k_0 2\pi i/n} z)$ έχει άπειρες ρίζες με σημείο συσσώρευσης στο $\mathbf{U}$. Από αρχή της ταύτισης, $f \equiv 0$ στο $\mathbf{U}$. $\square$