Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Βαλέντια Φραγκιαδάκη

Το πρόβλημα του περιορισμού του μετασχηματισμού **Fourier**

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Παπαδημητράκης

Εαρινό εξάμηνο 2019
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους»,
κατεύθυνση Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιτροπή κρίσης:
Μ. Κολουντζάκης, Θ. Μήτσης, Μ. Παπαδημητράκης

Θα ήθελα να πω ένα ευχαριστώ από καρδιάς στον καθηγητή μου, Μιχάλη Παπαδημητράκη, για το χρόνο που διέθεσε, τη στήριξη και την καθοδήγησή του για την υλοποίηση αυτής της εργασίας αλλά και καθόλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Η βοήθειά του ήταν πολύτιμη και ουσιαστική σε όλα τα επίπεδα· τίποτα για εμένα δε θα ήταν ίδιο χωρίς αυτήν και σίγουρα ούτε εγώ η ίδια.

Ένα ακόμα μεγάλο ευχαριστώ στην οικογένειά μου και τους φίλους μου που είναι πάντα δίπλα μου και με στηρίζουν σε ό,τι κάνω, καθώς επίσης και στη δασκάλα μου και μαθηματικό, Μαρία Σπυροπούλου, που μου έδειξε το δρόμο και συνεχίζει να το κάνει.

1 Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 1.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της, $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, με*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)dx.$$

Γενικότερα, αν $M(\mathbb{R}^n)$ είναι ο χώρος των πεπερασμένων, μιγαδικών μέτρων στον $\mathbb{R}^n$ με νόρμα $||\mu|| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$, όπου $|\mu|$ είναι η απόλυτη κύμανση, τότε $L^1(\mathbb{R}^n) \subseteq M(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχίζοντας μια $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ στο μέτρο $d\mu = fdx$. Έτσι, ο ορισμός 1.1 γενικεύεται ως εξής:

Ορισμός 1.2. *Έστω $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του, $\widehat{\mu} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, με*

$$\widehat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x).$$

Παράδειγμα. *Έστω η Γκαουσιανή $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$, όπου $G(x) = e^{-\pi|x|^2}$.*
Τότε $\widehat{G}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$.

Παρακάτω θα αναφέρουμε μερικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier χωρίς να τις αποδείξουμε.

Πρόταση 1.1. *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\tau \in \mathbb{R}^n$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, αντιστρέψιμη, γραμμική απεικόνιση.*

1. *Αν $f_\tau(x) = f(x-\tau)$, τότε*
$$\widehat{f_\tau}(\xi) = e^{-2\pi i\tau\cdot\xi}\widehat{f}(\xi). \tag{1}$$

2. *Αν $e_\tau(x) = e^{2\pi i\tau\cdot x}$, τότε*
$$\widehat{e_\tau f}(\xi) = \widehat{f}(\xi-\tau). \tag{2}$$

3. *Αν T^{-t} είναι ο αντίστροφος του αναστρόφου του T, τότε*
$$\widehat{f\circ T} = |detT|^{-1}\widehat{f}\circ T^{-t}. \tag{3}$$

Ειδικότερα, αν ο T είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός, δηλαδή $TT^t = I$, τότε $detT = \pm 1$ και άρα
$$\widehat{f\circ T} = \widehat{f}\circ T. \tag{4}$$

Επίσης, αν $f_\epsilon(x) = f(\epsilon x)$, $f^\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}f(\frac{x}{\epsilon})$ και $Tx = \epsilon\cdot x$, έχουμε
$$\widehat{f_\epsilon}(\xi) = \widehat{f(\epsilon x)}(\xi) = \frac{1}{\epsilon^n}\hat{f}(\frac{\xi}{\epsilon}) = (\hat{f})^\epsilon(\xi), \tag{5}$$

και αντίστροφα
$$\widehat{f^\epsilon}(\xi) = \widehat{\frac{1}{\epsilon^n}f(\frac{x}{\epsilon})}(\xi) = \hat{f}(\epsilon\xi) = (\hat{f})_\epsilon(\xi). \tag{6}$$

4. *Αν* $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, *τότε*
$$\widehat{\tilde{f}} = \overline{\widehat{f}}. \tag{7}$$

Πρόταση 1.2. *Αν* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *τότε* $||\widehat{\mu}||_\infty \leq ||\mu||_{M(\mathbb{R}^n)}$, *δηλαδή* $\widehat{\mu}$ *φραγμένη συνάρτηση.*

Πρόταση 1.3. *Αν* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *τότε* $\widehat{\mu}$ *συνεχής συνάρτηση.*

Από εδώ και στο εξής θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό με πολυδείκτες χωρίς περαιτέρω επεξήγηση όταν είναι ξεκάθαρο. Συγκεκριμένα, ένας πολυδείκτης είναι ένα διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ με ακέραιες, μή αρνητικές συντεταγμένες. Αν τώρα $x \in \mathbb{R}^n$ και $a = (a_1, ..., a_n)$ είναι ένας πολυδείκτης, ορίζουμε

$$D^a = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdots \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}},$$

$$x^a = \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_j}$$

και το μήκος του a,
$$|a| = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Πρόταση 1.4. *Αν* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *και supp*(μ) *συμπαγές, τότε* $\widehat{\mu}$ *είναι* C^∞ *και*

$$D^a\widehat{\mu} = (\widehat{(-2\pi i x)^a\mu}).$$

Επίσης, αν supp$(\mu) \subseteq D(0, R)$, *για κάποιο* $R > 0$, *τότε*

$$||D^a\widehat{\mu}||_\infty \leq (2\pi R)^{|a|}||\mu||.$$

Πρόταση 1.5. *Αν* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^N$ *και* $D^a f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *για κάθε πολυδείκτη* a *με* $0 \leq |a| \leq N$. *Τότε*

$$\widehat{D^a f}(\xi) = (2\pi i\xi)^a \widehat{f}(\xi), \quad \text{όταν } |a| \leq N.$$

Κι επίσης,
$$|\widehat{f}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-N}, \quad \text{για κατάλληλη σταθερά } C.$$

Πρόταση 1.6 (Σχέση Δυϊσμού). *Έστω* $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$ *και* $\nu \in M(\mathbb{R}^n)$. *Τότε*

$$\int \hat{\mu} d\nu = \int \hat{\nu} d\mu. \tag{8}$$

Συγκεκριμένα, για $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Η απόδειξη προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα Fubini.

Θα ορίσουμε τη συνέλιξη των f και g ως:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy,\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Αν f είναι συνεχής με συμπαγή φορέα και g τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε το ολοκλήρωμα (9) συγκλίνει απόλυτα για κάθε x και η $f * g$ είναι συνεχής.

Ανισότητα Young. *Έστω $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$, με $1 \leq p, r \leq \infty$ και $\frac{1}{p}+\frac{1}{r} \geq 1$. Έστω $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1$. Τότε $f * g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και*

$$||f * g||_q \leq ||f||_p ||g||_r.$$

Δύο ειδικές περιπτώσεις της ανισότητας Young είναι οι εξής.

1. Αν $f \in L^1$ και $g \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$, το ολοκλήρωμα (9) συγκλίνει απόλυτα σχεδόν για κάθε x και
$$||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p. \tag{10}$$

2. Αν $f \in L^p$ και $g \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, τότε από ανισότητα Hölder, το ολοκλήρωμα (9) συγκλίνει απόλυτα για κάθε x και
$$||f * g||_\infty \leq ||f||_p ||g||_{p'}. \tag{11}$$

Θεώρημα Riesz-Thorin. *Έστω $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$, και γραμμικός τελεστής T, με $T : L^{p_0}(X) \to L^{q_0}(Y)$ και $T : L^{p_1}(X) \to L^{q_1}(Y)$ φραγμένος. Έστω $0 < \theta < 1$ και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Τότε $T : L^p(X) \to L^q(Y)$ και

$$||T||_{p,q} \leq ||T||_{p_0,q_0}^{1-\theta} ||T||_{p_1,q_1}^{\theta}.$$

Ορίζουμε, επίσης, $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$.

Θεώρημα 1.1 (Αντιστροφής). *Έστω $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ και $\hat{f}$ επίσης στον $L^1(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για σχεδόν κάθε x,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi. \tag{12}$$

Ισοδύναμα,

$$\widehat{\check{f}}(x) = f(x). \tag{13}$$

Ορίζουμε, τώρα, το χώρο του Schwartz, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, να είναι ο χώρος των συναρτήσεων $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, με $\phi \in C^\infty$, και

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta D^\alpha \phi(x)| < +\infty, \text{ για κάθε πολυδείκτη } \alpha, \beta.$$

Ισοδύναμα, για $k \in \mathbb{N}_0$ και $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, ορίζουμε

$$\rho_k(\phi) = \sup_{x, |a| \leq k} (1 + |x|^2)^{k/2} |D^a \phi(x)|,$$

και τότε ρ_k νόρμα στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και

$$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \rho_k(\phi) < +\infty, \ \forall k.$$

Για παράδειγμα, εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η $G(x) = e^{-\pi |x|^2}$ ανήκει στον $\mathcal{S}$.

Έστω C_0^∞ οι C^∞ συναρτήσεις με συμπαγή φορέα. Τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και μάλιστα πυκνό, και $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάθε p, επίσης πυκνό, αν $p < +\infty$. Εφόσον τώρα $\mathcal{S} \subseteq L^1$, ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier στο $\mathcal{S}$. Συγκεκριμένα, για $\phi \in \mathcal{S}$, έχουμε

$$\mathcal{F}(\phi) := \widehat{\phi}.$$

Επίσης, με αλλαγή μεταβλητής, αποδεικνύεται ότι

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}, \quad \text{για } f, g \in L^1. \tag{14}$$

Και από την (14) και το Θεώρημα Αντιστροφής έχουμε

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}, \quad \text{για } f, g \in \mathcal{S}. \tag{15}$$

Πρόταση 1.7. *$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, 1-1 και επί, συνεχής, γραμμικός τελεστής.*

Ορισμός 1.3. *Ορίζουμε C_0^∞ tensor συνάρτηση μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, της μορφής*

$$f(x) = \prod_{j=1}^n \phi_j(x_j),$$

όπου κάθε $\phi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Πρόταση 1.8. *Οι γραμμικοί συνδυασμοί C_0^∞ tensor συναρτήσεων είναι πυκνοί στον $\mathcal{S}$*

Πρόταση 1.9. *Αν $f \in C_0^\infty$ και $g \in L^1_{loc}$, τότε η $f * g$ είναι C^∞ και*

$$D^a(f * g) = (D^a f) * g. \tag{16}$$

Πόρισμα 1.1. *Αν $f, g \in \mathcal{S}$, τότε $f * g \in \mathcal{S}$.*

Θεώρημα 1.2 (Plancherel). *Υπάρχει μοναδικός, γραμμικός τελεστής* $\mathcal{F} : L^2 \to L^2$, *με* $\mathcal{F}f = \hat{f}$, *όταν* $f \in \mathcal{S}$, *ο οποίος είναι ισομετρία και επί, κι επιπλέον ισχύει* $\mathcal{F}f = \hat{f}$, *αν* $f \in L^1 \cap L^2$.

Θα ορίσουμε τώρα τη συνέλιξη συνάρτησης στο χώρο του Schwartz με μέτρο. Συγκεκριμένα, έστω $\phi \in \mathcal{S}$ και $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$, με συμπαγή φορέα για ευκολία. Ορίζουμε

$$(\phi * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x-y) d\mu(y).$$

Τότε $\phi * \mu \in C^\infty$ και $D^a(\phi * \mu) = (D^a\phi) * \mu$.

Ορίζουμε, επίσης, $\check{\mu}(x) = \hat{\mu}(-x)$.

Μπορούμε τώρα να επεκτείνουμε την (15) για $\phi \in \mathcal{S}$ και $\mu \in M(\mathbb{R}^n)$. Συγκεκριμένα, έχουμε ότι

$$\widehat{\phi\check{\mu}} = \hat{\phi} * \mu \tag{17}$$

και

$$\widehat{\phi\mu} = \hat{\phi} * \hat{\mu}. \tag{18}$$

Ορισμός 1.4. *Ορίζουμε ελεγχόμενη κατανομή (tempered distribution) έναν τελεστή* $L \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)^*$, *δηλαδή* $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, *γραμμικός και συνεχής, όπου συνεχής θεωρείται αν ικανοποιεί την εξής ιδιότητα,*

$$\phi_n \to \phi \text{ στον } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow L(\phi_n) \to L(\phi).$$

Πρόταση 1.10. *Έστω* $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ *γραμμικός. Τότε* L *συνεχής αν και μόνο αν υπάρχει* $C \geq 0$ *και* $k \in \mathbb{N}_0$ *ώστε* $|L(\phi)| \leq C\rho_k(\phi)$, *για κάθε* $\phi \in \mathcal{S}$.

Ορισμός 1.5. *Μια συνάρτηση* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *λέγεται πολυωνυμικά ελεγχόμενη, αν για κάποια σταθερά* N *ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} |f(x)| dx < +\infty,$$

δηλαδή, αν $(1+|x|)^{-N} f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Τώρα για f πολυωνυμικά ελεγχόμενη, ορίζεται $L_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, με

$$L_f(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) f(x) dx.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το L_f είναι γραμμικό και συνεχές και άρα είναι κατανομή.

Επίσης, αν L κατανομή, ορίζουμε το μετασχηματισμό Fourier της, $\widehat{L} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ με,

$$\widehat{L}(\phi) := L(\widehat{\phi}), \text{ για } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Αποδεικνύεται πάλι ότι $\widehat{L}$ γραμμικό και συνεχές, άρα $\widehat{L}$ επίσης κατανομή.

Έστω τώρα T ένας $n \times n$ πραγματικός, συμμετρικός, αντιστρέψιμος πίνακας. Ορίζουμε την υπογραφή του T, $\operatorname{sgn}(T) = k_+ - k_-$, όπου k_+ και k_- είναι ο αριθμός των θετικών και αρνητικών αντίστοιχα ιδιοτιμών του T μετρώντας με πολλαπλότητα.

Ορίζουμε, επίσης, τη συνάρτηση $G_T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $G_T(x) = e^{-\pi i Tx\cdot x}$. Παρατηρούμε ότι $|G_T(x)| = 1$, άρα είναι πολυωνυμικά ελεγχόμενη συνάρτηση και επομένως ορίζει κατανομή $L_{G_T} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ με $L_{G_T}(\phi) = \int_{\mathbb{R}^n} G_T(x)\phi(x)dx$ για $\phi \in \mathcal{S}$.

Πρόταση 1.11. *Έστω T ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος, πραγματικός, συμμετρικός πίνακας με υπογραφή σ. Τότε η G_T έχει σαν κατανομή μετασχηματισμό Fourier ίσο με $e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}G_{-T^{-1}}$. Δηλαδή αν $g(x) = e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}e^{\pi i T^{-1}x\cdot x}$, τότε*

$$\widehat{L_{G_T}} = L_g.$$

Απόδειξη. Θέλουμε να δείξουμε ότι $\widehat{L_{G_T}} = L_g$. Δηλαδή για $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ θέλουμε $\widehat{L_{G_T}}(\phi) = L_g(\phi) \Leftrightarrow L_{G_T}(\widehat{\phi}) = L_g(\phi)$. Ισοδύναμα, λοιπόν, θέλουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i Tx\cdot x}\widehat{\phi}(x)dx = e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i T^{-1}x\cdot x}\phi(x)dx, \quad \text{για } \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{19}$$

Έστω αρχικά $n = 1$, δηλαδή $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$, $Tx = cx$, με $x, c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ και $\sigma = \operatorname{sgn}(c)$.
Έστω, επίσης, $f(z) = \sqrt{z}$, $f : A \to B$ να είναι ο κλάδος της τετραγωνικής ρίζας από το $A = \mathbb{C} \smallsetminus ((-\infty, 0])$ στο $B = \{re^{i\theta} | r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$. Τότε για $z = se^{i\psi}$ με $-\pi < \psi < \pi$ έχουμε $f(z) = \sqrt{s}e^{i\frac{\psi}{2}}$.
Οπότε, για $z = ic$ με $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, έχουμε $\sqrt{ic} = f(|c|e^{i\operatorname{sgn}(c)\frac{\pi}{2}}) = \sqrt{|c|}e^{i\operatorname{sgn}(c)\frac{\pi}{4}} = |\det T|^{\frac{1}{2}}e^{\pi i\frac{\sigma}{4}}$.
Τώρα η (19) γίνεται

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i cx^2}\widehat{\phi}(x)dx = (\sqrt{ic})^{-1}\int_{\mathbb{R}} e^{\pi i\frac{1}{c}x^2}\phi(x)dx.$$

Ισοδύναμα, λοιπόν, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi zx^2}\widehat{\phi}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{z}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\frac{x^2}{z}}\phi(x)dx \quad \text{για } z = ci \neq 0. \tag{20}$$

Για $z = 1$ θέλουμε $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}\phi(x)dx$.
Δηλαδή για $G(x) = e^{-\pi x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ θέλουμε $L_G(\widehat{\phi}) = L_G(\phi) \Leftrightarrow \widehat{L_G}(\phi) = L_G(\phi)$.
Όμως $G \in L^1(\mathbb{R})$ άρα $\widehat{L_G} = L_{\widehat{G}} = L_G$ αφού $\widehat{G} = G$.
Άρα ισχύει η (20) για $z = 1$.

Για $z > 0$, δηλαδή $z = a \in \mathbb{R}^+$, η (20) γίνεται,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi ax^2}\widehat{\phi}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\frac{x^2}{a}}\phi(x)dx \Longleftrightarrow$$

$$\int_{\mathbb{R}} G(\sqrt{a}x)\widehat{\phi}(x)dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbb{R}} G(\frac{x}{\sqrt{a}})\phi(x)dx \Longleftrightarrow$$

$$\widehat{L_{G_{\sqrt{a}}}} = L_{G^{\sqrt{a}}} \overset{G\in L^1(\mathbb{R})}{\Longleftrightarrow} L_{\widehat{G_{\sqrt{a}}}} = L_{G^{\sqrt{a}}},$$

όπου $G_{\sqrt{a}}(x) = G(\sqrt{a}x)$ και $G^{\sqrt{a}}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}G(\frac{x}{\sqrt{a}})$ και άρα ισχύει αφού $\widehat{G_{\sqrt{a}}} = G^{\sqrt{a}}$. Οπότε η (20) ισχύει για όλα τα $z > 0$.

Παρατηρούμε τώρα ότι η $F_{\widehat{\phi}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z x^2}\widehat{\phi}(x)dx$ είναι αναλυτική όταν $Rez > 0$, αφού

$$\lim_{h\to 0}\frac{F_{\widehat{\phi}}(z+h) - F_{\widehat{\phi}}(z)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\pi(z+h)x^2} - e^{-\pi z x^2}}{h}\widehat{\phi}(x)dx =$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z x^2}\frac{e^{-\pi h x^2} - 1}{h}\widehat{\phi}(x)dx$$

και

$$\left|\frac{e^z - 1}{z}\right| = \left|\frac{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... - 1}{z}\right| = \left|1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + ...\right|$$

$$\leq 1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \frac{|z|^3}{4!} + ... \leq 1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + ... = e^{|z|}.$$

Άρα,

$$\left|e^{-\pi z x^2}\frac{e^{-\pi h x^2} - 1}{h}\widehat{\phi}(x)\right| \leq |e^{-\pi z x^2}|e^{\pi|h|x^2}|\widehat{\phi}(x)| = e^{-\pi(Rez)x^2}e^{\pi|h|x^2}|\widehat{\phi}(x)| =$$

$$= e^{-\pi x^2(Rez - |h|)}|\widehat{\phi}(x)| \leq |\widehat{\phi}(x)| \in L^1(\mathbb{R}),$$

για $Rez - |h| \geq 0 \Longleftrightarrow |h| \leq Rez$, αφού τότε $e^{-\pi x^2(Rez-|h|)} \leq 1$.
Οπότε, από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$F'_{\widehat{\phi}}(z) = \int_{\mathbb{R}}\frac{d(e^{-\pi z x^2})}{dz}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}}(-\pi x^2)e^{-\pi z x^2}\widehat{\phi}(x)dx$$

άρα αναλυτική.

Επίσης, η $h(z) = \frac{1}{z}$ απεικονίζει το ημιεπίπεδο $Rez > 0$ στον εαυτό του, δηλαδή $h(\{z : Rez > 0\}) = \{z : Rez > 0\}$ και είναι αναλυτική.
Άρα η $H(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\frac{x^2}{z}}\phi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{z}}F_{\phi}(h(z))$ είναι επίσης αναλυτική, ως σύνθεση και γινόμενο αναλυτικών, όταν $Rez > 0$ (αφού F_{ϕ} αναλυτική, ακριβώς όπως η $F_{\widehat{\phi}}$).
Οπότε τώρα έχουμε $F_{\widehat{\phi}}(z) = H(z)$, για $z > 0$, και είναι αναλυτικές όταν $Rez > 0$. Άρα, από Αρχή Ταυτότητας έχουμε ότι $F_{\widehat{\phi}}(z) = H(z)$ για κάθε z με $Rez > 0$. Δηλαδή, ισχύει η (20) για z με $Rez > 0$.

Επίσης, η $F_{\widehat{\phi}}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z x^2}\widehat{\phi}(x)dx$ είναι συνεχής όταν $z = ci,\ z \neq 0$, αφού

$$\lim_{h\to 0} F_{\widehat{\phi}}(z+h) = \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z x^2}e^{-\pi h x^2}\widehat{\phi}(x)dx$$

και, για $z = ci$ και $Reh > 0$,

$$|e^{-\pi z x^2} e^{-\pi h x^2} \widehat{\phi}(x)| = e^{-\pi (Reh) x^2} |\widehat{\phi}(x)| \leq |\widehat{\phi}(x)| \in L^1(\mathbb{R})$$

Άρα, από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{h \to 0,\ Reh > 0} F_{\widehat{\phi}}(z+h) = F_{\widehat{\phi}}(z),$$

άρα η $F_{\widehat{\phi}}$ είναι συνεχής.

Όμοια, και η $H(z) = \frac{1}{\sqrt{z}} F_{\phi}(h(z))$ είναι συνεχής όταν $z = ci,\ z \neq 0$. Άρα η ισότητα $F_{\widehat{\phi}}(z) = H(z)$ επεκτείνεται σε όλο το $\{z : Rez \geq 0,\ z \neq 0\}$. Ειδικότερα, αποδείχθηκε η (20) για $z = ci \neq 0$.

Έστω τώρα $n \geq 2$.
Έστω αρχικά T διαγώνιος με στοιχεία διαγωνίου $\{c_j\}_{j=1}^n$ και $\phi \in C_0^\infty$ tensor function, δηλαδή $\phi(x) = \prod_{j=1}^n \phi_j(x_j)$ με $\phi_j \in C_0^\infty$. Τότε $Tx \cdot x = \sum_{j=1}^n c_j x_j^2$ και $\widehat{\phi}(x) = \prod_{j=1}^n \widehat{\phi}_j(x_j)$. Άρα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini και την (20), έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i Tx \cdot x} \widehat{\phi}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^n e^{-\pi i c_j x_j^2} \widehat{\phi}_j(x_j) dx_j = \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi i c_j x_j^2} \widehat{\phi}_j(x_j) dx_j =$$

$$= \prod_{j=1}^n (\sqrt{i c_j})^{-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\pi i \frac{1}{c_j} x_j^2} \phi_j(x_j) dx_j = e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}} e^{\pi i \frac{1}{c_j} x_j^2} \phi_j(x_j) dx_j =$$

$$= e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i T^{-1} x \cdot x} \phi(x) dx$$

Άρα αποδείχθηκε η (19) για T διαγώνιο και ϕ συνάρτηση tensor.

Γενικότερα τώρα, για $\phi \in \mathcal{S}$, έχουμε, απο Πρόταση 1.8, ότι οι γραμμικοί συνδυασμοί C_0^∞ tensor συναρτήσεων είναι πυκνοί στον $\mathcal{S}$. Άρα υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) γραμμικών συνδυασμών tensor συναρτήσεων με $\phi_n \to \phi$ στον $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ και από γραμμικότητα ολοκληρώματος και μετασχηματισμού Fourier ισχύει η (19) για τις ϕ_n, δηλαδή $\widehat{L_{G_T}}(\phi_n) = L_g(\phi_n)$.
Επίσης,

$$\phi_n \to \phi \Rightarrow \begin{cases} \widehat{\phi_n} \to \widehat{\phi} \\ L_g(\phi_n) \to L_g(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_{G_T}(\widehat{\phi_n}) \to L_{G_T}(\widehat{\phi}) \\ L_g(\phi_n) \to L_g(\phi) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{L_{G_T}}(\phi_n) \to \widehat{L_{G_T}}(\phi) \\ L_g(\phi_n) \to L_g(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_g(\phi_n) \to \widehat{L_{G_T}}(\phi) \\ L_g(\phi_n) \to L_g(\phi) \end{cases}$$

λόγω ορισμού του μετασχηματισμού Fourier κατανομής και συνέχειας του μετασχηματισμού Fourier και του γραμμικού συναρτησοειδούς $L_g : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$.
Οπότε $\widehat{L_{G_T}}(\phi) = L_g(\phi)$ και άρα αποδείχθηκε η (19) για T διαγώνιο και όλες τις $\phi \in \mathcal{S}$.

Τέλος, αν $S,\ n \times n$, αντιστρέψιμος, πραγματικός και συμμετρικός πίνακας, υπάρχει $U \in SO(n)$ (δηλαδή $U^t = U^{-1}$ και $\det U = 1$) ώστε $S = UTU^{-1}$ με T διαγώνιο.

Τότε $\det S = \det T$ και $\operatorname{sgn}(S) = \operatorname{sgn}(T) = \sigma$ αφού U αντιστρέψιμος οπότε οι S και T έχουν ίδιες ιδιοτιμές. Άρα, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i Sx\cdot x}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i (TU^{-1}x)\cdot(U^t x)}\widehat{\phi}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i (TU^{-1}x)\cdot(U^{-1}x)}\widehat{\phi}(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i Tx\cdot x}\widehat{\phi}(Ux)dx \overset{(4)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i Tx\cdot x}\widehat{\phi\circ U}(x)dx \overset{(19)}{=}$$

$$= e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i T^{-1}x\cdot x}\phi(U(x))dx =$$

$$= e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i (T^{-1}U^{-1}x)\cdot(U^{-1}x)}\phi(x)dx =$$

$$= e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}}|\det S|^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i S^{-1}x\cdot x}\phi(x)dx.$$

Επομένως, αποδείχθηκε η (19) για γενικό T και ϕ και τελειώνει η απόδειξη. $\square$

2 Η μέθοδος Στάσιμης Φάσης

Έστω συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty$, και έστω $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε, για $\lambda > 0$,

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi(x)} a(x) dx.$$

Θέλουμε να εξετάσουμε την συμπεριφορά του ολοκληρώματος $I(\lambda)$ καθώς $\lambda \to \infty$.
Παρατηρήσεις.

1. $|I(\lambda)| \leq ||a||_1$ =σταθερά που εξαρτάται μόνο απο το a. Κανείς θα περίμενε μείωση καθώς $\lambda \to \infty$, αφού οταν το λ είναι μεγάλο, η περίοδος των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μικραίνει κι έτσι το ολοκλήρωμα θα έχει πολλές απαλοιφές.

2. Αν $\phi = c$, σταθερή, τότε $|I(\lambda)| = |e^{-\pi i \lambda c}| \left|\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} a(x)dx\right|$, που είναι ανεξάρτητο του λ. Επομένως, χρειάζεται κανείς να βάλει μη εκφυλιστικές υποθέσεις στη ϕ. Όπως προκύπτει, οι ιδιότητες του a είναι λιγότερο σημαντικές. Παρατηρούμε, επίσης, ότι μπορούμε να κόψουμε το a με μια διαμέριση της μονάδας, κι έτσι το ερώτημα του πόσο γρήγορα μειώνεται το $I(\lambda)$ μπορεί να περιοριστεί σε μια μικρή περιοχή ενός σημείου.

3. Έστω $\phi_1 = \phi_2 \circ G$, όπου G είναι C^∞ αμφιδιαφόριση. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi_2(x)} a(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi_1(G^{-1}x)} a(x) dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi_1(y)} a(Gy) |J_G(y)| dy,$$

όπου J_G είναι η Ιακωβιανή ορίζουσα. Τώρα, η συνάρτηση $b(y) = a(Gy)|J_G(y)|$ είναι πάλι C_0^∞, γιατί η G είναι C^∞ αμφιδιαφόριση. Άρα, κάθε φράγμα του βαθμού μείωσης του $I(\lambda)$ που είναι ανεξάρτητο του a είναι αναλλοίωτο από αμφιδιαφορίσεις.

Θα χρειαστούμε κάποια Λήμματα για τις κανονικές μορφές μιας συνάρτησης κοντά σε ένα κανονικό σημείο ή σε ένα μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο.

Λήμμα 2.1 (**Straightening**). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞ και $p \in \Omega$ με $\nabla f(p) \neq 0$. Τότε υπάρχουν περιοχές $U \subseteq \mathbb{R}^n$ του 0 και $V \subseteq \Omega$ του p, και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $G : U \to V$ με $G(0) = p$ και*

$$(f \circ G)(x) = f(p) + x_n.$$

Απόδειξη. Έχουμε $\nabla f(p) \neq 0$. Άρα υπάρχει $j \in \{1, ..., n\}$ ώστε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(p) \neq 0$.
Έστω, δίχως βλάβη της γενικότητας, $j = n$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$.

Αλλιώς υπάρχει στροφή $K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞ αμφιδιαφόριση ώστε αν $\tilde{f}(x) = (f \circ K)(x)$ τότε $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_n}(p) \neq 0$. Τότε, αν $\tilde{f}(G(x)) = \tilde{f}(p) + x_n$ και $\tilde{G} = K \circ G$, έχουμε $f(\tilde{G}(x)) = f(K(p)) + x_n$ με $\tilde{G} : U \to K(V)$ C^∞ αμφιδιαφόριση και $\tilde{G}(0) =$

$K(G(0)) = K(p)$.

Έστω τώρα $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ όπου για $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n$ με $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $x_n \in \mathbb{R}$ έχουμε $F(x) = F(x', x_n) = (x', f(x', x_n))$. Τότε

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Άρα, $\det(J_F)(p) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \neq 0$ και $F(p', p_n) = (p', f(p))$.
Οπότε από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης υπάρχουν ανοιχτές περιοχές W του p στον $\mathbb{R}^n$, X του $\mathbb{R}^{n-1}$ με $p' \in X$ και Y του $\mathbb{R}$ με $f(p) \in Y$ ώστε $F : W \to X \times Y$ 1-1 και επί με αντίστροφη $H : X \times Y \to W$, C^1 στο $X \times Y$.
Τότε $H(x', y) = (h(x', y), g(x', y))$ για $(x', y) \in X \times Y$ και $h : X \times Y \to \mathbb{R}^{n-1}$, $g : X \times Y \to \mathbb{R}$, C^1 στο $X \times Y$.
Άρα, για $(x', y) \in X \times Y$, έχουμε

$$(x', y) = F(H(x', y)) = F(h(x', y), g(x', y)) = (h(x', y), f(h(x', y), g(x', y)))$$

Οπότε $x' = h(x', y)$ και $y = f(x', g(x', y))$ $(= f(x', x_n) = f(x)$ για $x_n = g(x', y))$.

Άρα, έστω τώρα $G(x', x_n) = (x' + p', g(x' + p', x_n + f(p)))$ για $(x' + p', x_n + f(p)) \in X \times Y$, δηλαδή $(x', x_n) \in (X - p') \times (Y - f(p)) =: U$ περιοχή του 0 στον $\mathbb{R}^n$.
Τότε, έχουμε $f(G(x)) = x_n + f(p)$ και $G(0) = (p', g(p', f(p)) = (p', p_n) = p$ με $G : U \to G(U) =: V$, C^∞ αμφιδιαφόριση.

□

Λήμμα 2.2. *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ C^∞ και $p \in \Omega$ με $\nabla\phi(p) = 0$. Έστω επίσης G, C^∞ αμφιδιαφόριση με $G(0) = p$. Τότε*

$$H_{\phi \circ G}(0) = DG(0)^t H_\phi(p) DG(0).$$

Άρα, οι $H_\phi(p)$ και $H_{\phi \circ G}(0)$ έχουν ίδια υπογραφή κι επίσης,

$$\det(H_{\phi \circ G}(0)) = J_G(0)^2 \det(H_\phi(p)).$$

Απόδειξη. Παραγωγίζοντας την $\phi \circ G$ έχουμε

$$\frac{\partial(\phi \circ G)}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(x)) \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x).$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2(\phi \circ G)}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(x)) \right)(x) \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(x)) \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_i}(G(x)) \frac{\partial G_l}{\partial x_k}(x) \right) \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(x)) \frac{\partial^2 G_i}{\partial x_k \partial x_j}(x) \right].$$

Οπότε, αφού $G(0) = p$ και $\nabla\phi(p) = 0$, έχουμε ότι $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(G(0)) = 0$, άρα

$$\frac{\partial^2(\phi \circ G)}{\partial x_k \partial x_j}(0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(0) \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_i}(p) \frac{\partial G_l}{\partial x_k}(0) \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(0) \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_l \partial x_i}(p) \frac{\partial G_l}{\partial x_k}(0) = \left(\frac{\partial G}{\partial x_j}(0) \right)^t H_\phi(p) \frac{\partial G}{\partial x_k}(0).$$

Επομένως,

$$H_{\phi \circ G}(0) = DG(0)^t H_\phi(p) DG(0).$$

Επίσης, αφού $DG(0)$ συμμετρικός, έχουμε

$$\det DG(0) = \det DG(0)^t = J_G(0),$$

άρα

$$\det(H_{\phi \circ G}(0)) = J_G(0)^2 \det(H_\phi(p)).$$

Τώρα, έστω για απλοποίηση του συμβολισμού, $A := H_{\phi \circ G}(0)$, $B := H_\phi(p)$ και $D := DG(0)$. Έχουμε

$$A = D^t B D$$

και έστω k_+, k_- το πλήθος των θετικών και αρνητικών αντίστοιχα ιδιοτιμών του A, και μ_+, μ_- το πλήθος των θετικών και αρνητικών αντίστοιχα ιδιοτιμών του B. Θα δείξουμε ότι $k_+ = \mu_+$ και $k_- = \mu_-$.

Έστω L_A^+ ο ιδιόχωρος του A που παράγεται απ'τα ιδιοδιανύσματα $v_1, ..., v_{k_+}$ του A που αντιστοιχούν στις θετικές ιδιοτιμές του, L_A^- ο ιδιόχωρος του A που παράγεται απ'τα υπόλοιπα και L_B^+, L_B^-, αντίστοιχα, οι ιδιόχωροι του B που παράγονται απ'τα ιδιοδιανύσματα του B που αντιστοιχούν στις θετικές και αρνητικές αντίστοιχα ιδιοτιμές του. Τότε, για $1 \leq i \leq k_+$,

$$0 < v_i^t A v_i = v_i^t (D^t B D) v_i = (D v_i)^t B (D v_i).$$

Κι αφού D αντιστρέψιμος και v_i ανεξάρτητα για $1 \leq i \leq k_+$, έχουμε Dv_i επίσης ανεξάρτητα. Οπότε, αν $DL_A^+ :=$ ο χώρος που παράγεται απ'τα Dv_i για $1 \leq i \leq k_+$, έχουμε

$$\dim DL_A^+ = k_+$$

και

$$x \in DL_A^+ \Rightarrow x^t B x > 0.$$

Επίσης, έχουμε

$$\dim L_B^+ = \mu_+$$

και

$$x \in L_B^+ \Rightarrow x^t B x > 0.$$

Θα δείξουμε ότι $k_+ = \dim DL_A^+ \leq \dim L_B^+ = \mu_+$.
Έστω $k_+ > \mu_+$. Τότε η τομή του DL_A^+ με τον L_B^- είναι υπόχωρος με διάσταση ≥ 1, γιατί

$$\dim DL_A^+ + \dim L_B^- - \dim(DL_A^+ \cap L_B^-) = \dim(DL_A^+ + L_B^-) \leq n.$$

Δηλαδή,

$$\mu_+ + \mu_- - \dim(DL_A^+ \cap L_B^-) < k_+ + \mu_- - \dim(DL_A^+ \cap L_B^-) \leq n$$

και $\mu_+ + \mu_- = n$, άρα $\dim(DL_A^+ \cap L_B^-) > 0$.
Οπότε, υπάρχει διάνυσμα $w \neq 0$ με $w \in DL_A^+$ και $w \in L_B^-$.
Τότε όμως, $w^t B w > 0$ και $w^t B w < 0$. Άτοπο.
Άρα

$$k_+ \leq \mu_+.$$

Όμοια δείχνουμε ότι

$$k_- \leq \mu_-.$$

Δηλαδή, ο B έχει $\geq k_+$ θετικές ιδιοτιμές και $\geq k_-$ αρνητικές. Αλλά $k_+ + k_- = n$, άρα έχει ακριβώς τόσες, όσες δηλαδή κι ο A. Επομένως, οι A, B έχουν ίδια υπογραφή.

$\square$

Λήμμα 2.3. *Έστω $f : V \to \mathbb{R}$, C^∞, με $V \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτή περιοχή του 0. Τότε*

$$f(x_1, ..., x_n) - f(0, ..., 0) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, ..., x_n),$$

για κατάλληλες συναρτήσεις $g_i : V \to \mathbb{R}$, C^∞ με $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Απόδειξη. Έστω $x = (x_1, ..., x_n) \in V$ και $T_x(t) = tx = (tx_1, ..., tx_n)$. Για $t \in [0, 1]$ και $x \in V$, αφού V κυρτό και $0 \in V$, έχουμε $T_x(t) = tx \in V$.
Δηλαδή, $T_x : [0, 1] \to V$. Τότε

$$f(x_1, ..., x_n) - f(0, ..., 0) = f(T_x(1)) - f(T_x(0)) = \int_0^1 \frac{d(f \circ T_x)}{dt}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(T_x(t)) \frac{d(T_x)_i}{dt}(t) \right) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left(x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n) \right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)dt.$$

Οπότε, για

$$g_i(x_1, ..., x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, ..., tx_n)dt,$$

έχουμε $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$, g_i είναι C^∞ από Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, αφού η f είναι, κι επίσης ισχύει,

$$f(x_1, ..., x_n) - f(0, ..., 0) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, ..., x_n).$$

$\square$

Λήμμα 2.4 (Λήμμα του Morse). *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞ και $p \in \Omega$ με $\nabla f(p) = 0$ και ο Εσσιανός πίνακας $H_f(p) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)$ είναι αντιστρέψιμος. Τότε, για $k =$πλήθος των θετικών ιδιοτιμών του H_f, υπάρχουν περιοχές $U \subseteq \mathbb{R}^n$ του 0 και $V \subseteq \Omega$ του p, και μία C^∞ αμφιδιαφόριση $G : U \to V$ με $G(0) = p$ και*

$$(f \circ G)(x) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2.$$

Απόδειξη. Αρχικά, θα δείξουμε ότι αν η f γράφεται σε αυτήν τη μορφή για κάποιο G, τότε το k είναι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών του $H_f(p)$. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει C^∞ αμφιδιαφόριση G, με την f να γράφεται ως,

$$(f \circ G)(x) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2,$$

τότε

$$\frac{\partial^2 (f \circ G)}{\partial x_i \partial x_j}(0) = \begin{cases} 2, & \text{αν } i = j \leq k \\ -2, & \text{αν } i = j > k \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Δηλαδή,

$$H_{f \circ G}(0) = \begin{pmatrix} 2 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\huge 0} & \\ & & 2 & & & \\ & & & -2 & & \\ & \text{\huge 0} & & & \ddots & \\ & & & & & -2 \end{pmatrix}$$

και άρα k είναι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών του $H_{f \circ G}(0)$.
Οπότε, από Λήμμα 2.2, έχουμε ότι $H_{f \circ G}(0) = DG(0)^t H_f(p) DG(0)$ και $H_{f \circ G}(0)$ και $H_f(p)$ έχουν ίδια υπογραφή (και ίδια διάσταση), άρα και ίδιο πλήθος θετικών ιδιοτιμών. Επομένως, k είναι το πλήθος των θετικών ιδιοτιμών του $H_f(p)$.

Παρατηρούμε, τώρα, ότι αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $y : V \to U$, C^∞ αμφιδιαφόριση, με $p \in V$, $0 \in U$, $y(z) = (y_1(z), ..., y_n(z))$, για $z \in V$, $y(p) = 0$, και

$$f(z) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} y_j(z)^2 - \sum_{j=k+1}^{n} y_j(z)^2.$$

Αφού, τότε, αν $x = (x_1, ..., x_n) = y(z) \in U$, ορίζουμε $G(x) = y^{-1}(x) = z \in V$ και έχουμε $G : U \to V$, C^∞, με $G(0) = y^{-1}(0) = p$ και

$$f(G(x)) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2.$$

Επίσης, δίχως βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $p = 0$.
Αφού, για $h : \Omega \to \mathbb{R}^n$ με $h(x) = x + p$, μπορούμε να ορίσουμε $\tilde{f} = f \circ h$ και τότε $\tilde{f}(0) = f(p)$, $\nabla \tilde{f}(0) = \nabla f(p) = 0$ και $H_{\tilde{f}}(0) = H_f(p)$ αντιστρέψιμος. Δηλαδή, η $\tilde{f}$ έχει μη εκφυλισμένο κρίσιμο σημείο στο 0. Επίσης, η h είναι C^∞ αμφιδιαφόριση, άρα αν έχουμε

$$\tilde{f}(\tilde{G}(x)) = \tilde{f}(0) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2,$$

τότε

$$f(h(\tilde{G}(x))) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{n} x_j^2.$$

Οπότε αρκεί να ορίσουμε $G(x) = (h \circ \tilde{G})(x)$ και τότε η G είναι C^∞ αμφιδιαφόριση και ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις στο Λήμμα.

Θα δείξουμε τώρα ότι υπάρχει τέτοια $y = (y_1, ..., y_n)$.
Έχουμε Ω ανοικτό, άρα υπάρχει μπάλα γύρω από το $p = 0$ μέσα στο Ω. Ειδικότερα, υπάρχει $V_1 \subseteq \Omega$ κυρτό με $0 \in V_1$. Άρα, από Λήμμα 2.3, έχουμε

$$f(z_1, ..., z_n) - f(0, ..., 0) = \sum_{j=1}^{n} z_j g_j(z_1, ..., z_n),$$

όπου $g_j : V_1 \to \mathbb{R}$, C^∞, με $g_j(0) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(0) = 0$.
Εφαρμόζοντας ξανά το Λήμμα 2.3 για τις g_j,

$$f(z_1, ..., z_n) - f(0, ..., 0) = \sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j \tilde{h}_{i,j}(z_1, ..., z_n),$$

όπου $\tilde{h}_{i,j} : V_1 \to \mathbb{R}$, C^∞, με $\tilde{h}_{i,j}(0) = \frac{\partial g_j}{\partial z_i}(0)$.
Παραγωγίζοντας την πρώτη σχέση,

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(z_1, ..., z_n) = g_j(z_1, ..., z_n) + \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial g_k}{\partial z_j}(z_1, ..., z_n)$$

και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(z_1, ..., z_n) = \frac{\partial g_j}{\partial z_i}(z_1, ..., z_n) + \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(z_1, ..., z_n) + \sum_{k=1}^{n} z_k \frac{\partial^2 g_k}{\partial z_i \partial z_j}(z_1, ..., z_n).$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(0) = \frac{\partial g_j}{\partial z_i}(0) + \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(0).$$

Επομένως, ορίζουμε $h_{i,j} = \frac{1}{2}(\tilde{h}_{i,j} + \tilde{h}_{j,i})$, και τότε προφανώς $h_{i,j} = h_{j,i}$. Επίσης, τα

$$h_{i,j}(0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_j}{\partial z_i}(0) + \frac{\partial g_i}{\partial z_j}(0)\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j}(0)$$

ορίζουν τον αντιστρέψιμο πίνακα $\frac{1}{2}H_f(0)$, και

$$f(z_1,...,z_n)-f(0,...,0)=\sum_{i,j=1}^{n} z_i z_j h_{i,j}(z_1,...,z_n), \text{ στο } V_1.$$

Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή.
Έστω $r=1$. Έχουμε ότι

$$f(z_1,...,z_n)-f(0,...,0)=\sum_{i,j\geq r} z_i z_j h_{i,j}(z_1,...,z_n), \text{ στο } V_1.$$

Έστω, τώρα, ότι υπάρχουν συντεταγμένες $u_1,...,u_n$ σε μια περιοχή V_2 του 0 στο Ω, ώστε η f να γράφεται ως

$$f(u_1,...,u_n)-f(0,...,0)=\pm u_1^2\pm\cdots\pm u_{r-1}^2+\sum_{i,j\geq r} u_i u_j H_{i,j}(u_1,...,u_n), \tag{21}$$

όπου οι $(n-r+1)\times(n-r+1)$ πίνακες $(H_{i,j}(u_1,...,u_n))_{i,j=r}^n$ είναι συμμετρικοί και ο $(H_{i,j}(0))$ αντιστρέψιμος.
Οπότε με αλλαγή συντεταγμένων στις τελευταίες $n-r+1$ μεταβλητές μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H_{r,r}(0)\neq 0$.
Συγκεκριμένα, αφού $(H_{i,j}(0))$ αντιστρέψιμος, στην πρώτη γραμμή υπάρχει κάποιο μη μηδενικό στοιχείο. Έστω ότι βρίσκεται στην k θέση, $r\leq k\leq n$. Δηλαδή, $H_{r,k}(0)\neq 0$. Τότε, αρκεί να ορίσουμε ως πίνακα αλλαγής μεταβλητής, T, τον μοναδιαίο, I, όπου έχουμε εναλλάξει την πρώτη με την k-οστή στήλη. Τότε πολλαπλασιάζοντας τον $(H_{i,j}(0))$ με τον T, προκύπτει ο $(H_{i,j}(0))$ με εναλλαγμένες τις k και 1 στήλες.
Οπότε, αφού $H_{r,r}(0)\neq 0$, υπάρχει $V_3\subseteq V_2$ περιοχή του 0 ώστε, για $u=(u_1,...,u_n)$, $\sqrt{|H_{r,r}(u)|}\neq 0$ και C^∞ στο V_3.
Ορίζουμε τώρα,

$$\begin{aligned} &v_i(u)=u_i, \text{ για } i\neq r \\ &v_r(u)=\sqrt{|H_{r,r}(u)|}\left(u_r+\frac{1}{H_{r,r}(u)}\sum_{i>r} u_i H_{i,r}(u)\right). \end{aligned}$$

Έχουμε

$$J_v(u_1,...,u_n)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & & \\ & & 1 & & & & \\ \frac{\partial v_r}{\partial u_1} & \cdots & & \frac{\partial v_r}{\partial u_r} & & \cdots & \frac{\partial v_r}{\partial u_n} \\ & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

όπου,

$$\frac{\partial v_r}{\partial u_j}(u)=\frac{1}{2\sqrt{|H_{r,r}(u)|}}\frac{\partial H_{r,r}}{\partial u_j}(u)\left(u_r+\frac{1}{H_{r,r}(u)}\sum_{i>r} u_i H_{i,r}(u)\right)+$$

$$+\sqrt{|H_{r,r}(u)|}\left(\frac{\partial u_r}{\partial u_j}(u)-\frac{1}{H^2_{r,r}(u)}\frac{\partial H_{r,r}}{\partial u_j}(u)\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)+$$

$$+\frac{\sqrt{|H_{r,r}(u)|}}{H_{r,r}(u)}\sum_{i>r}\left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j}(u)H_{i,r}(u)+u_i\frac{\partial H_{i,r}}{\partial u_j}(u)\right).$$

Αν $j=r$, αρχικά παρατηρούμε ότι $\frac{\partial u_r}{\partial u_j}(u)=1$ και $\frac{\partial u_i}{\partial u_j}(u)=0$ για $i>r$, και υπολογίζοντας στο 0,

$$\frac{\partial v_r}{\partial u_r}(0)=\sqrt{|H_{r,r}(0)|}\neq 0.$$

Αν $j<r$, όμοια παρατηρούμε ότι $\frac{\partial u_r}{\partial u_j}(u)=0$ και $\frac{\partial u_i}{\partial u_j}(u)=0$ για $i>r(>j)$, και άρα,

$$\frac{\partial v_r}{\partial u_j}(0)=0.$$

Οπότε, ο $J_v(0)$ είναι άνω τριγωνικός με ορίζουσα,

$$\det J_v(0)=\sqrt{|H_{r,r}(0)|}\neq 0.$$

Επομένως, από Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης, η $v=(v_1,...,v_n):V_3\to\mathbb{R}^n$, με $0\in V_3$, αντιστρέφεται τοπικά. Δηλαδή, υπάρχει $V_4\subseteq V_3$ με $0\in V_4$ και $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ώστε $v|_{V_4}:V_4\to U$ 1-1, επί, C^∞, και με αντίστροφη $u=w(v)$, C^∞. Επίσης, αφού $v(0)=0$ έχουμε και $w(0)=v^{-1}(0)=0$.

Τώρα, υπολογίζοντας, έχουμε

$$v_r^2=|H_{r,r}(u)|\left(u_r^2+\frac{1}{H^2_{r,r}(u)}\left(\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)^2+2u_r\frac{1}{H_{r,r}(u)}\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)=$$

$$=\operatorname{sgn}(H_{r,r}(u))\left(H_{r,r}(u)u_r^2+2u_r\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)+\frac{\operatorname{sgn}(H_{r,r}(u))}{H_{r,r}(u)}\left(\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)^2. \tag{22}$$

Επίσης, η (21), γράφεται ως,

$$f(u)-f(0)=\pm u_1^2\pm\cdots\pm u_{r-1}^2+u_r^2H_{r,r}(u)+2u_r\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)+\sum_{i,j>r}u_iu_jH_{i,j}(u)$$

και αντικαθιστώντας την (22) έχουμε

$$f(u)-f(0)=\pm u_1^2\pm\cdots\pm u_{r-1}^2+\operatorname{sgn}(H_{r,r}(u))v_r^2-\frac{1}{H_{r,r}(u)}\left(\sum_{i>r}u_iH_{i,r}(u)\right)^2$$

$$+\sum_{i,j>r}u_iu_jH_{i,j}(u).$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας ότι $u_i = v_i$, για $i \neq r$, και $u = w(v)$ με $w \in C^\infty$,

$$f(v) - f(0) = \pm v_1^2 \pm \cdots \pm v_{r-1}^2 \pm v_r^2 - \frac{1}{\widetilde{H}_{r,r}(v)} \left(\sum_{i>r} v_i \widetilde{H}_{i,r}(v) \right)^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j \widetilde{H}_{i,j}(v)$$

$$= \pm v_1^2 \pm \cdots \pm v_{r-1}^2 \pm v_r^2 - \frac{1}{\widetilde{H}_{r,r}(v)} \sum_{i,j>r} v_i v_j \widetilde{H}_{i,r}(v) \widetilde{H}_{j,r}(v) + \sum_{i,j>r} v_i v_j \widetilde{H}_{i,j}(v)$$

$$= \pm v_1^2 \pm \cdots \pm v_r^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j H'_{i,j}(v),$$

όπου $\widetilde{H}_{i,j} = H_{i,j} \circ w$, δηλαδή C^∞, με $\widetilde{H}_{i,j} = \widetilde{H}_{j,i}$, $\widetilde{H}_{i,j}(0) = H_{i,j}(0)$ και $H'_{i,j} = -\frac{1}{\widetilde{H}_{r,r}} \widetilde{H}_{i,r} \widetilde{H}_{j,r} + \widetilde{H}_{i,j}$.
Άρα, $H'_{i,j} = H'_{j,i}$, και,

$$H'_{i,j}(0) = -\frac{1}{\widetilde{H}_{r,r}(0)} \widetilde{H}_{i,r}(0) \widetilde{H}_{j,r}(0) + \widetilde{H}_{i,j}(0)$$

$$= -\frac{1}{H_{r,r}(0)} H_{i,r}(0) H_{j,r}(0) + H_{i,j}(0).$$

Μένει να δείξουμε ότι ο $(H'_{i,j}(0))_{i,j}$ είναι αντιστρέψιμος. Θα συμβολίζουμε για διευκόλυνση τα στοιχεία $H'_{i,j}(0)$ και $H_{i,j}(0)$, $H'_{i,j}$ και $H_{i,j}$ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι οι γραμμές του $(H'_{i,j})_{i,j}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η i γραμμή για $i \geq r+1$ δίνεται από τον τύπο

$$H'_{i,j} = -\frac{1}{H_{r,r}} H_{i,r} H_{j,r} + H_{i,j}, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\}.$$

Άρα,

$$\sum_{i=r+1}^{n} c_i H'_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} -\frac{c_i}{H_{r,r}} H_{i,r} H_{j,r} + \sum_{i=r+1}^{n} c_i H_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$\sum_{i=r+1}^{n} -\frac{c_i}{H_{r,r}} H_{i,r} H_{r,j} + \sum_{i=r+1}^{n} c_i H_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$\left(\sum_{i=r+1}^{n} -\frac{c_i}{H_{r,r}} H_{i,r} \right) H_{r,j} + \sum_{i=r+1}^{n} c_i H_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$b_r H_{r,j} + \sum_{i=r+1}^{n} c_i H_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$\sum_{i=r}^{n} c'_i H_{i,j} = 0, \ \forall j \in \{r+1, ..., n\} \iff$$

$$c_i' = 0, \ \forall i \in \{r, ..., n\},$$

όπου $c_i' = c_i$ για $i = r+1, ..., n$ και $c_r' = b_r$ και η τελευταία ισοδυναμία προκύπτει από την επαγωγική υπόθεση, αφού οι γραμμές του $(H_{i,j})_{i,j}$, $j = r, ..., n$, είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Επομένως, ο $(H'_{i,j}(0))_{i,j}$ είναι αντιστρέψιμος και άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις της επαγωγής. □

Πρόταση 2.1 (Μη στάσιμη φάση). *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞ και $p \in \Omega$ με $\nabla\phi(p) \neq 0$. Έστω επίσης $a \in C_0^\infty$ με φορέα σε αρκετά μικρή περιοχή του p.*
Τότε

$$\forall N \ \exists C_N \ \text{ώστε} \ |I(\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N}, \text{για} \ \lambda > 0,$$

όπου το C_N, εκτός από το N, εξαρτάται και από φράγματα των παραγώγων των a και ϕ τάξεως μέχρι N και N+1 αντίστοιχα, και από ένα κάτω φράγμα του $|\nabla\phi(p)|$.

Απόδειξη. Η ϕ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 2.1 (straightening) άρα υπάρχουν $U \subseteq \mathbb{R}^n$ περιοχή του 0, $V \subseteq \Omega$ περιοχή του p και $G : U \to V, C^\infty$ αμφιδιαφόριση με $G(0) = p$ και

$$\phi(G(\tilde{x})) = \phi(p) + \tilde{x}_n, \tilde{x} \in U.$$

Έστω $\tilde{\phi} = \phi \circ G$, δηλαδή $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(p) + \tilde{x}_n$, $\tilde{x} \in U$.
Έστω, επίσης, $a \in C_0^\infty$ με φορέα αρκετά μικρό ώστε $supp(a) \subseteq V$ με $p \in \operatorname{supp}(a)$. Τότε, με αλλαγή μεταβλητής $x = G(\tilde{x})$, έχουμε

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi(x)} a(x) dx = \int_{\operatorname{supp}(a)(\subseteq V)} e^{-\pi i \lambda \phi(x)} a(x) dx =$$

$$= \int_{\tilde{U}} e^{-\pi i \lambda \tilde{\phi}(\tilde{x})} a(G(\tilde{x})) |J_G(\tilde{x})| d\tilde{x} = \int_{\tilde{U}} e^{-\pi i \lambda \tilde{\phi}(\tilde{x})} b(\tilde{x}) d\tilde{x} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \tilde{\phi}(\tilde{x})} b(\tilde{x}) d\tilde{x},$$

όπου $\tilde{U} = G^{-1}(\operatorname{supp}(a)) \subseteq U$ και $b(\tilde{x}) = a(G(\tilde{x}))|J_G(\tilde{x})|$ είναι C_0^∞ με $\operatorname{supp}(b) \subseteq \tilde{U}$.
Οπότε έχουμε:

$$|I(\lambda)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \tilde{\phi}(\tilde{x})} b(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \phi(p)} e^{-\pi i \lambda \tilde{x}_n} b(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| =$$

$$\left| e^{-\pi i \lambda \phi(p)} \right| \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda \tilde{x} \cdot e_n} b(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \frac{\lambda}{2} \tilde{x} \cdot e_n} b(\tilde{x}) d\tilde{x} \right| = \left| \widehat{b}(\frac{\lambda}{2} e_n) \right|.$$

Επίσης, για $\xi \in \mathbb{R}^n$ έχουμε την αλγεβρική ταυτότητα:

$$\frac{1}{M_N}(1 + |\xi|)^N \leq \sum_{|a| \leq N} |\xi^a| \leq M_N (1 + |\xi|)^N, \tag{23}$$

για κάποιο M_N σταθερό που εξαρτάται απο το N.
Άρα πολλαπλασιάζοντας την αριστερή ανισότητα της (23) με $|\hat{b}(\xi)|$ έχουμε:

$$\frac{1}{M_N}|\widehat{b}(\xi)|(1+|\xi|)^N \leq \sum_{|a|\leq N} |\xi^a \widehat{b}(\xi)| \leq \sum_{|a|\leq N} \|\xi^a \widehat{b}(\xi)\|_\infty \leq$$
$$\leq \sum_{|a|\leq N} \left(\frac{1}{(2\pi)^{|a|}} \|\widehat{D^a b}(\xi)\|_\infty \right) = \sum_{|a|\leq N} \frac{C_a}{(2\pi)^{|a|}},$$

όπου $C_a = \|\widehat{D^a b}(\xi)\|_\infty < +\infty$, και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από Πρόταση 1.5. Άρα

$$|\widehat{b}(\xi)| \leq M_N \sum_{|a|\leq N} \frac{C_a}{(2\pi)^{|a|}} (1+|\xi|)^{-N} = C_N (1+|\xi|)^{-N},$$

όπου $C_N = M_N \sum_{|a|\leq N} \frac{C_a}{(2\pi)^{|a|}}$ που εξαρτάται προφανώς απ'το N αλλά και από φράγματα παραγώγων μέχρι τάξης N του $b(\tilde{x})$, δηλαδή του $a(G(\tilde{x}))$ και του $|J_G(\tilde{x})|$. Άρα παραγώγους μέχρι τάξης N του $a(x)$ και N+1 του $\phi(x)$.

Οπότε, τελικά, έχουμε:

$$|I(\lambda)| = \left|\widehat{b}(\frac{\lambda}{2}e_n)\right| \leq C_N \left(1 + |\frac{\lambda}{2}e_n|\right)^{-N} = C_N \left(1+\frac{\lambda}{2}\right)^{-N} \leq C_N \lambda^{-N}.$$

□

Τώρα, για να εξετάσουμε την περίπτωση μη-εκφυλισμένου κρίσιμου σημείου της συνάρτησης φάσης, θα χρειαστούμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 2.2. *Έστω T ένας $n\times n$ πραγματικός, συμμετρικός, αντιστρέψιμος πίνακας με υπογραφή $\sigma(=k_+ - k_-)$ και έστω $a \in C_0^\infty$ ή πιο γενικά στο $\mathcal{S}$. Επομένως, ορίζεται το*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i \lambda T x\cdot x} a(x)dx, \ \lambda > 0.$$

Τότε, για κάθε N, έχουμε

$$I(\lambda) = e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(a(0) + \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j} D_j a(0) + \mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)}) \right),$$

όπου τα D_j είναι συγκεκριμένοι ομογενείς διαφορικοί τελεστές τάξης $2j$, με σταθερούς συντελεστές, που εξαρτώνται μόνο από τον T, και η σταθερά του $\mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)})$ εξαρτάται μόνο από τον T και από φράγματα πεπερασμένων το πλήθος ημινορμών του a στο χώρο του Schwartz.

Απόδειξη. Έχουμε $G_{\lambda T}(x) = e^{-\pi i \lambda T x\cdot x}$ με $|G_{\lambda T}| = 1$, άρα ορίζει κατανομή $T_{G_{\lambda T}}$ και άρα $\widehat{T}_{G_{\lambda T}}(\phi) = T_{G_{\lambda T}}(\widehat{\phi})$.
Έστω τώρα $f = e^{-\pi i \frac{\sigma}{4}} |\det(\lambda T)|^{-\frac{1}{2}} G_{-(\lambda T)^{-1}}$. Τότε, από πρόταση 1.11, έχουμε

$$\widehat{T}_{G_{\lambda T}}(\phi) = T_{G_{\lambda T}}(\widehat{\phi}) = T_f(\phi).$$

Άρα, $\widehat{T}_{G_{\lambda T}} = T_f$.
Επίσης,
$$\widehat{\widehat{a}(-\xi)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{a}(-\xi) e^{-2\pi i x\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{a}(\xi) e^{2\pi i x\xi} d\xi = a(x),$$
όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Αντιστροφής.
Άρα,
$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda Tx\cdot x} a(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda Tx\cdot x} \widehat{\widehat{a}(-\xi)}(x) dx =$$
$$= T_{G_{\lambda T}}(\widehat{\widehat{a}(-\xi)}) = \widehat{T_{G_{\lambda T}}}(\widehat{a}(-\xi)) = T_f(\widehat{a}(-\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\widehat{a}(-\xi) d\xi =$$
$$= e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi} \widehat{a}(-\xi) d\xi =$$
$$= e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi} \widehat{a}(\xi) d\xi \tag{24}$$
Τώρα, από Θεώρημα Taylor για την e^z, έχουμε ότι για κάθε $R > 0$
$$e^z = \sum_{j=0}^{N} \frac{z^j}{j!} + \mathcal{O}(|z|^{N+1}),$$
ομοιόμορφα ως προς z με $|z| < R$.
Έστω $R > 1$. Τότε
$$e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!} + \mathcal{O}(|\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1}),$$
ομοιόμορφα ως προς λ και ξ με $|\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi| < R$.
Για $|\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi| \geq R > 1$, έχουμε
$$\left| e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi} - \sum_{j=0}^{N} \frac{(\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!} \right| \leq 1 + \sum_{j=0}^{N} \frac{|\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^j}{j!} \leq$$
$$\leq 1 + (N+1)|\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1} \leq |\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1} + (N+1)|\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1} =$$
$$= (N+2)|\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1} = C|\pi\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1},$$
με C ανεξάρτητο του ξ και λ.
Άρα γενικά έχουμε, ομοιόμορφα ως προς ξ και λ,
$$e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi} = \sum_{j=0}^{N} \frac{(\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!} + \mathcal{O}(|\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1}).$$
Τώρα, από Cauchy-Schwartz, $|T^{-1}\xi\cdot\xi| \leq M|\xi|^2$ για καποιο M σταθερό που εξαρτάται από τον T.
Άρα,
$$\frac{|T^{-1}\xi\cdot\xi|^{N+1}}{|\lambda|^{N+1}} \leq M\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}.$$

Οπότε

$$e^{\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi}=\sum_{j=0}^{N}\frac{(\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!}+\mathcal{O}\left(\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}\right).$$

Επομένως, η (24) γίνεται:

$$I(\lambda)=e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{(\pi i\lambda^{-1}T^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!}\right)d\xi+\mathcal{O}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{a}(\xi)|\frac{|\xi|^{2N+2}}{\lambda^{N+1}}d\xi\right).$$

Τώρα, από το Θεώρημα Αντιστροφής, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)e^{2\pi i0\xi}d\xi=a(0).$$

Επίσης,

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{a}(\xi)||\xi|^{2N+2}d\xi=C<+\infty,$$

όπου η C εξαρτάται από ημινόρμες του a στο χώρο του Schwartz.
Και τέλος, αν $T^{-1}=(t_{i,k})_{i,k=1}^n$, τότε $T^{-1}\xi\cdot\xi=\sum_{i,k=1}^n t_{i,k}\xi_i\xi_k$.
Επίσης, από το Διωνυμικό Θεώρημα,

$$(t_1x_1+t_2x_2+...+t_nx_n)^j=\sum_{b_1+...+b_n=j}\binom{j}{b_1,...,b_n}(t_1x_1)^{b_1}\cdots(t_nx_n)^{b_n}.$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)\frac{(\pi iT^{-1}\xi\cdot\xi)^j}{j!}d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)\frac{(\pi i)^j}{j!}\left(\sum_{i,k=1}^{n}t_{i,k}\xi_i\xi_k\right)^j d\xi=$$

$$=\sum_{\sum b_{i,k}=j}\theta_{j,b_{i,k}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)\prod_{i,k=1}^{n}(\xi_i\xi_k)^{b_{i,k}}d\xi=\sum_{|b|=2j}\theta_{j,b}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{a}(\xi)\xi^b d\xi=$$

$$\sum_{|b|=2j}\widetilde{\theta}_{j,b}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{D^ba}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\left(\sum_{|b|=2j}\widetilde{\theta}_{j,b}D^ba\right)}(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{D_ja}(\xi)d\xi=$$

$$=\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{D_ja}(\xi)e^{2\pi i0\xi}d\xi=D_ja(0),$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Αντιστροφής και

$$D_ja=\sum_{|b|=2j}\widetilde{\theta}_{j,b}D^ba,$$

με $\widetilde{\theta}_{j,b}$ εξαρτώνται από τον T και το j. Δηλαδή συνολικά το D_ja εξαρτάται μόνο από τον T και το j.
Άρα, τελικά,

$$I(\lambda)=e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}|\det T|^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}}\left(a(0)+\sum_{j=1}^{N}\lambda^{-j}D_ja(0)+\mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)})\right).$$

□

Πρόταση 2.3. *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞ και $p \in \Omega$ με $\nabla\phi(p) = 0$ και $H_\phi(p)$ αντιστρέψιμος. Έστω, επίσης, $\sigma = k_+ - k_-$ η υπογραφή του $H_\phi(p)$ και $\Delta = 2^{-n}|\det H_\phi(p)|$. Έστω $a \in C_0^\infty$ με φορέα σε αρκετά μικρή περιοχή του p. Τότε, για κάθε N,*

$$I(\lambda) = e^{-\pi i\lambda\phi(p)} e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(a(p) + \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j} D_j a(p) + \mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)}) \right),$$

όπου D_j είναι συγκεκριμένοι διαφορικοί τελεστές τάξης $\leq 2j$ με συντελεστές που εξαρτώνται από τη ϕ, και η σταθερά του $\mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)})$ εξαρτάται από τη ϕ και από φράγματα πεπερασμένων το πλήθος παραγώγων του a.

Απόδειξη. Έστω

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

διαγώνιος πίνακας με στοιχεία ± 1 και υπογραφή σ.
Η ϕ ικανοποιεί τις υποθέσεις του 2.4 (Λήμμα Morse) , άρα υπάρχουν περιοχές U του 0 και V του p και $G : U \to V$, C^∞ αμφιδιαφόριση με $G(0) = p$ και

$$(\phi \circ G)(x) = \phi(p) + \sum_{j=1}^{k_+} x_j^2 - \sum_{j=k_++1}^{n} x_j^2 = \phi(p) + Tx \cdot x.$$

Έστω a τέτοιο ώστε $\operatorname{supp}(a) \subseteq V$. Τότε, με αλλαγή μεταβλητής $x = G(y)$, έχουμε

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda\phi(x)} a(x)dx = \int_V e^{-\pi i\lambda\phi(x)} a(x)dx =$$

$$= \int_V e^{-\pi i\lambda(\phi\circ G)(y)} a(G(y))|J_G(y)|dy = \int_V e^{-\pi i\lambda(\phi(p)+Tx\cdot x)} a(G(y))|J_G(y)|dy =$$

$$= e^{-\pi i\lambda\phi(p)} \int_V e^{-\pi i\lambda Tx\cdot x} a(G(y))|J_G(y)|dy. \tag{25}$$

Έχουμε

$$(\phi \circ G)(y) = \phi(p) + Ty \cdot y = y_1^2 + ... + y_{k_+}^2 - y_{k_++1}^2 - ... - y_n^2 + \phi(p).$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2(\phi \circ G)}{\partial y_i \partial y_j}(y) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 2, & i = j \leq k_+ \\ -2, & i = j > k_+ \end{cases}.$$

Οπότε, $|\det H_{\phi\circ G}(0)| = 2^n$. Επίσης, από Λήμμα 2.2, έχουμε

$$|J_G(0)| = |\det H_\phi(p)|^{-\frac{1}{2}}|\det(H_{\phi\circ G}(0))|^{-\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{n}{2}}|\det H_\phi(p)|^{-\frac{1}{2}} = \Delta^{-\frac{1}{2}}.$$

Έστω $b(y) = a(G(y))|J_G(y)|$. Τότε, από Πρόταση 2.2 και την (25), για κάθε N έχουμε:

$$I(\lambda) = e^{-\pi i\lambda\phi(p)} \int_V e^{-\pi i\lambda Tx\cdot x} b(y)dy =$$

$$= e^{-\pi i\lambda\phi(p)} e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} |\det T|^{-\frac{1}{2}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(b(0) + \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j} D_j b(0) + \mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)}) \right) =$$

$$= e^{-\pi i\lambda\phi(p)} e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \left(b(0) + \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j} D_j b(0) + \mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)}) \right),$$

όπου τα D_j είναι συγκεκριμένοι διαφορικοί τελεστές τάξης $2j$ που εξαρτώνται από το T και η σταθερά του $\mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)})$ εξαρτάται απ'τον T και ημινόρμες του a στο χώρο του Schwartz.
Παρατηρούμε ότι $b(0) = a(p)|J_G(0)| = \Delta^{-\frac{1}{2}} a(p)$, άρα

$$I(\lambda) = e^{-\pi i\lambda\phi(p)} e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}} \lambda^{-\frac{n}{2}} \Delta^{-\frac{1}{2}} \left(a(p) + \sum_{j=1}^{N} \lambda^{-j} \Delta^{\frac{1}{2}} D_j b(0) + \mathcal{O}(\lambda^{-(N+1)}) \right).$$

Επίσης, εφόσον τα D_j είναι διαφορικοί τελεστές και $b(y) = a(G(y))|J_G(y)|$, από τον κανόνα γινομένου και αλυσίδας, κάθε παράγωγος του b στο 0 τάξης $2j$ εκφράζεται σαν γραμμικός συνδυασμός παραγώγων του a στο $G(0) = p$ τάξης $\leq 2j$ με συντελεστές που εξαρτώνται απ'την G (συγκεκριμένα, παραγώγους του $|J_G(y)|$). Δηλαδή, οι όροι $\Delta^{\frac{1}{2}} D_j b(0) = 2^{-\frac{n}{2}} |\det H_\phi(p)|^{\frac{1}{2}} D_j b(0)$ εκφράζονται σαν $\widetilde{D_j} a(p)$, όπου $\widetilde{D_j}$ είναι διαφορικοί τελεστές τάξης $\leq 2j$ με συντελεστές που εξαρτώνται απ'την G και την ϕ, δηλαδή απ'την ϕ μόνο.

□

Στην πράξη πολλές φορές, αντί για ασυμπτωτικά αναπτύγματα, χρειαζόμαστε απλά εκτιμήσεις για το $I(\lambda)$ και τις παραγώγους του. Προφανώς, απ'την πρόταση 2.3 (π.χ. για $N = 0$) προκύπτει ότι $|I(\lambda)| \lesssim \lambda^{-\frac{n}{2}}$.

Θα εξετάσουμε τώρα εκτιμήσεις για παραγώγους του $I(\lambda)$.

Λήμμα 2.5. *Έστω $\{\phi_i\}_{i=1}^M$ πραγματικές συναρτήσεις C^∞ με $\phi_i(p) = 0$ και $\nabla\phi_i(p) = 0$. Έστω $\Phi = \prod_{i=1}^M \phi_i$. Τότε όλες οι μερικές παράγωγοι της Φ τάξης $< 2M$ μηδενίζονται στο p. Δηλαδή, $D^a\Phi(p) = 0$ για $|a| < 2M$.*

Απόδειξη. Έστω $a = (a_1, ..., a_n)$ πολυδείκτης με $|a| < 2M$. Τότε, από κανόνα γινομένου, έχουμε

$$D^a\Phi(x) = D^a \left(\prod_{i=1}^M \phi_i(x) \right) = \sum_{\beta : \sum_{i=1}^M \beta_i = a} C_\beta \prod_{i=1}^M D^{\beta_i}\phi_i(x)$$

και, αφού $|a| < 2M$, πρέπει τουλάχιστον ένα από τα β_i να είναι < 2 (γιατί αν όλα ήταν ≥ 2 θα είχαμε $a = \sum_{i=1}^{M} \beta_i \geq 2M$). Άρα κάποιο β_i θα είναι 0 ή 1. Δηλαδή $D^{\beta_i}\phi_i(p) = \phi_i(p)$ ή $\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(p) = 0$. Οπότε $\prod_{i=1}^{M} D^{\beta_i}\phi_i(x) = 0$ για κάθε $\beta : \sum_{i=1}^{M} \beta_i = a$. Άρα $D^a\Phi(p) = 0$ για $|a| < 2M$. □

Πρόταση 2.4. *Έστω ανοικτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$, C^∞ και $p \in \Omega$.*

i. Έστω $\nabla\phi(p) \neq 0$. Τότε, για $a \in C_0^\infty$ με φορέα σε αρκετά μικρή περιοχή του p, έχουμε

$$\left| \frac{d^k I(\lambda)}{d\lambda^k} \right| \leq C_{k,N}\lambda^{-N} \quad \text{για κάθε } N.$$

ii. Έστω $\nabla\phi(p) = 0$ και $H_\phi(p)$ αντιστρέψιμος. Τότε, για $a \in C_0^\infty$ με φορέα σε αρκετά μικρή περιοχή του p, έχουμε

$$\left| \frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\pi i\lambda\phi(p)} I(\lambda)) \right| \leq C_k \lambda^{-(\frac{n}{2}+k)}.$$

Απόδειξη. i. Έχουμε $I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda\phi(x)}a(x)dx$, άρα

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = \lim_{h\to 0}\frac{I(\lambda+h) - I(\lambda)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\pi i(\lambda+h)\phi(x)} - e^{-\pi i\lambda\phi(x)}}{h}a(x)dx =$$

$$= \lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda\phi(x)}\frac{e^{-\pi ih\phi(x)} - 1}{h}a(x)dx. \tag{26}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, h)$ ώστε

$$\frac{e^{-\pi ih\phi(x)} - 1}{h} = \frac{cos(\pi h\phi(x)) - 1}{h} - i\frac{sin(\pi h\phi(x))}{h} =$$

$$= -\pi\phi(x)sin(\pi\xi_1\phi(x)) - i\pi\phi(x)cos(\pi\xi_2\phi(x)).$$

Άρα,

$$\left| e^{-\pi i\lambda\phi(x)}\frac{e^{-\pi ih\phi(x)} - 1}{h}a(x) \right| = |\pi\phi(x)sin(\pi\xi_1\phi(x))a(x) + i\pi\phi(x)cos(\pi\xi_2\phi(x))a(x)|$$

$$\leq 2\pi|\phi(x)a(x)| \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{αφού } a \in C_0^\infty,\ \phi \in C^\infty.$$

Οπότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, έχουμε εναλλαγή ορίου-ολοκληρώματος, άρα η (26) γίνεται

$$\frac{dI}{d\lambda}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda\phi(x)}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\pi ih\phi(x)} - 1}{h}a(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{d}{d\lambda}(e^{-\pi i\lambda\phi(x)})a(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} -\pi i\phi(x)e^{-\pi i\lambda\phi(x)}a(x)dx.$$

Άρα, επαγωγικά, έχουμε

$$\frac{d^kI(\lambda)}{d\lambda^k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{-\pi i\lambda\phi(x)})a(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\pi i\phi(x))^k e^{-\pi i\lambda\phi(x)}a(x)dx.$$

Επομένως, για $a \in C_0^\infty$ με φορέα όπως την πρόταση 2.1, έχουμε

$$\left|\frac{d^kI(\lambda)}{d\lambda^k}\right| = \pi^k \left|\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)^k a(x)e^{-\pi i\lambda\phi(x)}dx\right| = \pi^k \left|\int_{\mathbb{R}^n} b(x)e^{-\pi i\lambda\phi(x)}dx\right| =$$

$$= \pi^k|I_b(\lambda)| \overset{2.1}{\leq} C_{k,N}\lambda^{-N} \quad \forall N,$$

όπου $b(x) = \phi(x)^k a(x) \in C_0^\infty$ με $\text{supp}(b) \subseteq \text{supp}(a)$.

ii. Έχουμε

$$e^{\pi i\lambda\phi(p)}I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda(\phi(x)-\phi(p))}a(x)dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi i\lambda\psi(x)}a(x)dx = I'(\lambda), \quad \text{όπου} \quad \psi(x) = \phi(x) - \phi(p).$$

Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης (όπως το (i)),

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\pi i\lambda\phi(p)}I(\lambda)) = \frac{d^kI'(\lambda)}{d\lambda^k} = (-\pi i)^k \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)^k e^{-\pi i\lambda\psi(x)}a(x)dx =$$

$$= (-\pi i)^k \int_{\mathbb{R}^n} b(x)e^{-\pi i\lambda\psi(x)}dx,$$

όπου $b(x) = \psi(x)^k a(x) = (\phi(x) - \phi(p))^k a(x) = a(x)\prod_{i=1}^k(\phi(x) - \phi(p))$.

Άρα, για $\phi_i(x) = \psi(x) = \phi(x) - \phi(p)\ \ \forall i$, έχουμε $\phi_i(p) = 0,\ \nabla\phi_i(p) = \nabla\phi(p) = 0$ και οι μερικές παράγωγοι του b είναι γραμμικοί συνδυασμοί παραγώγων του a και της $\Phi = \prod_{i=1}^M \phi_i$. Οπότε από το παραπάνω Λήμμα, αφού όλες οι μερικές παράγωγοι της Φ τάξης $< 2k$ μηδενίζονται στο p, και οι μερικές παράγωγοι του b τάξης $< 2k$ μηδενίζονται στο p. Επίσης, για $a \in C_0^\infty$ με φορέα όπως στην πρόταση 2.3 έχουμε ότι $b \in C_0^\infty$ με $\text{supp}(b) \subseteq \text{supp}(a)$.

Επομένως, για $N = k - 1$ στην πρόταση 2.3, έχουμε

$$\left|\frac{d^k}{d\lambda^k}(e^{\pi i\lambda\phi(p)}I(\lambda))\right| = \left|(-\pi i)^k \int_{\mathbb{R}^n} b(x)e^{-\pi i\lambda\psi(x)}dx\right| =$$

$$= \left|(-\pi i)^k e^{-\pi i\lambda\psi(p)}e^{-\pi i\frac{\sigma}{4}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}}\left(b(p) + \sum_{j=1}^{k-1}\lambda^{-j}D_jb(p) + \mathcal{O}(\lambda^{-(k-1+1)})\right)\right| =$$

$$= \pi^k|\Delta|^{-\frac{1}{2}}\lambda^{-\frac{n}{2}}\mathcal{O}(\lambda^{-k}) \leq C_k\lambda^{-(\frac{n}{2}+k)}.$$

□

Λήμμα 2.6. *Έστω $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^∞ και M, $k-$διάστατη υποπολλαπλότητα, $p \in M$ και $F : U \to M$ η αντίστροφη τοπικών συντεταγμένων της M κοντά στο p. Τότε η $\phi \circ F$ έχει κρίσιμο σημείο στο $F^{-1}(p)$ αν και μόνο αν το $\nabla\phi(p)$ είναι κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο του M στο p.*

Απόδειξη. Έχουμε $\phi \circ F : U \to \mathbb{R}$, με $\phi \circ F(y) = \phi(F_1(y_1, ..., y_n), ..., F_n(y_1, ..., y_n))$. Οπότε:

$$\nabla(\phi \circ F)(F^{-1}(p)) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial y_i}(\phi \circ F)(F^{-1}(p)) = 0, \ \forall i = 1, ..., n$$

$$\iff \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(p)\frac{\partial F_j}{\partial y_i}(F^{-1}(p)) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$\iff \nabla\phi(p) \cdot \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_i}(F^{-1}(p)), ..., \frac{\partial F_n}{\partial y_i}(F^{-1}(p))\right) = 0, \quad \forall i = 1, ..., n$$

$$\iff \nabla\phi(p) \ \text{ κάθετο στον εφαπτόμενο χώρο του } M \text{ στο } p$$

□

Εφαρμογή. Θα υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier του επιφανειακού μέτρου σ στη σφαίρα $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$.
Αρχικά, για τον ορισμό του σ σε ένα *Borel* σύνολο $E \subseteq S^{n-1}$, θεωρούμε για $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ την συνεχή αμφιδιαφόριση $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0, +\infty) \times S^{n-1}$, με $\Phi(x) = (r, x')$, όπου (r, x') οι πολικές συντεταγμένες του x, δηλαδή $r = |x|, x' = \frac{x}{|x|}$.
Τότε $\Phi^{-1}(r, x') = rx'$ και έστω το μετρήσιμο σύνολο $E_1 = \Phi^{-1}((0, 1] \times E) =$
$= \{rx' : 0 < r \leq 1, x' \in E\}$.
Ορίζουμε $\sigma(E) = n \cdot m(E_1)$, όπου m το μέτρο Lebesgue του $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις.

1. Το μέτρο σ είναι αμετάβλητο ως προς στροφές.
   Δηλαδή για $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $TT^t = I$ και $E \subseteq S^{n-1}$ Borel, δείχνουμε ότι $\sigma(T(E)) = \sigma(E)$.
   Από τον ορισμό του σ έχουμε $\sigma(T(E)) = n \cdot m(\Phi^{-1}((0, 1) \times T(E))) = n \cdot m((T(E)_1) = n \cdot m(\{rx' : 0 < r \leq 1, x' \in T(E)\}) \overset{(*)}{=} n \cdot m(\{rx' : 0 < r \leq 1, x' \in E\}) = n \cdot m(E_1) = \sigma(E)$, όπου το $(*)$ ισχυεί αφού το μέτρο Lebesgue είναι αμετάβλητο ως προς στροφές.

2. Το $\widehat{\sigma}(\xi)$ είναι ακτινική συνάρτηση.
   Δηλαδή για T στροφή, δείχνουμε $\widehat{\sigma}(T(\xi)) = \widehat{\sigma}(\xi)$.
   Από παρατήρηση 1., έχουμε $\sigma = \sigma \circ T$, άρα $\widehat{\sigma}(\xi) = \widehat{\sigma \circ T}(\xi) \overset{(4)}{=} \widehat{\sigma}(T(\xi))$.

3. Το $\widehat{\sigma}$ είναι C^∞ και $D^a\widehat{\sigma} = ((\widehat{-2\pi ix)^a}\sigma)$ (Πρόταση 1.4).

4. Για $E \subseteq S^{n-1}$ Borel και $U \subseteq D(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ με τοπικές συντεταγμένες $F : U \to E$, όπου $F(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$ ή $F(x) = (x, -\sqrt{1 - |x|^2})$ έχουμε $\int_E d\sigma = \int_U \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}dx, \ x \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Από την παρατήρηση 2., λοιπόν, αρκεί να υπολογίσουμε το $\widehat{\sigma}(\lambda e_n)$, για $\lambda > 0$ και $e_n = (0, ..., 0, 1)$.
Τώρα, για να χειριστούμε τα ολοκληρώματα σε υποπολλαπλότητες (όπως η S^{n-1}) αντί για τον $\mathbb{R}^n$ θα δουλέψουμε με τοπικές συντεταγμένες.
Ορίζουμε τοπικές συντεταγμένες στη σφαίρα ως εξής:
$F_1 : D(0, \frac{1}{2})(\subseteq \mathbb{R}^{n-1}) \to S^{n-1}$ με $F_1(x) = (x, \sqrt{1-|x|^2})$,
$F_2 : D(0, \frac{1}{2})(\subseteq \mathbb{R}^{n-1}) \to S^{n-1}$ με $F_2(x) = (x, -\sqrt{1-|x|^2})$,
και οι υπόλοιπες $F_k : A_k(\subseteq \mathbb{R}^{n-1}) \to S^{n-1}$, με A_k ανοιχτά, απεικονίζονται σε σύνολα που η κλειστότητά τους δεν περιέχει τα $\pm e_n$.
Έστω $U_k := F_k(A_k) \subseteq S^{n-1}$, ανοιχτά στην S^{n-1}, και S^{n-1} συμπαγές, άρα υπάρχουν πεπερασμένα U_k που το καλύπτουν, έστω $k = 1, ..., m$. Έστω, επίσης, $\{q_k\}_{k=1}^m$ κατάλληλη διαμέριση της μονάδας που υπόκειται σ' αυτήν την κάλυψη από χάρτες της S^{n-1}. Δηλαδή, $q_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$, C^∞ με $0 \leq q_k \leq 1$, $\mathrm{supp}(q_k) \subseteq U_k$ και $\sum_{k=1}^m q_k = 1$, $\forall y \in S^{n-1}$. Επίσης, δίχως βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $q_1(y) = q_2(y')$, όπου y' το συμμετρικό του y στην S^{n-1} ως προς τον $\mathbb{R}^{n-1}$.
Ορίζουμε τωρα $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\phi(y) = e_n \cdot y = y_n$.
Τότε $\nabla\phi(y) = (0, ..., 0, 1) = e_n$ και είναι κάθετο στη σφαίρα στα $\pm e_n$ και μόνο. Άρα, από Λήμμα 2.6, οι $\phi \circ F_i$ έχουν κρίσιμο σημείο στα $F_i^{-1}(\pm e_n) = 0$ για $i = 1, 2$ και μόνο.
Οπότε, χρησιμοποιώντας την παρατήρηση 4., έχουμε

$$\widehat{\sigma}(\lambda e_n) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda e_n \cdot y} d\sigma(y) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda y_n} \sum_{k=1}^m q_k(y) d\sigma(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^m \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i \lambda y_n} q_k(y) d\sigma(y) =$$

$$= \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{-2\pi i \lambda \sqrt{1-|x|^2}} \frac{q_1(F_1(x))}{\sqrt{1-|x|^2}} dx + \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{2\pi i \lambda \sqrt{1-|x|^2}} \frac{q_2(F_2(x))}{\sqrt{1-|x|^2}} dx +$$

$$+ \sum_{k=3}^m \int_{A_k} e^{-2\pi i \lambda (\phi \circ F_k)(x)} a_k(x) dx =$$

$$= I_1(\lambda) + \overline{I_1(\lambda)} + \sum_{k=3}^m \int_{A_k} e^{-2\pi i \lambda \phi_k(x)} a_k(x) dx, \tag{27}$$

όπου $I_1(\lambda) = \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{-2\pi i \lambda \sqrt{1-|x|^2}} \frac{q_1(F_1(x))}{\sqrt{1-|x|^2}} dx$, $a_k(x) \in C_0^\infty$, και οι συναρτήσεις φάσης ϕ_k, $k \geq 3$ δεν έχουν κρίσιμα σημεία στο φορέα των $a_k(\subseteq A_k)$. Έστω, επίσης, $\phi_0(x) := 2\sqrt{1-|x|^2}$. Έχουμε

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial x_i}(x) = -\frac{2x_i}{\sqrt{1-|x|^2}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_j \partial x_i}(x) = -\frac{4x_i x_j}{1-|x|^2}, \ i \neq j$$

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_i^2}(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-|x|^2}} + \frac{2x_i^2}{\sqrt{1-|x|^2}}.$$

Οπότε, $\nabla\phi_0(0) = 0$ και $H_{\phi_0}(0) = -2I$, άρα αντιστρέψιμος και $\phi_0(0) = 2$.

Άρα, από Πρόταση 2.4 για $y(\lambda) = \sum_{k=3}^m \int_{A_k} e^{-2\pi i\lambda\phi_k(x)} a_k(x)dx = \sum_{k=3}^m I_k(\lambda)$, έχουμε

$$\widehat{\sigma}(\lambda e_n) = 2Re(I_1(\lambda)) + y(\lambda),$$

με $\left|\frac{d^j y}{d\lambda^j}(\lambda)\right| \leq C_{j,N}\lambda^{-N}, \ \forall N$ και $\left|\frac{d^j}{d\lambda^j}(e^{2\pi i\lambda}I_1(\lambda))\right| \leq C_j\lambda^{-(\frac{n-1}{2}+j)}$.

Επίσης, αφού το σ είναι πραγματικό και άρτιο πρέπει και το $\widehat{\sigma}$ να είναι πραγματικό άρα $y(\lambda) = Re(y(\lambda))$, και άρα

$$\widehat{\sigma}(\lambda e_n) = Re(I_1(\lambda) + y(\lambda)) = Re((\widetilde{I}(\lambda) + \widetilde{y}(\lambda))e^{-2\pi i\lambda})$$
$$= Re(I(\lambda)e^{-2\pi i\lambda}),$$

όπου $\widetilde{I}(\lambda) = e^{2\pi i\lambda}I_1(\lambda)$, άρα $\left|\frac{d^j\widetilde{I}}{d\lambda^j}(\lambda)\right| \leq C_j\lambda^{-(\frac{n-1}{2}+j)}$,
$\widetilde{y}(\lambda) = e^{2\pi i\lambda}y(\lambda)$, άρα από κανόνα γινομένου, πάλι ισχύει $\left|\frac{d^j\widetilde{y}}{d\lambda^j}(\lambda)\right| \leq C_{j,N}\lambda^{-N}, \ \forall N$, και $I(\lambda) = \widetilde{I}(\lambda) + \widetilde{y}(\lambda)$, όπου τελικά:

$$\left|\frac{d^j I}{d\lambda^j}(\lambda)\right| \leq C_j\lambda^{-(\frac{n-1}{2}+j)}.$$

Επομένως, εφόσον $\widehat{\sigma}$ ακτινική συνάρτηση, καταλήγουμε στο εξής:

Πόρισμα 2.1. *Η συνάρτηση $\widehat{\sigma}$ είναι C^∞ και ικανοποιεί:*

$$\widehat{\sigma}(x) = Re(I(|x|)e^{-2\pi i|x|}), \tag{28}$$

όπου για μεγάλο λ,

$$\left|\frac{d^j I}{d\lambda^j}(\lambda)\right| \leq C_j\lambda^{-(\frac{n-1}{2}+j)}. \tag{29}$$

Επιπλέον, στον όρο $I_1(\lambda) = \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{-\pi i\lambda\phi_0(x)}a(x)dx$ της (27) με $\phi_0(x) = 2\sqrt{1-|x|^2}$ και $a(x) = \frac{q_1(F_1(x))}{\sqrt{1-|x|^2}}, \ C^\infty$ εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.3 στο κρίσιμο σημείο 0 της ϕ_0.
Έχουμε $\phi_0(0) = 2, \ a(0) = q_1(e_n) = 1, \ \det H_{\phi_0}(0) = (-2)^{n-1}$, άρα
$\Delta = 2^{-(n-1)}|\det H_{\phi_0}(0)| = 1$ και $\sigma = \mathrm{sgn}(H_{\phi_0}(0)) = -(n-1)$.
Οπότε, από Πρόταση 2.3 για $N = 0$, έχουμε:

$$I_1(\lambda) = \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{-\pi i\lambda\phi_0(x)}a(x)dx = e^{-2\pi i\lambda}e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)}\lambda^{-\frac{n-1}{2}}(a(0) + \mathcal{O}(\lambda^{-1})) =$$

$$= e^{-2\pi i\lambda}e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)}\lambda^{-\frac{n-1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{n-1}{2}-1}) =$$

$$= e^{-2\pi i\lambda} e^{\frac{\pi i}{4}(n-1)} \lambda^{-\frac{n-1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}).$$

Άρα,

$$\overline{I_1(\lambda)} = e^{2\pi i\lambda} e^{-\frac{\pi i}{4}(n-1)} \lambda^{-\frac{n-1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}) =$$
$$= e^{\pi i(2\lambda - \frac{n-1}{4})} \lambda^{-\frac{n-1}{2}} + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}).$$

Οπότε τελικά,

$$\widehat{\sigma}(\lambda e_n) = 2Re(I_1(\lambda)) + y(\lambda) =$$
$$= 2\lambda^{-\frac{n-1}{2}} \cos(2\pi(\lambda - \frac{n-1}{8})) + \mathcal{O}(\lambda^{-\frac{n+1}{2}}) + y(\lambda),$$

όπου, όπως πριν, από Πρόταση 2.4, $y(\lambda) = \mathcal{O}(\lambda^{-N}),\ \forall N$.
Επομένως, εφόσον $\widehat{\sigma}$ ακτινική, καταλήγουμε στο εξής:

Πόρισμα 2.2. *Για μεγάλα x έχουμε:*

$$\widehat{\sigma}(x) = 2|x|^{-\frac{n-1}{2}} \cos(2\pi(|x| - \frac{n-1}{8})) + \mathcal{O}(|x|^{-\frac{n+1}{2}}).$$

3 Πρόβλημα Περιορισμού

Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{C}$. Θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier

$$\widehat{fd\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} f(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\sigma(x). \tag{30}$$

Έστω $f \in C^\infty$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο στάσιμης φάσης όπως το Πόρισμα 2.1 για να εκτιμήσουμε το $\widehat{fd\sigma}(\xi)$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq C||f||_{C^2}(1+|\xi|)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad \text{όπου } ||f||_{C^2} = \sum_{0\leq|a|\leq 2} ||D^a f||_{L^\infty}.$$

Αρχικά, παρατηρούμε ότι το $fd\sigma$ δεν είναι αμετάβλητο στις στροφές γιατί η f εν γένει δεν είναι. Ωστόσο, δίχως βλάβη της γενικότητας, αρκεί να εκτιμήσουμε το $\widehat{fd\sigma}(\lambda e_n)$, αφού το τυχαίο ξ μπορούμε να το φέρουμε στην κατεύθυνση του e_n, αλλάζοντας κατάλληλα το σύστημα συντεταγμένων.
Οπότε, για $F_k : A_k(\subseteq \mathbb{R}^{n-1}) \to S^{n-1}$ και $q_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ όπως στην εφαρμογή, έχουμε

$$\widehat{fd\sigma}(\lambda e_n) = \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{-2\pi i\lambda\sqrt{1-|x|^2}} f(F_1(x)) \frac{q_1(F_1(x))}{\sqrt{1-|x|^2}} dx +$$

$$+ \int_{D(0,\frac{1}{2})} e^{2\pi i\lambda\sqrt{1-|x|^2}} f(F_2(x)) \frac{q_2(F_2(x))}{\sqrt{1-|x|^2}} dx + \sum_{k=3}^{m} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-2\pi i\lambda\phi_k(x)} a_k(x) dx =$$

$$= I_1(\lambda) + I_2(\lambda) + y(\lambda), \tag{31}$$

όπου $a_k \in C^\infty$ και οι $\phi_k,\ k = 3, ..., m$ δεν έχουν κρίσιμα σημεία στο φορέα των a_k.
Άρα από Πρόταση 2.1, για μεγάλα λ, $|y(\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N},\ \forall N$.
Επίσης, για $a_1(x) = f(F_1(x))\frac{q_1(F_1(x))}{\sqrt{1-|x|^2}}$ και $\phi_1(x) = 2\sqrt{1-|x|^2}$, έχουμε $\phi_1(0) = 2,\ \nabla\phi_1(0) = 0$ και $H_{\phi_1}(0) = -2I$, αντιστρέψιμος. Άρα, από Πρόταση 2.3, για μεγάλα λ,

$$|I_1(\lambda)| \leq \lambda^{-\frac{n-1}{2}}(|a_1(0)| + C_1\lambda^{-1}),$$

όπου, C_1 εξαρτάται από φράγματα παραγώγων μέχρι τάξης $2 \cdot 1 = 2$ του a_1 άρα και της f. Και για $\lambda \geq 1$ πχ, έχουμε

$$|I_1(\lambda)| \leq C||f||_{C^2}\lambda^{-\frac{n-1}{2}},\ \lambda \geq 1.$$

Όμοια, με $\phi_2(x) = -2\sqrt{1-|x|^2}$, έχουμε

$$|I_2(\lambda)| \leq C||f||_{C^2}\lambda^{-\frac{n-1}{2}},\ \lambda \geq 1.$$

Και για $\lambda \geq 1$ έχουμε $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{1+\lambda}$, άρα $\lambda^{-\frac{n-1}{2}} \leq 2^{\frac{n-1}{2}}(1+\lambda)^{-\frac{n-1}{2}}$.
Οπότε, τελικά,

$$|\widehat{fd\sigma}(\lambda e_n)| \leq C||f||_{C^2}(1+\lambda)^{-\frac{n-1}{2}},\ \lambda \geq 1.$$

Επίσης, γενικά ισχύει

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq \int_{S^{n-1}} |f(x)| d\sigma(x) \leq \sigma(S^{n-1}) ||f||_\infty \leq C||f||_{C^2}.$$

Άρα, αφού για $\lambda \leq 1$ συνεπάγεται $1 \leq \frac{2}{1+\lambda}$, έχουμε

$$|\widehat{fd\sigma}(\lambda e_n)| \leq C||f||_{C^2} \leq C||f||_{C^2}(1+\lambda)^{-\frac{n-1}{2}}, \ \lambda \leq 1.$$

Επομένως, λοιπόν, έχουμε

$$|\widehat{fd\sigma}(\lambda e_n)| \leq C||f||_{C^2}(1+\lambda)^{-\frac{n-1}{2}}, \ \forall \lambda > 0.$$

Από την άλλη, αν η f είναι απλά φραγμένη, δεν ισχύει απαραίτητα η παραπάνω εκτίμηση. Συγκεκριμένα, θα φτιάξουμε f συνεχή ώστε, για κάθε $\epsilon > 0$, να μην ισχύει

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-\epsilon}.$$

Αρχικά, ορίζουμε $f_v(x) = e^{2\pi i v \cdot x}$, για $v \in \mathbb{R}^n$ και $x \in S^{n-1}$.
Τότε, για $\xi = v$, έχουμε

$$|\widehat{f_v d\sigma}(\xi)| = |\widehat{f_v d\sigma}(v)| = \left| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i v \cdot x} e^{-2\pi i v \cdot x} d\sigma(x) \right| = \sigma(S^{n-1}) =: C_0$$

και για $\xi \neq v$, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 2.2, έχουμε

$$|\widehat{f_v d\sigma}(\xi)| = \left| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i v \cdot x} e^{-2\pi i \xi \cdot x} d\sigma(x) \right| = \left| \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i x \cdot (\xi - v)} d\sigma(x) \right| = |\widehat{\sigma}(\xi - v)| \leq$$

$$\leq \frac{C}{|\xi - v|^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Έστω, τώρα,

$$f(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} f_{v_j}(x),$$

όπου $|v_j| \to \infty$ κατάλληλα γρήγορα.
Τότε, αφού οι f_{v_j} είναι συνεχείς, και από κριτήριο Weierstrass η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα, έχουμε ότι f συνεχής. Επίσης, για $j \in \mathbb{N}$, από τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$|\widehat{fd\sigma}(v_j)| = \left| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \widehat{f_{v_m} d\sigma}(v_j) \right| \geq$$

$$\geq \frac{C_0}{j^2} - \sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m^2} \frac{C}{|v_j - v_m|^{\frac{n-1}{2}}} - \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{C}{|v_j - v_m|^{\frac{n-1}{2}}}. \tag{32}$$

Μπορούμε ακόμη να δείξουμε ότι υπάρχει $\lambda > 1$ ώστε αν $v_j = \lambda^j$, τότε

$$\sum_{m=1}^{j-1} \frac{1}{m^2} \frac{C}{|v_j - v_m|^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C}{4j^2} \quad \text{και} \quad \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{C}{|v_j - v_m|^{\frac{n-1}{2}}} \leq \frac{C}{4j^2} \quad \forall j \geq 1.$$

Οπότε από την (32) παίρνουμε ότι

$$|\widehat{fd\sigma}(v_j)| \geq \frac{C_0}{j^2} - \frac{C}{2j^2} = \frac{C'}{2j^2}.$$

Άρα, αν υπάρχει $\epsilon > 0$ και σταθερά C με $|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\epsilon}, \quad \forall \xi$, τότε για $\xi = v_j$,

$$\frac{C'}{2j^2} \leq |\widehat{fd\sigma}(v_j)| \leq \frac{C}{(1 + |v_j|)^{\epsilon}}$$

$$\Longleftrightarrow 0 < M \leq \frac{j^2}{(1 + |v_j|)^{\epsilon}} \xrightarrow[j \to \infty]{} 0 \quad \text{γιατί } |v_j| = \lambda^j, \text{ για } \lambda > 1.$$

Άτοπο.
Οπότε δεν ισχύει $|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{-\epsilon}$, για κανένα $\epsilon > 0$.

Το παρακάτω είναι ένα παλιό ανοιχτό πρόβλημα της περιοχής αυτής.

Εικασία Περιορισμού (Stein). *Αποδείξτε ότι αν $f \in L^\infty(S^{n-1})$, τότε*

$$||\widehat{fd\sigma}||_q \leq C_q ||f||_\infty, \quad \text{για κάθε } q > \frac{2n}{n-1}. \tag{33}$$

Θα δείξουμε ότι το εύρος $q > \frac{2n}{n-1}$ είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Δηλαδή, δεν μπορεί να ισχύει η (33) για $q \leq \frac{2n}{n-1}$. Έστω f σταθερή, για παράδειγμα έστω $f = 1$. Τότε

$$\widehat{fd\sigma}(\xi) = \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} d\sigma = \widehat{\sigma}(\xi).$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\widehat{fd\sigma} = \widehat{\sigma} \in L^q \Longleftrightarrow q \cdot \frac{n-1}{2} > n \Longleftrightarrow q > \frac{2n}{n-1}.$$

Γενικά, ισχύει ότι $|\widehat{\sigma}(\xi)| \leq C$, (π.χ. για $C = \sigma(S^{n-1})$), άρα ολοκληρώσιμη σε οποιαδήποτε δύναμη q, όταν $|\xi| \leq 1$.
Επίσης, από Πόρισμα 2.2, για $|\xi| \geq 1$, έχουμε

$$\widehat{\sigma}(\xi) = 2|\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \cos(2\pi|\xi| - \frac{n-1}{8}) + \mathcal{O}(|\xi|^{-\frac{n+1}{2}}).$$

Δείχνουμε το ($\Longleftarrow$).
Έστω $|\xi| > 1$. Τότε

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \leq 2|\xi|^{-\frac{n-1}{2}} + C|\xi|^{-\frac{n+1}{2}} \leq (2 + C)|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Άρα, με αλλαγή μεταβλητών σε πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\int_{|\xi|>1} |\widehat{\sigma}(\xi)|^q d\xi \leq C \int_{|\xi|>1} |\xi|^{-\frac{n-1}{2}q} d\xi =$$

$$= C \int_{S^{n-1}} \int_1^{+\infty} \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}q}} r^{n-1} dr d\sigma(x) = C\sigma(S^{n-1}) \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{n-1}{2}q-n+1} dr < +\infty,$$

αφού $\frac{n-1}{2}q > n \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2}q - n + 1 > 1$.

Τώρα για το ($\Longrightarrow$), έστω $\widehat{\sigma} \in L^q$.
Από τριγωνική ανισότητα, έχουμε

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \geq \left| 2|\xi|^{-\frac{n-1}{2}} |\cos(2\pi|\xi| - \frac{n-1}{8})| - C|\xi|^{-\frac{n+1}{2}} \right| =$$

$$= 2|\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \left| |\cos(2\pi|\xi| - \frac{n-1}{8})| - C|\xi|^{-1} \right|.$$

Έστω $\cos(2\pi|\xi| - \frac{n-1}{8}) \geq \frac{1}{2}$ και $C|\xi|^{-1} < \frac{1}{4}$, δηλαδή $|\xi| > 4C$ και $\frac{n-1}{16\pi} - \frac{1}{6} + k \leq |\xi| \leq \frac{n-1}{16\pi} + \frac{1}{6} + k$.

Ειδικότερα, έστω ξ με $\frac{n-1}{16\pi} - \frac{1}{6} + k \leq |\xi| \leq \frac{n-1}{16\pi} + \frac{1}{6} + k$, για $4C < \frac{n-1}{16\pi} - \frac{1}{6} + k$, δηλαδή για $k \geq k_0$, όπου $k_0 = \left[4C + \frac{1}{6} - \frac{n-1}{16\pi}\right] + 1$.
Τότε

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \geq 2|\xi|^{-\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}|\xi|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Οπότε,

$$+\infty > ||\widehat{\sigma}||_q^q = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\sigma}(\xi)|^q d\xi \geq \sigma(S^{n-1})^q \int_1^{+\infty} |\widehat{\sigma}(r)|^q r^{n-1} dr \geq$$

$$\geq C \sum_{k=k_0}^{+\infty} \int_{\frac{n-1}{16\pi}-\frac{1}{6}+k}^{\frac{n-1}{16\pi}+\frac{1}{6}+k} |\widehat{\sigma}(r)|^q r^{n-1} dr \geq C \sum_{k=k_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^q \int_{\frac{n-1}{16\pi}-\frac{1}{6}+k}^{\frac{n-1}{16\pi}+\frac{1}{6}+k} r^{-\frac{n-1}{2}q+n-1} dr \geq$$

$$\overset{(*)}{\geq} C \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1}{2^q} \left(\frac{n-1}{16\pi} \pm \frac{1}{6} + k\right)^{-\frac{n-1}{2}q+n-1} \frac{2}{6} = C \sum_{k=k_0}^{+\infty} (a+k)^{-\frac{n-1}{2}q+n-1} \approx$$

$$\approx C \sum_{k=k_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{n-1}{2}q-n+1} < +\infty \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2}q - n + 1 > 1 \Longleftrightarrow \frac{n-1}{2}q > n,$$

όπου το $(*)$, ισχύει με $+$ αν ο εκθέτης $-\frac{n-1}{2}q + n - 1$ είναι μεγαλύτερος του 0, αλλιώς με $-$.
Το αντίστοιχο πρόβλημα για f στον L^2 λύθηκε γύρω στο '70.

Θεώρημα 3.1 (Tomas - Stein). *Αν $f \in L^2(S^{n-1})$, τότε*

$$||\widehat{fd\sigma}||_q \leq C_q ||f||_{L^2(S^{n-1})}, \quad \text{για κάθε } q \geq \frac{2n+2}{n-1}, \tag{34}$$

κι αυτό το εύρος των q είναι το καλύτερο δυνατό.

Παρατηρήσεις.

1. Οι υποθέσεις στις (33) και (34) για το q είναι της μορφής $q > q_0$ και $q \geq q_0$, γιατί αν ισχύουν για κάποιο q_1 τότε ισχύουν και για όλα τα q μεγαλύτερα του q_1.

   Απόδειξη. Αρχικά, έχουμε

   $$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \leq \int_{S^{n-1}} |f(x)|d\sigma(x) = ||f||_1.$$

   Άρα $||\widehat{fd\sigma}||_\infty \leq ||f||_1$.

   Για την (33): Έχουμε, ακόμη, $||f||_1 \leq \sigma(S^{n-1})||f||_\infty$.
   Άρα $||\widehat{fd\sigma}||_\infty \leq C||f||_\infty$.
   Έστω, επίσης, ότι ισχύει η (33) για κάποιο q_1. Δηλαδή, $||\widehat{fd\sigma}||_{q_1} \leq C_{q_1}||f||_\infty$.
   Τότε, αν ορίσουμε $T(f) = \widehat{fd\sigma}$, έχουμε

   $$T : L^\infty \to L^\infty \quad \text{και} \quad T : L^\infty \to L^{q_1}.$$

   Άρα, από Θεώρημα Riesz - Thorin, έχουμε $T : L^\infty \to L^q$, με $q_1 \leq q \leq \infty$.
   Για την (34): Από Cauchy - Schwarz έχουμε

   $$||f||_1 = \int_{S^{n-1}} 1 \cdot |f(x)|d\sigma(x) \leq ||f||_2 \cdot \sqrt{\sigma(S^{n-1})}.$$

   Άρα $||\widehat{fd\sigma}||_\infty \leq C||f||_2$, και αν για κάποιο q_1 ισχύει $||\widehat{fd\sigma}||_{q_1} \leq C_{q_1}||f||_2$, τότε

   $$T : L^2 \to L^\infty \quad \text{και} \quad T : L^2 \to L^{q_1}.$$

   Οπότε, πάλι από Θεώρημα Riesz - Thorin, έχουμε $T : L^2 \to L^q$, με $q_1 \leq q \leq \infty$. □

2. Η εικασία Περιορισμού (33) είναι γνωστό ότι ισχύει για $n = 2$ και οφείλεται στους C. Fefferman και Stein γύρω στο 1970.

3. Το γεγονός ότι $q \geq \frac{2n+2}{n-1}$ στην (34) είναι το καλύτερο δυνατό οφείλεται στον A. Knapp.
   Θα δούμε τώρα την κατασκευή.
   Έστω $C_\delta = \{x \in S^{n-1} : 1 - x \cdot e_n \leq \delta^2\} = \{x \in S^{n-1} : 1 - x_n \leq \delta^2\}$.
   Παρατηρούμε ότι για $x \in S^{n-1}$, αφού $|x|^2 = 1$, έχουμε

   $$|x - e_n|^2 = x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + (x_n - 1)^2 = 1 - x_n^2 + x_n^2 + 1 - 2x_n =$$
   $$= 2(1 - x_n).$$

   Άρα, για $x \in S^{n-1}$,

   $$x \in C_\delta \iff 1 - x_n \leq \delta^2 \iff \frac{|x - e_n|^2}{2} \leq \delta^2 \iff |x - e_n| \leq \sqrt{2}\delta.$$

Έστω τώρα f η χαρακτηριστική του C_δ, $f = \mathcal{X}_{C_\delta}$.
Θα υπολογίσουμε τα $||f||_{L^2(S^{n-1})}$ και $||\widehat{fd\sigma}||_q$.
Αρχικά,

$$||f||_{L^2(S^{n-1})} = \left(\int_{S^{n-1}} |f(x)|^2 d\sigma(x)\right)^{1/2} = \left(\int_{S^{n-1}} \mathcal{X}_{C_\delta}(x) d\sigma(x)\right)^{1/2} = \sigma(C_\delta)^{1/2}.$$

Έστω $r = \delta\sqrt{2-\delta^2}$.
Ορίζουμε τοπικές συντεταγμένες

$$F(x) = (x, \sqrt{1-|x|^2}), \quad \text{με } F : D(0,r) \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \to C_\delta.$$

Τότε, από παρατήρηση 4 στην εφαρμογή, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma(C_\delta) &= \int_{D(0,r)} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}} dx = \\ &= \sigma(S^{n-1}) \int_0^r \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} t^{n-2} dt. \end{aligned} \tag{35}$$

Αν τώρα $0 < \delta \leq \frac{1}{2}$, έχουμε $\frac{\sqrt{7}}{2} \leq \sqrt{2-\delta^2} \leq 2$. Δηλαδή για δ μικρό, έχουμε $r \approx \delta$.
Οπότε, για $0 < t \leq r \approx \delta \leq \frac{1}{2}$, έχουμε

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \lesssim \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Άρα, από την (35), έχουμε

$$\sigma(C_\delta) = C \int_0^r t^{n-2} dt = C \left[\frac{t^{n-1}}{n-1}\right]_0^r = C' r^{n-1} \approx \delta^{n-1}.$$

Οπότε, τελικά,

$$||f||_{L^2(S^{n-1})} \approx \delta^{\frac{n-1}{2}}. \tag{36}$$

Τώρα για το $||\widehat{fd\sigma}||_q$.
Έστω $E \subseteq S^{n-1}$. Τότε

$$fd\sigma(E) = \int_E \mathcal{X}_{C_\delta}(x) d\sigma(x) = \int_{E \cap C_\delta} 1 d\sigma(x) = \sigma(E \cap C_\delta).$$

Άρα $E \cap C_\delta = \varnothing \Longrightarrow fd\sigma(E) = 0$.
Οπότε $\text{supp}(fd\sigma) \subseteq C_\delta \subseteq A$, όπου A το ορθογώνιο με κάθετη πλευρά δ^2 και οι υπόλοιπες $\approx \delta$ (για $\delta \leq \frac{1}{2}$ π.χ. όπως δείξαμε πριν).
Κοιτάμε τώρα το $\widehat{fd\sigma}(\xi)$ για ξ στο δυϊκό ορθογώνιο του A με κέντρο 0, δηλαδή το ορθογώνιο με πλευρές αντίστροφες αυτών του A.
Συγκεκριμένα, έστω

$$|\xi_n| \leq C_1^{-1} \frac{1}{\delta^2} \quad \text{και} \quad |\xi_j| \leq C_1^{-1} \frac{1}{\delta}, \text{ για } j < n,$$

όπου $C_1 =$ σταθερά μεγάλη.
Τότε, για $\xi \in A$, αφού $|e^{2\pi i e_n \cdot \xi}| = 1$ και $|z| \geq Rez$, έχουμε

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| = \left|\int_{S^{n-1}} \mathcal{X}_{C_\delta}(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\sigma(x)\right| = \left|\int_{C_\delta} e^{-2\pi i x\cdot\xi} d\sigma(x)\right| =$$

$$= \left|\int_{C_\delta} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{2\pi i e_n\cdot\xi} d\sigma(x)\right| = \left|\int_{C_\delta} e^{-2\pi i (x-e_n)\cdot\xi} d\sigma(x)\right| \geq$$

$$\geq \int_{C_\delta} \cos(2\pi(x-e_n)\cdot\xi) d\sigma(x).$$

Επίσης, για $x \in C_\delta$ και $\xi \in A$, έχουμε

$$|(x-e_n)\cdot\xi| = x_1\xi_1 + ... + x_{n-1}\xi_{n-1} + (x_n - 1)\xi_n \leq$$

$$\leq C\delta\xi_1 + ... + C\delta\xi_{n-1} + \delta^2\xi_n \leq$$

$$\leq C\frac{1}{C_1}\delta\frac{1}{\delta} + ... + C\frac{1}{C_1}\delta\frac{1}{\delta} + \frac{1}{C_1}\delta^2\frac{1}{\delta^2} =$$

$$= \frac{(n-1)C+1}{C_1} \leq \frac{1}{6} \quad \text{για } C_1 \text{ μεγάλο.}$$

Άρα $|2\pi(x-e_n)\cdot\xi| \leq \frac{\pi}{3}$ και άρα $\cos(2\pi(x-e_n)\cdot\xi) \geq \frac{1}{2}$.
Οπότε για $\xi \in A$,

$$|\widehat{fd\sigma}(\xi)| \geq \frac{1}{2}\sigma(C_\delta) = C\delta^{n-1}.$$

Επίσης, το A έχει όγκο

$$\text{vol}(A) = 2C_1^{-1}\frac{1}{\delta^2}\left(2C_1^{-1}\frac{1}{\delta}\right)^{n-1} = \frac{C}{\delta^{n+1}} = C\delta^{-(n+1)}.$$

Άρα, τελικά,

$$||\widehat{fd\sigma}||_q = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{fd\sigma}(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q} \geq \left(\int_A |\widehat{fd\sigma}(\xi)|^q d\xi\right)^{1/q} \geq$$

$$\geq \left(\int_A C^q\delta^{(n-1)q} d\xi\right)^{1/q} = C\delta^{n-1}\text{vol}(A)^{1/q} = C\delta^{n-1}\delta^{-\frac{n+1}{q}}$$

$$= C\delta^{n-1-\frac{n+1}{q}}.$$

Δηλαδή,

$$||\widehat{fd\sigma}||_q \geq C\delta^{n-1-\frac{n+1}{q}}$$

και από (36)

$$||f||_{L^2(S^{n-1})} = C\delta^{\frac{n-1}{2}}.$$

Άρα, για να ισχύει η (34), δηλαδή $||\widehat{fd\sigma}||_q \leq ||f||_{L^2(S^{n-1})}$, πρέπει

$$\delta^{n-1-\frac{n+1}{q}} \leq C\delta^{\frac{n-1}{2}} \iff$$
$$\delta^{\frac{n-1}{2}-\frac{n+1}{q}} \leq C \quad \text{για κάθε } \delta \in (0,1/2).$$

Άρα, πρέπει

$$\frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{q} \geq 0 \iff \frac{n+1}{q} \leq \frac{n-1}{2} \iff q \geq \frac{2n+2}{n-1}.$$

Θα δούμε τώρα μία παραλλαγή του παραπάνω παραδείγματος.
Έστω $v \in S^{n-1}$ και T η περιστροφή που απεικονίζει το e_n στο v. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathcal{X}_A$ η χαρακτηριστική του, ορίζουμε $T\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_{T(A)}$.
Έστω, τώρα, $f = \mathcal{X}_{C_\delta}$, όπως πριν, και $\eta \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $g(x) = e^{2\pi i x\cdot\eta}Tf(x)$.
Τότε

$$\operatorname{supp}(g) = \operatorname{supp}(Tf) = \operatorname{supp}(\mathcal{X}_{T(C_\delta)}) = T(C_\delta).$$

Και

$$T(C_\delta) = \{x \in S^{n-1} : 1 - x\cdot v \leq \delta^2\} =: K_{\delta,v},$$

γιατί T στροφή, άρα διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα, δηλαδή $e_n \cdot x = T(e_n)\cdot T(x) = v\cdot T(x)$.
Οπότε, $x \in C_\delta \iff 1 - e_n\cdot x \leq \delta^2 \iff 1 - v\cdot T(x) \leq \delta^2 \iff T(x) \in K_{\delta,v} \iff x \in T^{-1}(K_{\delta,v})$. Επομένως, $T(C_\delta) = K_{\delta,v}$ και άρα

$$\operatorname{supp}(g) = \{x \in S^{n-1} : 1 - x\cdot v \leq \delta^2\}.$$

Τώρα,

$$|\widehat{gd\sigma}(\xi)| = |(\widehat{e^{2\pi i x\cdot\eta}\mathcal{X}_{T(C_\delta)}}d\sigma)(\xi)| \overset{(2)}{=} |(\widehat{\mathcal{X}_{T(C_\delta)}d\sigma})(\xi-\eta)| \tag{37}$$

και, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x' = T^{-1}(x)$ και χρησιμοποιώντας ότι $T^t = T^{-1}$, έχουμε

$$(\widehat{\mathcal{X}_{T(C_\delta)}d\sigma})(\xi) = \int_{T(C_\delta)} e^{-2\pi i x\cdot\xi}d\sigma(x) =$$
$$= \int_{C_\delta} e^{-2\pi i T(x)\cdot\xi}|\det T^{-1}|d\sigma(x) = \int_{C_\delta} e^{-2\pi i x\cdot T^{-1}(\xi)}d\sigma(x) =$$
$$= (\widehat{\mathcal{X}_{C_\delta}d\sigma})(T^{-1}(\xi)).$$

Οπότε, από την (37) και το παραπάνω παράδειγμα, έχουμε

$$|\widehat{gd\sigma}(\xi)| = |(\widehat{\mathcal{X}_{C_\delta}d\sigma})(T^{-1}(\xi-\eta))| \geq C\delta^{n-1},$$

για $T^{-1}(\xi-\eta)$ να ανήκει στον κύλινδρο, έστω K, με κέντρο 0, παράλληλο στο e_n, με ύψος $C_1^{-1}\delta^{-2}$ και ακτίνα $C_1^{-1}\delta^{-1}$. Δηλαδή, $\xi - \eta \in T(K) =$ κύλινδρος με κέντρο 0, παράλληλος στο v και ίδιες διαστάσεις. Οπότε τελικά, $\xi \in T(K) + \eta$.
Δηλαδή,

$$|\widehat{gd\sigma}(\xi)| \geq C\delta^{n-1}.$$

Για ξ στον κύλινδρο με κέντρο η, παράλληλο στο v, με ύψος $C_1^{-1}\delta^{-2}$ και ακτίνα $C_1^{-1}\delta^{-1}$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1, θα μας χρειαστούν δύο Λήμματα.

Λήμμα 3.1. *Έστω $f, g \in \mathcal{S}$ και μέτρο μ με συμπαγή φορέα. Τότε*

$$\int \hat{f}\overline{\hat{g}}d\mu = \int (\hat{\mu} * \overline{g}) \cdot f dx. \tag{38}$$

Απόδειξη. Από (7), αν $\tilde{g}(x) = \overline{g}(-x)$, τότε $\hat{\tilde{g}} = \overline{\hat{g}}$. Οπότε, από το Θεώρημα Αντιστροφής,

$$\hat{\overline{\hat{g}}} = \hat{\hat{\tilde{g}}} = \overline{g}.$$

Τώρα, από τη σχέση δυϊσμού (Πρόταση 1.6) και την (18), έχουμε

$$\int \hat{f}\overline{\hat{g}}d\mu = \int f(\widehat{\overline{\hat{g}}\mu})dx \overset{(18)}{=} \int f \cdot (\hat{\overline{\hat{g}}} * \hat{\mu})dx =$$

$$= \int (\hat{\mu} * \overline{g}) \cdot f dx.$$

□

Λήμμα 3.2. *Έστω μ πεπερασμένο, θετικό μέτρο. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα για κάθε q και κάθε C.*

1. $||\widehat{fd\mu}||_q \leq C||f||_{L^2(d\mu)}, \quad f \in L^2(d\mu).$
2. $||\widehat{g}||_{L^2(d\mu)} \leq C||g||_{q'}, \quad g \in \mathcal{S}.$
3. $||\widehat{\mu} * f||_q \leq C^2||f||_{q'}, \quad f \in \mathcal{S}.$

Απόδειξη. Έστω $g \in \mathcal{S}$.
(1) ⇒ (2): Έστω $f \in L^2(d\mu)$. Από τη σχέση δυϊσμού (Πρόταση 1.6), την ανισότητα Hölder και την υπόθεση (1.), έχουμε

$$\left|\int \hat{g}fd\mu\right| = \left|\int \widehat{fd\mu} \cdot gdx\right| \leq ||g||_{q'}||\widehat{fd\mu}||_q \leq C||g||_{q'}||f||_{L^2(d\mu)}.$$

Άρα,

$$||\widehat{g}||_{L^2(d\mu)} \leq C||g||_{q'}.$$

(2) ⇒ (1): Έστω $f \in L^2(d\mu)$. Από τη σχέση δυϊσμού πάλι, την ανισότητα Cauchy-Schwartz και την υπόθεση (2.), έχουμε

$$\left|\int \widehat{fd\mu} \cdot gdx\right| = \left|\int \hat{g}fd\mu\right| \leq ||\widehat{g}||_{L^2(d\mu)}||f||_{L^2(d\mu)} \leq C||g||_{q'}||f||_{L^2(d\mu)}.$$

Άρα,

$$||\widehat{fd\mu}||_q \leq C||f||_{L^2(d\mu)}.$$

(3) $\Rightarrow$ (2): Από Λήμμα 3.1, για $f \in \mathcal{S}$, την ανισότητα Hölder και την υπόθεση (3.), έχουμε

$$\left|\int \hat{f}\overline{\hat{g}}d\mu\right| = \left|\int (\hat{\mu} * \overline{g}) \cdot f dx\right| \leq ||\hat{\mu} * g||_q ||f||_{q'} \leq C^2 ||g||_{q'} ||f||_{q'}.$$

Οπότε, για $f = g \in \mathcal{S}$,

$$\left|\int |\hat{g}|^2 d\mu\right| = \left|\int \hat{g}\overline{\hat{g}}d\mu\right| \leq C^2 ||g||_{q'}^2.$$

Άρα,

$$||\widehat{g}||_{L^2(d\mu)} \leq C||g||_{q'}.$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Έστω $f \in \mathcal{S}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1, την ανισότητα Cauchy-Schwartz και την υπόθεση (2.) δύο φορές, έχουμε

$$\int (\hat{\mu} * \overline{g}) \cdot f dx = \int \hat{f}\overline{\hat{g}}d\mu \leq ||\hat{f}||_{L^2(d\mu)} ||\widehat{\overline{g}}||_{L^2(d\mu)} \leq C||f||_{q'} ||\widehat{\overline{g}}||_{L^2(d\mu)} \leq$$

$$\leq C^2 ||f||_{q'} ||\tilde{g}||_{q'} = C^2 ||f||_{q'} ||g||_{q'}.$$

Άρα,

$$||\widehat{\mu} * \overline{g}||_q \leq C^2 ||g||_{q'},$$

και για $g = \overline{f}$, εφόσον $||f||_{q'} = ||\overline{f}||_{q'}$, έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση. Μπορούμε να δούμε το Λήμμα 3.2 σαν ειδική περίπτωση του γενικότερου πλαισίου,

$$T : L^2 \to L^q \Leftrightarrow T^* : L^{q'} \to L^2 \Leftrightarrow TT^* : L^{q'} \to L^q,$$

όπου T^* ο δυϊκός τελεστής του T.
Συγκεκριμένα, αν $T : L^2 \to L^q$ με $T(f) = \widehat{fd\mu}$, για $f \in L^2(d\mu)$,
ορίζεται ο $T^* : (L^q)^* \approx L^{q'} \to (L^2)^* \approx L^2$ με $T^*(g^*) = g^* \circ T \in (L^2)^*$, όπου $g^* \in (L^q)^*$ αντιστοιχεί στο $g \in L^{q'}$ και ορίζεται ως $g^*(f) = \int gf dx$, για $f \in L^q$.
Οπότε, για $f \in L^2(d\mu)$,

$$T^*(g^*)(f) = g^*(T(f)) = \int g \cdot T(f) dx = \int g \cdot \widehat{fd\mu} dx = \int \widehat{g} \cdot f d\mu.$$

Και $T^*(g^*) \in (L^2)^*$, δηλαδή $T^*(g^*) = h^* \in (L^2)^*$ με $T^*(g^*)(f) = h^*(f) = \int hf dx$.
Άρα $h = \widehat{g}$, οπότε έχουμε την αντιστοιχία $T^*(g) \longleftrightarrow T^*(g^*) = h^* \longleftrightarrow \widehat{g}$.
Επίσης, για $g^* \in (L^q)^* \approx L^{q'}$, έχουμε την αντιστοιχία $g^* \longleftrightarrow g$, οπότε

$$TT^*(g) \longleftrightarrow TT^*(g^*) = T(T^*(g^*)) = T(\widehat{g}) = \widehat{\widehat{g}d\mu} = g(-x) * \widehat{\mu}.$$

Θα δούμε τώρα την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1 για $q > \frac{2n+2}{n-1}$.

Απόδειξη Θεωρήματος 3.1. Έστω $q > \frac{2n+2}{n-1}$.
Από Λήμμα 3.2 έχουμε

$$||\widehat{fd\sigma}||_q \le C_q||f||_{L^2(S^{n-1})},\ f \in L^2(d\sigma) \Longleftrightarrow ||\widehat{\sigma} * f||_q \le C_q^2||f||_{q'},\ f \in \mathcal{S} \tag{39}$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε την (39).
Έστω $f \in \mathcal{S}$.
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και $D(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$, η μπάλα με κέντρο x και ακτίνα r. Θα δείξουμε ότι

$$\sigma(D(x,r)) \le Cr^{n-1}. \tag{40}$$

Εφόσον το σ είναι αμετάβλητο στις στροφές, μπορούμε, δίχως βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι το x είναι στον αξονα των x_n, και τότε αν το $D(x,r)$ τέμνει την S^{n-1}, η τομή θα είναι το $C_\delta = \{x \in S^{n-1} : 1 - x_n \le \delta^2\}$, για $\delta \le r$.
Προφανώς, αν $D(x,r) \cap S^{n-1} = \varnothing$ τότε $\sigma(D(x,r)) = 0 \le Cr^{n-1}$
Έστω τώρα $r < \frac{1}{2}$. Τότε, αν $D(0,\delta')$ η προβολή του C_δ στον $\mathbb{R}^{n-1}$, έχουμε $\delta' \le r$, οπότε

$$\sigma(D(x,r)) = \sigma(C_\delta) = \int_{D(0,\delta')(\subseteq \mathbb{R}^{n-1})} \frac{1}{\sqrt{1-|x|^2}}dx =$$

$$= \sigma(S^{n-2})\int_0^{\delta'} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}t^{n-2}dt \le \sigma(S^{n-2})\int_0^{r} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}t^{n-2}dt.$$

Αφού $t \le r \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}$,

$$\sigma(D(x,r)) \le \frac{2\sigma(S^{n-2})}{(n-1)\sqrt{3}}r^{n-1} = C_0 r^{n-1}.$$

Αν τώρα $r \ge \frac{1}{2}$, αρκεί να πάρουμε C_1 ώστε $\frac{C_1}{2^{n-1}} \ge \sigma(S^{n-1})$ (π.χ. $C_1 = 2^{n-1}\sigma(S^{n-1})$), αφού τότε

$$\sigma(D(x,r)) \le \sigma(S^{n-1}) \le \frac{C_1}{2^{n-1}} \le C_1 r^{n-1}.$$

Άρα, τελικά, για $C := \max\{C_0, C_1\}$, έχουμε την (40).

Επίσης, είχαμε, για $g : S^{n-1} \to \mathbb{C}$, C^∞,

$$|\widehat{gd\sigma}(\xi)| \le C||g||_{C^2}(1+|\xi|)^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Οπότε, για $g = 1$, έχουμε

$$|\widehat{\sigma}(\xi)| \le C(1+|\xi|)^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{41}$$

Έστω, τώρα, $\mathcal{X}$, C^∞ συνάρτηση, με

$$\mathcal{X}(x) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } |x| \le \frac{1}{2} \\ 1, & \text{όταν } |x| \ge 1 \\ C^\infty, \text{αλλού.} \end{cases}$$

Τότε, ορίζουμε $\phi(x) = \mathcal{X}(2x) - \mathcal{X}(x)$, κι έχουμε $\phi \in C_0^\infty$ με

(i) $\mathrm{supp}(\phi) \subseteq \{x : \frac{1}{4} \leq |x| \leq 1\}$

(ii) Αν $|x| \geq \frac{1}{2}$ τότε $\sum_{j=0}^{\infty} \phi(\frac{x}{2^j}) = \mathcal{X}(2x) = 1$

αφού $\phi(x) = 0$ όταν $\mathcal{X}(2x) = \mathcal{X}(x) = 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$ και $|x| \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| \geq 1$ και όταν $\mathcal{X}(2x) = \mathcal{X}(x) = 0 \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$ και $|x| \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{4}$. Άρα ισχύει το (i).
Επίσης, για $|x| \geq \frac{1}{2}$ και m_0 τέτοιο ώστε $\frac{|x|}{2^m} \leq \frac{1}{2}$ $\forall m \geq m_0$, έχουμε

$$\sum_{j=0}^{m} \phi\left(\frac{x}{2^j}\right) = \sum_{j=0}^{m} \left(\mathcal{X}\left(\frac{x}{2^{j-1}}\right) - \mathcal{X}\left(\frac{x}{2^j}\right)\right) = \mathcal{X}(2x) - \mathcal{X}\left(\frac{x}{2^m}\right) = \mathcal{X}(2x) - 0 = 1, \quad \forall m \geq m_0.$$

Άρα $\sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2^j}\right) = \mathcal{X}(2x) = 1$, οπότε ισχύει και το (ii).

Θα σπάσουμε το $\widehat{\sigma}$ ως εξής:

$$\widehat{\sigma} = K_{-\infty} + \sum_{j=0}^{\infty} K_j,$$

όπου

$$K_j(x) = \phi\left(\frac{x}{2^j}\right) \widehat{\sigma}(x),$$

$$K_{-\infty}(x) = \left(1 - \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2^j}\right)\right) \widehat{\sigma}(x) = (1 - \mathcal{X}(2x))\, \widehat{\sigma}(x).$$

Για να εξετάσουμε τώρα τη συνέλιξη του $\widehat{\sigma}$ με την f και να καταλήξουμε στην (39), θα δούμε πρώτα τις συνελίξεις της f με τα K_j και $K_{-\infty}$.
Παρατηρούμε τώρα ότι $K_{-\infty} \in C^{\infty}$, αφού $\phi, \widehat{\sigma} \in C^{\infty}$, και $|x| \geq 1 \Rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \phi\left(\frac{x}{2^j}\right) = 1$, δηλαδή $K_{-\infty}(x) = 0$. Οπότε $\mathrm{supp}(K_{-\infty}) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$, άρα τελικά

$$K_{-\infty} \in C_0^{\infty} \subseteq L^p, \ \forall p.$$

Οπότε, από την Ανισότητα Young, έχουμε
για $1 \leq p, r \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \geq 1$ και $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} - 1 = \frac{1}{p} - \frac{1}{r'} \leq \frac{1}{p}$,

$$||K_{-\infty} * f||_q \leq ||K_{-\infty}||_r ||f||_p, \quad \text{με } p \leq q.$$

Οπότε, αφού $q > \frac{2n+2}{n-1} = 2 + \frac{4}{n-1} > 2$, έχουμε $q' < 2 (< q)$. Άρα, μπορούμε στη Young να πάρουμε $p = q'$, οπότε $\frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{q'}$, και έχουμε

$$||K_{-\infty} * f||_q \leq ||K_{-\infty}||_r ||f||_{q'} = C||f||_{q'}. \tag{42}$$

Θα εξετάσουμε τώρα τα K_j που εμφανίζονται στο άθροισμα.
Η λογική είναι να δούμε τη συνέλιξη με τα K_j σαν τελεστή από τον L^1 στον L^{∞} και από τον L^2 στον L^2 και για τα ενδιάμεσα q να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Riesz - Thorin.
Συγκεκριμένα, ορίζουμε $T(f) = K_j * f$, με $f \in \mathcal{S}$, άρα $f \in L^1$ και $f \in L^2$.
Τώρα παρατηρούμε ότι

$$K_j(x) = \phi\left(\frac{x}{2^j}\right) \widehat{\sigma}(x) = \begin{cases} 0, & \text{για} \quad 2^j < |x| \text{ ή } |x| < 2^{j-2} \\ > 0, & \text{για} \quad 2^{j-2} \leq |x| \leq 2^j \end{cases}$$

και για $2^{j-2} \leq |x| \leq 2^j$ η $\phi\left(\frac{x}{2^j}\right)$ είναι φραγμένη, αφού $\phi \in C_0^\infty$. Άρα, για $2^{j-2} \leq |x| \leq 2^j$,

$$|K_j(x)| = \left|\phi\left(\frac{x}{2^j}\right)\right| |\widehat{\sigma}(x)| \leq C|\widehat{\sigma}(x)| \overset{(41)}{\leq} C(1+|x|)^{-\frac{n-1}{2}} \leq C|x|^{-\frac{n-1}{2}} \leq$$

$$\leq C2^{-(j-2)\frac{n-1}{2}} = C'2^{-j\frac{n-1}{2}}.$$

Οπότε

$$||K_j||_\infty \leq C2^{-j\frac{n-1}{2}}.$$

Επίσης,

$$|(K_j * f)(x)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} K_j(x-y)f(y)dy\right| \leq ||K_j||_\infty ||f||_1 \leq C2^{-j\frac{n-1}{2}}||f||_1.$$

Άρα,

$$||K_j * f||_\infty \leq C2^{-j\frac{n-1}{2}}||f||_1. \tag{43}$$

Οπότε, $T: L^1 \to L^\infty$ με $||T|| \leq C2^{-j\frac{n-1}{2}}$.

Για τον L^2, αρχικά, έχουμε

$$||K_j * f||_2 = ||\widehat{K_j * f}||_2 \overset{(14)}{=} ||\widehat{K_j}\widehat{f}||_2 \leq ||\widehat{K_j}||_\infty ||\widehat{f}||_2 = ||\widehat{K_j}||_\infty ||f||_2,$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτουν από το Θεώρημα Plancherel.
Επομένως, αρκεί να εκτιμήσουμε την $||\widehat{K_j}||_\infty$.
Έστω $\psi := \widehat{\phi} \in \mathcal{S}$. Από (5) έχουμε $\widehat{\phi_\epsilon}(\xi) = \widehat{\phi(\epsilon x)}(\xi) = \frac{1}{\epsilon^n}\widehat{\phi}(\frac{1}{\epsilon}\xi) = (\widehat{\phi})^\epsilon(\xi)$.
Άρα $\widehat{\phi_{2^{-j}}} = (\widehat{\phi})^{2^{-j}} = \psi^{2^{-j}}$.
Επίσης, έχουμε ότι $\check{\sigma}(x) = \hat{\sigma}(-x) = \hat{\sigma}(x)$, αφού το σ και άρα το $\hat{\sigma}$ είναι αμετάβλητο στις ανακλάσεις.
Οπότε,

$$\widehat{K_j} = \widehat{\phi(2^{-j}x)\hat{\sigma}(x)} = \widehat{\phi_{2^{-j}}\hat{\sigma}} = \widehat{\phi_{2^{-j}}\check{\sigma}} \overset{(17)}{=} \psi^{2^{-j}} * \sigma.$$

Τώρα, αφού $\psi \in \mathcal{S}$,

$$|\widehat{K_j}(\xi)| = |(\psi^{2^{-j}} * \sigma)(\xi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{2^{-j}}(\xi-\eta)d\sigma(\eta)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} 2^{jn}\psi(2^j(\xi-\eta))d\sigma(\eta)\right| =$$

$$= 2^{jn}\left|\int_{\mathbb{R}^n} (1+|2^j(\xi-\eta)|)^N \psi(2^j(\xi-\eta))(1+|2^j(\xi-\eta)|)^{-N}d\sigma(\eta)\right| \overset{\psi\in\mathcal{S}}{\leq}$$

$$\leq C_N 2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n} (1+2^j|\xi-\eta|)^{-N}d\sigma(\eta), \quad \forall N < +\infty.$$

Άρα

$$|\widehat{K_j}(\xi)| \leq C_N 2^{jn}\left(\int_{D(\xi,2^{-j})} (1+2^j|\xi-\eta|)^{-N}d\sigma(\eta)\right) +$$

$$+C_N 2^{jn}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\int_{D(\xi,2^{k+1-j})\setminus D(\xi,2^{k-j})}(1+2^j|\xi-\eta|)^{-N}d\sigma(\eta)\right),$$

όπου για $0\le|\xi-\eta|\le 2^{-j}$ έχουμε $2^{-N}\le(1+2^j|\xi-\eta|)^{-N}\le 1$
και για $2^{k-j}\le|\xi-\eta|\le 2^{k+1-j}$ έχουμε $(1+2^j|\xi-\eta|)^{-N}\le(1+2^k)^{-N}\le 2^{-kN}$.
Οπότε

$$|\widehat{K_j}(\xi)|\le C_N 2^{jn}\left(\sigma(D(\xi,2^{-j}))+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-kN}\sigma(D(\xi,2^{k+1-j})\setminus D(\xi,2^{k-j}))\right)\le$$

$$\le C_N 2^{jn}\left(\sigma(D(\xi,2^{-j}))+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-kN}\sigma(D(\xi,2^{k+1-j}))\right)\overset{(40)}{\le}$$

$$\le C_N 2^{jn}\left(C2^{-j(n-1)}+C\sum_{k=0}^{\infty}2^{-kN}2^{(k+1-j)(n-1)}\right)\overset{2^{n-1}\ge 1}{\le}$$

$$\le C_N 2^{jn}\left(C2^{n-1}2^{-j(n-1)}+C2^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-kN}2^{(k-j)(n-1)}\right)\overset{N=n}{=}$$

$$=C_1 2^{jn}\left(2^{-j(n-1)}+\sum_{k=0}^{\infty}2^{-nk}2^{nk-k-j(n-1)}\right)=$$

$$=C_1 2^{jn}\left(2^{-j(n-1)}+2^{-j(n-1)}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\right)=$$

$$=C_1 2^{jn+1}2^{-jn+j}=C_1 2^{j+1}=C2^j.$$

Άρα $||\widehat{K_j}||_\infty\le C2^j$ και τελικά

$$||K_j*f||_2\le C2^j||f||_2.$$

Δηλαδή $T:L^2\to L^2$ με $||T||\le C2^j$.
Και είχαμε $T:L^1\to L^\infty$ με $||T||\le C2^{-j\frac{n-1}{2}}$.
Άρα, από το Θεώρημα Riesz-Thorin, $T:L^{q'}\to L^q$, με

$$||K_j*f||_q\le C2^{j\theta}2^{-j\frac{n-1}{2}(1-\theta)}||f||_{q'},\quad \forall q\ge 2,$$

όπου

$$\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{\infty}=\frac{1}{q}$$

και

$$\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{1}=\frac{1}{q'},$$

δηλαδή για $\theta=\frac{2}{q}$.
Οπότε, τελικά,

$$||K_j*f||_q\le C2^{j(\frac{n+1}{q}-\frac{n-1}{2})}||f||_{q'},\quad q\ge 2.$$

Τώρα,

$$q > \frac{2n+2}{n-1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{q} - \frac{n-1}{2} < 0.$$

Άρα,

$$\sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q \leq C||f||_{q'} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2} - \frac{n+1}{q}}} \right)^j \leq C'||f||_{q'}. \tag{44}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$(\widehat{\sigma} * f)(x) = (K_{-\infty} * f)(x) + \sum_{j=0}^{\infty} (K_j * f)(x),$$

κατα σημείο.
Έχουμε

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |K_j(y)||f(x-y)|dy \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||K_j||_{\infty}||f||_1 \leq C||f||_1 \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j\frac{n-1}{2}} < +\infty.$$

Οπότε, από το Θεώρημα Fubini,

$$\sum_{j=0}^{\infty} (K_j * f)(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} K_j(y) f(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{\infty} K_j(y) f(x-y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) \sum_{j=0}^{\infty} K_j(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)(\widehat{\sigma}(y) - K_{-\infty}(y)) dy =$$

$$= (\widehat{\sigma} * f)(x) - (K_{-\infty} * f)(x).$$

Τώρα, από την ανισότητα Minkowski,

$$\left|\left| \sum_{j=0}^{m} (K_j * f) \right|\right|_q \leq \sum_{j=0}^{m} ||K_j * f||_q.$$

Υψώνοντας στην q και παίρνοντας όρια, έχουμε

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{m} (K_j * f)(x) \right)^q dx \leq \left(\lim_{m \to +\infty} \sum_{j=0}^{m} ||K_j * f||_q \right)^q =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q \right)^q. \tag{45}$$

Και από το Λήμμα Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{m} (K_j * f)(x) \right)^q dx \leq \lim_{m \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{m} (K_j * f)(x) \right)^q dx \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q \right)^q,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την (45). Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{\infty} (K_j * f)(x) \right)^q dx = \left|\left| \sum_{j=0}^{\infty} (K_j * f) \right|\right|_q^q \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q \right)^q.$$

Οπότε, τελικά,

$$\left|\left| \sum_{j=0}^{\infty} (K_j * f) \right|\right|_q \leq \sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q.$$

Και, άρα, χρησιμοποιώντας τις (42) και (44), έχουμε

$$||\widehat{\sigma} * f||_q \leq ||K_{-\infty} * f||_q + \sum_{j=0}^{\infty} ||K_j * f||_q \leq C||f||_{q'} + C'||f||_{q'}.$$

Δηλαδή

$$||\widehat{\sigma} * f||_q \leq C||f||_{q'}.$$

□

4 Βιβλιογραφία

1. G. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications* , Second Edition, John Wiley (1999)

2. J. Milnor, *Morse Theory*, Princeton University Press (1973)

3. T. Wolff, *Lectures on Harmonic Analysis*, American Mathematical Society (2003)