ΑΠΟΣΒΕΣΗ ΚΥΚΛΙΚΩΝ ΜΕΣΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥ FOURIER ΜΕΤΡΩΝ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΧΑΤΖΗΦΟΥΝΤΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Από την θεωρεία μέτρου γνωρίζουμε το θεώρημα του stainhaus που χαρακτηρίζει όλα τα σύνολα θετικού μέτρου :Αν το σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ έχει θετικό μέτρο τοτε το $A-A$ περιέχει μια περιοχή του μηδενός . Παρόλο που το θεώρημα αυτό είναι σχετικά απλό στην διατύπωση και την απόδειξη του, η γενίκευση του στις ανώτερες διαστάσεις έχει αποδειχτεί ένα από τα πιο σύνχρονα και δύσκολα προβλήματα της γεωμετρικής θεωρίας μέτρου, το λεγόμενο "falconer's distance set conjecture"το οποίο διατυπώνεται ως εξής. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Αν το A έχει διάσταση Haussdorff μεγαλύτερη της μονάδας τότε τό σύνολο αποστάσεων του, $\Delta A = \{|x-y| : x \in A, y \in A\}$ έχει θετικό μέτρο lebesque . Ο τ Πετρι Ματτιλα πρώτος χρησιμοποίησε προχωρημένες τεχνικές αρμονικής ανάλυσης και γεωμετρικής θεωρίας μέτρου για την επίλυση του προβλήματος. Ποιο συγκεκριμένα ξεκίνησε από την εξής παρατήρηση: Έστω ένα μέτρο μ με φορέα που περιέχεται στο A, και η προώθηση αυτού του μέτρου : $\nu_\mu(B) = \mu \times \mu\{(x,y) : |x-y| \in B\}\, B \in \mathbb{R},\ B$ Borel σύνολο , τότε αν ο μετασχηματισμός fourier του ν_μ είναι στον L_2, $|\Delta(E)| > 0$. Η τεχνική που ανέπτυξε ο Mattila περιέχει εκτιμήσεις σφαιρικών μέσων μετασχηματισμού fourier μέτρων. Το θεώρημα που θα αναλυθεί παρακάτω δίνει εκτίμηση κυκλικών μέσων μετασχηματισμού fourier μέτρων, οφείλετε στον Thomas Wolff και είναι το καλύτερο αποτέλεσμα για την distance set conjecture στο επίπεδο που υπάρχει μέχρι σήμερα.

Θεώρημα 1. *Έστω ένα $\alpha \in (0,2)$. Τότε Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει μια σταθερά C_ϵ τέτοια ώστε το παρακάτω να είναι αληθές. Έστω μ ένα θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^2$ του οποίου ο φορέας να περιέχεται στο μοναδιαίο δίσκο και να έχει α - διαστατη ενέργεια*

$$I_\alpha \stackrel{def}{=} \iint \frac{1}{|x-y|^\alpha}\, d\mu(x) d\mu(y)$$

Τότε για κάθε $R \geq 1$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|\, d\theta \leq C_\epsilon R^{\epsilon - \frac{\alpha}{2}}$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιούνται πολλά στοιχειώδη γεωμετρικά επιχειρήματα, καθώς και βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού fourier . Στην αρχή θα παρουσιάσουμε κάποιες προτάσεις και λήμματα που θα χρειαστούν στην πορεία, έπειτα θα αναπτύξουμε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες και θα ολοκληρώσουμε με το κυρίως μέρος της απόδειξης.

Πρόταση 1. *Έστω μια σταθερά C και μια οικογένεια $\mathcal{A}$ από ορθογώνια με μήκος μεταξύ l και Cl και πλάτος μεταξύ w και Cw για την οποία ισχύει ότι αν $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$ τότε $R_1 \subset CR_2$. Αν ο πληθάριθμος της $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτερος από μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από την C τότε υπάρχουν R, R' με $R \subset 2R'$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε αρκετές φορές την αρχή του περιστερώνα. Σταθεροποιούμε ένα ορθογώνιο στην $\mathcal{A}$ και παίρνουμε εκείνο το ορθογώνιο με το ίδιο κέντρο, πλευρές παράλληλες και μήκος $C^2 l$, πλάτος $C^2 w$ έτσι ώστε να περιέχει όλα τα υπόλοιπα της $\mathcal{A}$. Έπειτα για κάθε $R \in \mathcal{A}$ παίρνουμε το $\frac{1}{N}R$. Αν υποθέσουμε ότι όλα τα $\frac{1}{N}R$ είναι ξένα μεταξύ τους τότε ι $\#\mathcal{A}\frac{lw}{N^2} \leq C^4 lw$. Άρα για $\#\mathcal{A} > N^2 C^4$ πετυχαίνουμε τουλάχιστον δύο $\frac{1}{N}$ ορθογώνια να τέμνονται .Έστω $p = C^{\frac{1}{N}}$ διαμερίζουμε το $[1, C]$ σε διαστήματα $[1, p]$, $[p, p^2]$, $\ldots$ $[p^{N-1}, p^N]$. Όπως και πριν αν $\#\mathcal{A} > N + 1$ τότε υπάρχουν τουλάχιστον 2 στοιχεία της $\mathcal{A}$ που το μήκος τους να βρίσκεται σε ένα από αυτά τα διαστήματα και άρα τα μήκη τους να έχουν λόγο το πολύ $p = C^{\frac{1}{N}}$ για να πετύχουμε όμως και το μήκος και το πλάτος να είναι p-ανάλογα και τα $\frac{1}{N}$ ορθογώνια να τέμνονται χρειαζόμαστε πληθάριθμο $>\quad (N+1)\cdot(N+1)\cdot N^2 C^4$. Μέχρι τώρα με το να «παίζουμε» με τον πληθάριθμο έχουμε πετύχει να υπάρχουν δύο ορθογώνια που να τέμνονται αρκετά και να έχουν ανάλογες πλευρές. Μένει τώρα να υπολογίσουμε πόσο πρέπει να είναι αυτή η αναλογία (δηλαδή να βρούμε το N) για να ισχύει το συμπέρασμα. Θα μας χρειαστεί η μεταξύ τους γωνία. Έστω λοιπόν δύο ορθογώνια R_1, R_2 με γωνία αξόνων ϕ και μήκη l_1, l_2 $l_1 \leq l_2$, πλάτη w_1, w_2 $w_1 \leq w_2$ για τα οποία ισχύουν τα παραπάνω. Από υπόθεση $R_2 \subset CR_1$ και άρα

$$\text{διαγώνιος}(R_2) \cdot \sin(\phi) \leq Cw \Rightarrow \sin(\phi)\sqrt{l_2^2 + w_2^2} \leq Cw_1$$
$$\Rightarrow \sin(\phi) \leq C\frac{w_1}{\sqrt{l_2^2 + w_2^2}} \leq \frac{C^2 w}{\sqrt{l^2 + w^2}} \leq C^2\frac{w}{l}$$

Και χρησιμοποιώντας ότι $\frac{2}{\pi}\phi \leq \sin(\phi) \leq \phi$ όταν $\phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ παίρνουμε

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}C^2\frac{w}{l}$$

Αυτή θα είναι και η γωνία που πρέπει να έχουν οι σμικρύνσεις $T_1 = \frac{1}{N}R_1$ και $T_2 = \frac{1}{N}R_2$. Επιπλέον για $R_2 \subset 2R_1$ αρκεί $NT_2 \subset 2NT_1$.Χωρής βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το κέντρο του T_1 είναι η αρχή των αξόνων. Έστω $A = (A_x, A_y)$ το κέντρο του T_2 και $B = B_x, B_y$ ένα τυχαίο σημείο του. θέλουμε $A + N(B - A) \in 2NT_2$ Επιπλέον χρησιμοποιώντας στοιχειώδη γεωμετρία παρατηρούμε ότι αρκεί

ι) $|A_x + N(B_x - A_x)| \leq 2w\frac{l_1}{Nw}$

ιι) $|A_y + N(B_y - A_y)| \leq 2w\frac{w_1}{2N}$

. Για το ι) έχουμε :

$$A_x \leq \frac{\text{μήκος } T_1}{2} + \frac{\text{διαγώνιος } T_2}{2} = \frac{l_1 + \sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N} \leq \frac{l_1 + \sqrt{2}l_2}{2N} \leq \frac{1 + \sqrt{2}p}{2N}l_1$$
$$|B_x - A_x| \leq \frac{\text{διαγώνιος } T_2}{2} = \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{l_2}{N} \leq \frac{p}{\sqrt{2}N}l_1$$

Τελικά

$$|A_x + N(B_x - A_x)| \leq \frac{l_1 + \sqrt{2}l_2}{2N} \leq \frac{1 + \sqrt{2}p}{2N}l_1 + \frac{p}{\sqrt{2}N}l_1$$

αρκεί

$$\frac{1 + \sqrt{2N^{-1}}}{2N} + \frac{\sqrt{2N^{-1}}}{\sqrt{2}} \leq 1$$

το οποίο ισχύει για κατάληλη επιλογή του N.

Γεια το ιι) :Α θ την γωνία της διαγωνίου του μεγάλου άξονα του R_2, τότε

$$\begin{aligned}
|A_y| &\leq \frac{\text{πλάτος } T_1}{2} + \frac{\text{διαγώνιος } T_2}{2} = \frac{w_1}{2N} + \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N}\sin(\phi+\theta) \leq \frac{w_1}{2N} + \frac{\sqrt{2}l_2}{2N}(\phi+\theta) \\
&\leq \frac{w_1}{2N} + \frac{w_2}{\sqrt{2}N} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}C^2\frac{l_2 w}{N^2 l} \\
&\leq \frac{w_1}{2N} + \frac{w_2}{N\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}C^2\frac{w}{N} = \left(\frac{1}{wN} + \frac{\pi C^3}{2\sqrt{2}N^2}\right)w_1 + \frac{w_2}{w\sqrt{2}} \\
&\leq \left(\frac{1}{2N} + \frac{\pi C^3}{2\sqrt{2}N^2}\right)w_1 + \frac{pw_1}{N\sqrt{2}} \\
|B_y - A_y| &\leq \frac{\sqrt{w_2^2 + l_2^2}}{2N}\sin(\phi+\theta) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{C^3}{N^2}w_1 + \frac{w_2}{N\sqrt{2}} \\
&\leq \frac{\pi C^3}{2\sqrt{2N^2}}w_1 + \frac{pw_1}{N\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Τελικά είναι αρκετο να ισχύει

$$w_1\left(\frac{1}{2N} + \frac{\pi c^3}{2N^2\sqrt{2}}\right) + \frac{w_2}{N\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{C^3}{N}w_1 + \frac{w_2}{\sqrt{2}} \leq w_1$$

ή απλούστερα

$$\frac{1}{2N} + \frac{\pi c^3}{2\sqrt{2}N^3} + \frac{1}{N\sqrt{2}} + \frac{\pi C^3}{2N\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 1$$

το οποίο είναι εφικτό αν επιλέξουμε το N αρκετά μεγάλο □

Πρόταση 2. *Έστω ϵ και t με $\epsilon < C_2$ και C_2 μια σταθερά.Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια από ορθογώνια με μήκη ανάμεσα σε t και $C_2 t$ και πλάτη ανάμεσα σε ϵt και $2\epsilon t$ τότε αν για κάθε $T \in \mathcal{F}$ κανένα ορθογώνιο με τον ίδιο άξονα και κέντρο με το T και πλάτος ρt δεν περιέχει πάνω από $m\frac{\rho}{\epsilon}$ στοιχεία της $\mathcal{F}$, για κάθε $\rho > 2\epsilon$ τότε*

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}}\chi_T\right\|_2^2 \leq Cm\log\tfrac{1}{\epsilon}\sum_{T\in\mathcal{F}}|T|$$

Απόδειξη. Διαμερίζω τον διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ σε τόξα $[0, \epsilon]$, $[\epsilon, 2\epsilon]$, ... , $\left[2^{N-1}\epsilon, \frac{\pi}{2}\right]$ και σταθεροποιώ ένα ορθογώνιο T_i. Αν κάποιο ορθογώνιο T_j, τέμνει το T_i σε γωνία αξόνων ω τότε η τομή τους σχηματίζει ένα παραλληλόγραμμο με εμβαδόν

$$|T_i \cap T_j| = \text{ βάση } \cdot \text{ ύψος } = \text{ πλάτος}\,(T_i)\,\frac{\text{πλάτος}\,(T_j)}{\sin\omega}$$

Χρησιμοποιώντας ότι το πλάτος είναι μικρότερο από $2\epsilon t$ και ότι $\omega\frac{2}{\pi} \leq \sin\omega \leq \omega$:

$$|T_i \cap T_j| \leq C\frac{\epsilon^2}{\omega} \quad .$$

Ισχύει ότι :

$$\left\|\sum_{T\in\mathcal{F}}\mathcal{X}_T\right\|_2^2=\int\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}\mathcal{X}_{T_i}\cdot\mathcal{X}_{T_j}=\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}\int\mathcal{X}_{T_i\cap T_j}=\sum_{T_i,T_j\in\mathcal{F}}|T_i\cap T_j|$$
$$\leq\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{N}C\frac{\epsilon^2 t}{\omega}\#\left\{T_j:\text{το } T_j \text{ τέμνει το } T_i \text{ σε γωνία } \omega: 2^{k-1}\epsilon\leq\omega\leq 2^k\epsilon\right\}+\right.$$
$$\left.+C_2\epsilon t\#\left\{T_j:\ \text{το } T_j \text{ τέμνει το } T_i \text{ σε γωνία } \omega: 0\leq\omega\leq\epsilon\right\}\right)$$

Ακόμα $2^{N-1}\epsilon<\frac{\pi}{2}\Rightarrow N\leq C\left(\log\frac{1}{\epsilon}+\log\frac{\pi}{2}\right)+1$ Όποτε αν $\log\frac{1}{\epsilon}>\log\frac{\pi}{2}+\frac{1}{C}$ μπορούμε να αντικαταστήσουμε το N με $C\log\frac{1}{\epsilon}$ Τέλος ω όλα τα ορθογώνια που τέμνουν το σταθεροποιημένο T_i σε γωνία βρίσκονται σε ένα ορθογώνιο με το ίδιο κέντρο, άξονα, μήκος $4C_2t$, πλάτος $2C_2\cdot\omega t$ και σύμφωνα με την υπόθεση, το πλήθος τους είναι το πολύ $\frac{m2C_2\omega}{\epsilon}$. Άρα

$$\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{N}C\frac{\epsilon^2 t^2}{\omega}\#\left\{T_j:\text{το } T_j \text{ τέμνει το } T_i \text{ σε γωνία } \omega: 2^{k-1}\epsilon\leq\omega\leq 2^k\epsilon\right\}+\right.$$
$$\left.+C_2\epsilon t^2\#\left\{T_j:\text{το } T_j \text{ τέμνει το } T_i \text{ σε γωνία } \omega: 0\leq\omega\leq\epsilon\right\}\right)\leq\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\left(\sum_{k=1}^{C\log\frac{1}{\epsilon}}C\frac{\epsilon^2t^2}{\omega}\cdot\frac{m2C_2\omega}{\epsilon}+Ct^2\epsilon\frac{m2C_22\epsilon}{\epsilon}\right)$$
$$\leq Cm\log\frac{1}{\epsilon}\sum_{T_i\in\mathcal{F}}\epsilon t^2\leq Cm\log\frac{1}{\epsilon}\sum_{T\in\mathcal{F}}|T|$$

□

Λήμμα 1. *Έστω C_0 μια σταθερά αρκετά μεγάλη και Q_0 ένα τετράγωνο στο επίπεδο με πλευρά C_0. Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια ορθογωνίων με πλάτος $\delta=R^{-\frac{1}{2}}$, μήκος 1 και πληθάριθμο $\#\mathcal{F}=\delta^{-100}$ τα οποία περιέχονται στο Q.Αν υποθέσουμε ότι τα μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα στις πλευρές μήκους 1 δύο οποιονδήποτε στοιχείων της οικογένειας $\mathcal{F}$ σχηματίζουν γωνία τουλάχιστον δ τότε μπορούμε να διαμερίσουμε την $\mathcal{F}$ σε το πολύ $C\left(\log(\frac{1}{\delta})\right)^2$ υποοικογένειες $\mathcal{F}_{ij}$ έτσι ώστε για κάθε i και j να υπάρχουν αριθμοί p και θ και μια οικογένεια από ορθογώνια $\mathcal{G}_{ij}=\{\tau_k\}$ με μήκος ανάμεσα σε 1 και C_0 και πλάτος ανάμεσα σε θ και 2θ έτσι ώστε να ισχύουν τα παρακάτω.*

1. *Αν $T\in\mathcal{F}_{ij}$ τότε υπάρχει $\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}$ με $T\subset\tau_k$*
2. *Αν $T\in\mathcal{F}$ τότε το T περιέχεται σε το φραγμένο αριθμό από τ_k, $\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}$*
3. *Κάθε $\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}$ περιέχει περίπου $p\frac{\theta}{\delta}$ T από την οικογένεια $\mathcal{F}$.*
4. $\|\sum_{\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}}\chi_{\tau_k}\|_2^2\leq C\log(\frac{1}{\delta})\sum_{\tau_k\in\mathcal{G}_{ij}}|\tau_k|$
5. $\|\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}}\chi_T\|_2^2\leq C\log(\frac{1}{\delta})p\sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}}|T|$

Απόδειξη. Για κάθε ορθογώνιο $T \in \mathcal{F}$ ορίζουμε Π_T να είναι εκείνο το ορθογώνιο με το ίδιο κέντρο και πλευρές παράλληλες στο T το οποίο να μεγιστοποιεί την ποσότητα

$$d(\Pi) = \delta \frac{\#\big(\{T' \in \mathcal{F} :\ T' \subset \Pi\}\big)}{|\Pi|}$$

. Από τον τρόπο κατασκευής του Π_T ισχύει ότι

1. Το Π_T περιέχει το T και το πολύ να περιέχει όλα τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ που βρίσκονται στο τετράγωνο πλευράς C_0.Άρα $1 \leq$ μήκος του $\Pi_T \leq 2\sqrt{2}C_0$ και $\delta \leq$ πλάτος του $\Pi_T \leq \sqrt{2}C_0$
2. $d(\Pi_T) \leq \delta \frac{\#\mathcal{F}}{|T|} = \delta^{-100}$

Διαμερίζουμε την $\mathcal{F}$ ως έξής. Αν το πλάτος του Π_T το πούμε θ_T τότε για κάποιο $i \in \mathbb{Z}$ και για κάποιο $j \in \mathbb{Z}$ έχουμε $2^{-i-1} < \theta_T \leq 2^{-i}$ και $2^j < d(\Pi_T) \leq 2^{j+i}$. Ορίζουμε $\mathcal{F}_{ij} := \big\{T \in \mathcal{F} : \theta_T \in (2^{-i-1}, 2^{-i}]$ και $d(\Pi_T) \in (2^j, 2^{j+i}]\big\}$, $p = 2^j$ και $\theta = C_1 2^{-i-1}$, οπού C_1 μια σταθερά η οποία θα καθοριστει αργότερα. Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το i είναι τέτοια ώστε $2^{-i_{min}} \approx 2\sqrt{2}C_0$ και η μεγαλύτερη είναι τέτοια ώστε $2^{-i_{max}} \approx \delta$. Δηλαδή

$$i_{max} - i_{min} \approx -\log(\delta) + \log\left(2\sqrt{2}C_0\right) = \log\left(\tfrac{2\sqrt{2}C_0}{\delta}\right)$$

Όμοια και για το j

$$1 \leq 2^j \leq \delta^{-100} \Rightarrow 0 \leq j \leq 100 \log \frac{1}{\delta}$$

Τελικά έχουμε $i \cdot j \leq \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot 100 \log\left(\frac{1}{\delta}\right) = 100\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)^2$

Για κάθε i, j θεωρούμε ένα μεγιστικό υποσύνολο $\mathcal{G}_{ij}$ του $\mathcal{F}_{ij}$ τέτοιο ώστε αν $T_1, T_2 \in \mathcal{G}_{ij}$ να συνεπάγεται ότι $\Pi_{T_1} \not\subseteq \Pi_{T_2}$. Ορίζω $\mathcal{G}_{ij} := \{C_1 \cdot \Pi_T,\, T \in \mathcal{G}^*_{ij}\}$

Για να δείξουμε το 1 κάνουμε το εξής : έστω $T_0 \in \mathcal{F}_{ij}$. Αν $C_1\Pi_{T_0} \in \mathcal{G}_{ij}$ τότε $T_0 \subset C_1\Pi_{T_0}$ και έχουμε τελειώσει .Αν $C_1\Pi_{T_0} \notin \mathcal{G}_{ij}$, υπάρχει κάποιο T_1 με $C_1\Pi_{T_1} \in \mathcal{G}_{ij}$ και $\Pi_{T_0} \subset 2\Pi_{T_1}$ ή $\Pi_{T_1} \subset 2\Pi_{T_0}$. Αν ισχύει το πρώτο έχουμε τελειώσει. Στην περίπτωση που ισχύει το δεύτερο, παρατηρούμε ότι τα Π_{T_1}, Π_{T_0} έχουν συνγκρίσημα πλάτη και μήκη διότι τα πλάτη τους κυμαίνονται από $C_1 2^{-i-1}$ έως $C_1 2^{-i}$ ενώ τα μήκη από 1 ώς $2\sqrt{2}C_0$. Συμπεραίνουμε ότι για κατάλληλα μεγάλη σταθερά C_1 πετυχαίνουμε να ισχύει $T_0 \subset \Pi_{T_0} \subset C_1\Pi_{T_1}$.Για το 2 :Έστω δύο τυχόντας $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ που περιέχουν το ίδιο T. Επειδή έχουν συνγκρίσιμες διασασεις το ένα περιέχεται σε καταλήλη παραμόρφωση του άλλου.Αν λάβουμε υπόψη οτί κανένα τ_k δεν περιέχεται στο διπλάσιο κάποιου αλλου τότε από την πρόταση 1, ο πληθάριθμος ενως τέτοιυ συνόλου είναι φραγμένος.

Για το 3, έστω ένα $\tau_k = C_1\Pi_T \in \mathcal{G}_{ij}$ και τα αντίστοιχα Π_T και T. Τότε εξ' ορισμού

$$d(\Pi_T) = \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \Pi_T\}}{|\Pi_T|} \Rightarrow p = 2^j \leq \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \Pi_T\}}{\theta_T} \leq \delta C_1 \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \Pi_T\}}{\theta}$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\Pi_T \subset \tau_k = C_1\Pi_T$ βρίσκουμε ότι

$$\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \tau_k\} \gtrsim p\frac{\theta}{\delta}$$

Από την άλλη μεριά το Π_T μεγιστοποιεί την συνάρτηση d και άρα

$$d(\tau_k) = \delta \frac{\#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \tau_k\}}{|\tau_k|} \lesssim p \Rightarrow \#\{T' \in \mathcal{F} : T' \subset \tau_k\} \lesssim p \frac{|\tau_k|}{\delta} \lesssim p \frac{\theta}{\delta}$$

Έστω ένα $\tau_k = C_1 \Pi_T \in \mathcal{G}_{ij}$ και R ένα τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στο τ_k και το ίδιο κέντρο και πλάτος ρ. Αν το R περιέχει n $\tau_k \in \mathcal{G}_{ij}$ τότε από τις 2 και 3 θα περιέχει τουλάχιστον $np\frac{\theta}{\delta}$ ορθογώνια T από την $\mathcal{F}$. Από την μεγιστική ιδιότητα του Π_T, ισχύει ότι

$$d(R) \leq d(\Pi_T) \Rightarrow \delta \frac{np\frac{\theta}{\delta}}{\rho} \lesssim \delta \frac{p\frac{\theta}{\delta}}{\theta} \Rightarrow n \leq C\frac{\rho}{\theta}$$

Εφαρμόζουμε την πρόταση 2 με $m = C$, $t = 1$, $\epsilon = \theta$ και αποδεικνύουμε το 4. Όμοια για το 5 εφαρμόζουμε την πρόταση 2 με $m = Cp$, $t = 1$, $\epsilon = \delta$, όπου Σ είναι η καταληλη σταθερα στο 3, για την οποία ισχύει οτίκανένα ορθογώνιο δεν περιέχει παραπάνω από $C\rho\frac{\theta}{\delta}$ στοιχεία της οικογένειας □

Για κάθε ορθογώνιο T στον R^2 ορίζουμε Γ_T ως τον γραμμικό μετασχηματισμό που στέλνει το T στο μοναδιαίο τετράγωνο. Αν επιπλέον $\phi(x) = \max\{\|x\|^k, 1\}$ τότε ορίζουμε $\phi_T^{(k)} = \phi(\Gamma_T)$. Δϊαιρούμε τον κύκλο σε τόξα β που το καθένα έχει μήκος περίπου $R^{-\frac{1}{2}}$ καθώς και σε τόξα Θ με μήκος περίπου θ, έτσι ώστε κάθε τόξο β να περιέχεται σε κάποιο τόξο Θ. Για τις οικογένειες $\mathcal{F}_{ij}$, $\mathcal{G}_{ij}$ του προηγούμενου λήμματος θεωρούμε τις συνάρτησεις

$$\psi_\beta^{(k)} = \sum_{\substack{T \in \mathcal{F}_{ij}, \\ \text{γωνία του } T \\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \phi_T^{(k)}$$

$$\psi_\Theta^{(k)} = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{G}_{ij}, \\ \text{γωνία του } \tau \\ \text{περιέχεται στο } \Theta}} \phi_\tau^{(k)}$$

Λήμμα 2. *Για τις συναρτήσεις $\psi_\beta^{(k)}$, $\psi_\Theta^{(k)}$ ισχύουν*

$$\left\| \sum_\beta \psi_\beta^{(k)} \right\|_2^2 \lesssim p \log R \sum_{T \in \mathcal{F}_i j} |T|$$

$$\left\| \sum_\Theta \psi_\Theta^{(k)} \right\|_2^2 \lesssim \log R \sum_{\tau \in \mathcal{G}_i j} |T|$$

Όταν $k \geq 4$

Απόδειξη. Έστω $A > 0$ και η οικογένεια F_{ij} τότε τα ορθογώνια AT και $A\tau$ έχουν πλάτη από $A\delta$ έως $A2\delta$, από $AC_1 2^i$ έως $AC_1 2^{i+1}$ αντοίστοιχα και μήκη από A μέχρι $CC_0 A$. Για το πρώτο: Γνωρίζουμε ότι για σταθεροποιημένα T και κάποιο $A\rho > 0$ υπάρχουν λιγότερο από $\frac{Am\rho}{\delta}$ άλλα που περιέχονται σε κάθε ορθογώνιο με πλευρά $A\rho$ και άρα και λιγότερα AT ορθογώνια που θα περιέχονται. Τελικά από το λήμμα 1 , ισχύει

$$\left\| \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} \chi_{AT} \right\|_2^2 \lesssim A^3 p \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T| \quad (m=p)$$

και

$$\left\| \sum_{\tau\in\mathcal{G}_{ij}} \chi_{A\tau} \right\|_2^2 \lesssim A^3 \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T| \quad (m= \text{ σταθερά })$$

Θεωρούμε μια βοηθητική συνάρτηση $B_t = \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m T}$. Θα δείξουμε ότι $\phi_T^{(k)} \lesssim B_T$. Αρκεί να δείχθεί ότι $\phi_T^{(k)} \circ \Gamma_T^{-1} \lesssim B_T \circ \Gamma_T^{-1}$. Όπου ο Γ_T^{-1} είναι ο αφινικος μετασχηματισμός που στέλνει το T στο Q. Με άλλα λόγια θα δουλέψουμε με το Q στην θέση του T. Έστω $x\in\mathbb{R}^2$ τότε υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $2^{-km} \geq \phi^{(k)}(x) \geq 2^{-(m-1)k}$ και άρα για κάθε $x\in[2^m, 2^{m+1}]$ $\phi^{(k)}(x) \leq 2^{-km}\chi_{2_{-(m+1)Q}}(x) = 2^k 2^{(-m-1)k}\chi_{2^{-(m+1)}Q}(x)$.Τέλος για όλα τα $x\in\mathbb{R}$

$$\phi^{(k)}(x) \leq 2^k \sum_{m=0}^{+\infty} 2^{-km}\chi_{2^m Q}(x)$$

Τελικά έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_\beta \psi_\beta^{(k)} \right\|_2^2 &= \left\| \sum_\beta \sum_{\substack{T\in\mathcal{F}_{ij},\\ \text{γωνία του } T \\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \phi_T^{(k)} \right\|_2^2 \leq \left\| 2^k \sum_\beta \sum_{\substack{T\in\mathcal{F}_{ij},\\ \text{γωνία του } T \\ \text{περιέχεται στο } \beta}} \sum_{m=1}^{i} 2^{-km}\chi_{2^m Q} \right\|_2^2 \\
&= \left\| 2^k \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} \sum_{m=1}^{i} 2^{-km}\chi_{2^m Q} \right\|_2^2 = \left\| 2^k \sum_{m=1}^{i} \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} 2^{-km}\chi_{2^m Q} \right\|_2^2 \\
&\overset{\text{Minkowski}}{\lesssim} \sum_{m=1}^{+\infty} \left\| \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} 2^{-km}\chi_{2^m T} \right\|_2^2 \leq \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{Cp}{2^{-3km}} \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T| \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 \\
&\leq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{Cp}{2^{-3km}} \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T| = Cp \log R \sum_{T\in\mathcal{F}_{ij}} |T|
\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η δευτερη ανισώτητα

□

Έστω A_r ο δακτύλιος $A_r = \{\xi :\ R-1 \leq |\xi| \leq R+1\}$ και έστω μια διαμερίση του σε ξένα τμήματα δακτυλίου β με κυκλικό μήκος περίπου $\frac{1}{\sqrt{R}}$, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα β είναι της μορφής

$$\left\{ \xi\ : |\xi| \in (R-1, R+1), \frac{\xi}{\|\xi\|} \in \gamma \right\}$$

με γ να είναι τμήμα του μοναδιαίου κύκλου με μήκος περίπου $\frac{1}{\sqrt{R}}$. Έπειτα θεωρούμε την επιμήκυνση του κατά C και την συμβολίζουμε με $C\beta$ δηλαδή κάθε $C\beta$ είναι της μορφής

$$\left\{\xi \ : |\xi| \in (CR-1, CR+1), \frac{\xi}{\|\xi\|} \in \gamma'\right\}$$

όπου $\gamma' = C\gamma$ αν $C\gamma \leq 2\pi$ η $\gamma' = 2\pi$ αλλιώς. Έστω f μια συνάρτηση με την ιδιότητα $f = \sum_\beta f_\beta$ όπου όλες οι f_β έχουν φορέα το $C\beta$ και έστω $G_\beta = \widehat{f_\beta}$. Έστω Θ μια άλλη διαμέριση του δακτυλίου τέτοια ώστε κάθε β να περιέχεται σε ένα Θ. Ορίζουμε

$$Sf = \left(\sum_\beta |G_\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad S_\theta f = \left(\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subset\Theta} G\beta\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

.

Λήμμα 3. $\|S_\theta f\|_4 \leq C\|Sf\|_4$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το έχουμε κάνει με την f να έχει φορέα σε ένα ογδοιμόριο του κύκλου. Τότε ορίζουμε τις

$$f_{\beta_i} = \begin{cases} f_\beta & \text{αν το } \beta \text{ περιέχεται στο } i \quad \text{τεταρτημόριο} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Και παρατηρούμε ότι $f_\beta = \sum_{\beta_i} f_{\beta_i}$ Άρα έχουμε

$$S_\theta f = S_\theta \sum_i f_{\beta_i} = \left(\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subset\Theta}\sum_i G_{\beta_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_\Theta \left|\sum_i\sum_{\beta\subset\Theta} G_{\beta_i}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overset{Minkoswki}{\lesssim} \left(\sum_i\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subset\Theta} G_{\beta_i}\right|^2\right) = \sum_i S_\theta f_i$$

Από τριγωνική ανισότητα :

$$\|S_\theta f\|_4 \leq \sum_i \|S_\theta f_i\| \lesssim \sum_i \|Sf_i\|_4 = \sum_i \left(\int \left(\sum_\beta |G_{\beta_i}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

χρησιμοποιώντας την holder :

$$\lesssim \left(\int \sum_i \left(\sum_\beta |G_{\beta_i}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\leq \left(\int \left(\sum_i\sum_\beta |G_{\beta_i}|^2\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int \left(\sum_\beta\sum_i |\widehat{f_{\beta_i}}\overline{\widehat{f_{\beta_i}}}|\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

Θέτω $h_{ij} = \sum_\beta f_{\beta_i} * \tilde{f_{\beta_j}}$

Τότε

$$\sum_\beta |G_{\beta_i}||^2 = \sum_\beta \widehat{f_{\beta_i}}\overline{\widehat{f_{\beta_i}}} = \widehat{\left(\sum_\beta f_{\beta_i} * \widetilde{f_{\beta_i}}\right)} = \widehat{h_{ii}}$$

Και

$$\sum_\beta |G_\beta||^2 = \sum_\beta \widehat{f_\beta}\overline{\widehat{f_\beta}} = \widehat{\left(\sum_\beta f_\beta * \widetilde{f_\beta}\right)} = \widehat{h}$$

Άρα

$$\left(\int \left(\sum_i \sum_\beta |\widehat{f_{\beta_i}}\overline{\widehat{f_{\beta_i}}}|\right)^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int \left|\sum_i \widehat{h_{ii}}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\overset{\text{plancerel}}{=} \left(\int \left|\sum_i h_{ii}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int \left|\sum_{i,j} h_{i,j}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} (\text{ αφού } h_{ij} = 0 \text{ όταν } i \neq j)$$

$$= \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{4}} \overset{\text{plancerel}}{=} \left(\int \left|\widehat{h}\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\int \left|\sum_\beta G_\beta\right|^2\right)^{\frac{1}{4}} = \|Sf\|_4^4$$

Και το ζητούμενο έπεται άμεσα. Μένει μόνο να το δείξουμε, χωρίς πλέων βλάβη της γενικότητας για συνάρτησης με φορέα το πρώτο ογδοιμόριο.

$$\|S_\theta f\|_4^4 = \left\|\sum_\Theta \left|\sum_{\beta\subset\Theta} G_\beta\right|^2\right\|_2^2 = \left\|\sum_\Theta \left|\sum_{\beta,\beta_1\subset\Theta} G_\beta G_{\beta_1}\right|^2\right\|_2^2 \overset{Plancerel}{=} \left\|\sum_\Theta \left|\sum_{\beta,\beta_1\subset\Theta} \widehat{G_\beta} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}}\right|^2\right\|_2^2$$
$$= \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\beta,\beta_1\subset\Theta_1} \sum_{\beta_2,\beta_3\subset\Theta_2} \int \left(\widehat{G_\beta} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}}\right)\left(\widehat{G_{\beta_2}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right)$$

.Στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε απλός ότι $|\sum_i a_i|^2 = \sum_{i,j} a_i a_j$. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε ότι $\int f(y)g(y)\,dy = \int f(y-0)g(y)\,dy = f * g(0)$ και την μεταθετιτότητα της συνέλιξης. Η τελευταία γραμμή γίνεται

$$\sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\beta,\beta_1\subset\Theta_1} \sum_{\beta_2,\beta_3\subset\Theta_2} \widehat{G_\beta} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widehat{G_{\beta_2}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}(0) =$$
$$\sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\beta,\beta_1\subset\Theta_1} \sum_{\beta_2,\beta_3\subset\Theta_2} \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right) * \left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right)(0)$$

Ας εκτιμήσουμε την ποσότητα $\left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right) * \left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right)(0)$:

$$\left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right) * \left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right)(0) = \int \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right)\left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right) \quad \beta,\beta_1 \in \Theta_1,\ \beta_2,\beta_3 \in \Theta_2$$

Όμως $\widehat{G_\beta} = \widehat{\widehat{f_\beta}} = \widetilde{f_\beta}$ και το κάθε f_β έχει φορέα το $C\beta$ και κάθε $f_{\beta_j} * f_{\beta_j}$ έχει φορέα το $C\beta_i + C\beta_j$ και κάθε χ βρίσκεται σε ένα φραγμένο πλήθος από τέτοια σύνολα. Αν k το πλήθος αυτό τότε.

$$\int \sum_{\substack{\beta\in\Theta_1\\ \beta_2\in\Theta_2}} \sum_{\substack{\beta\in\Theta_1\\ \beta_2\in\Theta_2}} \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right)\left(\widetilde{\widehat{G_{\beta_1}}} * \widetilde{\widehat{G_{\beta_3}}}\right) = \int \left(\sum_{k_i,k_j,\, x\in k_i,k_j} \widehat{G_{\beta_{k_i}}} * \widehat{G_{\beta_{k_j}}}\right)^2$$

$$\overset{Holder}{\leq} k \sum_{\substack{\beta\in\Theta\\ \beta_2\in\Theta_2}} \int \left(\widehat{G_\beta} * \widehat{G_{\beta_2}}\right)^2 \overset{Plancerel}{=} k \sum_{\substack{\beta\in\Theta\\ \beta_2\in\Theta_2}} \int \left(G_\beta G_{\beta_2}\right)^2 .$$

Τέλος

$$\|S_\theta f\|_4^4 \lesssim \sum_{\Theta_1,\Theta_2} \sum_{\substack{\beta\in\Theta\\ \beta_2\in\Theta_2}} \int \left(G_\beta G_{\beta_2}\right)^2 = \|Sf\|_4^4$$

□

Το παρακάτω λήμμα είναι μια ειδική μορφή της αρχής της αβεβαιότητας

Λήμμα 4. *Έστω $\phi = \phi^{(M)} = min\{1, \|x\|^{-M}\}$ και έστω G μια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός fourier $\widehat{G}$ έχει φορέα σε ένα ορθογώνιο ρ. Τότε για κάθε δυϊκό ορθογώνιο σ ισχύει*

$$\left\|\frac{G}{\phi_\sigma}\right\|_\infty^2 \lesssim |\rho| \left\|\frac{G}{\phi_\sigma^{-2}}\right\|_2^2$$

Όπου $\phi_\sigma = \phi\left(T_\sigma\right)$ με T_σ ο αφινικός μετασχηματισμός που στέλνει το μοναδιαίο τετράγωνο στο ορθογώνιο Q στο σ.

Απόδειξη.

Θα το κάνουμε πρώτα με την υπόθεση ότι $\sigma = \rho = Q$. Αφού έστω k μια συνάρτηση Σωαρτζ τέτοια ώστε $\hat{k}(x) = 1$ όταν $x \in Q$. Τότε $\widehat{k * G} = \hat{k}\hat{G} = \hat{G}$ αφού εκεί που η $\hat{G}$ δεν είναι μηδέν η $\hat{k}$ είναι 1. Από το θεώρημα μοναδικότητας του μετασχηματισμού fourier πρέπει $k * G = G$ σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$.Ισχύει ότι

$$\left\|\frac{G}{\phi}\right\|_\infty = \left\|\frac{G * k}{\phi}\frac{\phi^2}{\phi^2}\right\|_\infty = \left\|\int \max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} \frac{G}{\phi^2}(y)\, dy\right\|_\infty$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις :

I. $x \in Q$ και $y \in Q$. Τότε

$$\max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} = k(x-y) \leq \|k\|_\infty$$

II. $x \in Q$ και $y \notin Q$. Τότε

$$\max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} = k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} \leq \left\| k\|y\|^{-2M}\right\|_\infty < +\infty$$

III. Όμοια αν $x \notin Q$ και $y \in Q$,

$$\max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} \leq \left\| \, k\|x\|^M \right\|_\infty < +\infty$$

IV. Αν $x \notin Q$ και $y \notin Q$. Τότε

$$\begin{aligned}\max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} &= \frac{\|x\|^M}{\|y\|^{2M}} k(x-y) \leq 2^{2M} \frac{(\|x\|+1)^M}{(\|y\|+1)^{2M}} k(x-y) \\ &\leq 2^{2M}(1+\|x-y\|)^M k(x-y) \\ &\leq C\|k(y)(1+\|y\|)^{-M}\|_\infty < +\infty.\end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήσαμε ότι $\|y\| > 1 \Rightarrow \|y\| \geq \frac{1}{2}(\|y\|+1)$ και την ανισότητα $(1+\|y\|)(1+\|x-y\|) \geq 1+\|x\|$.

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι μπορώ να επιλέξω κατάλληλη σταθερά C έτσι ώστε

$$\left\| \int \max\left\{1, \|x\|^M\right\} k(x-y) \min\left\{1, \|y\|^{-2M}\right\} \frac{G}{\phi^2}(y)\, dy \right\|_\infty \leq \int C(1+\|y\|)^M \frac{G}{\phi^2}(y)\, dy$$

$$\overset{holder}{\leq} \| \, C(1+\|y\|)^M\|_2^2 \left\|\frac{G}{\phi^2}\right\|_2^2 = C \left\|\frac{G}{\phi^2}\right\|_2^2$$

Θα περάσουμε στην γενική περίπτωση τώρα. Έστω ένα ορθογώνιο ρ με κέντρο k και ένα δυϊκό σ με κέντρο λ. Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που στέλνει το Q στο $\rho - k$ Τότε T^{-t} είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που στέλνει το Q στο $\sigma - \lambda$. Έστω $\widehat{G}$ με φορέα το ρ. Τότε

$$\left\|\frac{G}{\phi_\sigma}\right\|_\infty = \left\| \frac{|detT|^{-1} e^{-2\pi\iota k T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi)}{\phi_\sigma(T^{-t}\xi)} \right\|_\infty \cdot |detT|$$

.όμως

$$\begin{aligned}\left(|detT|^{-1} e^{-2\pi\iota k T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi)\right)\widehat{} &= \int |detT|^{-1} e^{2\pi\iota x\cdot\xi} e^{-2\pi\iota k T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi) \\ &= \int |detT|^{-1} e^{2\pi\iota\left(xT^tT^{-t}\xi + kT^{-t}\xi\right)} G(T^{-t}\xi) \\ &= \int |detT|^{-1} e^{2\pi\iota\left(xT^t + k\right)T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi) \\ &= \int e^{2\pi\iota(Tx+k)\xi} G(\xi) = \widehat{G}(Tx+k)\end{aligned}$$

Οι $\phi_\sigma(T^{-t}\xi), \widehat{G}(Tx+k)$ έχει φορέα το Q και μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα στον μοναδιαίο κύβο, παίρνοντας τελικά

$$\left\|\frac{G}{\phi_\sigma}\right\|_\infty = \left\| \frac{|detT|^{-1} e^{-2\pi\iota k T^{-t}\xi} G(T^{-t}\xi)}{\phi_\sigma(T^{-t}\xi)} \right\|_\infty \cdot |\rho| \lesssim C|\rho| \left\|\frac{G}{\phi_\sigma^2}\right\|_2^2$$

□

Λήμμα 5. *Έστω μ ένα μέτρο του οποίου ο φορέας περιέχεται στον μοναδιαίο δίσκο και με α-διαστατη ενέργεια $I_\alpha = 1$. Τότε μπορούμε να διαμερίσουμε το μ σε ένα άθροισμα μέτρων μ_j με πλήθος $\mathcal{O}(\log R)$ για τα οποία ισχύει:*

(1) $$\mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) \sup_x \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \lesssim 1.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in D(0;1)$ έχουμε ότι $D(x;r) \cap D(0;1) \subset D(x;2)$ και άρα

$$\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu\big(D(x;r)\big)}{r^\alpha} \geq \frac{\mu\big(D(x;2)\big)}{2^a}$$

Αφού ο φορέας του μέτρου βρίσκεται στον $D(0;1)$ και $\mu\big(D(x;r) \cap D(0;1)\big) = \mu\big(D(x;r)\big)$.Από την άλλη μεραιά

$$\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu\big(D(x;r)\big)}{r^\alpha} \leq \frac{\mu\big(\mathbb{R}^2\big)}{R^{-\alpha}} = \mu\big(\mathbb{R}^2\big) R^\alpha$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$E_j = \left\{ x : \quad \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{m\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \in \Big[2^{j-1}\mu\big(\mathbb{R}^2\big), 2^j \mu\big(\mathbb{R}^2\big)\Big) \right\}$$

Το μικρότερο 2^j για το οποίο το σύνολο E_j έχει μη μηδενικό μέτρο είναι της τάξης $2^{-\alpha}\mu\left(\mathbb{R}^2\right)$ και άρα το μικρότερο j είναι της τάξης $-\alpha$.Όμοια το μεγαλύτερο 2^{j-1} είναι της τάξης R^α το οποίο δίνει ένα j της τάξης $\alpha \log_2 R + 1$. Τελικά παίρνουμε ότι το πλήθος των j είναι της τάξης $C \log R$. Παρατηρούμε ότι

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \lesssim 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right)$$

. Πράγματι αν $x \in E_j$ είναι προφανές ότι $\sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\big(D(x,r)\big)}{r^\alpha} \leq 2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right)$. Αν $x \notin E_j$ Τότε Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D(x,r) \cap E_j \neq \emptyset$. Για $y \in D(x,r) \cap E_j$ ισχύει ότι

$$D(x,r) \subset D(y,2r) \Rightarrow \frac{\mu_j\left(D(x,r)\right)}{r^\alpha} \leq 2^a \frac{\mu_j\left(D(y,2r)\right)}{(2r)^\alpha} \leq 2^a \sup_{x \in E_j} \sup_{r \geq R^{-1}} \frac{\mu_j\left(D(x,r)\right)}{r^\alpha}$$

και το ζητούμενο έπεται για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$. Άρα για να αποδείξουμε το λήμμα μένει να δείξουμε ότι για κάθε j, $\mu_j\left(\mathbb{R}^2\right) = \mu(E_j) \lesssim \left(2^j \mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{-1}$ Για κάθε j ισχύει ότι το E_j είναι φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και κάθε σημείο του είναι κέντρο κάποιου δίσκου $D(x,r)$ με ακτίνα που από τον τρόπο που ορίστηκαν τα E_j μπορούμε να την επιλέξουμε έτσι ώστε $\mu\big(D(x,r)\big) \geq 2^{j-1}\mu\big(\mathbb{R}^2\big) r^\alpha$. Από το λήμμα επικάλυψης του Besicovitch υπάρχει μια το πολύ αριθμισιμη οικογένεια από τέτοιους δίσκους, $D_n(x,r)$ που καλύπτουν όλο το E_j και κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται σε έναν φραγμένο αριθμό C από αυτούς τους δίσκους. Για κάθε n έχουμε

$$\int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \geq \int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{(2r)^\alpha} = \frac{1}{(2r)^\alpha} \cdot \mu(D_n) \cdot \mu(D_n) \gtrsim \mu(D_n) 2^j \mu\big(\mathbb{R}^2\big)$$

Τελικά έχουμε

$$2^j \mu\big(\mathbb{R}^2\big) \sum_n \mu(D_n) \lesssim \sum_n \int_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = \int_{\mathbb{R}^2} \sum_n \chi_{D_n \times D_n} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} \leq C \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{|x-y|^\alpha} = C I_\alpha$$

Και το ζητούμενο έπεται άμεσα από το προηγούμενα, αν δείξουμε ότι για μέτρο μ με φορέα τον μοναδιαίο δίσκο να ισχύει

$$\int_{A_R} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta \lesssim B\mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}$$

με $B = \sup_x \sup_{r\geq R^{-1}} \frac{\mu\left(D(x;r)\right)}{r^\alpha}$.Ας υποθέσουμε οτι ισχύει, τότε για μια μια συνάρτηση Schwartz k ίση με ένα στον φορέα του μ (τον μοναδιαίο δίσκο) έχουμε ότι $d\,\widehat{\hat{k} * \hat{\mu}} = d\,k\mu = \mu$ και άρα $\hat{\mu} = \hat{k} * \hat{\mu}$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \left|\hat{k} * \widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\hat{k} * \widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left|\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{k}(y)\widehat{\mu}\left(Re^{i\theta}-y\right) dy\right|^2 d\theta \\
&\leq \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\widehat{\mu}(y)\right| dy\right)^2 d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{\mathbb{R}^2} \left|\left(\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right)^{\frac{1}{2}} \widehat{\mu}(y) \left(\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right| dy\right)^2 d\theta \\
&\overset{holder}{\leq} \int_{-\pi}^{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{\mu}(y)|^2 \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy \int_{\mathbb{R}^2} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy\, d\theta \\
&\overset{\text{η } \widehat{k} \text{ είναι Scwatrz}}{\lesssim} \int_{\mathbb{R}^2}\int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{\mu}(y)|^2\, dy \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy\, d\theta
\end{aligned}$$

Αφού η k είναι Scwartz $k(x) \leq C_n(1+|x|)^{-n}$ για όλα τα n.

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} dy \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy &\lesssim \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1+\left|R^{e^{i\theta}}-y\right|\right)^{N+2}} \\
&\leq \frac{1}{R}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rd\theta}{\left(1+\left|R^{e^{i\theta}}-y\right|\right)^2} \cdot \frac{1}{(1+|R-|y||)^N}
\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις

1. το y δεν βρίσκεται έξω από τον κύκλο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα R Σε αυτήν την περίπτωση έχω ότι τα σημεία του κύκλου έχουν μεγαλύτερη απόσταση από το y σε σύγκριση με ένα άλλο σταθεροποιημένο σημείο του κύκλου
2. το y να βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου. Σε αυτήν την περίπτωση το y δεν έχει απαραίτητα μεγαλύτερη απόσταση από τα σημεία του κύκλου εν συγκρίσει με ένα σταθεροποιημένο αλλά έχει ένα κάτω φράγμα της μορφής $|Re^{i\theta}-y| \geq \frac{1}{2}R|e^{i\theta}-1|$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{R}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rd\theta}{(1+|Re^{i\theta}-y|)^2} \cdot \frac{1}{(1+|R-|y|)^N} \lesssim \frac{1}{R}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rd\theta}{(1+R\,|e^{i\theta}-1|)^2} \cdot \frac{1}{(1+|R-|y|)^N} \\
&\leq \frac{1}{R}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{Rd\theta}{1+cR^2\theta^2} \frac{1}{(1+|R-|y|)^N} = \frac{1}{R}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+ct^2}dt \frac{1}{(1+|R-|y|)^N} \lesssim \frac{1}{R}\frac{1}{(1+|R-|y|)^N}
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\widehat{k}\left(Re^{i\theta}-y\right)\right| dy \lesssim \int_{\mathbb{R}^2} R^{-1}(1+|R-|y||)^{-N}|\widehat{\mu}(y)|^2\, dy$$

Από εκεί και πέρα έχουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} R^{-1}(1+|R-|y||)^{-N}|\widehat{\mu}(y)|^2\,dy &\leq \frac{1}{R}\sum_{m=[-\frac{R}{2}]}^{+\infty} \int\limits_{R+2m-1\leq|y|\leq R+2m+1} \frac{1}{(1+|R-|y||)^{100}}|\widehat{\mu}(y)|^2\,dy \\
&\leq \frac{1}{R}\sum_{m=[-\frac{R}{2}]}^{+\infty} \frac{R+2m}{(1+|m|)^{100}} \int\limits_{R+2m-1\leq|y|\leq R+2m+1} |\widehat{\mu}(y)|^2\,dy \\
&\leq \frac{1}{R}\sum_{m=[-\frac{R}{2}]}^{+\infty} \frac{R+2m}{(1+|m|)^{100}} B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)(R+2m)^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon} \\
&= \frac{1}{R}\cdot B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\left(\sum_{m=[-\frac{R}{2}]}^{0}\frac{R+2m}{(1-m)^{100}}\left(1-\frac{R}{m}\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{R+2m}{(1+m)^{100}}\left(1+\frac{R}{m}\right)\right) \\
&= \frac{1}{R}\cdot B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\left(\sum_{m=0}^{[-\frac{R}{2}]}\frac{R-2m}{(1+m)^{100}}\left(1+\frac{R}{m}\right)+\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{R+2m}{(1+m)^{100}}\left(1+\frac{R}{m}\right)\right) \\
&\lesssim R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\sum_{m=0}^{[-\frac{R}{2}]}\frac{1}{(1+m)^{100}} + R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(1+\frac{2m}{R})}{(1+m)^{100}} \\
&\leq R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\sum_{m=0}^{[-\frac{R}{2}]}\frac{1}{(1+m)^{100}} + R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(1+m)} \\
&\lesssim R^{-\frac{\alpha}{2}+\epsilon}
\end{aligned}
$$

$\square$

Σταθεροποιούμε μια συνάρτηση f με φορέα στον δακτύλιο $A_r = \{\xi :\ R-1 \leq |\xi| \leq R+1\}$ και με $\|f\|_{L^2} = 1$. Θέτω $G = \widehat{f(-x)}$ και $j = \left|\int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f(-x)}\,d\mu\right|$. Έστω h, μια συνάρτηση $schwartz$ της οποίας ο μετασχηματισμός fourier έχει φορέα το μοναδιαίο τετράγωνο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Από αυτήν ορίζω μια άλλη συνάρτηση

$$
b = \frac{f(x)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} f(x+k)}
$$

Για την οποία ισχύει

$$
\sum_{m\in\mathbb{Z}^2} b(x+m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^2}\frac{f(x+m)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} f(x+k+m)} = \frac{\sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^2} f(x+m)}{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^2} f(x+m)} = 1
$$

Οπότε, αν καλύψουμε το $\mathbb{Z}^2$ με ορθογώνια ρ^* δυϊκά σε δοσμένο ορθογώνιο ρ ισχύει

$\sum_{\rho^*} b_{\rho^*} = 1$ Έπειτα καλύβουμε τον δακτύλιο A_r με ξένα ανά δύο κυκλικά όρθογώνια' β για τα οποία η γωνία είναι περίπου $R^{-\frac{1}{2}}$ τα οποία περιέχονται σε κανόνικα ορθογώνια ρ_β με διαστάσεις C και $CR^{-\frac{1}{2}}$ με κατάλληλη σταθερά C.Θέτω $G = \sum_\rho G_\rho$ με $G_\rho = \widehat{\chi_\beta f(-x)}$.Για κάθε ρ στην κάλυψη του $\mathbb{Z}^2$ και για ρ^* δυϊκό του ρ ορίζω $G_\rho^{\rho^*} = b_{\rho^*}G_\rho$. Επιπλέον για το κάθε β το $\widehat{b_{\rho^*}}$θα έχει φορέα το ρ που αντιστοιχεί στο εν λόγω β. Αυτό σε συνδυασμό με την αρχή της αβεβαιότητας μας δίνει :

$$\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2=\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2\lesssim\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}|\rho|\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right\|_2^2\lesssim R^{-\frac{1}{2}}\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right\|_2^2$$

Η b_ρ είναι $swartz$ και παίρνει την τιμή 1 στο ρ^* ενώ η $\phi_{\rho^*}^{-2}$ είναι 1 στο ρ^* και πολυώνυμο στο $\mathbb{R}^2\setminus\rho^*$. Σε συνδυασμό με ότι $\sum_{\rho^*}b_{\rho^*}=1$ άρα

$$\sum_{\rho^*}\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right|\lesssim 1\Rightarrow\sum_{\rho^*}\left\|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}G_\rho\right\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^2}\sum_{\rho^*}\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}G_\rho\right|^2=\int_{\mathbb{R}^2}|G_\rho|^2\sum_{\rho^*}\left|\frac{b_{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}^2}\right|^2\lesssim\|G_\rho\|_2^2$$

. Τελικά

$$\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2\le R^{\frac{1}{2}}\sum_{\rho}\|G_\rho\|_2^2\underset{plancherel}{=}R^{\frac{1}{2}}\sum_{\rho}\|\widehat{G_\rho}\|_2^2=R^{\frac{1}{2}}\sum_{\rho}\|\chi_\beta\widehat{\widehat{f(-x)}}\|_2^2\lesssim R^{-\frac{1}{2}}$$

Συνοψίζοντας δείξαμε ότι

$$\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2\le C_M R^{\frac{1}{2}}$$

Στο λήμμα 5 αποδείξαμε ότι $\mu(\mathbb{R}^n)\lesssim B$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\left|\int G\right|\ge\mu(\mathbb{R}^n)R^{-10}$.Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε $\left|\int G\right|\le\mu(\mathbb{R}^n)R^{-10}\le(\mu(\mathbb{R}^n))^{\frac{1}{2}}(\mu(\mathbb{R}^n))^{\frac{1}{2}}R^{-10}\lesssim\left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}R^{\frac{1}{2}-((\frac{\alpha}{2})-\epsilon)}$ όταν το R είναι αρκετά μεγάλο. Από εδώ και πέρα θα εργαζόμαστε με αυτή την υπόθεση.

$$\left|\int\sum_{\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\le R^{-100}}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right|=\left|\int\sum_{\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\le R^{-100}}\phi_{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right|\le$$

$$\|\phi_{\rho^*}\|_\infty\left|\int\sum_{\rho^*:\ \left\|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\right\|_\infty\le R^{-100}}\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right|\le\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-100}\le\mu\left(\mathbb{R}^2\right)R^{-50}$$

Ακόμα από την

$$\sum_{\rho}\sum_{\rho^*}\left\|\frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}}\right\|_\infty^2\le C_M R^{\frac{1}{2}}$$

Βλέπουμε ότι

$$G=\sum_{\rho^*}\sum_{\rho}G_\rho^{\rho^*}=\sum_{\rho^*:\ \|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty\le C_m R^{\frac{1}{4}}}G_\rho^{\rho^*}$$

Τώρα θα χρειαστούμε για τεχνικούς λόγους ένα κατάλληλο υποσύνολο από τα ρ^* Επιλέγουμε εκείνα για τα οποία ισχύει $R^{-100} \leq \left\| \frac{G_\rho^{\rho^*}}{\phi_{\rho^*}} \right\|_\infty \leq C_M R^{\frac{1}{4}}$ Έπειτα θα εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της G πάνω σε αυτή την οικογένεια.

$$\left| \int \sum_{\rho^* \colon R^{-100} \leq \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq CR^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| =$$

$$\left| \int \sum_{\rho^* \colon \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq CR^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| - \left| \int \sum_{\rho^* \colon \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq R^{-100}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| \geq \left| \int G d\mu \right| - \mu\left(\mathbb{R}^2\right) R^{-50} \geq$$

$$\left| \int G d\mu \right| - \left| \int G d\mu \right| R^{-40} \geq C \left| \int G d\mu \right|$$

Με τον συνήθη τρόπο, χωρίζουμε τα ρ^* σε $ClogR$ το πλήθος οικογένειες $\mathcal{F}_i$ διαμερίζοντας το $(R^{-100}, CR^{\frac{1}{4}}]$ σε δυαδικά διαστήματα

$$\mathcal{F}_i = \{\rho^* : 2^{i-1} R^{-100} < \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq 2^i R^{-100}\}$$

Παρακάτω το N είναι της τάξης $\log R$

$$\left| \int \sum_{\rho^* \colon R^{-100} \leq \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq CR^{\frac{1}{4}}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| = \left| \sum_{i=1}^{N} \int \sum_{\rho^* \colon 2^{i-1} R^{-100} \leq \|\phi_{\rho^*}^{-1} G_\rho^{\rho^*}\|_\infty \leq 2^i R^{-100}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| \geq \left| \int G d\mu \right|$$

Άρα υπάρχει ένα i τέτοιο ώστε

$$\left| \int_{\rho^* \in \mathcal{F}_i} G d\mu \right| \geq C \frac{1}{N} \left| \int G d\mu \right| \geq \frac{C}{\log R} \left| \int G d\mu \right|$$

Τώρα θα περιορίσουμε και άλλο το πλήθος των ρ^* αντικαθιστώντας το $\mathcal{F}_i$ με μια υποοικογένεια $\mathcal{F}_1$ της όποιας όλα τα στοιχεία θα βρίσκονται σε ένα σταθεροποιημένο τετράγωνο με πλευρά 10, με το κόστος ότι το $\frac{1}{\log R}$ θα γίνει $R^{-\frac{\epsilon}{2}}$. Αν το R είναι αρκετά μεγάλο τότε το τετράγωνο αυτό θα βρίσκεται μέσα στο δίσκο με κέντρο το μηδέν και ακτίνα $R^{\frac{\epsilon}{5}}$

$$\left| \int_{\rho^* \in \mathcal{F}_i} G_\rho^{\rho^*} d\mu \right| \geq \left| \int \sum_{\substack{\rho^* \in \mathcal{F}_i \\ d(\rho^*,0) > R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*} d\mu \right| + \left| \int \sum_{\substack{\rho^* \in \mathcal{F}_i \\ d(\rho^*,0) \leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*} d\mu \right| \lesssim \frac{1}{\log R} \left| \int G d\mu \right|$$

Και

$$\int \sum_{\substack{\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*}d\mu=\int \sum_{\substack{\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}} G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\phi_{\rho^*}d\mu\leq \|G_\rho^{\rho^*}\phi_{\rho^*}^{-1}\|_\infty\int \sum_{\substack{\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}}\phi_{\rho^*}d\mu$$

$$\leq 2^iR^{-100}\int \sum_{\substack{\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}}\phi_{\rho^*}d\mu\leq R^{\frac{1}{4}}R^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{\rho^*\in\mathcal{F}_i\\ d(\rho^*,0)\leq R^{\frac{\epsilon}{5}}}}\frac{1}{(d(\rho^*,0))^M}$$

$$\lesssim R^{\frac{3}{4}}\int_{|x|>R^{\frac{\epsilon}{5}}}\frac{1}{|x|^M}dx\lesssim \frac{R^{\frac{3}{4}}}{R^{\frac{\epsilon}{5}(M-2)}}\lesssim R^{-100}\lesssim R^{-90}\left|\int G\,d\mu\right|$$

Με λίγη προσοχή μπορούμε να επιλέξουμε την κάλυψη με τετράγωνα έτσι ώστε το κάθε ρ^* να περιέχεται εξολοκλήρου μόνο σε ένα τέτοιο τετράγωνο. Αυτό γίνεται με κατάλληλη μετακίνηση του κάθε τετράγωνο σε περίπτωση δεν περιέχεται ένα ρ^* σε κάποιο τετράγωνο, σε συνδυασμό ότι από κατασκευή τους τα ρ^* δεν μπορεί να τέμνονται πολύ αν έχουν μικρή γωνία μεταξύ τους, όπως βλέπουμε παρακάτω.

Η οικογένεια ορθογωνίων $\mathcal{F}_1$.έχει τις εξής ιδιότητες.

- Δύο στοιχεία της ρ_1^*,ρ_2^* είτε θα τέτμονται στο σύνορο τους, αν είναι δυϊκά στο ίδιο αρχικό ρ (διότι αποτελούν πλακόστρωση του $\mathbb{R}^2$ είτε αν τέμνεται το εσωτερικό τους η γωνία τους θα είναι μεγαλύτερη από $\delta CR^{-\frac{1}{2}}$ αφού το ίδιο ισχύει για τα δυϊκά τους ρ.
- $\#\mathcal{F}_1\leq\#\mathcal{F}_0\lesssim 1\leq R^{50}=\delta^{-100}$
- Το μήκος των στοιχείων της $\mathcal{F}_1$ είναι C συγκρίσιμο με 1 και το πλάτος είναι $C\delta$

Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 1 και να διαμερίσουμε την $\mathcal{F}_1$ σε $\mathcal{F}_{ij}$ υποοικογένειες για τις οποίες

- αν $\rho^*\in\mathcal{F}$, τότε $\left|G_\rho^{\rho^*}\right|\leq 2^iR^{-100}\phi_{\rho^*}$ Αυτό προκύπτει από ότι $\|\phi_{\rho^*}^{-1}G_\rho^{\rho^*}\|_\infty\leq 2^iR^{-100}$
- Υπάρχουν αριθμοί p και $\theta\geq R^{-\frac{1}{2}}$ και ένα σύνολο $\mathcal{G}$ από ορθογώνια με πλάτος περίπου θ τέτοια ώστε κάθε ρ^* να περιέχεται σε ένα τουλάχιστον από την $\mathcal{G}$
- Κάθε $\tau\in\mathcal{G}$ περιέχει περίπου $p\theta\sqrt{R}$ περιέχεται σε ένα τουλάχιστον ορθογώνιο από την $\mathcal{G}$.
- $card\,(\mathcal{G})\lesssim\frac{\#\mathcal{F}}{p\theta\sqrt{R}}\leq\frac{N}{p\theta\sqrt{R}}$
- $\left|\int\sum_{\rho^*\in F_{ij}}G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right|\geq R^{-\epsilon}j$

Έπειτα χωρίζουμε τον κύκλο σε τόξα Θ με τον συνήθη τρόπο, δηλαδή η γωνία του κάθε ρ το αντίστοιχο κυκλικό ορθογώνιο β να περιέχεται σε ένα από τα τόξα Θ τα οποία έχουν μήκος περίπου θ. Ορίζουμε $\mathcal{F}(\rho)$ να είναι όλα τα $\rho^*\in\mathcal{F}$ που είναι δυϊκά στο συγκεκριμένο ρ. Κατ' αναλογία με το λήμμα 1 ορίζουμε $\psi_\rho^{(k)}=\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}\phi_{\rho^*}^{(k)}$ και $\Psi_\Theta^{(k)}=\sum_{\rho^*\in\mathcal{G}_(\Theta)}\phi_\tau^{(k)}$ Όπου $\mathcal{G}(\theta)$ είναι όλα τα $\tau\in\mathcal{G}$ των οποίων ο ‶αξονας κατεύθυνσης‶ τους βρίσκεται σε μια κατάλληλη παραμόρφωση του Θ. Από τα προηγούμενα και από το λήμμα 1.2 έχουμε

$$\left\|\sum_{\rho\in\mathcal{F}}\psi_\rho^{(4)}\right\|_2^2 \lesssim pNR^{-\frac{1}{2}}\log R$$

$$\left\|\sum_{\Theta\in\mathcal{F}}\Psi_\Theta^{(4)}\right\|_2^2 \lesssim pNR^{-\frac{1}{2}}\log R$$

Παρατηρούμε ακόμα ότι επειδή τα $\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)$ το πολύ να εφάπτονται στο σύνορο (αν είναι γειτονικά), $\psi_\rho^{(4)} \leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = C$ Ορίζουμε $H_\rho = \sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)} G_\rho^{\rho^*}$ Υπενθυμίζουμε ότι $G_\rho^{\rho^*} = b_{\rho^*}\chi_\beta\widehat{f(-x)}$ και άρα

$$\widehat{H_\rho} = \widehat{\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)} G_\rho^{\rho^*}} = \sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}\widehat{b_{\rho^*}} * \chi_\beta f(x) = \chi_\beta f(x) * \sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}\widehat{b_{\rho^*}}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι $\beta = \beta(\rho)$ και $supp\ \widehat{b_{\rho^*}} = \rho$, για όλα τα $\rho^* \in \mathcal{F}(\rho)$. Άρα $supp\ \widehat{H_\rho} = \rho + \beta \subset 2\rho$. Ακόμα θέτουμε $H_\Theta = \sum_{\rho\subset\Theta} H_\rho$, $P = \left(\sum_\Theta |H_\Theta|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ και για απλότητα $h = R^{-100}2^i$

Λήμμα 6. *Με τους προηγούμενους ορισμούς ισχύει*

$$\|P\|_4 \lesssim h(\log R)^{\frac{1}{4}}\left(pNR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Απόδειξη. Από το λήμμα 3 και το ότι $supp\ \widehat{H_\rho} \subset 2\rho$ έχουμε ότι

$$\|P\|_4 \lesssim \left\|\left(\sum_\rho |H_\rho|\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_4$$

Απο την άλλη

$$|H_\rho| \leq \sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)} h\phi_{\rho^*}$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα :

$$\|P\|_4 \lesssim h\left\|\sum_\rho\left(\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}\phi_{\rho^*}\right)^2\right\|_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\underset{\text{εξ' ορiζμου}}{=} \quad h\left\|\sum_\rho \psi_\rho^2\right\|_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq h\left\|\sum_\rho \psi_\rho\|\psi_\rho\|_\infty\right\|_2^{\frac{1}{2}}$$

$$\lesssim h\left\|\sum_\rho \psi_\rho\right\|_2^{\frac{1}{2}} \lesssim h(\log R)^{\frac{1}{4}}\left(pNR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιήσαμε ότι τα ρ^* που έχουμε είναι στην $\mathcal{F}(\rho)$ και το πολύ να εφάπτονται οπότε με το γνωστό επιχείρημα $\psi_\rho = \psi_\rho^{(M)} \leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^M} = C$ $\square$

Θα χρειαστούμε επίσης και την παρακάτω εκτίμηση για το H_Θ

$$|H_\Theta| \leq \sum_{\rho\subset\Theta}|H_\rho| \leq \sum_{\rho\subset\Theta}\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}h\phi_{\rho^*}$$

Το κάθε ρ^* περιέχεται σε ένα τ. Στο λήμμα 1 δείξαμε ότι η γωνία του ρ^* και του τ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από μια σταθερά επί θ και άρα $\tau \in \mathcal{G}(\Theta)$ Από αυτά έχουμε

$$\sum_{\rho\subset\Theta}\sum_{\rho^*\in\mathcal{F}(\rho)}h\phi_{\rho^*} \lesssim h\sum_{\tau\subset\mathcal{G}(\Theta)}\sum_{\rho^*\in\tau}\phi_{\rho^*}$$

Ξανά από το λήμμα 1 έχουμε ότι κάθε τ περιέχει το πολύ CR ορθογώνια $\rho \in \mathcal{F}$ και επειδή για κάθε τέτοιο $\rho^* \in \mathcal{F}$ ισχύει $\phi_{\rho^*} \leq \phi_\tau$

$$h\sum_{\tau\subset\mathcal{G}(\Theta)}\sum_{\rho^*\in\tau}\phi_{\rho^*} \lesssim hCR\sum_{\tau\subset\mathcal{G}(\Theta)}\phi_\tau = hCR\Psi_\Theta$$

Από δω και πέρα είναι το κυρίως μέρος της απόδειξης. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι

$$\phi_\tau^{(4)}(x) \lesssim \left(\frac{max(\theta,|x-y|)}{\theta}\right)^4\phi_\tau^{(4)}(y)$$

Γεια κάθε x και y, και από αυτό συνεπάγεται

$$\Psi_\Theta^{(4)}(x) \lesssim \left(\frac{max(\theta,|x-y|)}{\theta}\right)^4\Psi_\Theta^{(4)}(y)$$

Ορίζουμε ένα A τετράγωνο να είναι ένα τετράγωνο με πλευρά $\theta = R^{-\frac{1}{2}}$ και $\max_Q \Psi_\Theta^{(4)} \in [A, 2A]$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των $\Psi_\Theta^{(4)}$ είναι συγκρίσιμες και άρα αν Q είναι ένα A-τετράγωνο έχουμε $\min_Q \Psi_\Theta^{(4)} \gtrsim \max_Q \Psi_\Theta^{(4)} \geq A$ Χρησιμοποιώντας και ότι

$$\left\|\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}\right\|_2^2 \lesssim \frac{N}{p\sqrt{R}}\log R$$

έχουμε

$$\sum_Q\int_Q A^2 = \#QA^2\theta^2 \leq \int_Q\left|\sum_\Theta\Psi_\Theta^{(4)}\right| \leq \left\|\sum_\Theta\Psi_\Theta^{(4)}\right\|_2^2 \leq \frac{N}{p\sqrt{R}}\log R \Rightarrow \#Q \leq \frac{N}{p\sqrt{R}}\log R\theta^{-2}A^{-2}$$

Σε ένα τετράγωνο πλευράς 1 έχουμε:

$$\left(\frac{max\{\theta|x-y|\}}{\theta}\right)^4 \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{R^{-\frac{1}{2}}}\right)^4 \lesssim R^2$$

Και άρα $\max\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \lesssim \min\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}R^2$

Επειδή θέλουμε να υπολογίσουμε το $\left|\int G_\rho^{\rho^*}\,d\mu\right|$ μας ενδιαφέρουν τα A τετράγωνα που τέμνουν τον φορέα του μ δηλαδή που τέμνουν το μοναδιαίο δίσκο. Σε ένα τετράγωνο με πλευρά 3 και κέντρο το κέντρο του μοναδιαίου δίσκου από την $\max\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} \lesssim \min\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)}R^2$ έχουμε ότι Αν η τιμή του A είναι τουλάχιστον η ελάχιστη τιμή που παίρνει η $\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} R^2$ στο τετράγωνο αυτό και μέγιστη τιμή που παίρνει στην διαμέριση είναι 2^j το πολύ η μέγιστη τιμή της $\sum_\Theta \Psi_\Theta^{(4)} R^2$ Στο ίδιο τετράγωνο τότε υπάρχουν το πολύ $j \approx \log R$ A τετράγωνα που τέμνουν τον φορέα του μ Γεια να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι ομοιόμορφα ως προς τα $A = A(R)$

$$\left| \int_{E_A} \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu \right| \lesssim \left(B\mu\left(\mathbb{R}^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}-((\frac{\alpha}{2})-\epsilon)}$$

Με E_A να είναι η ένωση των A-τετραγώνων.

Ισχυρισμός : Υπάρχει μια ακτινική συνάρτηση q για την οποία ισχύει $|q(x)| \le C_N(1+|x|)^{-N}$ για κάθε N και έχει και την παρακάτω ιδιότητα .Αν $t = (\theta R)^{-1} = R^{\frac{1}{2}}, q^t(x) = t^{-2} q(t^{-1}x)$ και $\overline{\mu}$ είναι το απόλυτα συνεχές μέτρο $q^t * \mu$ δηλαδή $\mu(A) = \int_A \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x-y) d\mu(y) dx$ το οποίο έχει προφανώς πυκνότητα $\frac{d\overline{\mu}}{dx} = \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x-y) d\mu(y)$ τότε για κάθε Θ και για κάθε τετράγωνο με πλευρά μεγαλύτερη από t

$$\int_Q |H_\Theta| d\mu \lesssim \sum_{j \ge 0} 2^{-Mj} \int_{2^j Q} |H_\Theta| d\overline{\mu}$$

Απόδειξη. Θα το δείξουμε πρώτα για τετράγωνα Q με πλευρά t. Η γενική περίπτωση έπεται άμεσα Έστω k μια $swartz$ ακτινική συνάρτηση με $\widehat{k} = 1$ σε ένα αρκετά μεγάλο δίσκο με κέντρο την αρχή των αξόνων. Αφού το t είναι σταθεροποιημένο ο φορέας της $\widehat{H_\Theta}$ βρίσκεται μέσα σε ένα δίσκο παραμορφωμένο κατα Ct^{-1} Γεια κάποιο C. Άρα

$$\widehat{|H_\Theta|} \le C|\widehat{k^t| \cdot |H}_\Theta| \Leftrightarrow |H_\Theta| \lesssim |k^t| * |H_\Theta|$$

Και

$$\begin{aligned} \int_Q |H_\Theta| \, d\mu &\lesssim \int_Q |k^t| * |H_\Theta| = \int_Q \int_{\mathbb{R}^2} |k^t|(x-y) |H_\Theta|(x) \phi_Q(y) \phi_Q^{-1}(y) d\mu(x) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_Q |k^t|(x-y) \phi_Q^{-1}(y) d\mu(x) |H_\Theta|(x) \phi_Q(y) \, dy \end{aligned}$$

Επιπλέων αν x_0 το κέντρο του Q και $T_Q(y) = ty$ στέλνει το μοναδιαίο τετράγωνο στο $Q - x_0$ τότε για κάθε $x \in Q$ ισχύει $\phi_Q^{-1}(y) = max\{1, \|T_Q(y) + x_0\|^M\} \le (1 + \|T_Q(y) - x_0\|)^M \lesssim \left(1 + t^{-1}\|y - x\|\right)^M$ Θέτοντας $q(x) = (1+|x|)^M |k(x)|$ τότε η q εξασθενεί όπως θέλουμε και επιπλέον

$$\int_Q |H_\Theta| d\mu \lesssim \int \phi_Q(y) |H_\Theta|(y) d\overline{\mu}(y)$$

από το οποίο έπεται το ζητούμενο (γιατί ·) ☐

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης ότι $\overline{\mu} = \int_{\mathbb{R}^2} q^t(x-y) d\mu(y) \le \|q^t\|_\infty \mu\left(\mathbb{R}^2\right) = C\mu\left(\mathbb{R}^2\right)$, ότι $\overline{\mu}\left(D_r\right) \lesssim \|q^t\|_\infty \mu\left(D_r\right) \le C\frac{\mu(D_r)}{r^\alpha} r^\alpha \lesssim Br^\alpha$ Όπου $B = \sup_x \sup_{r \ge R^{-1}} \frac{\mu\left(D(x;r)\right)}{r^\alpha}$ Καθώς και την επόμενη πρόταση

Πρόταση 3.

$$\left\| \frac{d\overline{\mu}}{dx} \right\|_\infty \lesssim B(\theta R)^{2-\alpha}$$

Απόδειξη.

$$\left|\frac{d\overline{\mu}}{dx}\right| \leq \int \left|q^t(x-y)\right| \, d\mu(y) \leq (\theta R)^2 \int \left|q\big(\theta R(x-y)\big)\right| \, d\mu(y) \leq C_N(\theta R)^2 \int \left|\frac{1}{(1+|\theta R(x-y)|)^N}\right| d\mu(y)$$

$$= C_N(\theta R)^2 \left[\int_{D(x,\frac{1}{\sqrt{R}})} \frac{1}{(1+|\theta R(x-y)|)^N} \, d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{2^{k-1}}{\sqrt{R}} \leq |x-y| \leq \frac{2^k}{\sqrt{R}}} \frac{1}{(1+|\theta R(x-y)|)^N} \, d\mu\right]$$

$$\leq C_N(\theta R)^2 \left[\int_{D(x,\frac{1}{\sqrt{R}})} d\mu(y) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\frac{2^{k-1}}{\sqrt{R}} \leq |x-y| \leq \frac{2^k}{\sqrt{R}}} \frac{1}{2^{(k-1)N}} \, d\mu\right]$$

$$\leq (\theta R)^2 \left[B\frac{1}{R^{\frac{\alpha}{2}}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)N}} \mu\Big(D\Big(x, \frac{2^k}{\sqrt{R}}\Big)\Big)\right] \leq C_N(\theta R)^2 \left[B\frac{1}{R^{\frac{\alpha}{2}}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{(k-1)N}} B\frac{2^{k\alpha}}{R^{\frac{\alpha}{2}}}\right]$$

$$\leq C_N(\theta R)^2 B R^{-\frac{\alpha}{2}} \left[1 + 2^N \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k(\alpha-N)}\right] \leq C_N(\theta R)^2 B R^{-\frac{\alpha}{2}} = C_N B(\theta R)^{2-\alpha}$$

□

Έστω Q ένα A-τετράγωνο τότε

$$\left|\int_Q \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu\right| \leq \sum_{\Theta} \int_Q |H_\Theta| d\mu = \sum_{\Theta: \max_Q \Psi_\Theta^{(4)} \geq R^{-\epsilon}} \int_Q |H_\Theta| d\mu + \sum_{\Theta: \max_Q \Psi_\Theta^{(4)} < R^{-\epsilon}} \int_Q |H_\Theta| d\mu$$

Γεια το δεύτερο όρο θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $|H_\Theta| \lesssim Rh\Psi_\Theta$ οπότε παίρνουμε

$$\sum_{\Theta: \max_Q \Psi_\Theta^{(4)} < R^{-\epsilon}} \int_Q |H_\Theta| d\mu \lesssim BhR^{1-\frac{M}{4}\epsilon} \leq BR^{-100} \text{ για } M \text{ αρκετά μεγάλο}$$

.Το πλήθος των Θ στον πρώτο όρο είναι το πολύ $R^\epsilon A$ αφου $\Psi_\Theta^{(4)} \gtrsim R^{-\epsilon}$ και το άθροισμά τους είναι $\lesssim A$. Ξρησιμοποιώντας ότι $\theta \geq (R\theta)^{-1}$ και τον τελευταίο ισχυρισμό παίρνουμε την εκτίμηση

$$\left|\int_Q \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu\right| \lesssim \sum_{j \geq 0} 2^{-Mj} \int_{2^j Q} \sum_{\Theta: \max_Q \Psi_\Theta^{(4)} \geq R^{-\epsilon}} |H_\Theta| d\overline{\mu} + BR^{-100}$$

$$\lesssim (AR^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \sum_j 2^{-Mj} \int_{2^j Q} \int_{2^j Q} P d\overline{\mu} + BR^{-100}$$

Θα εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα $\left|\int E_A \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu\right|$ αθροίζοντας πάνω από όλα τα A-τετράγωνα (E_A = ένωση όλων των A-τετραγώνων). Επειδή υπάρχουν το πολύ R το πλήθος από αυτά που τέμνουν τον φορέα του μέτρου μ ο δεύτερος όρος δεν θα δώσει παραπάνω από BR^{-99}. Χρησιμοποιούμε το λήμμα 6 και την πρόταση 3

$$\left|\int_{E_A} \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_\rho^{\rho^*} \, d\mu\right| \underset{holder}{\lesssim} (AR^\epsilon)^{\frac{1}{2}} \sum_j 2\|P\|_4 \sum_j 2^{2j} 2^{-Mj} \left\|\frac{d\overline{\mu}}{dx}\right\|_{L^{\frac{4}{3}}(E_A^j)}$$

$$\lesssim (AR^{\epsilon})^{\frac{1}{2}} (\log R)^{\frac{1}{4}} h \left(pNR^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \sum_j 2^{(2-M)j} \mu \left(\mathbb{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} (\theta R)^{\frac{2-a}{4}} \overline{\mu}(E_A^j)^{\frac{3}{4}}$$

Κάθε τετράγωνο πλευράς θ έχει μέτρο $\overline{\mu}$ το πολύ $B\theta^{\alpha}$

$$\int_Q d\overline{\mu} = \int_Q \frac{d\overline{\mu}}{dx} dx \leq \left\| \frac{d\overline{\mu}}{dx} \right\|_{\infty} \int_Q dx = B(\theta R)^{\alpha}$$

. Επίσης δείξαμε ότι το πλήθος των A-τετραγώνων είναι το πολύ $\frac{N}{p\sqrt{R}} \log R\theta^{-2} A^{-2}$:

$$\overline{\mu}(E_A) \lesssim \log R \frac{N}{p\sqrt{R}} \theta^{-2} A^{-2} B\theta^{\alpha}$$

Ισοδύναμα

$$p \lesssim BN\theta^{-2} R^{-\frac{1}{2}} A^{-2} \overline{\mu}(E_A)^{-1} \theta^{\alpha} \log R$$

Ένα παραμορφωμένο κατά 2^j, A-τετράγωνο έχει μέτρο $\overline{\mu}$ το πολύ $B2^{j\alpha}\theta^{\alpha}$

$$p \lesssim BN\theta^{-2} R^{-\frac{1}{2}} A^{-2} \overline{\mu}\left(E_A^j\right)^{-1} 2^{j\alpha} \theta^{\alpha} \log R$$

Χρησιμοποιώντας την εκτιμήση για το p και ότι $h = R^{-100} 2^i \lesssim R^{\frac{1}{4}} N^{-\frac{1}{2}}$ συνοψίζουμε

$$\left| \int_{E_A} \sum_{\rho^* \in \mathcal{F}} G_{\rho}^{\rho^*} \, d\mu \right| \lesssim$$

$$(\log R)^{\frac{1}{4}} (AR^{\epsilon})^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{R^{\frac{1}{4}}}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \sum_j \left(BN^2 \theta^{-2} R^{-1} A^{-2} \overline{\mu}\left(E_A^j\right)^{-1} 2^{j\alpha} \theta^{\alpha} \log R \right)^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{(2-M)j} B^{\frac{1}{4}} (\theta R)^{\frac{2-a}{4}} \overline{\mu}(E_A^j)^{\frac{3}{4}} =$$

$$(\log R)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{\epsilon}{2}} \sum_j 2^{\left(2-M+\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right)j} \mu \left(\mathbb{R}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(E_A^j\right)^{-1} R^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)} \lesssim$$

$$(\log R)^{\frac{1}{2}} R^{\frac{\epsilon}{2}} \left(\mu\left(\mathbb{R}^2\right) B\right)^{\frac{1}{2}} R^{\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}\right)}$$