ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Συντελεστές Taylor συναρτήσεων σε χώρους Hardy

Καλλιόπη Παολίνα ΚΟΥΤΣΑΚΗ

Επιβλέπων Καθηγητής:
Μιχαήλ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ

Επιτροπή:
Μιχαήλ ΚΟΛΟΥΝΤΖΑΚΗΣ, Θεμιστοκλής ΜΗΤΣΗΣ και Μιχαήλ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΑΚΗΣ

7 Αυγούστου 2013

Ευχαριστίες

Πρώτα απ΄όλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της διπλωματικής εργασίας μου, Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μιχαήλ Παπαδημητράκη, για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια των σπουδών μου. Επίσης ευχαριστώ τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, Καθηγητή κ. Μιχαήλ Κολουντζάκη και Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Θεμιστοκλή Μήτση, για την αποτελεσματική συνεργασία και συμβολή τους στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας.

Καλλιόπη Παολίνα Κουτσάκη

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Θα συμβολίζουμε με $\mathbb{D}$ το μοναδιαίο δίσκο, δηλαδή $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ και με $H(\mathbb{D})$ το χώρο των αναλυτικών συναρτήσεων στο δίσκο.

Ορισμοί. Αν $0 \leq r < 1$ και $f \in H(\mathbb{D})$, θέτουμε $M_p(r, f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}$,

όταν $0 < p < \infty$, $M_\infty(r, f) = \sup\limits_\theta |f(re^{i\theta})|$ και $M_0(r, f) = \exp \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| \, d\theta \right)$

Αν $f \in H(\mathbb{D})$ και $0 \leq p \leq \infty$, θέτουμε

$$\|f\|_p = \sup\{M_p(r, f) \ : \ 0 \leq r < 1\}$$

Αν $0 < p \leq \infty$, ο χώρος Hardy H^p αποτελείται από εκείνες τις συναρτήσεις f στον $H(\mathbb{D})$ για τις οποίες $\|f\|_p < \infty$.

Ορίζουμε N να είναι η κλάση των συναρτήσεων $f \in H(\mathbb{D})$ για τις οποίες $\|f\|_0 < \infty$.

Σχόλια. [1] Ισχύει ότι $H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$, αν $0 < s < p < \infty$.

[2] Όταν $0 \leq p \leq \infty$, το $M_p(r, f)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r. Επομένως, $\|f\|_p = \lim\limits_{r \to 1} M_p(r, f)$.

[3] Όταν $1 \leq p \leq \infty$, ο χώρος H^p είναι χώρος Banach.

Ορισμός. Μια ακολουθία σημείων (a_n) στο μοναδιαίο δίσκο, με $a_n \neq 0$, λέμε ότι ικανοποιεί την συνθήκη Blaschke, όταν

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |a_n|) < \infty$$

Δοσμένης μιας τέτοιας ακολουθίας, το γινόμενο Blaschke ορίζεται να είναι

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \overline{a_n} z}$$

όπου k μη αρνητικός ακέραιος. Το γινόμενο Blaschke ορίζει συνάρτηση αναλυτική στο δίσκο με μοναδικές ρίζες τα a_n (και το 0 αν $k > 0$). Επιπλέον, $|B(z)| < 1$ και, άρα, $B \in H^{\infty}$.

Λήμμα 1.1. Ισχύει ότι $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\Omega = \{z \,:\, \operatorname{Re} z < 1\}$. Αφού $1 - z \neq 0$ στο Ω και το Ω είναι απλά συνεκτικό, υπάρχει $h \in H(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\exp\{h(z)\} = 1 - z$$

στο Ω, και η h είναι μοναδικά ορισμένη αν επιβάλλουμε τη συνθήκη $h(0) = 0$. Επειδή $\operatorname{Re}(1 - z) > 0$ στο Ω, έχουμε

$$\operatorname{Re} h(z) = \log|1 - z|, \qquad |\operatorname{Im} h(z)| < \frac{\pi}{2} \qquad (z \in \Omega). \tag{1.1}$$

Για μικρό $\delta > 0$, έστω Γ το μονοπάτι

$$\Gamma(t) = e^{it} \qquad (\delta \leq t \leq 2\pi - \delta) \tag{1.2}$$

και έστω γ το τόξο με κέντρο το 1, το οποίο διέρχεται από το $e^{i\delta}$ στο $e^{-i\delta}$ εσωτερικά του $\mathbb{D}$. Τότε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \log|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(z)\, \frac{dz}{z}\right] = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} h(z)\, \frac{dz}{z}\right] \tag{1.3}$$

Το μήκος του γ είναι μικρότερο από $\pi\delta$, έτσι η (1.1) δείχνει ότι η απόλυτη τιμή του τελευταίου ολοκληρώματος στην (1.3) είναι μικρότερο από $C\delta \log\frac{1}{\delta}$, όπου C σταθερά. Το αποτέλεσμα προκύπτει αν πάρουμε όριο $\delta \to 0$. □

Θεώρημα 1.1. Έστω $\Omega = D(0; R)$, $f \in H(\Omega)$, $f(0) \neq 0, 0 < r < R$ και $a_1, \cdots, a_N$ οι ρίζες της f στο $\overline{D}(0; r)$, λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητά τους. Τότε

$$|f(0)| \prod_{n=1}^{N} \frac{r}{|a_n|} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})|\, d\theta\right\} \tag{1.4}$$

Απόδειξη. Χωρίζουμε τα σημεία a_j έτσι ώστε τα $a_1, \cdots, a_m$ να είναι στο $D(0;r)$ και $|a_{m+1}| = \cdots = |a_N| = r$. Θέτουμε

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^{m} \frac{r^2 - \overline{a_n} z}{r(a_n - z)} \prod_{n=m+1}^{N} \frac{a_n}{a_n - z} \tag{1.5}$$

Τότε $g \in H(D)$, όπου $D = D(0; r + \epsilon)$ για κάποιο $\epsilon > 0$, η g δεν έχει ρίζες στο D, επομένως η $\log|g(z)|$ είναι αρμονική στο D και, άρα,

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})| \, d\theta. \tag{1.6}$$

Από την (1.5),

$$|g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|a_n|}. \tag{1.7}$$

Για $1 \leq n \leq m$, οι παράγοντες στην (1.5) έχουν απόλυτη τιμή ίση με 1 αν $|z| = r$. Αν, τώρα, $a_n = re^{i\theta_n}$ για $m < n \leq N$, συνεπάγεται ότι

$$\log|g(re^{i\theta})| = \log|f(re^{i\theta})| - \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta - \theta_n)}| \tag{1.8}$$

Η (1.8) και το λήμμα (1.1) μας δίνει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})| \, d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=m+1}^{N} \log|1 - e^{i(\theta - \theta_n)}| \, d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|g(re^{i\theta})| \, d\theta \end{aligned}$$

Επομένως, λόγω της (1.6) και της (1.7),

$$\exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(re^{i\theta})| \, d\theta \right\} = |g(0)| = |f(0)| \prod_{n=1}^{m} \frac{r}{|a_n|}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 1.2. Υποθέτουμε ότι $f \in N$, η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν στο $\mathbb{D}$, και $a_1, a_2, \cdots$ είναι οι ρίζες της f, λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητά τους. Τότε, τα a_n ικανοποιούν τη συνθήκη του Blaschke.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε χωρις απόδειξη το εξής αποτέλεσμα από τη θεωρία άπειρων γινομένων:

Έστω $0 \leq u_n < 1$. Τότε $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-u_n) > 0$ αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n < \infty$. (*)

Στη συνέχεια θα υποθέσουμε ότι η f έχει άπειρες ρίζες στο $\mathbb{D}$. Αν είχε μόνο πεπερασμένες, τότε το παραπάνω γινόμενο θα ήταν πεπερασμένο και δε θα υπήρχε κάτι προς απόδειξη. Επίσης, υποθέτουμε ότι $|a_n| \leq |a_{n+1}|$.

Αν το 0 είναι ρίζα της f τάξης m, και $g(z) = z^{-m}f(z)$, τότε $g \in N$ και η g έχει τις ίδιες ρίζες με την f, εκτός του μηδενός. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0) \neq 0$. Έστω $n(r)$ το πλήθος των ριζών της f στο $\overline{D}(0;r)$. Σταθεροποιούμε ακέραιο k και βρίσκουμε $r < 1$, τέτοιο ώστε $n(r) > k$. Τότε από το θεώρημα (1.2) συνεπάγεται ότι,

$$\begin{aligned} |f(0)|\prod_{n=1}^{k}\frac{r}{|a_n|} &\leq |f(0)|\prod_{n=1}^{n(r)}\frac{r}{|a_n|} \\ &= \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\} \\ &\leq \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log^{+}|f(re^{i\theta})|\,d\theta\right\} \end{aligned}$$

Αφού $f \in N$, θα υπάρχει σταθερά C, τέτοια ώστε το τελευταίο εκθετικό στην παραπάνω εξίσωση να είναι φραγμένο από $\frac{1}{C}$ για κάθε $0 \leq r < 1$. Άρα, έχουμε

$$\prod_{n=1}^{k}|a_n| \geq C|f(0)|r^k$$

Επομένως, με το k σταθερό, αφήνουμε το $r \to 1$ και προκύπτει

$$\prod_{n=1}^{k}|a_n| \geq C|f(0)| \tag{1.9}$$

Η (1.9) ισχύει για κάθε k, άρα

$$\prod_{n=1}^{\infty}|a_n| \geq C|f(0)| > 0$$

Τελικά, με βάση την (*), προκύπτει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.3. Υποθέτουμε ότι $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και έστω B το γινόμενο Blaschke που αντιστοιχεί στις ρίζες της f. Θέτουμε $g = f/B$. Τότε, $g \in H^p$ και $\|g\|_p = \|f\|_p$.

Απόδειξη. Έστω B_n το πεπερασμένο γινόμενο Blaschke που αντιστοιχεί στις n πρώτες ρίζες της f, λαμβάνοντας υπόψη και την πολλαπλότητά τους. Θέτουμε $g_n = f/B_n$. Αφού για κάθε n έχουμε ότι $|B_n(re^{i\theta})| \to 1$ ομοιόμορφα καθώς $r \to 1$, ισχύει ότι

$$\|g_n\|_p = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \, d\theta = \lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{i\theta})}{B_n(re^{i\theta})} \right|^p d\theta = \|f\|_p$$

Επίσης, η $|g_n|$ είναι αύξουσα ως προς n και $|g_n| \to |g|$, άρα από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^p \, d\theta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_n(re^{i\theta})|^p \, d\theta$$

Το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι το πολύ $\|f\|_p$ για κάθε $0 < r < 1$. Επομένως, αν πάρουμε όριο $r \to 1$, προκύπτει $\|g\|_p \leq \|f\|_p$.
Τέλος, επειδή $|g(z)| \geq |f(z)|$, για κάθε σημείο του μοναδιαίου δίσκου, παίρνουμε και $\|g\|_p \geq \|f\|_p$, που μαζί με την παραπάνω ανισότητα μας δίνει το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.4. Υποθέτουμε ότι $f \in H^p$, $0 < p \leq \infty$, η f δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και έστω B το γινόμενο Blaschke που αντιστοιχεί στις ρίζες της f. Τότε υπάρχει συνάρτηση $h \in H^2$, η οποία δε μηδενίζεται, τέτοια ώστε

$$f = B \cdot h^{2/p} \tag{1.10}$$

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι $f/B \in H^p$ και μάλιστα $\|f/B\|_p = \|f\|_p$. Επειδή η f/B δεν έχει ρίζες στο δίσκο, ο οποίος είναι απλά συνεκτικό σύνολο, υπάρχει αναλυτική συνάρτηση ϕ, τέτοια ώστε $\exp(\phi) = f/B$. Θέτουμε $h = \exp(p\phi/2)$. Τότε η h είναι αναλυτική και $|h|^2 = |f|^p$ και άρα, $h \in H^2$. $\square$

Κεφάλαιο 2

Συντελεστές Taylor στους χώρους H^p

Θεώρημα 2.1. Έστω $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Τότε $f \in H^2$ αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Πιο συγκεκριμένα, αν $f \in H^2$, έχουμε ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 = \|f\|_2$.

Θεώρημα 2.2. Αν $f \in H^1$, $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, τότε $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \le \pi \|f\|_1$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.
Το πρώτο λήμμα είναι η ανισότητα Fejer-Riesz:

Λήμμα 2.1. Αν $g \in H^p$, $0 < p < \infty$, το ολοκλήρωμα της $|g(x)|^p$ κατά μήκος του τμήματος $-1 \le x \le 1$ συγκλίνει, και

$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^p \, dx \le \frac{1}{2} \int_{0}^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p \, d\theta \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση $p = 2$, και υποθέτουμε για τη στιγμή ότι η g είναι πραγματική στον πραγματικό άξονα. Από το θεώρημα του Cauchy, προκύπτει ότι

$$\int_{-r}^{r} [g(x)]^2 \, dx + \int_{\Gamma} [g(z)]^2 \, dz = 0, \tag{2.2}$$

όπου $\Gamma = \{re^{i\theta}, 0 \le \theta \le \pi\}$, και $0 < r < 1$.
Τώρα, η (2.2) γίνεται

$$\int_{-r}^{r} [g(x)]^2 \, dx + \int_{0}^{\pi} [g(re^{i\theta})]^2 ire^{i\theta} \, d\theta = 0$$

Επειδή η g είναι πραγματική στον πραγματικό άξονα,

$$\int_{-r}^{r}[g(x)]^2\,dx = -ir\int_{0}^{\pi}[g(re^{i\theta})]^2 e^{i\theta}\,d\theta \le r\left|\int_{0}^{\pi}[g(re^{i\theta})]^2 e^{i\theta}\,d\theta\right|$$

για κάθε $r < 1$. Επομένως,

$$\int_{-r}^{r}[g(x)]^2\,dx \le \int_{0}^{\pi}\left|g(re^{i\theta})\right|^2\,d\theta \tag{2.3}$$

Όμοια, στο κάτω ημικύκλιο $\tilde{\Gamma} = \{re^{-i\theta}, 0 \le \theta \le \pi\}$,

$$\int_{-r}^{r}[g(x)]^2\,dx = -\int_{\tilde{\Gamma}}[g(z)]^2\,dz$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\int_{-r}^{r}[g(x)]^2\,dx &= ir\int_{0}^{\pi}[g(re^{-i\theta})]^2 e^{-i\theta}\,d\theta \\
&\le r\left|\int_{0}^{\pi}[g(re^{-i\theta})]^2 e^{-i\theta}\,d\theta\right| \\
&\le r\int_{-\pi}^{0}\left|g(re^{i\theta})\right|^2\,d\theta \\
&\le \int_{\pi}^{2\pi}\left|g(re^{i\theta})\right|^2\,d\theta
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Προσθέτουμε τις (2.3) και (2.4),

$$2\int_{-r}^{r}[g(x)]^2\,dx \le \int_{0}^{2\pi}|g(re^{i\theta})|^2\,d\theta \le \int_{0}^{2\pi}|g(e^{i\theta})|^2\,d\theta$$

Η ζητούμενη ανισότητα προκύπτει αν πάρουμε όριο $r \to 1$.

Στη γενικότερη περίπτωση, γράφουμε την τυχαία συνάρτηση $g \in H^2$ στη μορφή

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n + ic_n)z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n + i\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = g_1(z) + ig_2(z),$$

όπου οι g_1 και g_2 ειναι στον H^2 και είναι πραγματικές στον πραγματικό άξονα.

Επομένως, από τα προηγούμενα,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} |g(x)|^2\,dx &= \int_{-1}^{1} |g_1(x)|^2\,dx + \int_{-1}^{1} |g_2(x)|^2\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |g_1(e^{i\theta})|^2\,d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |g_2(e^{i\theta})|^2\,d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^2\,d\theta - \frac{i}{2}\int_{0}^{2\pi} [g_2(e^{i\theta})g_1(e^{-i\theta}) - g_1(e^{i\theta})g_2(e^{-i\theta})]\,d\theta
\end{aligned}$$

Όμως το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι μηδέν, αφού η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή συνάρτηση του θ.

Για να προκύψει το αποτέλεσμα για γενικό p, θεωρούμε $g \not\equiv 0$ συνάρτηση στον H^p και έστω B το γινόμενο Blaschke που αντιστοιχεί στις ρίζες της g. Τότε, από το Θεώρημα 1.4, υπάρχει συνάρτηση $h \in H^2$, η οποία δε μηδενίζεται, τέτοια ώστε $g = Bh^{\frac{2}{p}}$.

Έχουμε ότι,

$$\int_{-1}^{1} |g(x)|^p\,dx = \int_{-1}^{1} |h^{\frac{2}{p}}(x)|^p\,dx \leq \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |h(e^{i\theta})|^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^p\,d\theta.$$

□

Λήμμα 2.2. Έστω $g, h \in H^2$ με $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ και $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$. Τότε,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{|b_n||c_m|}{n+m+1} \leq \pi \|g\|_2 \|h\|_2.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $G(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |b_n| z^n$ και $H(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| z^n$, για τις οποίες ισχύει ότι $G, H \in H^2$, $\|G\|_2 = \|g\|_2$ και $\|H\|_2 = \|h\|_2$.

Έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}\int_0^1 G(x)H(x)\,dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|x^n\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}|c_m|x^m\right)dx\\ &= \int_0^1 \sum_{n,m=0}^{\infty}|b_n||c_m|x^{n+m}\,dx\\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{|b_n||c_m|}{n+m+1}\end{aligned}$$

και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz και το Λήμμα 2.1, έχουμε τελικά

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{|b_n||c_m|}{n+m+1} &\leq \left(\int_0^1 [G(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 [H(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{-1}^1 [G(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-1}^1 [H(x)]^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |G(e^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |H(e^{i\theta})|^2\,d\theta\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\pi\|G\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\pi\|H\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \pi\|g\|_2\|h\|_2.\end{aligned}$$

□

Και τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.2:

Απόδειξη. Έστω $f \in H^1$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Μπορούμε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, να γράψουμε την f στη μορφη $f = Bg$, όπου B το γινόμενο Blaschke που αντιστοιχεί στις ρίζες τις f και g συνάρτηση στον H^1, η οποία δε μηδενίζεται, με $\|g\|_1 = \|f\|_1$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1 = Bg^{\frac{1}{2}}$ και $f_2 = g^{\frac{1}{2}}$. Τότε $f_1, f_2 \in H^2$ και $\|f_1\|_2^2 = \|f_2\|_2^2 = \|f\|_1$. Αν $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ είναι οι σειρές Taylor των f_1 και f_2 αντίστοιχα, τότε οι συντελεστές Taylor της f δίνονται από τον τύπο:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}$$

Είναι,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_m|}{n+1} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|c_k||b_{n-k}|\right)\\
&= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{|b_n||c_m|}{n+m+1}\\
&\leq \pi\|f_1\|_2\|f_2\|_2\\
&= \pi\|f\|_1.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 2.3. Αν $f \in H^p$, όπου $1 \leq p \leq 2$, με $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p < \infty.$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p\|f\|_p, \tag{2.5}$$

όπου C_p σταθερά ανεξάρτητη της f.

Απόδειξη. Έστω μ θετικό μέτρο ορισμένο στους ακέραιους ως εξής:

$$\mu\left(\{n\}\right) = \left(|n|+1\right)^{-2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Αν $g \in L^2$ και $g(t) \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{int}$, ορίζουμε

$$\tilde{g}(n) = (|n|+1)b_n,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Για κάθε $s > 0$, ορίζουμε το σύνολο $E_s = \{n : |\tilde{g}(n)| > s\}$
Τότε,

$$\begin{aligned}
s^2\mu(E_s) &= \sum_{n\in E_s}\mu(n)s^2\\
&\leq \sum_{n\in E_s}\mu(n)|\tilde{g}(n)|^2\\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty}\mu(n)|\tilde{g}(n)|^2\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}|b_n|^2
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$s^2\mu(E_s) \leq \|g\|_{L^2}^2 \tag{2.6}$$

Τώρα, αφού $|b_n| \leq \|g\|_{L^1}$, και άρα $E_s \subset F_s = \{n : (|n|+1)\|g\|_{L^1} > s\}$, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\mu(E_s) &\leq \mu(F_s) \\
&= \sum_{n \in F_s} \mu(n) \\
&\leq \sum_{|n| \geq \left[\frac{s}{\|g\|_1}\right]} \frac{1}{(|n|+1)^2} \\
&= 2 \sum_{n=\left[\frac{s}{\|g\|_1}\right]}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 2 \sum_{n=\left[\frac{s}{\|g\|_1}\right]}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 2 \frac{1}{\left[\frac{s}{\|g\|_1}\right]}
\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\mu(E_s) \leq C s^{-1} \|g\|_1. \tag{2.7}$$

Γράφουμε τη g στη μορφή:

$$g(t) = \phi_s(t) + \psi_s(t),$$

όπου

$$\phi_s(t) = \begin{cases} g(t), & |g(t)| \geq s \\ 0, & |g(t)| < s. \end{cases}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)^{p-2}|b_n|^p &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{g}(n)|^p \mu(n) \\
&\leq 2^p \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi_s}(n)|^p \mu(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi_s}(n)|^p \mu(n) \right). \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Ορίζουμε

$$\alpha(s) = \mu\left(\{n : |\tilde{\phi_s}(n)| > s\}\right),$$
$$\beta(s) = \mu\left(\{n : |\tilde{\psi_s}(n)| > s\}\right).$$

Εφαρμόζοντας την (2.7) στην ϕ_s,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\phi_s}(n)|^p \mu(n) &= p \int\limits_0^\infty s^{p-1}\alpha(s)\, ds \\
&\leq pC \int\limits_0^\infty s^{-1}\|\phi_s\|_1 s^{p-1}\, ds \\
&= \frac{pC}{2\pi} \int\limits_0^\infty s^{p-2} \int\limits_0^{2\pi} |\phi_s(t)|\, dt\, ds \\
&= \frac{pC}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |g(t)| \int\limits_0^{|g(t)|} s^{p-2}\, ds\, dt \\
&= \frac{pC}{2\pi(p-1)} \int\limits_0^{2\pi} |g(t)||g(t)|^{p-1}\, dt \\
&= A_p \int\limits_0^{2\pi} |g(t)|^p\, dt,
\end{aligned}$$

όπου η σταθερά A_p εξαρτάται μόνο από το p.

Παρόμοια,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi_s}(n)|^p \mu(n) = p \int_0^\infty s^{p-1} b(s) ds$$

και εφαρμόζοντας αυτή τη φορά την (2.6) στην ψ_s,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi_s}(n)|^p \mu(n) \leq p \int_0^{\infty} s^{p-3} \|\psi_s\|_2^2 \, ds$$
$$= \frac{p}{2\pi} \int_0^{\infty} s^{p-3} \int_0^{2\pi} |\psi_s(t)|^2 \, dt \, ds$$
$$= \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 \int_{|g(t)|}^{\infty} s^{p-3} \, ds \, dt$$
$$= \frac{p}{2\pi(p-2)} \int_0^{2\pi} |g(t)|^2 (-|g(t)|^{p-2}) \, dt$$
$$= B_p \int_0^{2\pi} |g(t)|^p \, dt.$$

Τώρα, σε συνδυασμό με την (2.8), έχουμε ότι

$$\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} (|n|+1)^{p-2} |b_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C_p \|g\|_p, \tag{2.9}$$

όταν $g \in L^2$.

Αν, τώρα, $f \in L^p$ με $1 \leq p < 2$, τότε η (2.5) προκύπτει προσεγγίζοντας τη συνοριακή συνάρτηση $f(e^{it})$ με τις

$$g_M(t) = \begin{cases} f(e^{it}), & |f(e^{it})| \leq M \\ 0, & |f(e^{it})| > M, \end{cases}$$

στις οποίες εφαρμόζουμε την (2.8) κι έπειτα αφήνουμε το M να πάει στο άπειρο. $\square$

Θεώρημα 2.4. Έστω $2 \leq q < \infty$ και έστω $\{a_n\}_{n \geq 0}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών για τους οποίους ισχύει

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{q-2} |a_n|^q < \infty.$$

Τότε η συνάρτηση $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι στον H^q και

$$\|f\|_q \leq C_q \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{q-2}|a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

όπου C_q σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το q.

Απόδειξη. Έστω q' ο συζυγής εκθέτης του q, δηλαδή $q'=\frac{q}{q-1}$, και, άρα, $1<q'\leq 2$. Έστω, επίσης, $G(e^{i\theta})=\sum\limits_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$ ένα τυχαίο τριγωνομετρικό πολυώνυμο με $\|G\|_{L^{q'}}\leq 1$.

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $g(e^{i\theta})=\sum\limits_{k=0}^{n} c_k e^{ik\theta}$ είναι στον $H^{q'}$ και ισχύει ότι

$$\|g\|_{q'} \leq A_{q'}\|G\|_{L^{q'}} \leq A_{q'}, \tag{2.10}$$

όπου το $A_{q'}$ εξαρτάται μόνο από το q'.

Θέτουμε $s_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$. Τότε,

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta})\overline{s_n(re^{i\theta})}\,d\theta\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\overline{a_j}e^{-ij\theta}r^j\right)\,d\theta\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=0}^{n} c_k\overline{a_j}e^{i(k-j)\theta}r^j\right)\,d\theta\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} c_k\overline{a_j}e^{i(k-j)\theta}r^j\,d\theta\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=0}^{n} c_j\overline{a_j}r^j\right|.$$

Από την ανισότητα Hölder, και επειδή $\frac{2-q}{q} = \frac{q'-2}{q'}$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta}) \overline{s_n(re^{i\theta})}\, d\theta \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} |c_k||a_k| \\ &= \sum_{k=0}^{n} |c_k|(k+1)^{\frac{q'-2}{q'}} |a_k|(k+1)^{\frac{q-2}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n} |c_k|^{q'}(k+1)^{q'-2} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^{q}(k+1)^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Τώρα, από το Θεώρημα 2.3 και την (2.10),

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta}) \overline{s_n(re^{i\theta})}\, d\theta \right| \leq C_{q'} A_{q'} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^{q}(k+1)^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο G με $\|G\|_{L^p} \leq 1$, έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} M_q(r, s_n) &= \sup_{\substack{\|G\|_{L^{q'}} \leq 1, \\ G \text{ τριγ. πολ.}}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{i\theta}) \overline{s_n(re^{i\theta})}\, d\theta \right| \\ &\leq C_{q'} A_{q'} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|^{q}(k+1)^{q-2} \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει αν αφήσουμε το n να πάει στο άπειρο.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Αναλυτικές συναρτήσεις με συντελεστές **Taylor** που φθίνουν

Θεώρημα 3.1. Έστω $1 < p < \infty$. Αν η $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, τοτε η συνάρτηση $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι στον H^p αν και μόνο αν $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p < \infty$.

Απόδειξη. Αν $1 < p \leq 2$, το ευθύ προκύπτει από το Θεώρημα 2.3.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}|a_n|^p < \infty$.

Είναι,

$$\begin{aligned}
|f(e^{i\theta})| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} a_n + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{in\theta}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{N} a_n + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right)\right|
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} \quad \text{και} \quad A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Δηλαδή, έχουμε,

$$
\begin{aligned}
|f(e^{i\theta})| &\le A_N + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \left(s_n - s_{n-1}\right) \right| \\
&= A_N + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n s_n \; - \; \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n s_{n-1} \right| \\
&= A_N + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n s_n \; - \; \sum_{n=N}^{\infty} a_{n+1} s_n \right| \\
&= A_N + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) s_n \; - \; a_{N+1} s_N \right| \\
&\le A_N + a_{N+1} \left| s_N \right| + \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(a_n - a_{n+1}\right) |s_n|
\end{aligned}
$$

Αλλά,

$$
s_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{\frac{in\theta}{2}} \; \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}},
$$

και επομένως, $|s_n| \le \dfrac{1}{|\sin \frac{\theta}{2}|}$.

Όμως, για $\theta \in [-\pi, \pi]$, ισχύει ότι, $\frac{|\theta|}{\pi} \le |\sin \frac{\theta}{2}| \le \frac{|\theta|}{2}$, κι αφού η a_n έχει όριο μηδέν, έχουμε,

$$
\begin{aligned}
|f(e^{i\theta})| &\le A_N \; + \; a_{N+1} \frac{\pi}{|\theta|} \; + \; \frac{\pi}{|\theta|} \sum_{n=N+1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) \\
&= A_N \; + \; \frac{2\pi}{|\theta|} a_{N+1}
\end{aligned}
$$

Τώρα

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta &\le \int_{-\pi}^{\pi} \left(A_N \; + \; \frac{2\pi}{|\theta|} a_{N+1} \right)^p d\theta \\
&= 2 \int_{0}^{\pi} \left(A_N \; + \; \frac{2\pi}{|\theta|} a_{N+1} \right)^p d\theta
\end{aligned}
$$

Για $\theta \in [\frac{\pi}{N+1}, \frac{\pi}{N}]$, ισχύει ότι $\frac{\pi}{2N} \le \theta \le \frac{\pi}{N}$, και τότε έχουμε

$$
|f(e^{i\theta})| \; \le \; A_N + 4N a_{N+1} \; \le \; A_N + 4N a_N .
$$

Επομένως,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta \le 2 \sum_{N=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{N+1}}^{\frac{\pi}{N}} \left(A_N \; + \; \frac{2\pi}{|\theta|} \, a_{N+1} \right)^p \, d\theta$$
$$\le 2 \sum_{N=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{N+1}}^{\frac{\pi}{N}} \left(A_N \; + 4N a_N\right)^p \, d\theta$$

Η ακολουθία των a_n, όμως, είναι φθίνουσα, κι έτσι

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \ge (N+1) a_N \ge N a_N.$$

Άρα,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^p \, d\theta \le \sum_{N=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{N+1}}^{\frac{\pi}{N}} (5A_N)^p \, d\theta$$
$$= \sum_{N=1}^{\infty} \pi 5^p A_N^p \frac{1}{N(N+1)}$$
$$\le \pi 5^p \sum_{N=1}^{\infty} A_N^p \frac{1}{N^2}$$

Αρκεί, δηλαδή, να δείξουμε ότι $\sum\limits_{N=1}^{\infty} A_N^p \frac{1}{N^2} < \infty$, αν γνωρίζουμε ότι $\sum\limits_{N=1}^{\infty} a_N^p N^{p-2} < \infty$.

Έστω $\sigma_N = \sum\limits_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Τότε,

$$\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2} = \sum_{N=1}^{M} A_N^p (\sigma_N - \sigma_{N+1})$$
$$= \sum_{N=1}^{M} A_N^p \sigma_N - \sum_{N=2}^{M+1} A_{N-1}^p \sigma_N$$
$$\le A_1^p \sigma_1 + \sum_{N=2}^{M} (A_N^p - A_{N-1}^p) \sigma_N$$

Αλλά,

$$A_N^p - A_{N-1}^p = p \int_{A_{N-1}}^{A_N} x^{p-1}\,dx \le pA_N^{p-1}(A_N - A_{N-1}) = pA_N^{p-1}a_N$$

και

$$\sigma_N \le \frac{2}{N}$$

Επομένως,

$$\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2} \;\le\; A_1^p\sigma_1 + 2\pi \sum_{N=2}^{M} A_N^{p-1} a_N \frac{1}{N} \;\le\; C \sum_{N=1}^{M} A_N^{p-1} a_N \frac{1}{N}$$

Από την ανισότητα Hölder, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{N=1}^{M} A_N^{p-1} a_N \frac{1}{N} &= \sum_{N=1}^{M} A_N^{p-1} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2}{p'}} a_n \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2-p}{p}} \\ &\le \left(\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2}\right)^{1/p'} \left(\sum_{N=1}^{M} a_N^p N^{p-2}\right)^{1/p}\end{aligned}$$

Είναι, δηλαδή,

$$\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2} \le C \left(\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2}\right)^{1/p'} \left(\sum_{N=1}^{M} a_N^p N^{p-2}\right)^{1/p},$$

το οποίο μας δίνει

$$\sum_{N=1}^{M} A_N^p \frac{1}{N^2} \le C_p \sum_{N=1}^{M} a_N^p N^{p-2} \le C_p \sum_{N=1}^{\infty} a_N^p N^{p-2}. \tag{3.1}$$

Αφού η (3.1) ισχύει για κάθε M, προκύπτει ότι

$$\sum_{N=1}^{\infty} A_N^p \frac{1}{N^2} \le C_p \sum_{N=1}^{\infty} a_N^p N^{p-2} < \infty.$$

$\square$

Θεώρημα 3.2. Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών με $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Τότε η $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ είναι στον H^1 αν και μόνο αν $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} < \infty$.

Επίσης, υπάρχει σταθερά C ανεξάρτητη των a_n, τέτοια ώστε

$$C^{-1}\|f\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} \ \leq C\|f\|_1.$$

Απόδειξη. Το ευθύ είναι ουσιαστικά το Θεώρημα 2.2.

Για το αντίστροφο, γράφουμε την f στη μορφή

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} z^j$$

με τη βοήθεια της άθροισης κατά μέρη.

Άρα, για $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} 2\pi M_1(r,f) &= \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta \\ &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(|a_k - a_{k+1}|\, |\sum_{j=0}^{k} r^j e^{ij\theta}| \right) d\theta \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} r^j e^{ij\theta}|\, d\theta \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta}|\, d\theta \end{aligned}$$

και αν χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση

$$\int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta}|\, d\theta \leq C \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}.$$

την οποία αποδεικνύουμε παρακάτω, έχουμε

$$\begin{aligned} M_1(r,f) &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1} \\ &= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \\ &= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} a_j. \end{aligned}$$

Τελικά,

$$\|f\|_1 \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1}.$$

□

Λήμμα 3.1.

$$\int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta}|\, d\theta \leq C \log(k+1) \leq C \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}.$$

Απόδειξη. Είδαμε στο Θεώρημα 3.1 ότι

$$|\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta}| = \left| \frac{\sin \frac{(k+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \right| \leq \pi \frac{\left|\sin \frac{(k+1)\theta}{2}\right|}{\theta}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ij\theta}|\, d\theta &\leq \pi \int_0^{2\pi} \frac{\left|\sin \frac{(k+1)\theta}{2}\right|}{\theta}\, d\theta \\
&= \pi \int_0^{\frac{2}{k+1}} \frac{\left|\sin \frac{(k+1)\theta}{2}\right|}{\theta}\, d\theta + \pi \int_{\frac{2}{k+1}}^{2\pi} \frac{\left|\sin \frac{(k+1)\theta}{2}\right|}{\theta}\, d\theta \\
&\leq \pi \int_0^{\frac{2}{k+1}} \frac{\frac{k+1}{2}\theta}{\theta}\, d\theta + \pi \int_{\frac{2}{k+1}}^{2\pi} \frac{1}{\theta}\, d\theta \\
&= \pi(1 + \log \pi + \log(k+1)) \\
&\leq C \log(k+1) \\
&\leq C \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}
\end{aligned}$$

□

Βιβλιογραφία

[1] Duren, Peter Larkin. (1970) Theory of Hp spaces New York ; Academic Press,

[2] Miroslav Pavlović (2013). Analytic functions with decreasing coefficients and Hardy and Bloch spaces. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2), 56, pp 623-635. doi:10.1017/S001309151200003X.