Το Θεώρημα του Dirichlet

Δέσποινα Νίκα

Ιούλιος 1999

Μαθηματικό Τμήμα
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Πρόλογος

Οι πρώτοι αριθμοί, $2, 3, 5, 7, 11, ...$, είναι εκείνοι οι φυσικοί αριθμοί οι οποίοι έχουν ακριβώς δύο διαιρέτες, τον εαυτό τους και τη μονάδα. Οι αριθμοί αυτοί θεωρούνται θεμέλιοι λίθοι της Αριθμητικής κυρίως λόγω του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Αριθμητικής

Κάθε φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο πρώτων αριθμών.

Ένα από τα κεντρικά ζητήματα της Θεωρίας Αριθμών είναι η μελέτη της κατανομής των πρώτων αριθμών ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς. Το πρώτο και πασίγνωστο αποτέλεσμα σε αυτό το πλαίσιο είναι του Ευκλείδη από την αρχαιότητα

Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Η απόδειξη αποτελεί υπόδειγμα συντομίας και κομψότητας: έστω ότι το πλήθος *όλων* των πρώτων αριθμών είναι πεπερασμένο. Σχηματίζουμε το γινόμενό τους και προσθέτουμε μια μονάδα στο αποτέλεσμα. Ο αριθμός που προκύπτει δε διαιρείται από κανέναν από τους πρώτους αριθμούς που τον σχημάτισαν και, επομένως, δεν έχει απομείνει άλλος πρώτος αριθμός γιά να τον διαιρεί. Αυτό αντιφάσκει με το Θεμελιώδες Θεώρημα.

Το σύνολο των φυσικών αριθμών χωρίζεται σε δύο αριθμητικές προόδους με βήμα 2, την αριθμητική πρόοδο των περιττών αριθμών

$$1, 3, 5, 7, 9, ...$$

και την αριθμητική πρόοδο των άρτιων αριθμών

$$2, 4, 6, 8, 10, ... \; .$$

Είναι προφανές ότι, εκτός του 2, κανένας άλλος άρτιος αριθμός δεν είναι πρώτος αριθμός: όλοι διαιρούνται από το 2.

Άρα οι άπειροι πρώτοι αριθμοί περιέχονται, εκτός του 2, όλοι στην αριθμητική πρόοδο των περιττών αριθμών.

Τα επιχειρήματα δυσκολεύουν αν χωρίσουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών στις τρείς αριθμητικές προόδους με βήμα 3

$$1, 4, 7, 10, 13, ...$$

$$2, 5, 8, 11, 14, ...$$

$$3, 6, 9, 12, 15, ... \; .$$

Η τρίτη, εκτός του 3, δεν περιέχει κανέναν πρώτο αριθμό και, επομένως όλοι οι πρώτοι αριθμοί μοιράζονται ανάμεσα στις δύο άλλες. Αλλά δεν είναι προφανές αν και οι δύο περιέχουν άπειρους πρώτους αριθμούς ή, μήπως, κάποια από τις δύο περιέχει πεπερασμένο πλήθος από αυτούς.

Για στοιχειώδεις λύσεις αυτού, αλλά και άλλων παρόμοιων προβλημάτων, ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο "An Introduction to the Theory of Numbers" των Hardy και Wright.

Το πρόβλημα είναι, φυσικά, γενικότερο. Έστω βήμα m και οι, m στο πλήθος, αριθμητικές πρόοδοι στις οποίες χωρίζεται το σύνολο των φυσικών αριθμών

$$a, a+m, a+2m, a+3m, ...$$

όπου το a διατρέχει τους αριθμούς $1, 2, ..., m$.

Είναι προφανές ότι, αν ο a και ο m έχουν κοινό διαιρέτη μεγαλύτερο της μονάδας, τότε αυτός ο διαιρέτης διαιρεί κάθε όρο της αριθμητικής προόδου και, επομένως, κανένας από τους όρους της, εκτός ίσως του ίδιου του a, δεν είναι πρώτος αριθμός.

Οπότε γεννιέται το ερώτημα ποιές από τις υπόλοιπες αριθμητικές προόδους, δηλαδή για τις οποίες ο αντίστοιχος a είναι σχετικά πρώτος με τον m, περιέχουν άπειρους πρώτους αριθμούς.

Η εργασία αυτή ασχολείται με το διάσημο **Θεώρημα του Dirichlet**

Κάθε αριθμητική πρόοδος $a, a+m, a+2m, ...$, με a, m να είναι σχετικά πρώτοι, περιέχει άπειρους πρώτους αριθμούς.

Το αποτέλεσμα αυτό αποδείχθηκε για πρώτη φορά από τον Dirichlet το 1837 και κατόπιν αποδείχθηκε και από άλλους μαθηματικούς με διαφορετικούς τρόπους απόδειξης: Mertens (1897), Selberg (1949), Zassenhaus (1949).

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε με κάθε λεπτομέρεια την απόδειξη του Θεωρήματος του Dirichlet βασισμένοι στον τρόπο παρουσίασης που εκτίθεται στο βιβλίο "Introduction to Analytic Number Theory" του K. Chandrasekharan.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι στη συγκεκριμένη απόδειξη δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις μεθόδους της μιγαδικής ανάλυσης.

Όσον αφορά στις απαιτούμενες γνώσεις για την ανάγνωση της εργασίας μας αυτές καλύπτονται από τα συνήθη προπτυχιακά μαθήματα ενός μαθηματικού τμήματος. Οποιαδήποτε αποτελέσματα ξεφεύγουν από τα καθιερωμένα εκτίθενται και αποδεικνύονται στην Εισαγωγή της εργασίας.

Ειδικώτερα, δεχόμαστε τα εξής.

1. Από τη Θεωρία Αριθμών:

Τους πρώτους αριθμούς τους οποίους, σε αύξουσα διάταξη, συμβολίζουμε $p_1, p_2, p_3, ...$. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Αριθμητικής. Την έννοια του μέγιστου κοινού διαιρέτη $\gcd(a, b)$ δύο αριθμών. Την έννοια των ισοϋπολοίπων $mod\ m$ με το σχετικό συμβολισμό $a \equiv b\ mod\ m$. Τις αντίστοιχες κλάσεις ισοϋπολοίπων $[1], [2], ..., [m]$ και πώς τις προσθέτουμε και τις πολλαπλασιάζουμε. Τη συνάρτηση του Euler $\varphi(m)$. Το Θεώρημα των Fermat - Euler.

2. Από τη Θεωρία Ομάδων:

Την έννοια της τάξης μιας ομάδας και την ταυτότητα $a^m = e$ γιά τα στοιχεία a μιας ομάδας, την τάξη της m και το μοναδιαίο στοιχείο της e. Το ότι όταν

a είναι ένα στοιχείο μιάς πεπερασμένης ομάδας και το b διατρέχει μία φορά όλα τα στοιχεία της, τότε το ab διατρέχει μία φορά όλα τα στοιχεία της. Την έννοια της αβελιανής ομάδας και το παράδειγμα $G_m = \{[a] : 1 \leq a \leq m,\ \gcd(a,m) = 1\}$. Την έννοια της κυκλικής ομάδας. Το Θεμελιώδες Θεώρημα των Πεπερασμένων Αβελιανών Ομάδων: κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα είναι ευθύ γινόμενο κυκλικών υποομάδων της.

3. Από τον Προχωρημένο Απειροστικό Λογισμό:

Όλα τα βασικά για ακολουθίες, όρια και συνέχεια συναρτήσεων, παραγώγιση, ολοκλήρωση συνεχών συναρτήσεων. Στοιχειώδεις ιδιότητες αριθμητικών σειρών και ειδικά ότι η απόλυτη σύγκλιση συνεπάγεται τη σύγκλιση μιάς σειράς. Βασικές ιδιότητες σειρών συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση και η σχέση της με τη συνέχεια, το κριτήριο του Cauchy για ομοιόμορφη σύγκλιση και το $M-$test του Weierstrass . Τα σύμβολα $[x]$ και $\{x\}$ για το ακέραιο μέρος και το κλασματικό μέρος. Την έννοια του γενικευμένου ολοκληρώματος $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ και το ότι η απόλυτη σύγκλισή του συνεπάγεται τη σύγκλισή του. Το Θεώρημα Μέσης Τιμής για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

4. Από τη Μιγαδική Ανάλυση:

Την έννοια της $m-$οστής ρίζας της μονάδας. Την έννοια του συμπαγούς υποσυνόλου του μιγαδικού επιπέδου $\mathbf{C}$ σε σχέση με ανοικτές καλύψεις και με υπο-ακολουθίες. Την έννοια του ανοικτού και συνεκτικού υποσυνόλου του $\mathbf{C}$ και ειδικά ότι: αν Ω είναι ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbf{C}$ και $\Omega = A \cup B$, όπου τα A, B είναι ανοικτά και ξένα μεταξύ τους, τότε ένα από αυτά είναι κενό. Την έννοια της αναλυτικότητας και τις εξισώσεις Cauchy-Riemann . Την αναπαράσταση μιάς αναλυτικής συνάρτησης σαν σειρά-Taylor στο μεγαλύτερο δίσκο που περιέχεται στο σύνολο αναλυτικότητάς της και με δοσμένο κέντρο μέσα στο σύνολο αυτό. Τα Θεωρήματα των Cauchy, Morera καθώς και τους Τύπους του Cauchy για τις παραγώγους μιάς αναλυτικής συνάρτησης. Την έννοια του πόλου, της τάξης ενός πόλου και του residue μιάς συνάρτησης σε έναν πόλο της. Την έννοια της μερόμορφης συνάρτησης και το ότι άθροισμα και γινόμενο μερόμορφων συναρτήσεων είναι μερόμορφες συναρτήσεις.

Την επιτροπή για την κρίση αυτής της διπλωματικής εργασίας απετέλεσαν οι

Μ. Παπαδημητράκης, επιβλέπων καθηγητής
Ι. Αντωνιάδης
Ε. Κατσοπρινάκης

τους οποίους ευχαριστώ.

Δέσποινα Νίκα

Ιούλιος 1999

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Ακολουθίες και Σειρές Αναλυτικών Συναρτήσεων

Θεώρημα 1.1 *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$ και ακολουθία $\{f_n\}$ αναλυτικών συναρτήσεων στο Ω. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω για οποιοδήποτε $k \in \mathbf{N}$.*

Απόδειξη:

Αφού κάθε f_n είναι συνεχής στο Ω, συνεπάγεται ότι η f είναι συνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Αν πάρουμε τυχόν $s \in \Omega$ και $\delta > 0$ ώστε ο κλειστός δίσκος $\overline{\Delta}(s;\delta)$ να περιέχεται στο Ω, τότε η f είναι συνεχής στο δίσκο και, επομένως, είναι συνεχής στο s. Άρα η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Ω.

Θεωρούμε τυχούσα τριγωνική καμπύλη γ, της οποίας η εικόνα γ^* μαζί με το εσωτερικό της τρίγωνο περιέχεται στο Ω. Τότε, από το Θεώρημα του Cauchy συνεπάγεται ότι για κάθε n ισχύει

$$\int_\gamma f_n(s)ds = 0\ .$$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης στο συμπαγές γ^*, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f_n(s)ds - \int_\gamma f(s)ds\right| &\leq \int_\gamma |f_n(s)-f(s)||ds| \\ &\leq max_{s\in\gamma^*}|f_n(s)-f(s)|\,\text{μήκος}(\gamma) \ \to\ 0\end{aligned}$$

όταν $n \to +\infty$.

Άρα

$$\int_\gamma f(s)ds = 0$$

και, επειδή η f είναι συνεχής στο Ω, συνεπάγεται από το Θεώρημα του Morera ότι η f είναι αναλυτική στο Ω.

Κατόπιν, θεωρούμε τυχόντα κλειστό δίσκο $\overline{\Delta}(s_0;\delta_0)$ υποσύνολο του Ω. Αν συμβολίσουμε $\Pi(s_0;\delta_0)$ την περιφέρεια του $\overline{\Delta}(s_0;\delta_0)$, τότε από τον τύπο του Cauchy έχουμε ότι για κάθε n και για κάθε k ισχύει

$$f_n^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Pi(s_0;\delta_0)} \frac{f_n(\varsigma)}{(\varsigma - s)^{k+1}}\, d\varsigma$$

και

$$f^{(k)}(s) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\Pi(s_0;\delta_0)} \frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - s)^{k+1}}\, d\varsigma$$

για κάθε s στον ανοικτό δίσκο $\Delta(s_0;\delta_0)$.

Περιορίζουμε, τώρα, το s στον ανοικτό δίσκο $\Delta(s_0;\frac{1}{2}\delta_0)$ και έχουμε

$$\begin{aligned}
|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| &= \Big|\frac{k!}{2\pi i}\int_{\Pi(s_0;\delta_0)} \frac{f_n(\varsigma)-f(\varsigma)}{(\varsigma - s)^{k+1}}\, d\varsigma\Big| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi}\int_{\Pi(s_0;\delta_0)} \frac{|f_n(\varsigma)-f(\varsigma)|}{|\varsigma - s|^{k+1}}\, |d\varsigma| \\
&\leq \frac{k!}{2\pi}\frac{max_{\varsigma\in\Pi(s_0;\delta_0)}|f_n(\varsigma)-f(\varsigma)|}{(\frac{1}{2}\delta_0)^{k+1}}\, 2\pi\frac{1}{2}\delta_0 \\
&= \frac{2^k k!}{\delta_0^k}\, max_{\varsigma\in\Pi(s_0;\delta_0)}|f_n(\varsigma)-f(\varsigma)|.
\end{aligned}$$

Άρα

$$max_{s\in\Delta(s_0;\frac{1}{2}\delta_0)}|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| \leq \frac{2^k k!}{\delta_0^k}\, max_{\varsigma\in\Pi(s_0;\delta_0)}|f_n(\varsigma)-f(\varsigma)|\ .$$

Λόγω ομοιόμορφης σύγκλισης της $\{f_n\}$ στην f στο συμπαγές $\Pi(s_0;\delta_0)$, συνεπάγεται ότι η $\{f_n^{(k)}\}$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα στο $\Delta(s_0;\frac{1}{2}\delta_0)$.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι για κάθε σημείο του Ω υπάρχει δίσκος με κέντρο το σημείο αυτό στον οποίον η $\{f_n^{(k)}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f^{(k)}$.

Έστω, τώρα, τυχόν συμπαγές K υποσύνολο του Ω. Για κάθε $s\in K$ υπάρχει $\Delta(s;\delta)$ όπου η $\{f_n^{(k)}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f^{(k)}$. Το K καλύπτεται από τα ανοικτά σύνολα $\Delta(s;\delta)$ καθώς το s διατρέχει το K και, επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν πεπερασμένα $s_1,...,s_m$ ώστε το K να περιέχεται στην ένωση $\cup_{j=1}^m\Delta(s_j;\delta_j)$. Τότε

$$max_{s\in K}|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)| \leq max_{1\leq j\leq m} max_{s\in\Delta(s_j;\delta_j)}|f_n^{(k)}(s) - f^{(k)}(s)|\ ,$$

οπότε η $\{f_n^{(k)}\}$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα στο K.

Θεώρημα 1.2 *Έστω ανοικτό υποσύνολο Ω του $\mathbf{C}$ και $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων αναλυτικών στο Ω. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω, τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και για κάθε $k \in \mathbf{N}$ ισχύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω.*

Απόδειξη:

Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Θεώρημα 1.1 στην ακολουθία συναρτήσεων $\{s_n\}$, όπου $s_n = f_1 + \cdots + f_n$.

Κάθε s_n είναι αναλυτική στο Ω και η $\{s_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Άρα η f είναι αναλυτική στο Ω και η $\{s_n^{(k)}\}$ συγκλίνει στην $f^{(k)}$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Ω. Όμως $s_n^{(k)} = f_1^{(k)} + \cdots + f_n^{(k)}$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Η πιό συνηθισμένη γενική περίπτωση εφαρμογής του τελευταίου Θεωρήματος 1.2 είναι σε συνδυασμό με το πολύ γνωστό

Θεώρημα 1.3 *(Το M-test του Weierstrass) Έστω ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων $\{f_n\}$ ορισμένων σε ένα σύνολο A και έστω ακολουθία αριθμών M_n ώστε να ισχύει $|f_n(a)| \leq M_n$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$ και για κάθε $a \in A$. Αν η σειρά αριθμών $\sum_{n=1}^{+\infty} M_n$ συγκλίνει, τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σε κάποια συνάρτηση ομοιόμορφα στο A.*

Η απόδειξη θεωρείται γνωστή.

1.2 Απειρο-γινόμενα Μιγαδικών Αριθμών

Ορισμός 1.1 *Έστω $\{z_n\}$ ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Ονομάζουμε απειρογινόμενο με γενικό όρο z_n το σύμβολο*

$$\prod_{n=1}^{+\infty} z_n \qquad \acute{\eta} \qquad z_1 z_2 \cdots .$$

Λέμε ότι το απειρο-γινόμενο συγκλίνει στο μιγαδικό αριθμό P, αν συμβαίνουν τα ακόλουθα

1. *υπάρχει N ώστε $z_n \neq 0$ για κάθε $n \geq N$ και*
2. *η ακολουθία μερικών γινομένων $z_N, z_N z_{N+1}, z_N z_{N+1} z_{N+2}, \ldots$ συγκλίνει σε κάποιο Q και*
3. *το Q είναι διαφορετικό από το 0 και το ∞ και*
4. *$P = z_1 \cdots z_{N-1} Q$.*

Αν κάποιο από τα 1, 2, 3 δεν ισχύει, τότε λέμε ότι το απειρο-γινόμενο αποκλίνει.

Λέμε ότι το απειρο-γινόμενο αποκλίνει στο 0 ή στο ∞, αν ισχύουν τα 1, 2, αλλά το Q είναι ίσο με 0 ή ∞ αντίστοιχα.

Παρατήρηση

Αν το απειρο-γινόμενο είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο 0 ή στο ∞, τότε συνεπάγεται ότι το πολύ πεπερασμένο πλήθος από τα z_n μπορεί να είναι ίσα με 0.

Επίσης, αν το απειρο-γινόμενο συγκλίνει σε αριθμό διαφορετικό από το 0, τότε συνεπάγεται ότι κανένα από τα z_n δεν είναι ίσο με το 0.

Και αντιστρόφως, αν το απειρο-γινόμενο συγκλίνει και κανένα από τα z_n δεν είναι ίσο με το 0, τότε το απειρο-γινόμενο συγκλίνει σε αριθμό διαφορετικό από το 0.

Πρόταση 1.1 *Αν το $\prod_{n=1}^{+\infty} z_n$ συγκλίνει, τότε $z_n \to 1$.*

Απόδειξη:

Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό του ορισμού και θέτουμε

$$Q_N = z_N, Q_{N+1} = z_N z_{N+1}, Q_{N+2} = z_N z_{N+1} z_{N+2}, \ldots.$$

Τότε $Q_n \to Q$ και, επειδή $Q \neq 0$, συνεπάγεται ότι

$$z_n = \frac{Q_n}{Q_{n-1}} \to \frac{Q}{Q} = 1 \ .$$

Αποτελεί παράδοση να χρησιμοποιείται για το $n-$οστό όρο ο συμβολισμός $1 + a_n$, αντί του z_n, οπότε η Πρόταση 1.1 λέει ότι

αν το $\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + a_n)$ συγκλίνει, τότε $a_n \to 0$.

Θεώρημα 1.4 *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως, τότε το $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει.*

Απόδειξη:

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι $a_n \to 0$ και, επομένως, το πολύ πεπερασμένο πλήθος από τα $1 + a_n$ μπορεί να είναι ίσα με το 0.

Περίπτωση 1. $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < 1$.

Τότε $|a_n| < 1$ για κάθε n, οπότε κανένα $1 + a_n$ δεν είναι ίσο με 0. Θέτουμε

$$P_n = (1 + a_1) \cdots (1 + a_n)$$

και θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{P_n\}$ συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό διαφορετικό από το 0.

Έχουμε ότι

$$|P_n| \leq (1 + |a_1|) \cdots (1 + |a_n|)| \leq \exp(|a_1| + \cdots + |a_n|) \leq e \ .$$

Επίσης,

$$P_{n+1} - P_n = P_n(1 + a_{n+1}) - P_n = P_n a_{n+1} \ ,$$

οπότε

$$|P_{n+1} - P_n| \leq e|a_{n+1}| \ .$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}|$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η $P_1+\sum_{n=1}^{+\infty}(P_{n+1}-P_n)$ συγκλίνει. Αν P είναι το άθροισμα της σειράς αυτής, τότε

$$P_n = P_1 + (P_2 - P_1) + \cdots + (P_n - P_{n-1}) \to P$$

και απομένει να δείξουμε ότι $P \neq 0$.

Όμως

$$|P_n| \geq (1-|a_1|)\cdots(1-|a_n|) \geq 1-(|a_1|+\cdots+|a_n|) \geq 1-\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k| = \alpha > 0\ .$$

Ο α είναι ανεξάρτητος του n, οπότε, αν αφήσουμε το n να τείνει στο $+\infty$, παίρνουμε

$$|P| \geq \alpha > 0$$

και, επομένως, $P \neq 0$.

Περίπτωση 2. $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| \geq 1$.

Υπάρχει N ώστε

$$\sum_{n=N}^{+\infty}|a_n| < 1\ .$$

Τότε, από την πρώτη περίπτωση παίρνουμε ότι το $\prod_{n=N}^{+\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό διαφορετικό από το 0. Άρα, βάσει του ορισμού, το $\prod_{n=1}^{+\infty}(1+a_n)$ συγκλίνει.

1.3 Η Αρχή της Αναλυτικής Συνέχισης

Θεώρημα 1.5 *Έστω f αναλυτική σε ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο Ω του $\mathbf{C}$. Αν υπάρχει ακολουθία $\{s_n\}$ στο Ω και $s \in \Omega$ με $s_n \to s$ και $s_n \neq s$ για κάθε n, ώστε $f(s_n)=0$ για κάθε n, τότε η f ταυτίζεται με τη μηδενική συνάρτηση στο Ω.*

Με άλλη διατύπωση: αν οι ρίζες της f έχουν σημείο συσσώρευσης στο Ω, τότε η f μηδενίζεται παντού στο Ω.

Απόδειξη:

(A). Έστω οποιοδήποτε $s \in \Omega$ με την ιδιότητα:

υπάρχει $\{s_n\}$ στο Ω με $s_n \to s$, $s_n \neq s$ για κάθε n και $f(s_n)=0$ για κάθε n.

Παίρνουμε $\delta > 0$ ώστε $\Delta(s;\delta) \subseteq \Omega$ και γράφουμε τη σειρά-Taylor της f στο δίσκο αυτόν:

$$f(\eta) = a_0 + a_1(\eta - s) + a_2(\eta - s)^2 + \cdots\ .$$

Έστω ότι δεν είναι όλα τα a_n ίσα με το 0.

Τότε υπάρχει κάποιο ελάχιστο N ώστε $a_N \neq 0$. Δηλαδή η σειρά γίνεται

$$\begin{aligned} f(\eta) &= a_N(\eta-s)^N + a_{N+1}(\eta-s)^{N+1} + \cdots \\ &= (\eta-s)^N[a_N + a_{N+1}(\eta-s)+\cdots] = (\eta-s)^N g(\eta)\ , \end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση g ορίζεται στο δίσκο $\Delta(s;\delta)$ από τη δυναμοσειρά

$$g(\eta) = a_N + a_{N+1}(\eta - s) + \cdots$$

και, επομένως, είναι αναλυτική εκεί. Επειδή $s_n \to s$, συνεπάγεται ότι, για μεγάλα n, το s_n περιέχεται στον $\Delta(s;\delta)$, οπότε

$$0 = f(s_n) = (s_n - s)^N g(s_n)$$

για μεγάλα n. Άρα, αφού $s_n \neq s$,

$$g(s_n) = 0$$

για μεγάλα n, οπότε, λόγω συνέχειας της g στο s

$$0 = \lim g(s_n) = g(s) = a_N$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα όλα τα a_n είναι ίσα με το 0, οπότε η f μηδενίζεται παντού στον $\Delta(s;\delta)$.

(B). Χωρίζουμε το Ω στο υποσύνολο

$$A = \{s \in \Omega : \text{η } f \text{ μηδενίζεται σε κάποιο δίσκο με κέντρο το } s\}$$

και στο συμπληρωματικό

$$B = \Omega \setminus A\ .$$

Το A είναι, προφανώς, ανοικτό σύνολο.

Έστω ότι το B δεν είναι ανοικτό. Τότε υπάρχει

$$s \in B$$

ώστε κανένας δίσκος με κέντρο s να μην περιέχεται στο B. Επειδή κάποιος δίσκος με κέντρο s περιέχεται στο Ω, συνεπάγεται ότι κάθε δίσκος με κέντρο s τέμνει το A. Άρα υπάρχει ακολουθία

$$\{s_n\} \text{ στο } A \qquad \text{με} \qquad s_n \to s\ .$$

Τότε

$$s_n \neq s \qquad \text{και} \qquad f(s_n) = 0$$

για κάθε n και από το μέρος (A) συνεπάγεται ότι

$$s \in A\ .$$

Αυτό είναι άτοπο, οπότε το B είναι ανοικτό σύνολο.

Επειδή το Ω είναι συνεκτικό, κάποιο από τα A, B είναι κενό. Από την υπόθεση του θεωρήματος και από το αποτέλεσμα του μέρους (A) συνεπάγεται ότι το A δεν είναι κενό, οπότε

$$\Omega = A\ .$$

Άρα η f μηδενίζεται παντού στο Ω.

Θεώρημα 1.6 *Έστω ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο Ω του $\mathbf{C}$ και f αναλυτική στο Ω. Αν η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο ενός ευθύγραμμου τμήματος ή ενός ανοικτού δίσκου στο Ω, τότε η f μηδενίζεται παντού στο Ω.*

Απόδειξη:

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.5.

1.4 Αναλυτικές Συναρτήσεις που Ορίζονται από Ολοκληρώματα

Θεώρημα 1.7 *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$ και $f : [a,b]\times\Omega \to \mathbf{C}$ συνεχής στο $[a,b]\times\Omega$. Τότε ορίζεται η*

$$F(s) = \int_a^b f(t,s)dt$$

στο Ω και είναι συνεχής στο Ω.

Απόδειξη:
Το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο διότι η $f(\cdot, s)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ για κάθε $s \in \Omega$.

Παίρνουμε τυχόν $s_0 \in \Omega$ και θα δείξουμε ότι η F είναι συνεχής στο s_0.

Θεωρούμε μέσα στο Ω έναν κλειστό δίσκο $\overline{\Delta}$ με κέντρο το s_0. Η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[a,b]\times\overline{\Delta}$, οπότε είναι ομοιόμορφα συνεχής εκεί. Άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|f(t',s') - f(t'',s'')| < \epsilon$$

για κάθε $t', t'' \in [a,b]$ και $s', s'' \in \overline{\Delta}$ με $|t'-t''| < \delta$ και $|s'-s''| < \delta$.

Τότε, για κάθε $s', s'' \in \overline{\Delta}$ με $|s'-s''| < \delta$, έχουμε

$$|F(s')-F(s'')| = \Big|\int_a^b [f(t,s')-f(t,s'')]dt\Big| \leq \int_a^b |f(t,s')-f(t,s'')|dt \leq (b-a)\epsilon\ .$$

Άρα η F είναι συνεχής στο $\overline{\Delta}$ και, επομένως, είναι συνεχής στο s_0.

Θεώρημα 1.8 *Έστω Ω ανοικτό υποσύνολο του $\mathbf{C}$ και $f : [a,b]\times\Omega \to \mathbf{C}$ ώστε*

1. *η f είναι συνεχής στο $[a,b]\times\Omega$,*
2. *για κάθε $t\in[a,b]$ η $f(t,\cdot)$ είναι αναλυτική στο Ω και*
3. *η (μιγαδική) παράγωγος f_s είναι συνεχής στο $[a,b]\times\Omega$.*

Τότε η $F(s) = \int_a^b f(t,s)dt$ είναι αναλυτική στο Ω και

$$F'(s) = \int_a^b f_s(t,s)dt$$

για κάθε $s\in\Omega$.

Απόδειξη:
Παίρνουμε τυχόν $s_0 \in \Omega$ και θα δείξουμε ότι η F είναι αναλυτική στο s_0 και ότι

$$F'(s_0) = \int_a^b f_s(t,s_0)dt\ .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a, b] \times \Omega \to \mathbf{C}$ που ορίζεται με τον τύπο

$$g(t,s) = \begin{cases} \frac{f(t,s)-f(t,s_0)}{s-s_0}, & \text{αν } s \neq s_0 \\ f_s(t,s_0), & \text{αν } s = s_0. \end{cases}$$

Αν θεωρήσουμε σημείο (t_1, s_1) με $s_1 \neq s_0$, τότε, επειδή η f είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{t\to t_1, s\to s_1} g(t,s) = \lim_{t\to t_1, s\to s_1} \frac{f(t,s)-f(t,s_0)}{s-s_0} = \frac{f(t_1,s_1)-f(t_1,s_0)}{s_1-s_0} = g(t_1,s_1) \ .$$

Έστω σημείο (t_0, s_0). Θα αποδείξουμε ότι

$$\lim_{t\to t_0, s\to s_0} g(t,s) = g(t_0,s_0) \ ,$$

αλλά ο προηγούμενος υπολογισμός δεν ισχύει, οπότε κάνουμε το εξής. Γράφουμε

$$f = u + iv \qquad \text{και} \qquad s = \sigma + i\tau \ ,$$

οπότε από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann :

$$f_s(t,\cdot) = u_\sigma(t,\cdot) + iv_\sigma(t,\cdot) = v_\tau(t,\cdot) - iu_\tau(t,\cdot) \ .$$

Τότε

$$\begin{aligned} |g(t,s) - g(t_0,s_0)| &\leq |g(t,s) - g(t,s_0)| + |g(t,s_0) - g(t_0,s_0)| \\ &= \frac{1}{|s-s_0|}\big|f(t,s) - f(t,s_0) - f_s(t,s_0)(s-s_0)\big| \\ &\quad +|f_s(t,s_0) - f_s(t_0,s_0)| \\ &= \frac{1}{|s-s_0|}\Big|[u(t,s)-u(t,s_0)] + i[v(t,s)-v(t,s_0)] \\ &\quad -f_s(t,s_0)[(\sigma-\sigma_0)+i(\tau-\tau_0)]\Big| \\ &\quad +|f_s(t,s_0) - f_s(t_0,s_0)| \ . \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι για κάποια s_1, s_2 στο ευθύγραμμο τμήμα $[s_0, s]$ ισχύει

$$u(t,s) - u(t,s_0) = u_\sigma(t,s_1)(\sigma-\sigma_0) + u_\tau(t,s_1)(\tau-\tau_0)$$

και

$$v(t,s) - v(t,s_0) = v_\sigma(t,s_2)(\sigma-\sigma_0) + v_\tau(t,s_2)(\tau-\tau_0) \ .$$

Από τις τρεις τελευταίες σχέσεις και από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann παίρνουμε, τελικά, ότι

$$\begin{aligned} &|g(t,s) - g(t_0,s_0)| \\ \leq\ & \frac{1}{|s-s_0|}\Big|[(u_\sigma(t,s_1)-u_\sigma(t,s_0))(\sigma-\sigma_0) + (u_\tau(t,s_1)-u_\tau(t,s_0))(\tau-\tau_0)] \\ & +i[(v_\sigma(t,s_2)-v_\sigma(t,s_0))(\sigma-\sigma_0) + (v_\tau(t,s_2)-v_\tau(t,s_0))(\tau-\tau_0)]\Big| \\ & +|f_s(t,s_0) - f_s(t_0,s_0)| \\ \leq\ & |u_\sigma(t,s_1)-u_\sigma(t,s_0)| + |u_\tau(t,s_1)-u_\tau(t,s_0)| + |v_\sigma(t,s_2)-v_\sigma(t,s_0)| \\ & +|v_\tau(t,s_2)-v_\tau(t,s_0)| + |f_s(t,s_0)-f_s(t_0,s_0)|. \end{aligned}$$

Η συνέχεια της f_s συνεπάγεται τη συνέχεια των $u_\sigma, u_\tau, v_\sigma, v_\tau$ και, επειδή $s_1 \to s_0$ και $s_2 \to s_0$ όταν $s \to s_0$, παίρνουμε ότι

$$\lim_{t \to t_0, s \to s_0} g(t,s) = g(t_0, s_0) \ .$$

Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι η g είναι συνεχής σε κάθε σημείο του $[a,b] \times \Omega$ είτε το σημείο έχει δεύτερη συντεταγμένη διαφορετική από το s_0 είτε έχει δεύτερη συντεταγμένη ίση με το s_0. Άρα η g είναι συνεχής στο $[a,b] \times \Omega \to \mathbf{C}$, οπότε από το Θεώρημα 1.7 η

$$G(s) = \int_a^b g(t,s)dt$$

είναι συνεχής στο Ω. Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{s \to s_0} \frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} &= \lim_{s \to s_0} \int_a^b g(t,s)dt \ = \ \lim_{s \to s_0} G(s) \\ &= G(s_0) \ = \ \int_a^b g(t,s_0)dt \ = \ \int_a^b f_s(t,s_0)dt \ . \end{aligned}$$

1.5 Εναλλαγή Διαδοχικών Αθροίσεων

Είναι γνωστό ότι, αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνουν, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \ .$$

Αυτό επεκτείνεται με επαγωγή σε πεπερασμένο πλήθος σειρών: αν για $m = 1, ..., M$ οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}$ συγκλίνουν, τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{M} a_{m,n})$ συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{M} a_{m,n}) = \sum_{m=1}^{M}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ .$$

Θεώρημα 1.9 *Έστω $a_{m,n} \geq 0$ για κάθε m, n. Τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ .$$

Απόδειξη:
Έστω

$$K = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ , \qquad L = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ .$$

Θα αποδείξουμε ότι

$$K \leq L \ .$$

Αυτό είναι προφανές αν $L = +\infty$, οπότε υποθέτουμε ότι $L < +\infty$.

Τότε, όμως, για κάθε m ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) = L < +\infty \ ,$$

οπότε για κάθε m η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}$ συγκλίνει.

Άρα για κάθε M έχουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{M}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) = \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{M} a_{m,n}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) = L \ .$$

Επειδή το $\sum_{m=1}^{M}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n})$ αυξάνει καθώς το M αυξάνει, συνεπάγεται, αφήνοντας το M να τείνει στο $+\infty$, ότι

$$K = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \leq L \ .$$

Συμμετρικά αποδεικνύεται ότι

$$L \leq K \ ,$$

οπότε

$$K = L \ .$$

Θεώρημα 1.10 *Έστω*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} |a_{m,n}|) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_{m,n}|) < +\infty \ .$$

Τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ .$$

Απόδειξη:

Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι η ισότητα των σειρών στην υπόθεση είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.9.

Για κάθε $a_{m,n}$ ορίζουμε τους αριθμούς

$$a^+_{m,n} = \max(a_{m,n}, 0) \qquad \text{και} \qquad a^-_{m,n} = -\min(a_{m,n}, 0)$$

και είναι προφανές ότι για κάθε m, n ισχύει αφ΄ ενός

$$a^+_{m,n} \geq 0 \qquad \text{και} \qquad a^-_{m,n} \geq 0 \ ,$$

αφ΄ ετέρου

$$a^+_{m,n} - a^-_{m,n} = a_{m,n} \qquad \text{και} \qquad a^+_{m,n} + a^-_{m,n} = |a_{m,n}| \ .$$

Επομένως, συγκρίνοντας με την υπόθεση και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.9, παίρνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a^+_{m,n}) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a^+_{m,n}) < +\infty$$

και

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a^-_{m,n}) = \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a^-_{m,n}) < +\infty \ .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a_{m,n}) &= \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a^+_{m,n}) - \sum_{n=1}^{+\infty}(\sum_{m=1}^{+\infty} a^-_{m,n}) \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a^+_{m,n}) - \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a^-_{m,n}) \ = \ \sum_{m=1}^{+\infty}(\sum_{n=1}^{+\infty} a_{m,n}) \ .\end{aligned}$$

1.6 Ο Τύπος Άθροισης του Abel

Θεώρημα 1.11 *Έστω γνησίως αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών* $\{\lambda_n\}$*, η οποία αποκλίνει στο* $+\infty$ *και ακολουθία μιγαδικών* $\{z_n\}$*.*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $A : [\lambda_1, +\infty) \to \mathbf{C}$ *με τύπο*

$$A(x) = \sum_{n:\lambda_n \le x} z_n \ .$$

Επίσης, έστω $\phi : [\lambda_1, +\infty) \to \mathbf{C}$*.*

Τότε

$$\sum_{n=1}^{k} z_n \phi(\lambda_n) = A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)[\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)] \ .$$

Αν, επιπλέον, η ϕ *έχει συνεχή παράγωγο στο* $[\lambda_1, +\infty)$*, τότε*

$$\sum_{n:\lambda_n \le x} z_n \phi(\lambda_n) = A(x)\phi(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(t)\phi'(t)dt \ .$$

Αν, επίσης, $\lim_{x\to+\infty} A(x)\phi(x) = 0$*, τότε*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{+\infty} A(t)\phi'(t)dt \ .$$

Απόδειξη:
Υπολογίζουμε

$$A(\lambda_n) = \sum_{m:\lambda_m \le \lambda_n} z_m = z_1 + \cdots + z_n \ ,$$

$$A(\lambda_{n-1}) = \sum_{m:\lambda_m \leq \lambda_{n-1}} z_m = z_1 + \cdots + z_{n-1} \ .$$

Άρα

$$z_n = A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})$$

για κάθε $n \geq 2$ και, φυσικά, $z_1 = A(\lambda_1)$.

Επομένως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{k} z_n \phi(\lambda_n) &= A(\lambda_1)\phi(\lambda_1) + \sum_{n=2}^{k} [A(\lambda_n) - A(\lambda_{n-1})]\phi(\lambda_n) \\
&= \sum_{n=1}^{k} A(\lambda_n)\phi(\lambda_n) - \sum_{n=2}^{k} A(\lambda_{n-1})\phi(\lambda_n) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)\phi(\lambda_n) + A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)\phi(\lambda_{n+1}) \\
&= A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)[\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)] \ .
\end{aligned}$$

Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $\lambda_k \leq x$ και, επομένως,

$$\lambda_k \leq x < \lambda_{k+1} \ .$$

Τότε

$$\begin{aligned}
\sum_{n:\lambda_n \leq x} z_n \phi(\lambda_n) &= \sum_{n=1}^{k} z_n \phi(\lambda_n) \\
&= A(\lambda_k)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n)[\phi(\lambda_{n+1}) - \phi(\lambda_n)] \\
&= A(x)\phi(\lambda_k) - \sum_{n=1}^{k-1} A(\lambda_n) \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \phi'(t)dt \\
&= A(x)\phi(x) - A(x)[\phi(x) - \phi(\lambda_k)] - \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(\lambda_n)\phi'(t)dt \\
&= A(x)\phi(x) - A(\lambda_k) \int_{\lambda_k}^{x} \phi'(t)dt - \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(\lambda_n)\phi'(t)dt \\
&= A(x)\phi(x) - \int_{\lambda_k}^{x} A(t)\phi'(t)dt - \sum_{n=1}^{k-1} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} A(t)\phi'(t)dt \\
&= A(x)\phi(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(t)\phi'(t)dt \ .
\end{aligned}$$

Άρα, αν $A(x)\phi(x) \to 0$ καθώς $x \to +\infty$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \phi(\lambda_n) = -\int_{\lambda_1}^{+\infty} A(t)\phi'(t)dt \ .$$

Κεφάλαιο 2

Η ζ-συνάρτηση του Riemann

Θεώρημα 2.1 *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k}$ *και το άπειρο-γινόμενο* $\prod_{k=1}^{+\infty}(1-\frac{1}{p_k})^{-1}$ *αποκλίνουν στο* $+\infty$.

Απόδειξη:
(1) Γνωρίζουμε ότι, για $0 \leq u < 1$, η γεωμετρική σειρά $\sum_{m=0}^{+\infty} u^m$ συγκλίνει στο $\frac{1}{1-u}$. Άρα, για αυτές τις τιμές του u

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{m=0}^{+\infty} u^m \geq 1 + u + u^2 + \cdots + u^m \ .$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{p}$ και παίρνουμε

$$\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \geq 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^m} \ .$$

Επιλέγουμε τυχόν $x \geq 2$ και έστω n ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $p_n \leq x$, οπότε οι αριθμοί

$$2, 3, 5, ..., p_n$$

είναι όλοι οι πρώτοι μέχρι το x.

Έστω m οποιοσδήποτε ακέραιος με

$$2^m \geq x \ .$$

Από την προηγούμενη ανισότητα βρίσκουμε

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{-1} \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_n}\Big)^{-1}$$

$$\geq \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^m}\Big)\Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^m}\Big) \cdots \Big(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \cdots + \frac{1}{p_n^m}\Big)$$

$$= \sum_{0\le i,j,...,h\le m} \frac{1}{2^i 3^j \cdots p_n^h} \ .$$

Στο τελευταίο άθροισμα οι εκθέτες $i, j, ..., h$ διατρέχουν ο καθένας και ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον τις τιμές $0, 1, ..., m$.

Οι παρονομαστές του αθροίσματος είναι αριθμοί που η αναπαράστασή τους σαν γινόμενα πρώτων δεν περιλαμβάνει κανέναν πρώτο αριθμό διαφορετικό από τους $2, 3, ..., p_n$.

Ισχυριζόμαστε ότι ανάμεσα σ' αυτούς τους παρονομαστές υπάρχουν όλοι οι αριθμοί $1, 2, ..., [x]$.

Πράγματι, έστω y ένας από τούς $1, 2, ..., [x]$. Τότε, η αναπαράστασή του δεν περιέχει κανέναν πρώτο διαφορετικό από τους $2, 3, ..., p_n$, αφού κάθε πρώτος στην αναπαράσταση του y είναι $\le y \le x$. Άρα

$$y = 2^i 3^j \cdots p_n^h$$

για κάποια $i, j, ..., h$. Τότε, όμως,

$$2^{i+j+\cdots+h} \le y \le x \le 2^m \ ,$$

οπότε

$$i + j + \cdots + h \le m$$

και, επομένως,

$$0 \le i, j, ..., h \le m \ .$$

Άρα το y είναι ένας από τους παρονομαστές του παραπάνω πολλαπλού αθροίσματος.

Άρα

$$\sum_{0\le i,j,...,h\le m} \frac{1}{2^i 3^j \cdots p_n^h} \ge 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[x]} \ge \log(x+1)$$

και, επομένως,

$$\Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{-1} \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_n}\Big)^{-1} \ge 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{[x]} \ge \log(x+1) \ .$$

Αν συμβολίσουμε

$$P_n = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big)^{-1}\Big(1 - \frac{1}{3}\Big)^{-1} \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_n}\Big)^{-1} \ ,$$

τότε έχουμε αποδείξει ότι

$$P_n \ge \log(x+1) \ ,$$

όπου n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $p_n \le x$.

Η $\{P_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε, αν δεν αποκλίνει στο $+\infty$, τότε υπάρχει M ώστε

$$P_n \le M$$

για κάθε n.

Αυτό συνεπάγεται ότι
$$\log(x+1) \le M$$
για κάθε $x \ge 2$, πράγμα που είναι άτοπο. Άρα
$$P_n \to +\infty \ .$$

(2) Γνωρίζουμε ότι, για $0 \le u < 1$, ισχύει το ανάπτυγμα-Taylor
$$\log \frac{1}{1-u} = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \frac{u^4}{4} + \cdots \ ,$$
οπότε
$$\log \frac{1}{1-u} \le u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{2} + \frac{u^4}{2} + \cdots = u + \frac{u^2}{2(1-u)} \ .$$

Θέτουμε $u = \frac{1}{p}$ και παίρνουμε
$$\log\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-1} \le \frac{1}{p} + \frac{1}{2p(p-1)} \ .$$

Προσθέτοντας για $p = 2, 3, ..., p_n$ υπολογίζουμε
$$\begin{aligned} \log P_n &\le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2(2-1)} + \frac{1}{3(3-1)} + \cdots + \frac{1}{p_n(p_n-1)}\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n - 1} - \frac{1}{p_n}\Big) \\ &\le \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{2} \ . \end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε
$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p_n} \ ,$$
τότε έχουμε αποδείξει ότι
$$S_n \ge \log\log(x+1) - \frac{1}{2} \ ,$$
όπου n είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $p_n \le x$.

Η $\{S_n\}$ είναι αύξουσα ακολουθία πραγματικών και, όπως προηγουμένως για την $\{P_n\}$, αποδεικνύεται ότι
$$S_n \to +\infty \ .$$

Αντιθέτως, αν $\sigma > 1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n^\sigma}$ συγκλίνει, αφού η μεγαλύτερη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma}$ συγκλίνει. Σε λίγο θα αποδείξουμε ότι, αν $\sigma > 1$, τότε και το απειρογινόμενο $\prod_{k=1}^{+\infty}(1 - \frac{1}{p_k^\sigma})^{-1}$ συγκλίνει.

Ορισμός 2.1 *Έστω $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$. Η f ονομάζεται πολλαπλασιαστική, αν δεν είναι η μηδενική συνάρτηση και ισχύει*

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$ με $\gcd(m,n) = 1$.

Η f ονομάζεται πλήρως-πολλαπλασιαστική αν δεν είναι η μηδενική συνάρτηση και ισχύει η ίδια ισότητα για κάθε $m, n \in \mathbf{N}$.

Αν η f είναι πολλαπλασιαστική και $f(1) = 0$, τότε $f(n) = f(1)f(n) = 0$ για κάθε n. Αυτό αντιφάσκει με τον ορισμό, οπότε $f(1) \neq 0$. Τώρα, $f(1) = f(1)f(1)$ και, επομένως,

$$f(1) = 1 \ .$$

Παράδειγμα 1. Η συνάρτηση με τύπο $f(n) = \frac{1}{n^s}$, $s \in \mathbf{C}$, είναι πλήρως-πολλαπλασιαστική.

Παραδειγμα 2. Η συνάρτηση φ της Θεωρίας Αριθμών - όπου $\varphi(n)$ είναι το πλήθος των φυσικών οι οποίοι είναι $\leq n$ και σχετικά πρώτοι με το n - είναι πολλαπλασιαστική (αλλά όχι πλήρως-πολλαπλασιαστική) συνάρτηση.

Θεώρημα 2.2 *Έστω πολλαπλασιαστική f και έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ συγκλίνει απολύτως. Τότε ισχύει ότι*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \big(1 + f(p_k) + f(p_k^2) + f(p_k^3) + \cdots\big) \ .$$

Αν, επιπλέον, η f είναι πλήρως-πολλαπλασιαστική, τότε ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \big(1 - f(p_k)\big)^{-1} \ .$$

Απόδειξη:

Έστω τυχόν $N \in \mathbf{N}$.

Αν k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $p_k \leq N$ και m είναι οποιοσδήποτε ακέραιος ώστε $2^m \geq N$, τότε

$$\begin{aligned} \prod_{l=1}^{k} \big(1 + f(p_l) + \cdots + f(p_l^m)\big) &= \sum_{0 \leq i,j,\ldots,h \leq m} f(2^i)f(3^j)\cdots f(p_k^h) \\ &= \sum_{0 \leq i,j,\ldots,h \leq m} f\big(2^i 3^j \cdots p_k^h\big) \ . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε τα εξής

1. Ανάμεσα στα γινόμενα που εμφανίζονται στο τελευταίο άθροισμα περιλαμβάνονται όλοι οι αριθμοί $1, 2, ..., N$.

   Πράγματι, έστω $1 \leq y \leq N$.

   Τότε κάθε πρώτος που υφίσταται στην αναπαράσταση του y σαν γινόμενο πρώτων είναι $\leq y \leq N$ και, επομένως, είναι ένας από τους
$$2, 3, ..., p_k \ .$$

   Άρα ο y γράφεται
$$y = 2^i 3^j \cdots p_k^h$$
   για κάποια $i, j, ..., h \geq 0$. Τότε, όμως,
$$2^{i+j+\cdots+h} \leq y \leq N \leq 2^m \ .$$

   Άρα
$$i + j + \cdots + h \leq m$$
   και, επομένως,
$$0 \leq i, j, ..., h \leq m \ .$$

2. Διαφορετικές επιλογές των $i, j, ..., h$ δίνουν διαφορετικές τιμές στο γινόμενο $2^i 3^j \cdots p_k^h$, λόγω της μοναδικότητας της αναπαράστασης οποιουδήποτε αριθμού σαν γινόμενο πρώτων.

Από τα 1. και 2. παίρνουμε ότι
$$(\dagger) \qquad \Big| \prod_{l=1}^{k} \big(1 + f(p_l) + \cdots + f(p_l^m)\big) - \sum_{n=1}^{N} f(n) \Big| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f(n)| \ .$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ συγκλίνει απολύτως, συνεπάγεται ότι, για κάθε p, η σειρά με λιγότερους όρους $1 + f(p) + f(p^2) + \cdots$ συγκλίνει.

Επειδή η $(\dagger)$ ισχύει για κάθε m με $2^m \geq N$, αφήνουμε το m να τείνει στο $+\infty$ και παίρνουμε
$$(\ddagger) \qquad \Big| \prod_{l=1}^{k} \big(1 + f(p_l) + f(p_l^2) + \cdots\big) - \sum_{n=1}^{N} f(n) \Big| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f(n)| \ ,$$
όπου k είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $p_k \leq N$.

Τώρα επιλέγουμε $N = p_k$ και αφήνουμε το k να τείνει στο $+\infty$. Τότε
$$N = p_k \to +\infty$$
και η δεξιά πλευρά της $(\ddagger)$ τείνει στο 0. Άρα
$$\prod_{l=1}^{+\infty} \big(1 + f(p_l) + f(p_l^2) + \cdots\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) \ .$$

Αν η f είναι πλήρως-πολλαπλασιαστική, τότε για κάθε p

$$1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \cdots = 1 + f(p) + f(p)^2 + f(p)^3 + \cdots$$

και, επειδή η σειρά συγκλίνει απολύτως, συνεπάγεται

$$|f(p)| < 1$$

και, επομένως,

$$1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \cdots = \big(1 - f(p)\big)^{-1} .$$

Άρα, αν η f είναι πλήρως-πολλαπλασιαστική, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \prod_{k=1}^{+\infty} \big(1 - f(p_k)\big)^{-1} .$$

Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο Π_σ για το δεξιό ημιεπίπεδο

$$\Pi_\sigma = \{s \in \mathbf{C} : \ \Re s > \sigma\} .$$

Αν $\Re s > 1$, τότε η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

συγκλίνει απολύτως. Άρα συγκλίνει σε μιγαδικό αριθμό και αυτός ο αριθμός εξαρτάται, προφανώς, από το s.

Ορισμός 2.2 *Η συνάρτηση $\zeta : \Pi_1 \to \mathbf{C}$ με τύπο*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} , \qquad s \in \Pi_1 ,$$

ονομάζεται $\zeta-$συνάρτηση του Riemann .

Πρόταση 2.1 *(Τύπος του Euler) Ισχύει ότι*

$$\zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1}$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Απόδειξη:
Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2 με την πλήρως-πολλαπλασιαστική συνάρτηση $f(n) = n^{-s}$.

Πρόταση 2.2 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *δε συγκλίνει ομοιόμορφα στο* Π_1.

Απόδειξη:
Έστω ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο Π_1.
Τότε για $\epsilon = 1$ υπάρχει n_0, τέτοιο ώστε

$$\Big| \sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n^s} \Big| < 1$$

για κάθε k, l με $n_0 \leq k < l$ και για κάθε $s \in \Pi_1$.
Σταθεροποιώντας τα k, l και παίρνοντας όριο όταν $s \to 1$, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{n=k}^{l} \frac{1}{n} \leq 1$$

για κάθε $k, l \geq n_0$.
Παίρνοντας, τώρα, όριο όταν $l \to +\infty$, βρίσκουμε

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} \leq 1$$

για κάθε $k \geq n_0$. Καταλήγουμε, έτσι, σε άτοπο, διότι η σειρά

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει στο $+\infty$.

Πρόταση 2.3 *Η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στο* Π_{σ_0} *για κάθε* $\sigma_0 > 1$. *Επίσης, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του* Π_1.

Απόδειξη:
Για κάθε $s = \sigma + i\tau \in \Pi_{\sigma_0}$ ισχύει

$$\Big| \frac{1}{n^s} \Big| = \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}} \ .$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ συγκλίνει, από το $M-test$ του Weierstrass (Θεώρημα 1.3) συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Π_{σ_0}.
Έστω, τώρα, οποιοδήποτε συμπαγές $K \subseteq \Pi_1$. Τότε υπάρχει $\sigma_0 > 1$ ώστε

$$K \subseteq \Pi_{\sigma_0} \ .$$

Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Πρόταση 2.4 *Η $\zeta-$συνάρτηση του Riemann είναι αναλυτική συνάρτηση στο Π_1.*

Απόδειξη:
Για κάθε n η συνάρτηση $\frac{1}{n^s}$ είναι αναλυτική συνάρτηση του s στο $\mathbf{C}$.

Επειδή η σύγκλιση της σειράς των συναρτήσεων αυτών είναι, από την Πρόταση 2.3, ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Π_1, συνεπάγεται από το Θεώρημα 1.2 ότι η συνάρτηση που ορίζει η σειρά, δηλαδή η $\zeta-$συνάρτηση του Riemann , είναι αναλυτική συνάρτηση στο Π_1.

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Abel (Θεώρημα 1.11) για

$$\lambda_n = n,\ z_n = 1,\ \varphi(x) = \frac{1}{x^s}\ ,$$

οπότε

$$A(x) = \sum_{n:\,\lambda_n \le x} z_n = \sum_{n=1}^{[x]} 1 = [x]\ .$$

Η φ έχει συνεχή παράγωγο στο $[1,+\infty)$ και, αν $s = \sigma + i\tau \in \Pi_1$, τότε για κάθε $x \in [1,+\infty)$

$$|A(x)\varphi(x)| = \frac{[x]}{x^\sigma} \le \frac{x+1}{x^\sigma} \le \frac{2}{x^{\sigma-1}} \to 0$$

όταν $x \to +\infty$.

Άρα $\lim_{x\to+\infty} A(x)\varphi(x) = 0$ και επομένως

$$(\varpi) \qquad \zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}} dt\ , \qquad s \in \Pi_1\ .$$

Υπενθυμίζουμε το συμβολισμό

$$\{t\} = t - [t]\ , \qquad t \in \mathbf{R}\ ,$$

και ότι, προφανώς

$$0 \le \{t\} < 1$$

για κάθε $t \in \mathbf{R}$.

Πρόταση 2.5 *Το ολοκλήρωμα*

$$G(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\ dt$$

συγκλίνει για κάθε $s \in \Pi_0$ και ορίζει συνάρτηση αναλυτική στο Π_0.

Απόδειξη:
Έστω οποιοδήποτε $s = \sigma + i\tau \in \Pi_0$. Τότε $\sigma > 0$, οπότε

$$\int_1^{+\infty} \Big|\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\Big|\ dt \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\sigma+1}}\ dt < +\infty\ .$$

Άρα το ολοκλήρωμα που ορίζει την $G(s)$ συγκλίνει για κάθε $s \in \Pi_0$.

Ορίζουμε

$$F_k(s) = \int_k^{k+1} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt = \int_k^{k+1} \frac{t-k}{t^{s+1}}\, dt$$

και από το Θεώρημα 1.8 συνεπάγεται ότι η F_k είναι αναλυτική στο $\mathbf{C}$.

Είναι φανερό ότι

$$G(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} F_k(s)$$

οπότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2, αρκεί να αποδείξουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Π_0.

Έστω συμπαγές $K \subseteq \Pi_0$.

Τότε υπάρχει $\sigma_0 > 0$ ώστε

$$K \subseteq \Pi_{\sigma_0}\ .$$

Άρα, για κάθε $s = \sigma + i\tau \in K$ ισχύει ότι

$$\left|F_k(s)\right| \le \int_k^{k+1} \left|\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\right| dt \le \int_k^{k+1} \frac{1}{t^{\sigma_0+1}}\, dt = \frac{1}{\sigma_0}\Big(\frac{1}{k^{\sigma_0}} - \frac{1}{(k+1)^{\sigma_0}}\Big)\ .$$

Όμως

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_0}\Big(\frac{1}{k^{\sigma_0}} - \frac{1}{(k+1)^{\sigma_0}}\Big) = \frac{1}{\sigma_0} < +\infty$$

και από το M-test του Weierstrass συνεπάγεται ότι η $\sum_{k=1}^{+\infty} F_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Ορίζουμε, τώρα, συνάρτηση $\quad H : \Pi_0 \setminus \{1\} \to \mathbf{C}\quad$ με τύπο

$$H(s) = \frac{s}{s-1} - sG(s)\ , \qquad s \in \Pi_0 \setminus \{1\}\ .$$

Πρόταση 2.6 *Η συνάρτηση H είναι μερόμορφη στο Π_0. Έχει ένα μοναδικό απλό πόλο στο σημείο $s = 1$ με residue $= 1$ στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη:

Το συμπέρασμα είναι άμεσο από την Πρόταση 2.5.

Ο τύπος (ϖ) λέει ότι οι συναρτήσεις ζ και H ταυτίζονται στο Π_1. Πράγματι, αν $s \in \Pi_1$, τότε

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= s\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}}\, dt \;=\; s\int_1^{+\infty} \frac{t-\{t\}}{t^{s+1}}\, dt \\ &= s\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^s}\, dt - s\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\, dt \;=\; \frac{s}{s-1} - sG(s) \;=\; H(s)\ . \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση H μπορεί να θεωρηθεί επέκταση της ζ στο μεγαλύτερο πεδίο ορισμού Π_0.

Γι΄ αυτόν το λόγο θα συμβολίζουμε την H με το σύμβολο ζ και θα θεωρούμε τη $\zeta-$συνάρτηση του Riemann επεκτεταμένη στο μεγαλύτερο πεδίο ορισμού Π_0.

Το επόμενο θεώρημα καταγράφει τα μέχρι τώρα αποτελέσματα. Πρέπει να δοθεί προσοχή στα σύνολα στα οποία ισχύει ο κάθε τύπος.

Θεώρημα 2.3 *Η $\zeta-$συνάρτηση του Riemann είναι μερόμορφη συνάρτηση του s στο σύνολο Π_0, έχει ένα μοναδικό απλό πόλο στο σημείο $s=1$ με $residue = 1$ στο σημείο αυτό και δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο του Π_1.*

Επίσης ισχύουν οι τύποι

$$(1) \qquad \zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^{+\infty} \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\,dt\ , \qquad s \in \Pi_0$$

$$(2) \qquad \zeta(s) = s\int_1^{+\infty} \frac{[t]}{t^{s+1}}\,dt\ , \qquad s \in \Pi_1$$

$$(3) \qquad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\ , \qquad s \in \Pi_1$$

$$(4) \qquad \zeta(s) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1}\ , \qquad s \in \Pi_1\ .$$

Απόδειξη:

Ο τύπος (3) δεν είναι τίποτε άλλο από τον Ορισμό 2.2, ο τύπος (4) είναι ο τύπος του Euler (Πρόταση 2.1) και ο τύπος (2) είναι ο τύπος (ϖ). Τέλος, ο τύπος (1) είναι ο ορισμός της συνάρτησης H.

Το ότι η ζ είναι μερόμορφη στο Π_0 με μοναδικό απλό πόλο στο $s=1$ με $residue = 1$ προκύπτει από την Πρόταση 2.6 και τα σχόλια που την ακολούθησαν.

Το ότι $\zeta(s) \neq 0$ για κάθε $s \in \Pi_1$ αποδεικνύεται από τον τύπο (4) και από την Παρατήρηση μετά από τον Ορισμό 1.1, αφού κανένας όρος $(1-\frac{1}{p_k^s})^{-1}$ του απειρο-γινόμενου δεν μηδενίζεται.

Κεφάλαιο 3

Σειρές-Dirichlet

Ορισμός 3.1 *Οι σειρές-Dirichlet είναι σειρές της μορφής*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

με μιγαδικούς συντελεστές a_n.

Η σειρά που ορίζει τη $\zeta-$συνάρτηση του Riemann είναι παράδειγμα σειράς-Dirichlet με $a_n = 1$ για κάθε n.

Πρόταση 3.1 *Έστω ότι η* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *συγκλίνει για κάποιο* $s = s_0$. *Τότε, για κάθε* θ *με* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, *η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην κυρτή γωνία*

$$\Gamma(s_0; \theta) = \{s : |\arg(s - s_0)| < \theta\}.$$

Απόδειξη:
Έστω $s = \sigma + i\tau \in \Gamma(s_0; \theta),\ \ s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$ και θέτουμε

$$b_n = \frac{a_n}{n^{s_0}} \ ,$$

οπότε η $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ συγκλίνει. Επίσης θέτουμε

$$r_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k \ ,$$

οπότε

$$r_n \to 0$$

όταν $n \to +\infty$.

Έστω $\epsilon > 0$ και θεωρούμε $n_0 = n_0(\epsilon)$, ώστε $|r_n| < \epsilon$ όταν $n \geq n_0$. Τότε, αν $n_0 \leq m < m'$:

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{n=m}^{m'} \frac{a_n}{n^s}\Big| &= \Big|\sum_{n=m}^{m'} \frac{b_n}{n^{s-s_0}}\Big| = \Big|\sum_{n=m}^{m'} \frac{r_n - r_{n+1}}{n^{s-s_0}}\Big| \\
&= \Big|\sum_{n=m}^{m'} \frac{r_n}{n^{s-s_0}} - \sum_{n=m+1}^{m'+1} \frac{r_n}{(n-1)^{s-s_0}}\Big| \\
&= \Big|\frac{r_m}{m^{s-s_0}} - \frac{r_{m'+1}}{m'^{s-s_0}} + \sum_{n=m+1}^{m'} r_n\Big(\frac{1}{n^{s-s_0}} - \frac{1}{(n-1)^{s-s_0}}\Big)\Big| \\
&\leq \frac{|r_m|}{m^{\sigma-\sigma_0}} + \frac{|r_{m'+1}|}{m'^{\sigma-\sigma_0}} + \sum_{n=m+1}^{m'} |r_n||s-s_0|\Big|\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{s-s_0+1}}\Big| \\
&\leq |r_m| + |r_{m'+1}| + \sum_{n=m+1}^{m'} |r_n||s-s_0|\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^{\sigma-\sigma_0+1}} \\
&\leq \epsilon + \epsilon + \sum_{n=m+1}^{m'} |r_n|\frac{|s-s_0|}{\sigma-\sigma_0}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}}\Big) \\
&\leq 2\epsilon + \frac{\epsilon}{\cos\theta}\sum_{n=m+1}^{m'}\Big(\frac{1}{(n-1)^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{n^{\sigma-\sigma_0}}\Big) \\
&= 2\epsilon + \frac{\epsilon}{\cos\theta}\Big(\frac{1}{m^{\sigma-\sigma_0}} - \frac{1}{m'^{\sigma-\sigma_0}}\Big) \\
&\leq 2\epsilon + \frac{\epsilon}{\cos\theta}\frac{1}{m^{\sigma-\sigma_0}} \\
&\leq \epsilon\Big(2 + \frac{1}{\cos\theta}\Big) .
\end{aligned}
$$

Από το κριτήριο του Cauchy συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\Gamma(s_0;\theta)$.

Πρόταση 3.2 *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ συγκλίνει σε κάποιο $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, τότε η σειρά συγκλίνει σε κάθε σημείο του ανοικτού ημιεπιπέδου Π_{σ_0}.*

Επίσης, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Π_{σ_0} και, επομένως, ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο ημιεπίπεδο αυτό.

Απόδειξη:
Έστω συμπαγές $K \subseteq \Pi_{\sigma_0} = \{s : \sigma = \Re s > \Re s_0 = \sigma_0\}$.
Είναι γεωμετρικά φανερό ότι υπάρχει θ με $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, ώστε

$$K \subseteq \Gamma(s_0;\theta).$$

Από την Πρόταση 3.1 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\Gamma(s_0;\theta)$, οπότε συγκλίνει ομοιόμορφα και στο K και επομένως η αναλυτικότητα της συνάρτησης που ορίζεται από τη σειρά προκύπτει από το Θεώρημα 1.2. Η κατά σημείο σύγκλιση είναι, τώρα, προφανής.

Θεώρημα 3.1 *Για κάθε σειρά-Dirichlet υπάρχει $\alpha \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ώστε*

1. *η σειρά συγκλίνει σε κάθε σημείο του ημιεπιπέδου $\Pi_\alpha = \{s : \Re s > \alpha\}$ και συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ημιεπιπέδου αυτού. Επομένως, ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο Π_α.*

2. *η σειρά αποκλίνει σε κάθε σημείο του ανοικτού ημιεπιπέδου $\{s : \Re s < \alpha\}$.*

Για την ευθεία $\{s : \Re s = \alpha\}$ δεν υπάρχει γενικό συμπέρασμα.

(Σημείωση: αν $\alpha = +\infty$ ή $-\infty$, τότε το ένα ημιεπίπεδο είναι κενό και το άλλο είναι το $\mathbf{C}$.)

Απόδειξη:

Αν η σειρά συγκλίνει σε κάθε $s \in \mathbf{C}$, τότε ισχύει το 1. και με τετριμμένο τρόπο το 2. παίρνοντας $\alpha = -\infty$. Πράγματι, αν K είναι οποιοδήποτε συμπαγές, τότε υπάρχει σ_0 ώστε το K να περιέχεται στο ανοικτό ημιεπίπεδο Π_{σ_0}. Από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο K, αφού συγκλίνει στο σημείο $s = \sigma_0$.

Αν η σειρά αποκλίνει σε κάθε $s \in \mathbf{C}$, τότε ισχύουν τα 1. και 2. με τετριμμένο τρόπο, αν θέσουμε $\alpha = +\infty$.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που η σειρά συγκλίνει σε κάποιο $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ και αποκλίνει σε κάποιο $s_2 = \sigma_2 + i\tau_2$.

Από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει σε κάθε σημείο του Π_{σ_1} (και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του Π_{σ_1}), οπότε έχουμε ότι $\sigma_2 \leq \sigma_1$.

Διακρίνουμε, τώρα, τις περιπτώσεις

1. $\sigma_2 = \sigma_1$.

   Αν υπήρχε s με $\Re s < \sigma_2$ στο οποίο η σειρά συγκλίνει, από την Πρόταση 3.2 θα είχαμε ότι η σειρά συγκλίνει και στο s_2. Αυτό είναι άτοπο, οπότε το θεώρημα ισχύει αν θέσουμε $\alpha = \sigma_2 = \sigma_1$.

2. $\sigma_2 < \sigma_1$.

   Τότε, όπως προηγουμένως, συνεπάγεται ότι η σειρά αποκλίνει σε κάθε σημείο του $\{s : \Re s < \sigma_2\}$.

   Έστω

   $$T = \{t : \sigma_2 \leq t, \text{η σειρά συγκλίνει σε κάθε } s \text{ με } \Re s > t\} \ .$$

   Το T είναι μη-κενό (αφού $\sigma_1 \in T$), οπότε θέτουμε

   $$\alpha = infimum(T) \ .$$

   Θα δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει με αυτήν την επιλογή του α.

   Έστω συμπαγές $K \subseteq \Pi_\alpha$. Τότε υπάρχουν t_1, t_2 με

   $$\alpha \leq t_2 < t_1, \qquad t_2 \in T \qquad \text{και} \qquad K \subseteq \Pi_{t_1} \ .$$

Από τον ορισμό του T συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει στο σημείο t_1, οπότε από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Επίσης, αν η σειρά συγκλίνει σε κάποιο s με $t = \Re s < \alpha$, τότε, από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται ότι $t \in T$ και αυτό είναι άτοπο αφού $\alpha = infimum(T)$.

Ορισμός 3.2 *Το α, του οποίου την ύπαρξη εξασφαλίζει το Θεώρημα 3.1, ονομάζεται τετμημένη σύγκλισης της σειράς-Dirichlet .*

Το ημιεπίπεδο $\Pi_\alpha = \{s : \Re s > \alpha\}$ ονομάζεται ημιεπίπεδο σύγκλισης, ενώ το ημιεπίπεδο $\{s : \Re s < \alpha\}$ ονομάζεται ημιεπίπεδο απόκλισης της σειράς-Dirichlet .

Για δοσμένη σειρά-Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

με τετμημένη σύγκλισης α, η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^s}$$

είναι, επίσης, σειρά-Dirichlet . Επομένως και σ' αυτήν αντιστοιχεί η τετμημένη σύγκλισής της, α_0. Θα δούμε, τώρα, ένα αποτέλεσμα για τη σχετική θέση των α, α_0.

Έστω τυχόν $\sigma > \alpha_0$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^\sigma}$ συγκλίνει και, επομένως, η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$ συγκλίνει. Άρα $\sigma \geq \alpha$. Αμέσως συνεπάγεται ότι

$$\alpha_0 \geq \alpha \ .$$

Έστω, τώρα, τυχόν $\sigma > \alpha$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$ συγκλίνει, οπότε

$$\frac{a_n}{n^\sigma} \to 0$$

όταν $n \to +\infty$. Άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\frac{|a_n|}{n^\sigma} \leq M$$

για κάθε n. Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+1+\epsilon}} \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\epsilon}} \ ,$$

οπότε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n|}{n^{\sigma+1+\epsilon}}$ συγκλίνει. Άρα

$$\sigma + 1 + \epsilon \geq \alpha_0 \ .$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $\sigma \geq \alpha_0 - 1$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$\alpha \geq \alpha_0 - 1 \ .$$

Άρα αποδείχθηκε η

Πρόταση 3.3 $\alpha \leq \alpha_0 \leq \alpha + 1$ *για κάθε σειρά-Dirichlet .*

Ορισμός 3.3 *Το α_0 ονομάζεται τετμημένη απόλυτης σύγκλισης της σειράς-Dirichlet.*

Το ημιεπίπεδο $\Pi_{\alpha_0} = \{s : \Re s > \alpha_0\}$ ονομάζεται ημιεπίπεδο απόλυτης σύγκλισης και το ημιεπίπεδο $\{s : \Re s < \alpha_0\}$ ονομάζεται ημιεπίπεδο απόλυτης απόκλισης της σειράς-Dirichlet .

Η κατακόρυφη ζώνη $\{s : \alpha < \Re s < \alpha_0\}$, αν δεν είναι κενή, ονομάζεται ζώνη υπό-συνθήκην σύγκλισης και είναι πλάτους μεταξύ 0 και 1.

Παράδειγμα 1: Για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

η οποία ορίζει τη $\zeta-$συνάρτηση του Riemann η τετμημένη σύγκλισης και η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης, προφανώς, ταυτίζονται και $\alpha = \alpha_0 = 1$, αφού η σειρά συγκλίνει αν $s \in \mathbf{R}$ και $s > 1$ και αποκλίνει αν $s \in \mathbf{R}$ και $s \leq 1$.

Παράδειγμα 2: Για τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^s}$$

η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης είναι $\alpha_0 = 1$, αφού $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|(-1)^n|}{n^s} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

Όμως η τετμημένη σύγκλισης είναι $\alpha = 0$.

Πράγματι, για κάθε $\sigma > 0$ η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\sigma}$ συγκλίνει, διότι είναι σειρά με όρους που φθίνουν προς το 0 και με εναλλασσόμενα πρόσημα.

Επιπλέον, αν $\sigma = 0$, η σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$ και αποκλίνει.

Ορισμός 3.4 *Έστω σειρά-Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ με τετμημένη σύγκλισης $\alpha \in \mathbf{R}$. Από το Θεώρημα 3.1 συνεπάγεται ότι η σειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

στο ημιεπίπεδο Π_α.

Έστω s_0 με $\Re s_0 = \alpha$.

Τότε το s_0 ονομάζεται κανονικό σημείο της f, αν υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να επεκτείνεται σαν αναλυτική συνάρτηση στο

$$\Pi_\alpha \cup \Delta(s_0; \delta) \ ,$$

όπου $\Delta(s_0; \delta)$ είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο s_0 και ακτίνα δ.

Θεώρημα 3.2 *(Landau) Αν $a_n \geq 0$ για κάθε n και $\alpha \in \mathbf{R}$ είναι η τετμημένη σύγκλισης της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$, τότε το α δεν είναι κανονικό σημείο της συνάρτησης f που ορίζεται από τη σειρά στο Π_α.*

Απόδειξη:
Έστω ότι το α είναι κανονικό σημείο της f.
Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε η f να επεκτείνεται σαν αναλυτική συνάρτηση στο

$$\Omega = \Pi_\alpha \cup \Delta(\alpha; \delta) \ .$$

Θεωρούμε πραγματικό αριθμό μεγαλύτερο του α. Για παράδειγμα τον $\alpha + 1$. Τώρα, η f αναπτύσσεται σαν σειρά-Taylor στο μεγαλύτερο δίσκο με κέντρο $\alpha + 1$ ο οποίος περιέχεται στο Ω. Όμως, είναι γεωμετρικά προφανές ότι ο δίσκος αυτός περιέχει κάποιον πραγματικό αριθμό $\sigma < \alpha$.

Επομένως, για αυτό το σ η σειρά-Taylor δίνει

$$f(\sigma) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(\alpha+1)}{m!}(\sigma - \alpha - 1)^m \ .$$

Επειδή το $\alpha + 1$ περιέχεται στο ημιεπίπεδο σύγκλισης της σειράς-Dirichlet , συνεπάγεται από το Θεώρημα 1.2 ότι για κάθε m

$$f^{(m)}(\alpha+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\log n)^m a_n}{n^{\alpha+1}} \ .$$

Από τις σχέσεις αυτές παίρνουμε

$$\begin{aligned}
f(\sigma) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(\sigma-\alpha-1)^m}{m!} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\log n)^m a_n}{n^{\alpha+1}} \Big) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sigma-\alpha-1)^m}{m!} \frac{(-\log n)^m a_n}{n^{\alpha+1}} \Big) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(\alpha+1-\sigma)\log n]^m a_n}{m! \ n^{\alpha+1}} \Big)
\end{aligned}$$

(παρατηρώντας ότι όλοι οι όροι του τελευταίου αθροίσματος είναι μη-αρνητικοί και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.11)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha+1}} \Big(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{[(\alpha+1-\sigma)\log n]^m}{m!} \Big) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha+1}} \ e^{(\alpha+1-\sigma)\log n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{\alpha+1}} \ n^{\alpha+1-\sigma} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \ .
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι το $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma}$ ισούται με το μιγαδικό αριθμό $f(\sigma)$. Αυτό είναι άτοπο, διότι ο αριθμός σ περιέχεται στο ημιεπίπεδο απόκλισης της σειράς-Dirichlet.

Θεώρημα 3.3 *(Γινόμενο σειρών-Dirichlet.) Έστω*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}\ , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

δυο σειρές-Dirichlet οι οποίες συγκλίνουν απολύτως στο ίδιο σημείο s_0.

Αν ορίσουμε

$$c_n = \sum_{k,k' :\, kk'=n} a_k b_{k'}$$

για κάθε $n \in \mathbf{N}$, τότε η σειρά-Dirichlet

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

συγκλίνει απολύτως στο s_0 και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{s_0}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^{s_0}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^{s_0}}\ .$$

Απόδειξη:

(I) Για $N \in \mathbf{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{s_0}} \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n^{s_0}} = \sum_{1 \le k,k' \le N} \frac{a_k b_{k'}}{(kk')^{s_0}}\ .$$

Ομαδοποιούμε, τώρα, τους όρους του τελευταίου αθροίσματος ανάλογα με τις τιμές του $n = kk'$, παρατηρώντας ότι

1. Αν $1 \le n \le N$, τότε στο άθροισμα αυτό εμφανίζονται όλα τα ζευγάρια k, k' με $kk' = n$ και, επομένως, αν προσθέσουμε τους αντίστοιχους όρους θα πάρουμε το $\frac{c_n}{n^{s_0}}$.
2. Αν $N+1 \le n \le N^2$ (το γινόμενο kk' δε μπορεί να υπερβεί το N^2), τότε το $kk' = n$ συνεπάγεται ότι ένα τουλάχιστον από τα k, k' είναι $\ge [\sqrt{N+1}]$.

Άρα

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{n^{s_0}} \sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n^{s_0}} - \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^{s_0}}\Big| \quad &\le \sum_{k,k' :\, k,k' \le N \text{ και } k \ge [\sqrt{N+1}] \text{ ή } k' \ge [\sqrt{N+1}]} \Big|\frac{a_k b_{k'}}{(kk')^{s_0}}\Big| \\ &\le \sum_{k,k' :\, 1 \le k \le N, [\sqrt{N+1}] \le k' \le N} \Big|\frac{a_k b_{k'}}{(kk')^{s_0}}\Big|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{k,k':\, 1\le k'<[\sqrt{N+1}],[\sqrt{N+1}]\le k\le N} \left|\frac{a_k b_{k'}}{(kk')^{s_0}}\right| \\
&= \sum_{k=1}^{N}\left|\frac{a_k}{k^{s_0}}\right| \sum_{k'=[\sqrt{N+1}]}^{N}\left|\frac{b_{k'}}{k'^{s_0}}\right| \\
&+ \sum_{k=[\sqrt{N+1}]}^{N}\left|\frac{a_k}{k^{s_0}}\right| \sum_{k'=1}^{[\sqrt{N+1}]}\left|\frac{b_{k'}}{k'^{s_0}}\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{a_k}{k^{s_0}}\right| \sum_{k'=[\sqrt{N+1}]}^{+\infty}\left|\frac{b_{k'}}{k'^{s_0}}\right| \\
&+ \sum_{k=[\sqrt{N+1}]}^{+\infty}\left|\frac{a_k}{k^{s_0}}\right| \sum_{k'=1}^{+\infty}\left|\frac{b_{k'}}{k'^{s_0}}\right| .
\end{aligned}
$$

Αφήνοντας το N να τείνει στο $+\infty$ παίρνουμε ότι η τελευταία παράσταση τείνει στο 0, οπότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{s_0}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{b_n}{n^{s_0}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}} .$$

(II) Αν $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, τότε η απόλυτη σύγκλιση των σειρών ισοδυναμεί με τη σύγκλιση των

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}} , \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|b_n|}{n^{\sigma_0}} .$$

Ορίζουμε

$$d_n = \sum_{k,k':\, kk'=n} |a_k||b_{k'}|$$

και έχουμε αμέσως ότι

$$\left|\frac{c_n}{n^{s_0}}\right| \le \frac{d_n}{n^{\sigma_0}}$$

για κάθε n.

Άρα, αν εφαρμόσουμε το μέρος (I), παίρνουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{c_n}{n^{s_0}}\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{n^{\sigma_0}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|a_n|}{n^{\sigma_0}}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{|b_n|}{n^{\sigma_0}} < +\infty$$

και επομένως η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{c_n}{n^{s_0}}$ συγκλίνει απολύτως.

Κεφάλαιο 4

Χαρακτήρες

Ορισμός 4.1 *Έστω G πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και έστω $\widehat{\chi} : G \to \mathbf{C}$ με τις ιδιότητες*

1. $\widehat{\chi}(ab) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\chi}(b)$ για κάθε $a, b \in G$

2. $\widehat{\chi}$ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Τότε η $\widehat{\chi}$ ονομάζεται χαρακτήρας της G.

Πρόταση 4.1 *Έστω χαρακτήρας $\widehat{\chi}$ της πεπερασμένης αβελιανής ομάδας G.*

1. Αν e είναι το μοναδιαίο στοιχείο της G, τότε $\widehat{\chi}(e) = 1$.

2. Για κάθε $a \in G$ ισχύει $\widehat{\chi}(a) \neq 0$.

3. $\widehat{\chi}(a^{-1}) = \widehat{\chi}(a)^{-1}$ για κάθε $a \in G$.

4. Αν m είναι η τάξη της G, τότε για κάθε $a \in G$ το $\widehat{\chi}(a)$ είναι m-οστή ρίζα της μονάδας.

5. $|\widehat{\chi}(a)| = 1$ για κάθε $a \in G$.

Απόδειξη

1. Έστω $a_0 \in G$ ώστε $\widehat{\chi}(a_0) \neq 0$. Τότε

$$\widehat{\chi}(a_0) = \widehat{\chi}(a_0 e) = \widehat{\chi}(a_0)\widehat{\chi}(e) \ .$$

Άρα $\widehat{\chi}(e) = 1$.

2. Αν για κάποιο $a \in G$ είναι $\widehat{\chi}(a) = 0$, τότε

$$1 = \widehat{\chi}(e) = \widehat{\chi}(aa^{-1}) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\chi}(a^{-1}) = 0 \ .$$

Άτοπο.

3. Από τον προηγούμενο υπολογισμό έχουμε αμέσως ότι

$$1 = \widehat{\chi}(a)\widehat{\chi}(a^{-1})$$

και, επομένως,

$$\widehat{\chi}(a^{-1}) = \widehat{\chi}(a)^{-1}$$

για κάθε $a \in G$.

4. Επειδή $a^m = e$ για κάθε $a \in G$, συνεπάγεται
$$\widehat{\chi}(a)^m = \widehat{\chi}(a^m) = \widehat{\chi}(e) = 1\ .$$

5. Από την προηγούμενη σχέση παίρνουμε $|\widehat{\chi}(a)|^m = 1$, οπότε
$$|\widehat{\chi}(a)| = 1\ .$$

Άρα κάθε χαρακτήρας είναι συνάρτηση
$$\widehat{\chi} : G \to \mathbf{T}\ ,$$
όπου $\mathbf{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$.

Το σύνολο $\mathbf{T}$ είναι ομάδα με την πράξη του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών και παρατηρούμε ότι ο ορισμός του χαρακτήρα ισοδυναμεί με το ότι η $\widehat{\chi}$ είναι ομομορφισμός ομάδων.

Ορισμός 4.2 *Με $\widehat{\chi}_1$ συμβολίζουμε το χαρακτήρα με τύπο*
$$\widehat{\chi}_1(a) = 1\ , \qquad a \in G\ .$$
Τον $\widehat{\chi}_1$ ονομάζουμε κύριο χαρακτήρα.

Με $\widehat{G}$ συμβολίζουμε το σύνολο των χαρακτήρων της G.

Τέλος, στο $\widehat{G}$ ορίζουμε πράξη ως εξής: για κάθε $\widehat{\chi}, \widehat{\psi} \in \widehat{G}$ ο $\widehat{\chi}\widehat{\psi}$ είναι ο χαρακτήρας με τύπο
$$(\widehat{\chi}\widehat{\psi})(a) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\psi}(a)\ , \qquad a \in G\ .$$

Το ότι ο $\widehat{\chi}\widehat{\psi}$ είναι στοιχείο της $\widehat{G}$, δηλαδή χαρακτήρας της G, αποδεικνύεται εύκολα:
$$(\widehat{\chi}\widehat{\psi})(ab) = \widehat{\chi}(ab)\widehat{\psi}(ab) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\chi}(b)\widehat{\psi}(a)\widehat{\psi}(b) = (\widehat{\chi}\widehat{\psi})(a)(\widehat{\chi}\widehat{\psi})(b)$$
για κάθε $a, b \in G$ και, επιπλέον,
$$(\widehat{\chi}\widehat{\psi})(e) = \widehat{\chi}(e)\widehat{\psi}(e) = 1\ ,$$
οπότε η $\widehat{\chi}\widehat{\psi}$ δεν είναι η μηδενική συνάρτηση.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\widehat{\chi}, \widehat{\psi}, \widehat{\omega} \in \widehat{G}$:

1. $(\widehat{\chi}\widehat{\psi})(a) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\psi}(a) = \widehat{\psi}(a)\widehat{\chi}(a) = (\widehat{\psi}\widehat{\chi})(a)$ για κάθε $a \in G$ και, επομένως,
$$\widehat{\chi}\widehat{\psi} = \widehat{\psi}\widehat{\chi}\ .$$

2. $[(\widehat{\chi}\widehat{\psi})\widehat{\omega}](a) = (\widehat{\chi}\widehat{\psi})(a)\widehat{\omega}(a) = \widehat{\chi}(a)\widehat{\psi}(a)\widehat{\omega}(a) = \widehat{\chi}(a)(\widehat{\psi}\widehat{\omega})(a) = [\widehat{\chi}(\widehat{\psi}\widehat{\omega})](a)$ για κάθε $a \in G$, οπότε
$$(\widehat{\chi}\widehat{\psi})\widehat{\omega} = \widehat{\chi}(\widehat{\psi}\widehat{\omega})\ .$$

3. $(\widehat{\chi}_1\widehat{\chi})(a) = \widehat{\chi}_1(a)\widehat{\chi}(a) = \widehat{\chi}(a)$ για κάθε $a \in G$, οπότε

$$\widehat{\chi}_1\widehat{\chi} = \widehat{\chi} \ .$$

4. Αν ορίσουμε $\widehat{\chi}^{-1} : G \to \mathbf{C}$ με τύπο

$$\widehat{\chi}^{-1}(a) = (\widehat{\chi}(a))^{-1} \ , \qquad a \in G \ ,$$

τότε $(\widehat{\chi}^{-1}\widehat{\chi})(a) = \widehat{\chi}^{-1}(a)\widehat{\chi}(a) = 1 = \widehat{\chi}_1(a)$ για κάθε $a \in G$ και, επομένως,

$$\widehat{\chi}^{-1}\widehat{\chi} = \widehat{\chi}_1 \ .$$

Επίσης, η συνάρτηση $\widehat{\chi}^{-1}$ είναι στοιχείο της $\widehat{G}$. Πράγματι,

$$\widehat{\chi}^{-1}(ab) = (\widehat{\chi}(ab))^{-1} = (\widehat{\chi}(a)\widehat{\chi}(b))^{-1} = (\widehat{\chi}(a))^{-1}(\widehat{\chi}(b))^{-1} = \widehat{\chi}^{-1}(a)\widehat{\chi}^{-1}(b)$$

για κάθε $a, b \in G$ και

$$\widehat{\chi}^{-1}(e) = (\widehat{\chi}(e))^{-1} = 1^{-1} = 1 \ .$$

Θεώρημα 4.1 *Για κάθε πεπερασμένη αβελιανή ομάδα G το σύνολο $\widehat{G}$ των χαρακτήρων της G αποτελεί πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και η τάξη της είναι ίση με την τάξη της G.*

Απόδειξη

Μόλις προηγουμένως είδαμε ότι η $\widehat{G}$ αποτελεί αβελιανή ομάδα με την πράξη που ορίσθηκε. Το μοναδιαίο στοιχείο της είναι ο κύριος χαρακτήρας $\widehat{\chi}_1$ και το αντίστροφο στοιχείο του $\widehat{\chi}$ είναι το $\widehat{\chi}^{-1}$, όπως αυτό ορίσθηκε στο 4. πιο πάνω.

Έχουμε, επομένως, να αποδείξουμε ότι η $\widehat{G}$ έχει την ίδια τάξη με την G. *Περίπτωση 1.* Έστω ότι η G είναι κυκλική τάξης m με γεννήτορα a. Δηλαδή

$$G = \{a, a^2, ..., a^{m-1}, a^m = e\} \ .$$

Κάθε $\widehat{\chi} \in \widehat{G}$ καθορίζεται από την τιμή $\widehat{\chi}(a)$, αφού από τη σχέση $\widehat{\chi}(a^k) = (\widehat{\chi}(a))^k$ συνεπάγεται ότι κάθε τιμή του $\widehat{\chi}$ προκύπτει μονοσήμαντα από την τιμή $\widehat{\chi}(a)$.

Θεωρούμε το συνολο

$$\Lambda_m = \{\omega, \omega^2, ..., \omega^{m-1}, \omega^m = 1\}$$

των m-οστών ριζών της μονάδας, όπου

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} \ .$$

Η Πρόταση 4.1(4) μας επιτρέπει να σχηματίσουμε την απεικόνιση

$$\widehat{G} \to \Lambda_m$$

με τύπο

$$\widehat{\chi} \mapsto \widehat{\chi}(a)$$

και θα έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη, αν αποδείξουμε ότι αυτή η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη.

Έστω $\widehat{\chi}, \widehat{\psi} \in \widehat{G}$ ώστε $\widehat{\chi}(a) = \widehat{\psi}(a)$.

Τότε

$$\widehat{\chi}(a^k) = (\widehat{\chi}(a))^k = (\widehat{\psi}(a))^k = \widehat{\psi}(a^k)$$

για κάθε k και, επομένως,

$$\widehat{\chi} = \widehat{\psi} \ .$$

Άρα η απεικόνιση είναι ένα-προς-ένα.

Έστω $\eta \in \Lambda_m$.

Ορίζουμε $\widehat{\chi} : G \to \mathbf{T}$ με τύπο

$$\widehat{\chi}(a^k) = \eta^k$$

για κάθε $k = 1, 2, ..., m$.

Τότε $\widehat{\chi}(a) = \eta$, οπότε μένει να αποδείξουμε ότι η $\widehat{\chi}$ είναι χαρακτήρας.

Κατ' αρχήν η $\widehat{\chi}$, προφανώς, δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Κατόπιν, αν a^k, a^l με $1 \leq k, l \leq m$ είναι οποιαδήποτε στοιχεία της G, διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. αν $k + l \leq m$, τότε

$$\widehat{\chi}(a^k a^l) = \widehat{\chi}(a^{k+l}) = \eta^{k+l} = \eta^k \eta^l = \widehat{\chi}(a^k)\widehat{\chi}(a^l) \ ,$$

2. αν $m + 1 \leq k + l \leq 2m$, τότε $a^{k+l} = a^{k+l-m}$ και $1 \leq k + l - m \leq m$, οπότε

$$\widehat{\chi}(a^k a^l) = \widehat{\chi}(a^{k+l}) = \widehat{\chi}(a^{k+l-m}) = \eta^{k+l-m} = \eta^{k+l} = \eta^k \eta^l = \widehat{\chi}(a^k)\widehat{\chi}(a^l) \ .$$

Περίπτωση 2. Η γενική περίπτωση με m να είναι η τάξη της G.

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα των Πεπερασμένων Αβελιανών Ομάδων συνεπάγεται ότι η G γράφεται

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes ... \otimes G_n \ ,$$

όπου κάθε G_j είναι κυκλική υποομάδα της G τάξης m_j. Δηλαδή, κάθε $a \in G$ γράφεται με μοναδικό τρόπο σαν γινόμενο

$$a = a_1 a_2 \cdots a_n$$

με $a_1 \in G_1, a_2 \in G_2, ..., a_n \in G_n$. Επομένως,

$$m = m_1 m_2 \cdots m_n \ .$$

Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widehat{G} \to \widehat{G_1} \times \widehat{G_2} \times \cdots \times \widehat{G_n}$$

με τον τύπο

$$\widehat{\chi} \mapsto (\widehat{\chi}^{(1)}, \widehat{\chi}^{(2)}, ..., \widehat{\chi}^{(n)}) \ ,$$

όπου $\widehat{\chi}^{(j)}$ είναι ο περιορισμός του $\widehat{\chi}$ στην υποομάδα G_j.

Έστω $\widehat{\chi}, \widehat{\psi} \in \widehat{G}$ ώστε $\widehat{\chi}^{(j)} = \widehat{\psi}^{(j)}$ για κάθε $j = 1, 2, ..., n$.

Τότε παίρνουμε οποιοδήποτε $a \in G$ και το γράφουμε

$$a = a_1 \cdots a_n$$

με μοναδικά καθορισμένα $a_j \in G_j$.

Τότε

$$\begin{aligned} \widehat{\chi}(a) &= \widehat{\chi}(a_1) \cdots \widehat{\chi}(a_n) \ = \ \widehat{\chi}^{(1)}(a_1) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(a_n) \\ &= \widehat{\psi}^{(1)}(a_1) \cdots \widehat{\psi}^{(n)}(a_n) \ = \ \widehat{\psi}(a_1) \cdots \widehat{\psi}(a_n) \\ &= \widehat{\psi}(a) \ . \end{aligned}$$

Άρα

$$\widehat{\chi} = \widehat{\psi}$$

και αποδείχθηκε ότι η απεικόνιση είναι 1-1.

Έστω ότι δίνονται τα $\widehat{\chi}^{(1)} \in \widehat{G_1}, ..., \widehat{\chi}^{(n)} \in \widehat{G_n}$.

Θα βρούμε $\widehat{\chi} \in \widehat{G}$ του οποίου ο περιορισμός σε κάθε G_j να είναι ο $\widehat{\chi}^{(j)}$ και θα έχουμε αποδείξει ότι η απεικόνιση είναι επί.

Για τυχόν $a \in G$ γράφουμε

$$a = a_1 \cdots a_n$$

με μοναδικά καθορισμένα $a_j \in G_j$ και ορίζουμε

$$\widehat{\chi}(a) = \widehat{\chi}^{(1)}(a_1) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(a_n) \ .$$

Αν $a = a_1 \cdots a_n, \ b = b_1 \cdots b_n$, τότε

$$ab = (a_1 b_1) \cdots (a_n b_n) \ ,$$

οπότε

$$\widehat{\chi}(ab) = \widehat{\chi}^{(1)}(a_1 b_1) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(a_n b_n) = \widehat{\chi}^{(1)}(a_1) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(a_n) \widehat{\chi}^{(1)}(b_1) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(b_n) = \widehat{\chi}(a) \widehat{\chi}(b) \ .$$

Επίσης $e = e \cdots e$ και, επομένως,

$$\widehat{\chi}(e) = \widehat{\chi}^{(1)}(e) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(e) = 1 \ .$$

Άρα ο $\widehat{\chi}$ είναι χαρακτήρας της G.

Για κάθε $a_j \in G_j$, προφανώς, ισχύει

$$a_j = e \cdots e a_j e \cdots e \ ,$$

οπότε

$$\widehat{\chi}(a_j) = \widehat{\chi}^{(1)}(e) \cdots \widehat{\chi}^{(j)}(a_j) \cdots \widehat{\chi}^{(n)}(e) = \widehat{\chi}^{(j)}(a_j) \ .$$

Άρα ο περιορισμός του $\widehat{\chi}$ στην G_j ταυτίζεται με τον $\widehat{\chi}^{(j)}$.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει ότι η παραπάνω απεικόνιση

$$\widehat{G} \to \widehat{G_1} \times \widehat{G_2} \times \cdots \times \widehat{G_n}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη.

Από την πρώτη περίπτωση γνωρίζουμε ότι κάθε $\widehat{G_j}$ έχει τάξη m_j, οπότε το καρτεσιανό γινόμενό τους έχει πληθάριθμο

$$m_1 \cdots m_n = m \ .$$

Άρα και η $\widehat{G}$ έχει τον ίδιο πληθάριθμο m.

Πρόταση 4.2 *Αν G είναι πεπερασμένη αβελιανή ομάδα και $a \in G, a \neq e$, τότε υπάρχει χαρακτήρας $\widehat{\chi}$ της G ώστε $\widehat{\chi}(a) \neq 1$.*

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.

Έστω ότι η G είναι κυκλική

$$G = \{a, a^2, ..., a^{m-1}, a^m = e\} \ .$$

Αν

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m} \ ,$$

τότε ο χαρακτήρας $\widehat{\chi}$ που ορίζεται μέσω του τύπου

$$\widehat{\chi}(a^k) = \omega^k$$

έχει, προφανώς, την ιδιότητα να απεικονίζει κάθε στοιχείο a^k της G που δεν είναι το e (δηλαδή $k \neq m$) σε αριθμό $\neq 1$.

Στη γενική περίπτωση

$$G = G_1 \otimes G_2 \otimes \cdots \otimes G_n \ ,$$

αν πάρουμε

$$a = a_1 \cdots a_n \neq e \ ,$$

τότε ένα τουλάχιστον a_j είναι $\neq e$.

Έχοντας τελειώσει με την ειδική περίπτωση, γνωρίζουμε ότι, για το ίδιο j, υπάρχει $\widehat{\chi}^{(j)}$ χαρακτήρας της G_j ώστε

$$\widehat{\chi}^{(j)}(a_j) \neq 1 \ .$$

Θεωρούμε, τώρα, το μοναδικό χαρακτήρα $\widehat{\chi}$ της G, του οποίου ο περιορισμός στην G_j ταυτίζεται με τον $\widehat{\chi}^{(j)}$ και ο περιορισμός του σε κάθε άλλη G_i είναι ο κύριος χαρακτήρας της G_i.

Η κατασκευή του $\widehat{\chi}$ περιγράφεται στην απόδειξη της περίπτωσης 2. του Θεωρήματος 4.1.

Τότε, φυσικά,

$$\widehat{\chi}(a) = \widehat{\chi}^{(1)}(a_1)\cdots\widehat{\chi}^{(j)}(a_j)\cdots\widehat{\chi}^{(n)}(a_n) = \widehat{\chi}^{(j)}(a_j) \neq 1$$

και η πρόταση αποδείχθηκε.

Έστω πεπερασμένη αβελιανή ομάδα G τάξης m. Θα υπολογίσουμε για κάθε χαρακτήρα $\widehat{\chi}$ της G το άθροισμα

$$S = \sum_{a\in G} \widehat{\chi}(a) \ .$$

Σταθεροποιούμε $b \in G$. Τότε

$$(\dagger) \qquad \widehat{\chi}(b)S = \sum_{a\in G} \widehat{\chi}(b)\widehat{\chi}(a) = \sum_{a\in G} \widehat{\chi}(ba) = \sum_{c\in G} \widehat{\chi}(c) = S$$

και διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\widehat{\chi} \neq \widehat{\chi}_1$, τότε υπάρχει $b \in G$ ώστε $\widehat{\chi}(b) \neq 1$.
   Χρησιμοποιώντας αυτό το b στην (†) παίρνουμε
   $$S = 0 \ .$$
2. Αν $\widehat{\chi} = \widehat{\chi}_1$, τότε
   $$S = \sum_{a\in G} \widehat{\chi}_1(a) = \sum_{a\in G} 1 = m \ .$$

Επίσης, θα υπολογίσουμε για κάθε $a \in G$ το άθροισμα

$$T = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}} \widehat{\chi}(a) \ .$$

Σταθεροποιούμε $\widehat{\psi} \in \widehat{G}$. Τότε

$$(\ddagger) \qquad \widehat{\psi}(a)T = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}} \widehat{\psi}(a)\widehat{\chi}(a) = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}} (\widehat{\psi}\widehat{\chi})(a) = \sum_{\widehat{\omega}\in\widehat{G}} \widehat{\omega}(a) = T$$

και διακρίνουμε τις περιπτώσεις

1. Αν $a \neq e$, τότε από την Πρόταση 4.2 έχουμε ότι υπάρχει $\widehat{\psi}$ ώστε $\widehat{\psi}(a) \neq 1$.
   Χρησιμοποιώντας αυτό το $\widehat{\psi}$ στην (‡) παίρνουμε
   $$T = 0 \ .$$
2. Αν $a = e$, τότε
   $$T = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}} \widehat{\chi}(e) = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}} 1 = m$$
   από το Θεώρημα 4.1.

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει το

Θεώρημα 4.2 *Έστω G πεπερασμένη αβελιανή ομάδα τάξης m. Τότε για κάθε χαρακτήρα $\widehat{\chi}$ της G ισχύει*

$$\sum_{a\in G}\widehat{\chi}(a)=\begin{cases}0, & \text{αν } \widehat{\chi}\neq\widehat{\chi}_1\\ m, & \text{αν } \widehat{\chi}=\widehat{\chi}_1.\end{cases}$$

Επίσης, για κάθε $a\in G$ ισχύει ότι

$$\sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}}\widehat{\chi}(a)=\begin{cases}0, & \text{αν } a\neq e\\ m, & \text{αν } a=e.\end{cases}$$

ΧΑΡΑΚΤΗΡΕΣ mod m

Έστω m θετικός ακέραιος. Θεωρούμε το σύνολο G_m των κλάσεων υπολοίπων $mod\, m$ οι οποίες είναι πρώτες προς το m.

$$G_m=\{[a]:1\leq a\leq m,\ \gcd(a,m)=1\}\ .$$

Είναι γνωστό ότι η G_m αποτελεί αβελιανή ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό $[a][b]=[ab]$. Η τάξη της G_m είναι ίση με $\varphi(m)$.

Παράδειγμα: Έστω $m=9$, οπότε $\varphi(9)=6$ και

$$G_9=\{[1],[2],[4],[5],[7],[8]\}\ .$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η G_9 είναι κυκλική με γεννήτορα το $[2]$.

Άρα οι τιμές οποιουδήποτε χαρακτήρα $\widehat{\chi}\in\widehat{G_9}$ καθορίζονται από την τιμή $\widehat{\chi}([2])$.

Το σύνολο των έκτων ριζών της μονάδας είναι το $\{\omega,\omega^2,\omega^3,\omega^4,\omega^5,\omega^6=1\}$, όπου $\omega=\cos\frac{2\pi}{6}+i\sin\frac{2\pi}{6}$ και γνωρίζουμε από την Πρόταση 4.1(4) ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει το $\widehat{\chi}([2])$ είναι κάποια από αυτές τις έκτες ρίζες της μονάδας. Στην περίπτωση 1 της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1 είδαμε πώς κατασκευάζεται χαρακτήρας της G_9 του οποίου η τιμή στο $[2]$ είναι οποιαδήποτε προεπιλεγμένη έκτη ρίζα της μονάδας.

Μπορούμε, επομένως, να βρούμε όλους τους χαρακτήρες της G_9 (των οποίων το πλήθος είναι 6) και να φτιάξουμε τον πίνακα

$\cdot$	$[1]$	$[2]$	$[4]=[2]^2$	$[5]=[2]^5$	$[7]=[2]^4$	$[8]=[2]^3$
$\widehat{\chi}_1$	1	1	1	1	1	1
$\widehat{\chi}_2$	1	ω	ω^2	ω^5	ω^4	ω^3
$\widehat{\chi}_3$	1	ω^2	ω^4	$\omega^{10}=\omega^4$	$\omega^8=\omega^2$	$\omega^6=1$
$\widehat{\chi}_4$	1	ω^3	$\omega^6=1$	$\omega^{15}=\omega^3$	$\omega^{12}=1$	$\omega^9=\omega^3$
$\widehat{\chi}_5$	1	ω^4	$\omega^8=\omega^2$	$\omega^{20}=\omega^2$	$\omega^{16}=\omega^4$	$\omega^{12}=1$
$\widehat{\chi}_6$	1	ω^5	$\omega^{10}=\omega^4$	$\omega^{25}=\omega$	$\omega^{20}=\omega^2$	$\omega^{15}=\omega^3$

Ορισμός 4.3 *Αν* $\widehat{\chi} : G_m \to \mathbf{T}$ *είναι χαρακτήρας της* G_m*, τότε ορίζουμε μια νέα συνάρτηση*

$$\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{T} \cup \{0\}$$

με τον τύπο

$$\chi(a) = \begin{cases} \widehat{\chi}([a]), & \textit{αν } \gcd(a,m) = 1 \textit{ (οπότε } [a] \in G_m\textit{)} \\ 0, & \textit{αν } \gcd(a,m) > 1. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται χαρακτήρας $mod\ m$.

Ο ορισμός είναι καλός, διότι, αν ένα στοιχείο μιας κλάσης $mod\ m$ είναι σχετικά πρώτο με το m, τότε κάθε άλλο στοιχείο της είναι επίσης σχετικά πρώτο με το m. Και, αν ένα στοιχείο μιας κλάσης $mod\ m$ δεν είναι σχετικά πρώτο με το m, τότε και κάθε άλλο στοιχείο της δεν είναι σχετικά πρώτο με το m.

Η συνάρτηση χ δίνει την ίδια τιμή σε όλους τους ακέραιους που βρίσκονται στην ίδια κλάση $mod\ m$. Η τιμή αυτή είναι ακριβώς η τιμή που δίνει η συνάρτηση $\widehat{\chi}$ στην κοινή κλάση που περιέχει αυτούς τους ακέραιους, αν αυτοί είναι σχετικά πρώτοι με το m. Αν αυτοί δεν είναι σχετικά πρώτοι με το m, τότε η τιμή που παίρνουν από την χ είναι 0.

Μερικές ιδιότητες του χ είναι

1. $\chi(1) = \widehat{\chi}([1]) = 1$.

2. Έστω

$$a \equiv b\ mod\ m\ .$$

Αν $\gcd(a,m) > 1$, τότε $\gcd(b,m) > 1$, οπότε $\chi(a) = \chi(b) = 0$. Ενώ, αν $\gcd(a,m) = 1$, τότε $\gcd(b,m) = 1$ και $\chi(a) = \widehat{\chi}([a]) = \widehat{\chi}([b]) = \chi(b)$.

Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση

$$\chi(a) = \chi(b)\ .$$

3. $\chi(a)\chi(b) = \chi(ab)$ για κάθε $a, b \in \mathbf{Z}$.

Αυτή η ιδιότητα αποδεικνύεται ως εξής.

Αν ένα τουλάχιστον από τα a, b δεν είναι σχετικά πρώτο με το m, τότε ούτε και το ab είναι, οπότε και οι δυο πλευρές της ισότητας είναι 0.

Έστω, λοιπόν, ότι $\gcd(a,m) = \gcd(b,m) = 1$. Τότε $\gcd(ab,m) = 1$ και

$$\chi(a)\chi(b) = \widehat{\chi}([a])\widehat{\chi}([b]) = \widehat{\chi}([a][b]) = \widehat{\chi}([ab]) = \chi(ab)\ .$$

Άρα και σ' αυτήν την περίπτωση αποδείχθηκε η ισότητα.

Η απεικόνιση $\widehat{\chi} \mapsto \chi$ είναι ένα-προς-ένα.

Πράγματι, έστω $\widehat{\chi}, \widehat{\psi}$ χαρακτήρες της G_m με

$$\chi = \psi\ .$$

Δηλαδή

$$\chi(a) = \psi(a)$$

για κάθε $a \in \mathbf{Z}$.

Τότε για κάθε $a \in \mathbf{Z}$ με $\gcd(a, m) = 1$ έχουμε ότι

$$\widehat{\chi}([a]) = \chi(a) = \psi(a) = \widehat{\psi}([a]) \ ,$$

που σημαίνει ότι

$$\widehat{\chi}([a]) = \widehat{\psi}([a])$$

για κάθε $[a] \in G_m$. Άρα

$$\widehat{\chi} = \widehat{\psi} \ .$$

Επομένως, το πλήθος των χαρακτήρων $mod\ m$ είναι το ίδιο με το πλήθος των χαρακτήρων της G_m το οποίο, σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1, είναι ίσο με τον πληθάριθμο της G_m, δηλαδή ίσο με $\varphi(m)$.

Ο χ_1, δηλαδή ο χαρακτήρας $mod\ m$ ο οποίος προκύπτει από τον κύριο χαρακτήρα $\widehat{\chi}_1$ της G_m, έχει τιμή 1 σε κάθε ακέραιο που είναι σχετικά πρώτος με τον m και τιμή 0 σε κάθε άλλον ακέραιο.

Μερικά από τα προηγούμενα καταγράφονται στο επόμενο

Θεώρημα 4.3 *Για κάθε θετικό ακέραιο m υπάρχουν $\varphi(m)$ χαρακτήρες $mod\ m$. Αυτοί είναι συναρτήσεις $\chi : \mathbf{Z} \to \mathbf{T} \cup \{0\}$ με τις παρακάτω ιδιότητες*

1. $\chi(1) = 1$.
2. *Αν $a \equiv b\ mod\ m$, τότε $\chi(a) = \chi(b)$.*
3. $\chi(a)\chi(b) = \chi(ab)$ *για κάθε $a, b \in \mathbf{Z}$.*
4. *Για κάθε χ, χαρακτήρα $mod\ m$, ισχύει*

$$\sum_{a=km+1}^{(k+1)m} \chi(a) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \chi \neq \chi_1 \\ \varphi(m), & \text{αν } \chi = \chi_1. \end{cases}$$

5. *Για κάθε $a \in \mathbf{Z}$ ισχύει*

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \not\equiv 1\ mod\ m \\ \varphi(m), & \text{αν } a \equiv 1\ mod\ m, \end{cases}$$

όπου το άθροισμα εκτείνεται σε όλους τους χαρακτήρες $mod\ m$.

Απόδειξη:

Μένει να αποδειχθούν οι ιδιότητες 4. και 5.

Για την 4. παρατηρούμε ότι, καθώς το a διατρέχει τους αριθμούς

$$km + 1, ..., (k + 1)m \ ,$$

το $[a]$ διατρέχει τις κλάσεις

$$[1], ..., [m]$$

αντίστοιχα.

Κάθε a που δεν είναι σχετικά πρώτο με το m δίνει τιμή 0 στον αντίστοιχο όρο του αθροίσματος.

Τα υπόλοιπα $[a]$ διατρέχουν τα στοιχεία της G_m και, επομένως, από τον ορισμό του χ έχουμε

$$\sum_{a=km+1}^{(k+1)m} \chi(a) = \sum_{[a]\in G_m} \widehat{\chi}([a]) \ .$$

Άρα το αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.

Για την 5., τώρα, αν $a \equiv 1 \ mod \ m$, τότε το a είναι σχετικά πρώτο με το m, οπότε

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}_m} \widehat{\chi}([a]) = \varphi(m)$$

από το Θεώρημα 4.2.

Αν $a \not\equiv 1 \ mod \ m$, τότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

Αν, επιπλέον, το a δεν είναι σχετικά πρώτο με το m, τότε κάθε όρος του αθροίσματος είναι 0.

Αν, επιπλέον, το a είναι σχετικά πρώτο με το m, τότε

$$\sum_{\chi} \chi(a) = \sum_{\widehat{\chi}\in\widehat{G}_m} \widehat{\chi}([a]) = 0$$

από το Θεώρημα 4.2, αφού τότε το $[a]$ δεν είναι ίσο με το $[1]$, δηλαδή το μοναδιαίο στοιχείο της G_m.

Κεφάλαιο 5

Οι $L-$συναρτήσεις του Dirichlet

Θεωρούμε θετικό ακέραιο m και σειρές-Dirichlet της μορφής

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \ ,$$

όπου χ είναι χαρακτήρας $mod\ m$.

Θεωρούμε συμπαγές

$$K \subseteq \Pi_1 \ .$$

Τότε, υπάρχει $\sigma_0 > 1$ ώστε

$$K \subseteq \Pi_{\sigma_0} \ .$$

Οπότε, επειδή, αν $s = \sigma + i\tau \in K$, ισχύει

$$\Big|\frac{\chi(n)}{n^s}\Big| \leq \frac{1}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^{\sigma_0}}$$

και επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}}$ συγκλίνει, συνεπάγεται ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Άρα από το Θεώρημα 1.2 η σειρά ορίζει αναλυτική συνάρτηση στο ημιεπίπεδο Π_1.

Ο ίδιος υπολογισμός δίνει ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

συγκλίνει απολύτως για κάθε $s \in \Pi_1$.

Όμως, αν θέσουμε $s = 1$ στη $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\chi(n)|}{n^s}$, τότε η σειρά αποκλίνει. Πράγματι, κρατώντας μόνον τους $n = km+1,\ k \geq 0$, και παρατηρώντας ότι οι αριθμοί αυτοί είναι σχετικά πρώτοι με το m, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\chi(n)|}{n} &\geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\chi(km+1)|}{km+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|\hat{\chi}([km+1])|}{km+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{km+1} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{km+m} \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty \ . \end{aligned}$$

Επομένως, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.3, η τετμημένη απόλυτης σύγκλισης της σειράς είναι $\alpha_0 = 1$ και το ημιεπίπεδο απόλυτης σύγκλισης είναι το Π_1.

Από την Πρόταση 3.3 συνεπάγεται ότι η τετμημένη σύγκλισης α ικανοποιεί την ανισότητα

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

και σκοπός μας, τώρα, είναι να υπολογίσουμε ακριβώς την τιμή του α.

Περίπτωση 1: Ο χ είναι ο κύριος χαρακτήρας $mod\ m$, δηλαδή $\chi = \chi_1$.

Τότε $\chi_1(n) = 1$ για κάθε n ο οποίος είναι σχετικά πρώτος με τον m, ενώ $\chi_1(n) = 0$ για κάθε n ο οποίος δεν είναι σχετικά πρώτος με τον m.

Για παράδειγμα,

$$\chi_1(km+1) = 1$$

για κάθε k και, επομένως, αν $s = 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_1(n)}{n} = \sum_{n:\gcd(n,m)=1} \frac{1}{n} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{km+1} = +\infty \ .$$

Άρα η σειρά αποκλίνει στο $s = 1$, οπότε, σύμφωνα με τον ορισμό 3.2, η τετμημένη σύγκλισης της σειράς είναι $\alpha = 1$ και το ημιεπίπεδο σύγκλισης είναι το Π_1.

Περίπτωση 2: Ο χ δεν είναι ο κύριος χαρακτήρας $mod\ m$.

Τότε, για κάθε n υπάρχει ακέραιος $l \geq 0$ ώστε

$$lm + 1 \leq n < (l+1)m \ ,$$

οπότε, από το Θεώρημα 4.3(4) έχουμε ότι

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \chi(k)\Big| = |\chi(lm+1) + \cdots + \chi(n)| \leq |\chi(lm+1)| + \cdots + |\chi(n)| \leq m$$

διότι κάθε όρος στο τελευταίο άθροισμα είναι ≤ 1 και υπάρχουν το πολύ m τέτοιοι όροι.

Συμβολίζουμε
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \chi(k) \ ,$$
οπότε για κάθε n ισχύουν τα
$$|s_n| \leq m \ , \qquad \chi(n) = s_n - s_{n-1} \ (n \geq 2) \ , \qquad \chi(1) = s_1 \ .$$
Παίρνουμε πραγματικό $s = \sigma > 0$ και υπολογίζουμε
$$(\varpi) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k^\sigma} &= \chi(1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{k^\sigma} \\ &= s_1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{s_k}{k^\sigma} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{s_k}{(k+1)^\sigma} \\ &= \frac{s_n}{n^\sigma} + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Big(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \Big) \ . \end{aligned}$$
Παρατηρούμε ότι η σειρά
$$\sum_{k=1}^{+\infty} s_k \Big(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \Big)$$
συγκλίνει απολύτως, διότι
$$\sum_{k=1}^{+\infty} |s_k| \Big| \frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \Big| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m \Big(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \Big) = m \ .$$
Άρα η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} s_k \big(\frac{1}{k^\sigma} - \frac{1}{(k+1)^\sigma} \big)$ συγκλίνει και, επειδή
$$\Big| \frac{s_n}{n^\sigma} \Big| \leq \frac{m}{n^\sigma} \to 0$$
όταν $n \to +\infty$, συμπεραίνουμε από τον τύπο (ϖ) ότι η σειρά
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\chi(k)}{k^\sigma}$$
συγκλίνει.

Αν $s = 0$, τότε η σειρά γίνεται
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \chi(n)$$
και αποκλίνει αφού ο όρος $\chi(n)$ δεν τείνει στο 0.

Πράγματι,

$$|\chi(n)| = 1$$

για τις άπειρες τιμές $n = km + 1$.

Από τον Ορισμό 3.2 συνεπάγεται ότι η τετμημένη σύγκλισης είναι $\alpha = 0$ και το ημιεπίπεδο σύγκλισης είναι το Π_0.

Ανακεφαλαιώνουμε

Πρόταση 5.1 *Έστω σειρά-Dirichlet της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, όπου χ είναι χαρακτήρας mod m. Τότε*

1. *Το ημιεπίπεδο απόλυτης σύγκλισης κάθε τέτοιας σειράς είναι το Π_1.*
2. *Το ημιεπίπεδο σύγκλισης είναι το Π_1 αν $\chi = \chi_1$ και είναι το Π_0 αν $\chi \neq \chi_1$.*

Συνεπάγεται, τώρα, από το Θεώρημα 3.1 και τον Ορισμό 3.2 ότι σειρές τέτοιας μορφής ορίζουν αναλυτικές συναρτήσεις στο ημιεπίπεδο σύγκλισής τους.

Ορισμός 5.1 *Με $L(s;\chi)$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση η οποία ορίζεται με τον τύπο*

$$L(s;\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$$

στο ημιεπίπεδο σύγκλισης της σειράς.

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται $L-$συνάρτηση του Dirichlet mod m και είναι αναλυτική συνάρτηση στο ημιεπίπεδο σύγκλισης της σειράς.

Από την Πρόταση 5.1 συνεπάγεται ότι η $L(s;\chi)$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο Π_0 για κάθε $\chi \neq \chi_1$, ενώ η $L(s;\chi_1)$ είναι αναλυτική στο μικρότερο ημιεπίπεδο Π_1.

Θα δούμε, όμως, σε λίγο τί μπορούμε να πούμε για τη συνάρτηση $L(s;\chi_1)$ στο Π_0.

Θεώρημα 5.1 *Για κάθε χ, χαρακτήρα mod m, ισχύει*

$$L(s;\chi) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{\chi(p_k)}{p_k^s}\Big)^{-1} , \qquad s \in \Pi_1 \ .$$

Επομένως,

$$L(s;\chi) \neq 0$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Απόδειξη:

Η ισότητα είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.

Πράγματι, από το Θεώρημα 4.3(3) η συνάρτηση

$$\frac{\chi(n)}{n^s}$$

του n είναι, για σταθερό s, πλήρως-πολλαπλασιαστική και η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \ ,$$

όπως είδαμε στην Πρόταση 5.1(1) συγκλίνει απολύτως αν $\Re s > 1$.

Το δεύτερο αποτέλεσμα συνεπάγεται από την Παρατήρηση μετά από τον Ορισμό 1.1 και από το ότι κανένας όρος

$$\Big(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\Big)^{-1}$$

του απειρο-γινόμενου δεν μηδενίζεται.

Αν εφαρμόσουμε το προηγούμενο Θεώρημα 5.1 με

$$\chi = \chi_1$$

και παρατηρήσουμε ότι

$$\gcd(p,m) > 1 \qquad \text{ισοδυναμεί με} \qquad p/m\ ,$$

τότε παίρνουμε από τον τύπο του Euler και το Θεώρημα 2.3(4) ότι

$$(\dagger) \qquad L(s;\chi_1) = \frac{\prod_{k=1}^{+\infty}\big(1-\frac{1}{p_k^s}\big)^{-1}}{\prod_{p:p/m}\big(1-\frac{1}{p^s}\big)^{-1}} = \zeta(s)\prod_{p:p/m}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Αν, τώρα, συμβολίσουμε

$$M(s) = \prod_{p:p/m}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)\ ,$$

τότε η συνάρτηση M είναι πεπερασμένο γινόμενο αναλυτικών συναρτήσεων στο $\mathbf{C}$ και, επομένως, είναι και αυτή αναλυτική στο $\mathbf{C}$.

Από το Θεώρημα 2.3 γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ζ είναι μερόμορφη στο ημιεπίπεδο Π_0 με έναν απλό πόλο στο σημείο $s = 1$ όπου έχει $residue = 1$. Δηλαδή η συνάρτηση με τύπο

$$\lambda(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

είναι αναλυτική στο Π_0.

Άρα

$$\zeta(s)M(s) = \Big(\lambda(s) + \frac{1}{s-1}\Big)M(s) = \lambda(s)M(s) + \frac{M(s)}{s-1}$$

για κάθε $s \in \Pi_0 \setminus \{1\}$.

Επομένως, η συνάρτηση $\zeta(s)M(s)$ είναι αναλυτική στο $\Pi_0 \setminus \{1\}$ και με τον υπολογισμό

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s)M(s) &= \lim_{s\to 1}[(s-1)\lambda(s)M(s) + M(s)]\\ &= M(1) \ = \ \prod_{p:p/m}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\\ &\neq 0\end{aligned}$$

αποδεικνύεται ότι έχει απλό πόλο στο σημείο $s = 1$ με $residue = \prod_{p:p/m}(1 - \frac{1}{p})$ στο σημείο αυτό.

Από τον τύπο (†), ο οποίος ισχύει στο Π_1, συμπεραίνουμε ότι η $\zeta(s)M(s)$ είναι επέκταση της $L(s;\chi_1)$ στο Π_0.

Έτσι, λοιπόν, μπορούμε να θεωρούμε την $L(s;\chi_1)$ ορισμένη (μέσω του τύπου (†)) στο ημιεπίπεδο Π_0.

Δηλαδή η $L(s;\chi_1)$ είναι μερόμορφη στο Π_0 και έχει ένα μόνον απλό πόλο στο σημείο $s = 1$ με $residue = \prod_{p:p/m}(1 - \frac{1}{p})$ στο σημείο αυτό.

Μερικά από τα προηγούμενα συμπεράσματα περιέχονται στο

Θεώρημα 5.2 *Για κάθε θετικό ακέραιο m και κάθε χ, χαρακτήρα mod m, έχουμε ότι*

1. *Αν $\chi \neq \chi_1$, τότε η συνάρτηση $L(s;\chi)$ είναι αναλυτική στο Π_0 και*

$$L(s;\chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} , \qquad \text{για κάθε } s \in \Pi_0 .$$

2. *Αν $\chi = \chi_1$, τότε η συνάρτηση $L(s;\chi_1)$ είναι μερόμορφη στο Π_0 με ένα μόνον απλό πόλο στο σημείο $s = 1$. Επίσης,*

$$L(s;\chi_1) = \zeta(s) \prod_{p:p/m} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) , \qquad \text{για κάθε } s \in \Pi_0$$

και

$$L(s;\chi_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_1(n)}{n^s} , \qquad \text{για κάθε } s \in \Pi_1 .$$

Κεφάλαιο 6

Το Θεώρημα του Dirichlet

Πρόταση 6.1 *Αν m είναι θετικός ακέραιος και ορίσουμε*

$$P(s) = \prod_{\chi} L(s;\chi) \ ,$$

όπου στο πεπερασμένο γινόμενο το χ διατρέχει όλους τους χαρακτήρες $\bmod m$, τότε η συνάρτηση $P(s)$ είναι μερόμορφη στο ημιεπίπεδο Π_0 με ένα μόνον απλό πόλο στο σημείο $s = 1$.

Απόδειξη:
Από το Θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι κάθε συνάρτηση στο γινόμενο είναι μερόμορφη στο Π_0 και, επομένως, και το γινόμενό τους είναι μερόμορφη συνάρτηση στο Π_0.

Ο μοναδικός πιθανός πόλος της $P(s)$ είναι στο σημείο $s = 1$, διότι η μοναδική συνάρτηση στο γινόμενο που έχει πόλο είναι η $L(s;\chi_1)$ και μόνο στο σημείο $s = 1$.

Άρα, αν καμία άλλη $L(s;\chi)$ δεν μηδενίζεται στο $s = 1$, τότε το σημείο αυτό είναι πόλος τάξης 1 του γινομένου, ενώ, αν μια τουλάχιστον από τις άλλες $L(s;\chi)$ μηδενίζεται στο $s = 1$, τότε ο πόλος στο σημείο αυτό αναιρείται και το γινόμενο είναι αναλυτική συνάρτηση σε ολόκληρο το Π_0.

Απομένει να αποκλείσουμε τη δεύτερη περίπτωση.

Από τήν ταυτότητα

$$\log \frac{1}{1-\sigma} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma^k}{k} \ ,$$

η οποία ισχύει για κάθε σ με $0 < \sigma < 1$, παίρνουμε την

$$\frac{1}{1-\sigma} = \exp \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sigma^k}{k}$$

για τις ίδιες τιμές του σ.

Οι συναρτήσεις $\frac{1}{1-s}$ και $\exp\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{s^k}{k}$ είναι και οι δύο αναλυτικές συναρτήσεις στο μοναδιαίο δίσκο $\Delta(0;1)=\{s:|s|<1\}$ και, με βάση τα προηγούμενα, ταυτίζονται στο διάστημα $(0,1)$. Από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης (Θεώρημα 1.6) συνεπάγεται ότι οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται σε ολόκληρον το δίσκο. Δηλαδή

$$\frac{1}{1-s}=\exp\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{s^k}{k}\ , \qquad s\in\Delta(0;1)\ .$$

Αν $\Re s>1$, τότε $|\frac{\chi(p)}{p^s}|<1$, οπότε, χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο, το Θεώρημα 5.1 και το Θεώρημα 4.3(3), παίρνουμε

$$L(s;\chi)=\prod_{l=1}^{+\infty}\exp\Big[\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big]=\exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)\Big]\ .$$

Η εναλλαγή του απειρο-γινόμενου και του exp σε exp και σειρά επιτρέπεται από τον ορισμό του απειρο-γινόμενου.

Στον επόμενο υπολογισμό με $\Re s>1$ η τρίτη και η τέταρτη ισότητα δικαιολογούνται επειδή το $\sum_\chi$ είναι πεπερασμένο και η έκτη ισότητα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 4.3(5).

$$\begin{aligned}
P(s) &= \prod_\chi L(s;\chi) \ = \ \prod_\chi \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)\Big]\\
&= \exp\Big[\sum_\chi\Big(\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)\Big)\Big]\\
&= \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_\chi\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)\Big)\Big]\\
&= \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{kp_l^{ks}}\Big(\sum_\chi\chi(p_l^k)\Big)\Big)\Big]\\
&= \exp\Big[\varphi(m)\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k:p_l^k\equiv 1\, mod\, m}\frac{1}{kp_l^{ks}}\Big)\Big]\ .
\end{aligned}$$

Περιοριζόμαστε, προσωρινά, σε πραγματικό

$$s=\sigma>1\ ,$$

οπότε, επειδή

$$\frac{1}{kp_l^{k\sigma}}>0\ ,$$

επιτρέπεται από το Θεώρημα 1.9 η εναλλαγή της σειράς διαδοχικής άθροισης και παίρνουμε

$$(\ddagger)\qquad P(\sigma)=\exp\Big[\varphi(m)\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{l:p_l^k\equiv 1\, mod\, m}\frac{1}{kp_l^{k\sigma}}\Big)\Big]\ , \qquad \sigma>1\ .$$

Ορίζουμε, τώρα, τη σειρά -Dirichlet

$$Q(s) = \varphi(m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s} \ ,$$

όπου οι συντελεστές ορίζονται με τον τύπο

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{αν } \ n = p^k \text{ για κάποια } p, k \quad \text{και} \quad n \equiv 1 \, mod \, m \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Αυτό που μπορούμε να πούμε αμέσως για τη σειρά αυτή είναι ότι, επειδή οι συντελεστές της είναι μη-αρνητικοί, το ημιεπίπεδο σύγκλισής της ταυτίζεται με το ημιεπίπεδο απόλυτης σύγκλισής της. Δηλαδή $\alpha = \alpha_0$ για τις τετμημένες σύγκλισης και απόλυτης σύγκλισης.

Επίσης, ο τύπος (‡) γράφεται

$$(\ddagger) \qquad P(\sigma) = \exp Q(\sigma), \ , \qquad \sigma > 1 \ .$$

1. Αν θέσουμε $s = \sigma > 1$, τότε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\sigma} < +\infty \ .$$

Άρα η τετμημένη σύγκλισης είναι $\alpha \leq 1$.

2. Αν θέσουμε, πάλι, $s = \sigma > 0$ και κρατήσουμε μόνον τους όρους με $k = \varphi(m)$, τότε

$$Q(\sigma) \geq \sum_{l : p_l^{\varphi(m)} \equiv 1 \, mod \, m} \frac{1}{p_l^{\varphi(m)\sigma}} \ .$$

Άρα, αν $\sigma = \frac{1}{\varphi(m)}$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fermat-Euler , παίρνουμε

$$Q\Big(\frac{1}{\varphi(m)}\Big) \geq \sum_{l : p_l^{\varphi(m)} \equiv 1 \, mod \, m} \frac{1}{p_l} = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{p_l} - \sum_{l : p_l / m} \frac{1}{p_l} = +\infty$$

από το Θεώρημα 2.1, διότι το τελευταίο άθροισμα είναι πεπερασμένο.

Άρα η τετμημένη σύγκλισης είναι $\alpha \geq \frac{1}{\varphi(m)}$.

Από τα **1** και **2** έχουμε ότι η τετμημένη σύγκλισης της $Q(s)$ ικανοποιεί την

$$0 < \frac{1}{\varphi(m)} \leq \alpha \leq 1 \ .$$

Υποθέτουμε, τώρα, αυτό που θέλουμε να αποκλείσουμε. Δηλαδή, ότι η $P(s)$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο Π_0.

Επειδή η $Q(s)$ είναι αναλυτική στο Π_α και, επειδή, σύμφωνα με τον δεύτερο τύπο (‡), οι συναρτήσεις $P(s)$, $\exp Q(s)$ ταυτίζονται στην ημιευθεία $(1, +\infty)$, από την Αρχή Αναλυτικής Συνέχισης συνεπάγεται ότι ταυτίζονται στο κοινό η-μιεπίπεδο Π_α. Δηλαδή

$$P(s) = \exp Q(s) \ , \qquad s \in \Pi_\alpha \ .$$

Υπολογίζουμε, τώρα, τις δυνάμεις της $Q(s)$.

Επειδή η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^s}$ συγκλίνει απολύτως όταν $s \in \Pi_\alpha$, συνεπάγεται από το Θεώρημα 3.3 ότι

$$Q(s)^2 = \varphi(m)^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^{(2)}}{n^s} \ , \qquad s \in \Pi_\alpha \ ,$$

όπου οι συντελεστές δίνονται από τους τύπους

$$b_n^{(2)} = \sum_{k,k':kk'=n} a_k a_{k'} \ .$$

Επιπλέον, από το ίδιο Θεώρημα 3.3 γνωρίζουμε ότι και η καινούργια σειρά συ-γκλίνει απολύτως για κάθε $s \in \Pi_\alpha$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά μπορούμε εύκολα να δούμε ότι για κάθε φυσικό α-ριθμό k ισχύει

$$Q(s)^k = \varphi(m)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^{(k)}}{n^s}$$

για κάθε $s \in \Pi_\alpha$, όπου οι συντελεστές $b_n^{(k)}$ είναι μη-αρνητικοί (και, φυσικά, $b_n^{(1)} = a_n$) και η σειρά συγκλίνει απολύτως στο ημιεπίπεδο Π_α.

Έχουμε, τώρα

$$P(s) = \exp Q(s) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(m)^k}{k!} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n^{(k)}}{n^s} \Big) \ ,$$

οπότε, αν πάρουμε πραγματικό

$$s = \sigma > \alpha \ ,$$

τότε, επειδή όλοι οι όροι είναι μη-αρνητικοί, μπορούμε (Θεώρημα 1.9) να εναλλά-ξουμε τη σειρά άθροισης και

$$(\S) \qquad P(\sigma) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^\sigma} \ ,$$

όπου

$$c_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(m)^k}{k!} b_n^{(k)} \ .$$

Επειδή η $P(s)$ είναι αναλυτική στο Π_0, το $P(\sigma)$ είναι πεπερασμένο όταν $\sigma > \alpha$, οπότε η σειρά -Dirichlet

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s}$$

έχει τετμημένη σύγκλισης

$$\alpha' \leq \alpha \ .$$

Παίρνουμε πάλι πραγματικό

$$s = \sigma > \alpha' \ ,$$

οπότε, κρατώντας μόνον τους όρους με $k = 1$,

$$\varphi(m) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^\sigma} \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varphi(m)^k b_n^{(k)}}{k! n^\sigma} \Big) = P(\sigma) < +\infty \ .$$

Άρα η σειρά που ορίζει τη συνάρτηση $Q(s)$ συγκλίνει για $s = \sigma > \alpha'$, οπότε

$$\alpha \leq \alpha' \ .$$

Επομένως

$$\alpha' = \alpha$$

και, επειδή $\alpha \geq \frac{1}{\varphi(m)}$, συνεπάγεται ότι

$$\alpha' \geq \frac{1}{\varphi(m)} > 0 \ .$$

Από τη σχέση (§) έχουμε ότι η συνάρτηση $P(s)$ ταυτίζεται με τη σειρά - Dirichlet $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n^s}$ στο ημιεπίπεδο σύγκλισής της $\Pi_{\alpha'}$ και μόλις αποδείξαμε ότι $\alpha' > 0$.

Επίσης έχουμε ότι οι συντελεστές c_n της σειράς είναι όλοι μη-αρνητικοί.

Άρα από το Θεώρημα του Landau (Θεώρημα 3.2) συνεπάγεται ότι το σημείο $s = \alpha'$ δεν είναι κανονικό σημείο της σειράς. Δηλαδή η $P(s)$ δεν μπορεί να επεκταθεί σαν αναλυτική συνάρτηση σε σύνολο της μορφής $\Pi_{\alpha'} \cup D(\alpha'; \delta)$ για κανένα $\delta > 0$.

Αυτό, όμως, έρχεται σε αντίφαση με το ότι η $P(s)$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο Π_0.

Θεώρημα 6.1 *Αν* $\chi \neq \chi_1$, *τότε*

$$L(1; \chi) \neq 0 \ .$$

Απόδειξη:

Όπως είπαμε και στην αρχή της απόδειξης της Πρότασης 6.1, αν για κάποιο $\chi \neq \chi_1$ ήταν $L(1; \chi) = 0$, τότε στο γινόμενο

$$P(s) = \prod_{\chi} L(s; \chi)$$

θα αιρόταν ο απλός πόλος της $L(s; \chi_1)$ στο $s = 1$ με αποτέλεσμα να ήταν η συνάρτηση $P(s)$ αναλυτική στο $s = 1$.

Αυτό, όμως, αντιφάσκει με την Πρόταση 6.1.

Θεώρημα 6.2 *(Dirichlet) Αν ο m είναι θετικός ακέραιος και* $\gcd(a, m) = 1$, *τότε υπάρχουν άπειροι πρώτοι p ώστε*

$$p \equiv a \bmod m$$

ή, ισοδύναμα, υπάρχουν άπειροι πρώτοι p στην αριθμητική πρόοδο

$$a, a+m, a+2m, a+3m, \ldots \, .$$

Απόδειξη:
Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\sum_{l:p_l \equiv a \bmod m} \frac{1}{p_l} = +\infty \, .$$

Τότε το άθροισμα θα έχει οπωσδήποτε άπειρους όρους.
Από την απόδειξη της Πρότασης 6.1 γνωρίζουμε τον τύπο

$$L(s;\chi) = \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)\Big] \, , \qquad s \in \Pi_1 \, .$$

Επομένως, αν θέσουμε

$$R(s;\chi) = \sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)$$

για $\Re s > 1$, τότε

$$L(s;\chi) = \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\chi(p_l)}{p_l^s}\Big] \exp R(s;\chi) \, , \qquad s \in \Pi_1 \, .$$

Η σειρά που ορίζει την $R(s;\chi)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\Pi_{1/2}$.
Για να το αποδείξουμε παίρνουμε συμπαγές

$$K \subseteq \Pi_{1/2} \, ,$$

οπότε υπάρχει

$$\sigma_0 > 1/2$$

ώστε

$$K \subseteq \Pi_{\sigma_0} \, .$$

Τότε, για κάθε $s \in K$ ισχύει ότι

$$\Big|\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big| \le \frac{1}{kp_l^{k\sigma_0}} \le \frac{1}{p_l^{k\sigma_0}}$$

και ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{p_l^{k\sigma_0}}\Big) &= \sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{p_l^{2\sigma_0}}\Big(1-\frac{1}{p_l^{\sigma_0}}\Big)^{-1} \\
&\leq (1-\frac{1}{2^{\sigma_0}})^{-1}\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{p_l^{2\sigma_0}} \\
&< (1-\frac{1}{2^{\sigma_0}})^{-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\sigma_0}} \\
&< +\infty\ .
\end{aligned}$$

Άρα η σειρά

$$\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\chi(p_l^k)}{kp_l^{ks}}\Big)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο K.

Από το Θεώρημα 1.2 συνεπάγεται ότι η $R(s;\chi)$ είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\Pi_{1/2}$.

Θεωρούμε, τώρα, ακέραιο a με

$$\gcd(a,m)=1\ .$$

Είναι γνωστό ότι υπάρχει ακέραιος b ώστε

$$ab\equiv 1\ mod\ m\ .$$

Έχουμε, λοιπόν, από το Θεώρημα 4.3(3), για $\Re s>1$

$$L(s;\chi)^{\chi(b)}=\exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{\chi(bp_l)}{p_l^s}\Big]\exp[\chi(b)R(s;\chi)]$$

και, επομένως, επειδή το πλήθος των χαρακτήρων $mod\ m$ είναι πεπερασμένο

$$\prod_{\chi}L(s;\chi)^{\chi(b)}=\exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\Big(\sum_{\chi}\frac{\chi(bp_l)}{p_l^s}\Big)\Big]\exp[\sum_{\chi}\chi(b)R(s;\chi)]\ .$$

Ορίζουμε

$$T(s)=\sum_{\chi}\chi(b)R(s;\chi)$$

και η συνάρτηση αυτή είναι, σαν πεπερασμένο άθροισμα αναλυτικών συναρτήσεων, αναλυτική στο $\Pi_{1/2}$.

Επίσης, από το Θεώρημα 4.3(5) συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\prod_{\chi}L(s;\chi)^{\chi(b)} &= \exp\Big[\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{1}{p_l^s}\Big(\sum_{\chi}\chi(bp_l)\Big)\Big]\exp T(s) \\
&= \exp\Big[\varphi(m)\sum_{l:bp_l\equiv 1\ mod\ m}\frac{1}{p_l^s}\Big]\exp T(s)
\end{aligned}$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Επειδή

$$bp \equiv 1 \; mod\, m \qquad \text{ισοδυναμεί με} \qquad p \equiv a \; mod\, m \; ,$$

συνεπάγεται

$$\prod_{\chi} L(s;\chi)^{\chi(b)} = \exp\Big[\varphi(m) \sum_{l: p_l \equiv a \; mod\, m} \frac{1}{p_l^s}\Big] \exp T(s)$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Παρατηρούμε ότι

$$b \equiv 1 \; mod\, m \; ,$$

οπότε

$$\chi_1(b) = 1 \; .$$

Άρα

$$\exp\Big[\varphi(m) \sum_{l: p_l \equiv a \; mod\, m} \frac{1}{p_l^s}\Big] = \exp[-T(s)] L(s;\chi_1) \prod_{\chi \neq \chi_1} L(s;\chi)^{\chi(b)}$$

για κάθε $s \in \Pi_1$.

Η $T(s)$ είναι αναλυτική στο $\Pi_{1/2}$, οπότε

$$\lim_{s \to 1} \exp[-T(s)] = \exp[-T(1)] \neq 0 \; .$$

Το

$$\prod_{\chi \neq \chi_1} L(s;\chi)^{\chi(b)}$$

σαν γινόμενο πεπερασμένου πλήθους αναλυτικών συναρτήσεων, είναι αναλυτική συνάρτηση στο Π_0, οπότε το όριό του όταν $s \to 1$ είναι ίσο με

$$\prod_{\chi \neq \chi_1} L(1;\chi)^{\chi(b)} \neq 0$$

σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1.

Τέλος, από το Θεώρημα 5.2(2) το $s = 1$ είναι πόλος της $L(s;\chi_1)$, οπότε

$$\lim_{s \to 1} L(s;\chi_1) = \infty \; .$$

Άρα, όταν $s \to 1$ μέσα από το ημιεπίπεδο Π_1, τότε

$$\exp\Big[\varphi(m) \sum_{l:\, p_l \equiv a \; mod\, m} \frac{1}{p_l^s}\Big] \to \infty \; .$$

Ειδικότερα, αν το $s = \sigma$ είναι πραγματικό και

$$\sigma \to 1+ \; ,$$

τότε, επειδή

$$\exp\Big[\varphi(m)\sum_{l:p_l\equiv a\, mod\, m}\frac{1}{p_l^\sigma}\Big] > 0\ ,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{\sigma\to 1+}\exp\Big[\varphi(m)\sum_{l:p_l\equiv a\, mod\, m}\frac{1}{p_l^\sigma}\Big] = +\infty\ .$$

Τέλος, επειδή

$$\sum_{l:p_l\equiv a\, mod\, m}\frac{1}{p_l^\sigma} \leq \sum_{l:p_l\equiv a\, mod\, m}\frac{1}{p_l}$$

για κάθε $\sigma > 1$, έχουμε ότι

$$\sum_{l:p_l\equiv a\ \ mod\, m}\frac{1}{p_l} = +\infty\ .$$