Μαρία Ντεκουμέ

Η συμπεριφορά του μεγιστικού τελεστή Hardy-Littlewood σε σχέση με σταθμισμένους L^p χώρους και η αντίστοιχη θεωρία των A_p βαρών

Μεταπτυχιακή εργασία

Εαρινό εξάμηνο 2014-2015

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα ”Μαθηματικά και Εφαρμογές τους”

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επιτροπή κρίσης:

Μιχάλης Κολουντζάκης

Θεμιστοκλής Μήτσης

Μιχάλης Παπαδημητράκης, επιβλέπων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το μεγιστικό Θεώρημα Hardy-Littlewood για κανονικά μέτρα

Έστω μ μη-αρνητικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$, πεπερασμένο σε φραγμένα σύνολα. Για ένα τέτοιο μέτρο αναρωτιόμαστε: Αν $x \in \mathbb{R}^n$ και I ανοικτός κύβος που περιέχει το x, ισχύει ότι $\lim_{\mu(I)\to 0} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) = f(x)$ μ- σχεδόν παντού;

Θα προσεγγίσουμε αυτή την ερώτηση εστιάζοντας αρχικά σε ένα αποτέλεσμα ασθενούς τύπου για την αντίστοιχη μεγιστική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, αν για $x \in \mathbb{R}^n$ και f τοπικά στον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ θεωρήσουμε

$$M_\mu f(x) = \sup \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(y)| d\mu(y),$$

παίρνοντας supremum των ανοικτών κύβων I που περιέχουν το x, θα διερευνήσουμε αν η απεικόνιση $f \to M_\mu f$ είναι ασθενώς-(1,1). Θα ξεκινήσουμε ως εξής:

Θεωρούμε $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu f(x) > \lambda\}$. Το $\mathcal{O}_\lambda$ είναι ανοικτό, γιατί για κάθε $x \in \mathcal{O}_\lambda$ έχουμε ότι

$$\sup \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f(y)| d\mu(y) > \lambda$$

για ανοικτούς κύβους I που περιέχουν το x, άρα υπάρχει κάποιος ανοικτός κύβος I_x που περιέχει το x και για τον οποίο

$$\frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f(y)| d\mu(y) > \lambda.$$

Συνεπώς, για κάθε $z \in I_x$ έχουμε

$$M_\mu f(z) = \sup \frac{1}{\mu(J)} \int_J |f(y)| d\mu(y) > \frac{1}{\mu(I_x)} \int_{I_x} |f(y)| d\mu(y) > \lambda,$$

με J να είναι οι ανοικτοί κύβοι που περιέχουν το z, δηλαδή $z \in \mathcal{O}_\lambda$. Οπότε $I_x \subset \mathcal{O}_\lambda$. Στην πραγματικότητα,

$$\mathcal{O}_\lambda = \bigcup_{x \in \mathcal{O}_\lambda} I_x.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε το $\mu(\mathcal{O}_\lambda)$ μέσω του μ-μέτρου του $\bigcup_{x\in\mathcal{O}_\lambda} I_x$. Είναι φανερό ότι χρειαζόμαστε κάποιον έλεγχο πάνω σε αυτό το σύνολο. Έτσι ας υποθέσουμε επιπλέον ότι το μέτρο μ είναι κανονικό, δηλαδή ότι αν το σύνολο U είναι μ-μετρήσιμο, τότε

$$\mu(U) = \sup_{K \subset U, K \text{ συμπαγές}} \mu(K).$$

Αν το K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{O}_\lambda$, υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους I_x, ας πούμε $I_{x_1}, I_{x_2}, ..., I_{x_m}$, τέτοια ώστε $K \subset \bigcup_{j=1}^m I_{x_j}$. Στην πραγματικότητα μπορούμε να αποφύγουμε κάποιες υπερκαλύψεις των I_{x_j} αν απορρίψουμε κάθε κύβο I_{x_k} τέτοιο ώστε $I_{x_k} \subset \bigcup_{j\neq k} I_{x_j}$. Και πάλι όμως θα έχουμε αρκετές υπερκαλύψεις. Για να αποφύγουμε και αυτές θα δουλέψουμε ως εξής: Αφού έχουμε πεπερασμένου πλήθους κύβους, θα υπάρχει κάποιος με μεγαλύτερο μήκος πλευράς (αν υπάρχουν παραπάνω από ένας, διαλέγω έναν από αυτούς). Τον κύβο αυτόν τον ονομάζω τώρα I_1. Αν κάποιος από τους υπόλοιπους κύβους I_{x_j}, έστω I, τέμνει τον I_1, αφού το μήκος της πλευράς του I είναι μικρότερο από το μήκος της πλευράς του I_1, έχουμε ότι $I \subset 3I_1$, όπου $3I_1$ ο κύβος με το ίδιο κέντρο με τον I_1 και με τριπλάσιο μήκος πλευράς. Οπότε μπορώ να απορρίψω όλους τους κύβους που τέμνουν τον I_1 και έτσι έχω πεπερασμένη συλλογή ανοικτών κύβων ξένων με τον I_1. Την ίδια διαδικασια ακολουθώ στην οικογένεια των I_{x_j} πεπερασμένες φορές, παίρνοντας κάθε φορά τον κύβο με το μεγαλύτερο μήκος πλευράς από αυτούς που έχουν απομείνει και απορρίπτοντας όσους τον τέμνουν. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγω σε συλλογή $\{I_1, I_2, ..., I_k\}$ από ξένους ανά δύο κύβους, τέτοιους ώστε $K \subset \bigcup_{j=1}^k 3I_j$. Οπότε

$$\mu(K) \leq \sum_{j=1}^k \mu(3I_j).$$

Αν το μέτρο μ είναι doubling, αν δηλαδή $\mu(2I) \leq c\mu(I)$ για κάθε ανοικτό κύβο I, για κάποιο c που δεν εξαρτάται από το I, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\mu(3I_j)$ από $\mu(I_j)$, οπότε έχουμε

$$\mu(K) \leq c^2 \sum_{j=1}^k \mu(I_j),$$

όπου c η doubling σταθερά του μ. Όμως τα I_j είναι κύβοι ειδικής μορφής: Είναι ανοικτοί κύβοι, ξένοι ανά δύο για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{\mu(I_j)} \int_{I_j} \big|f(y)\big| d\mu(y) > \lambda$. Άρα

$$\begin{aligned}\lambda\mu(K) \leq & c^2 \sum_{j=1}^k \lambda\mu(I_j) \leq c^2 \sum_{j=1}^k \int_{I_j} \big|f(y)\big| d\mu(y) \\ &= c^2 \int_{\bigcup_{j=1}^k I_j} \big|f(y)\big| d\mu(y) \leq c^2 \|f\|_{L^1_\mu}.\end{aligned}$$

Τελικά. αφού το μ είναι κανονικό μέτρο, έχουμε

$$\lambda\mu(\mathcal{O}_\lambda) = \sup_{K\subset\mathcal{O}_\lambda, K \text{ συμπαγές}} \big(\lambda\mu(K)\big) \leq c^2 \|f\|_{L^1_\mu},$$

δηλαδή

$$\mu(\mathcal{O}_\lambda) \leq \frac{c^2}{\lambda} \|f\|_{L^1_\mu}.$$

Μόλις αποδείξαμε το εξής Θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Έστω μ μη-αρνητικό μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$, πεπερασμένο σε φραγμένα σύνολα, κανονικό και doubling. Τότε η απεικόνιση $f \to M_\mu f$ είναι ασθενώς-(1,1) με νόρμα $\leq c^2$, όπου c η doubling σταθερά του μέτρου μ.*

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. *Έστω μέτρο μ όπως στο παραπάνω Θεώρημα. Τότε υπάρχει σταθερά $c = c_p$ ανεξάρτητη της f τέτοια ώστε*

$$\|M_\mu f\|_{L^p_\mu} \leq c\|f\|_{L^p_\mu}, 1 < p < +\infty.$$

Απόδειξη. Όπως είδαμε, η απεικόνιση M_μ είναι ασθενώς-(1,1) και φραγμένη στον L^∞_μ. Επομένως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Παρεμβολής του Marcinkiewicz συμπεραίνουμε ότι η M_μ είναι ισχυρά-(p,p) για $1 < p < +\infty$. Δηλαδή,

$$\|M_\mu f\|_{L^p_\mu} \leq c\|f\|_{L^p_\mu}, \ \text{ για κάποιο } \ c = c_p.$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Έστω μέτρο μ όπως στο παραπάνω Θεώρημα και f τοπικά στον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$. Τότε*

$$\lim_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) = f(x) \quad \mu - \text{σχεδόν παντού}.$$

Απόδειξη. Καθώς για συμπαγές K έχουμε $\mu(K) < +\infty$, οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$. Έστω τώρα $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$. Παίρνουμε

$$\phi(f,x) = \limsup_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) - \liminf_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y).$$

Προφανώς $\phi(f,x) \geq 0$. Επίσης, θα δείξουμε ότι για κάθε συνεχή g ισχύει

$$\phi(f-g,x) = \phi(f,x).$$

Έστω $\epsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\big|g(x) - g(y)\big| < \epsilon$ για $|x-y| < \delta$. Άρα για κάθε ανοικτό κύβο I με διάμετρο $< \epsilon$ που περιέχει το x έχουμε $\frac{1}{\mu(I)} \int_I g(y) - g(x)d\mu(y) < \epsilon$, οπότε

$$\lim_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I g(y)d\mu(y) = g(x).$$

Επιπλέον, για κάθε $h \in L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε x ισχύει

$$\begin{aligned}\phi(h,x) &= \limsup_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I h(y)d\mu(y) - \liminf_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I h(y)d\mu(y) \\ &\leq 2 \sup_{\{I|x\in I\}} \frac{1}{\mu(I)} \int_I h(y)d\mu(y) = 2M_\mu h(x),\end{aligned}$$

άρα για κάθε x

$$\phi(f,x) = \phi(f-g,x) \leq 2M_\mu(f-g)(x).$$

Επομένως, για κάθε $\lambda > 0$, $\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(f,x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\}$. Οπότε

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(f,x) > \lambda\}\big) \leq \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\}\big) \leq \frac{2}{\lambda} c^2 \|f-g\|_{L^1_\mu}.$$

Όμως, αφού οι συνεχείς συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$, το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλω, άρα

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | \phi(f,x) > \lambda\}\big) = 0 \ \text{ για κάθε } \ \lambda > 0.$$

Συνεπώς, για κάθε $\lambda > 0$,

$$\limsup_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) - \liminf_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) \leq \lambda, \ \ \mu - \text{σχεδόν παντού},$$

άρα

$$\limsup_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) = \liminf_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y), \ \ \mu - \text{σχεδόν παντού},$$

δηλαδή το όριο υπάρχει μ-σχεδόν παντού.
Έστω τώρα $\lambda > 0$. Παίρνουμε

$$U_f(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n | \big| \lim_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) - f(x) \big| > \lambda\}.$$

Και πάλι για οποιαδήποτε g συνεχή έχουμε ότι

$$\big| \lim_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) - f(x)\big| \leq M_\mu(f-g)(x) + \big|f(x) - g(x)\big|,$$

άρα

$$U_f(\lambda) \subset \{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n | \big|f(x)-g(x)\big| > \frac{\lambda}{2}\}.$$

Τότε

$$\mu\big(U_f(\lambda)\big) \leq \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\}\big) + \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | \big|f(x)-g(x)\big| > \frac{\lambda}{2}\}\big),$$

και καθώς

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu(f-g)(x) > \frac{\lambda}{2}\}\big) \leq \frac{2}{\lambda} c^2 \|f-g\|_{L^1_\mu},$$
$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | \big|f(x)-g(x)\big| > \frac{\lambda}{2}\}\big) \leq \frac{2}{\lambda} \|f-g\|_{L^1_\mu}$$

και το $\|f-g\|_{L^1_\mu}$ μπορεί, όπως είπαμε, να γίνει όσο μικρό θέλουμε, έχουμε

$$\mu\big(U_f(\lambda)\big) = 0 \ \text{ για κάθε } \ \lambda > 0,$$

άρα

$$\lim_{\mu(I)\to 0, x\in I} \frac{1}{\mu(I)} \int_I f(y)d\mu(y) = f(x), \ \ \mu - \text{σχεδόν παντού}.$$

□

Κεφάλαιο 2

A_p βάρη και ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood

Ας υποθέσουμε ότι για κάποιο p, $1 \leq p < +\infty$, υπάρχει μια σταθερά $k = k_{p,\mu}$, ανεξάρτητη της f, τέτοια ώστε για κάθε $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ και $\lambda > 0$ να ισχύει

$$\lambda^p \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}\big) \leq k^p \|f\|^p_{L^p_\mu}. \tag{2.1}$$

Αυτό που αναρωτιόμαστε είναι τι συμπεράσματα μπορούμε να βγάλουμε τότε για το μέτρο μ.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Έστω μ μη-αρνητικό μέτρο Borel, πεπερασμένο σε φραγμένα σύνολα και έστω ότι για κάποιο $1 \leq p < +\infty$ ισχύει η (2.1). Τότε:*
(i) Το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Δηλαδή υπάρχει μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση w τέτοια ώστε $d\mu(x) = w(x)dx$.
(ii) Για κάθε ανοικτό κύβο I και κάθε $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy \leq c\Big(\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|^p d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{p}},$$

όπου $c = c_{\mu,k}$ σταθερά ανεξάρτητη της f.
(iii) (Συνθήκη A_p) Η w ικανοποιεί τη συνθήκη $A_p(\mathbb{R}^n)$ του Muckenhoupt, ή αλλιώς A_p συνθήκη. Δηλαδή υπάρχει $c = c_{\mu,k}$ σταθερά ανεξάρτητη του ανοικτού κύβου I τέτοια ώστε

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c, \text{ αν } 1 < p < +\infty$$

ή

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\, ess \inf_I w, \text{ αν } p = 1.$$

Συμβολίζουμε $w \in A_p$. Το infimum των σταθερών στο δεξί μέλος των ανισοτήτων ονομάζεται A_p (ή A_1) σταθερά του w. Μάλιστα, η A_1 σταθερά είναι $\leq ck$ και η A_p σταθερά είναι $\leq ck^{p-1}$.
(iv) (Strong doubling) Για κάθε ανοικτό κύβο I και μετρήσιμο $E \subset I$,

$$\mu(I) \leq c\Big(\frac{|I|}{|E|}\Big)^p \mu(E),$$

όπου $c = c_{\mu,k}$ σταθερά ανεξάρτητη των E, I.

Απόδειξη. (i) Έστω E με $|E| = 0$. Θα δείξουμε ότι τότε $\mu(E) = 0$.
Λόγω κανονικότητας του μέτρου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το E είναι συμπαγές και ότι για δεδομένο $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό O τέτοιο ώστε $E \subset O$ και $\mu(O \setminus E) < \epsilon$. Θεωρούμε $f(y) = \chi_{O\setminus E}(y)$. Τότε $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ και $\|f\|^p_{L^p_\mu} = \mu(O \setminus E) < \epsilon$. Επίσης, για κάθε $x \in E$ υπάρχει ανοικτός κύβος $I \subset O$ με $x \in I$. Άρα

$$\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = \frac{|I \cap (O \setminus E)|}{|I|} = 1,$$

γιατί $|E| = 0$. Οπότε, για κάθε $x \in E$ έχουμε $Mf(x) = 1$.
Τώρα, από την ανισότητα (2.1) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(E) &\leq \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) = 1\}\big) \leq \mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \frac{1}{2}\}\big)\\ &\leq 2^p k^p \|f\|^p_{L^p_\mu} < 2^p k^p \epsilon = c\epsilon.\end{aligned}$$

Συνεπώς $\mu(E) = 0$.

(ii) Έστω ανοικτός κύβος I και $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε $|f|_I = \frac{1}{|I|}\int_I \big|f(y)\big|dy > 0$. Για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$M(f\chi_I)(x) = \sup_{J \ni x} \frac{1}{|J|}\int_J \big|f\chi_I(y)\big|dy \geq \frac{1}{|I|}\int_I \big|f(y)\big|dy = |f|_I,$$

άρα $\inf_{x\in I} M(f\chi_I)(x) \geq |f|_I$. Οπότε το $|f|_I$ είναι πεπερασμένο για κάθε I, γιατί αλλιώς θα έπρεπε το μ να ειναι το μηδενικό μέτρο προκειμένου να ισχύει η (2.1).
Αν τώρα πάρουμε $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{R}^n | M(f\chi_I)(x) > \frac{|f|_I}{2}\}$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\mu(I) \leq \mu(\mathcal{O}) \leq \frac{2^p}{|f|^p_I} k^p \|f\chi_I\|^p_{L^p_\mu}$$

λόγω της (2.1), άρα

$$|f|^p_I \leq (2k)^p \frac{1}{\mu(I)}\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\chi_I(y)\big|^p d\mu(y).$$

Δηλαδή, δείξαμε ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I \big|f(y)\big|dy \leq c\Big(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \big|f(y)\big|^p d\mu(y)\Big)^{\frac{1}{p}}$$

για $c = 2k$ σταθερά ανεξάρτητη της f.

(iii), (iv) Για $\epsilon > 0$, εισάγουμε το μέτρο $d\nu(y) = d\mu(y) + \epsilon dy$. Αυτό το κάνουμε για να αποφύγουμε ορισμένες τεχνικές δυσκολίες, όπως να μηδενίζεται η w σε κάποιο σύνολο θετικού μέτρου. Προφανώς το ν είναι και αυτό απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, με $d\nu(y) = v(y)dy$ για κάποια μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση v. Επίσης η (2.1) ισχύει και για το μέτρο ν με κάποια σταθερά $k = k_{p,\nu}$ ανεξάρτητη του ϵ. Δηλαδή

$$\lambda^p \nu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}\big) \leq k^p \|f\|^p_{L^p_\nu}.$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $p > 1$. Προκειμένου να εκτιμήσουμε το $\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy$, θα παρατηρήσουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy &= \int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}-1}v(y)dy = \int_I v(y)^{-\frac{p}{p-1}}d\nu(y)\\ &= \int_I \Big(\frac{1}{v(y)}\Big)^{\frac{p}{p-1}}d\nu(y) = \int_I \Big(\frac{1}{v(y)}\Big)^{p'}d\nu(y) = \Big\|\frac{1}{v}\Big\|^{p'}_{L^{p'}_\nu}.\end{aligned}$$

Από την αντίστροφη ανισότητα Hölder,

$$\Big\|\frac{1}{v}\Big\|_{L^{p'}_\nu} = \sup_{\|f\|_{L^p_\nu}\le 1}\Big|\int_I \frac{1}{v(y)}f(y)d\nu(y)\Big| = \sup_{\|f\|_{L^p_\nu}\le 1}\Big|\int_I f(y)dy\Big|.$$

Το σκέλος (ii) του Θεωρήματος, το οποίο αποδείξαμε πριν λίγο, ισχύει και για το μέτρο ν, οπότε για $\|f\|_{L^p_\nu}\le 1$,

$$\begin{aligned}\Big|\int_I f(y)dy\Big| &\le 2k|I|\Big(\frac{1}{\nu(I)}\int_I \big|f(y)\big|^p d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{p}}\\ &\le 2k|I|\frac{\|f\|_{L^p_\nu}}{\big(\nu(I)\big)^{\frac{1}{p}}} \le 2k|I|\frac{1}{\big(\nu(I)\big)^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

Οπότε

$$\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy = \frac{1}{|I|}\Big\|\frac{1}{v}\Big\|^{p'}_{L^{p'}_\nu} \le \frac{1}{|I|}\Big(\frac{2k|I|}{\nu(I)^{\frac{1}{p}}}\Big)^{p'}.$$

Τότε

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} &\le \frac{\nu(I)}{|I|}\Big(\frac{1}{|I|}\Big(\frac{2k|I|}{\nu(I)^{\frac{1}{p}}}\Big)^{p'}\Big)^{p-1}\\ &= \frac{\nu(I)}{|I|}\frac{1}{|I|^{p-1}}\frac{(2k)^{p'(p-1)}|I|^{p'(p-1)}}{\big(\nu(I)\big)^{\frac{p'}{p}(p-1)}}\\ &= \frac{\nu(I)}{|I|^p}\frac{(2k)^p|I|^p}{\nu(I)} = (2k)^p = c.\end{aligned}$$

Για να δείξουμε το (iv), βλέπουμε ότι για μετρήσιμο $E\subset I$

$$\begin{aligned}|E| &= \int_E \frac{v(y)^{\frac{1}{p}}}{v(y)^{\frac{1}{p}}}dy \le \Big(\int_E \big(v(y)^{\frac{1}{p}}\big)^p dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_E \big(v(y)^{-\frac{1}{p}}\big)^{p'}dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \Big(\int_E v(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_E v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &\le \big(\nu(E)\big)^{\frac{1}{p}}\Big(\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\\ &\le \big(\nu(E)\big)^{\frac{1}{p}}\frac{2k|I|}{\big(\nu(I)\big)^{\frac{1}{p}}},\end{aligned}$$

οπότε

$$\nu(I)\le \nu(E)(2k)^p\Big(\frac{|I|}{|E|}\Big)^p.$$

Καθώς η σταθερά δεν εξαρτάται από το ϵ, παίρνουμε όριο για $\epsilon \to 0+$ και έχουμε ότι

$$\mu(I) \leq \mu(E)(2k)^p \Big(\frac{|I|}{|E|}\Big)^p.$$

Επιπλέον, αν υπάρχει σύνολο E με $|E| > 0$ τέτοιο ώστε $\mu(E) = 0$, τότε το μ είναι το μηδενικό μέτρο, καθώς $\mu(I) = 0$ για κάθε ανοικτό κύβο $I \supset E$. Οπότε $d\mu(x) = w(x)dx$ με $w(x) > 0$ σχεδόν παντού. Συνεπώς το παραπάνω επιχείρημα μπορεί να επαναληφθεί με w αντί για v.
Τώρα προχωράμε στην περίπτωση $p = 1$. Για μετρήσιμο $E \subset I$ με $|E| > 0$, παίρνουμε $f = \chi_E$ και εφαρμόζουμε το (ii):

$$\frac{1}{|I|}\int_I \chi_E(y)dy \leq 2k\frac{1}{\mu(I)}\int_I \chi_E(y)d\mu(y),$$

άρα

$$\frac{|E|}{|I|} \leq 2k\frac{\mu(E)}{\mu(I)},$$

δηλαδή

$$\frac{\mu(I)}{|I|} \leq c\frac{\mu(E)}{|E|},$$

το οποίο είναι το (iv). Έπειτα, επιλέγοντας ως E ακολουθία ανοικτών κύβων που συγκλίνουν σε σημείο Lebesgue x της w τέτοιο ώστε $w(x) \sim ess \inf_I w$, η παραπάνω ανισότητα μας δίνει ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\, ess \inf_I w.$$

□

Θα παρουσιάσουμε τώρα κάποιες ιδιότητες των A_p βαρών που θα μας χρειαστούν σε αρκετά σημεία παρακάτω.

ΛΗΜΜΑ 1. *Έστω $w \in A_p$, $1 < p < +\infty$. Τότε $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.*

Απόδειξη. Έστω ανοικτός κύβος I. Αφού $w \in A_p$,

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c.$$

Τότε, αν $v = w^{-\frac{1}{p-1}}$,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p'-1}}dy\Big)^{p'-1} &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{p'-1}\\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{p'-1}\\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{(p-1)(p'-1)}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{p'-1}\\
&= \Big(\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1}\Big)^{p'-1} \leq c.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $v \in A_{p'}$. □

ΛΗΜΜΑ 2. *Έστω $w \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$, και $q > p$. Τότε $w \in A_q$.*

Απόδειξη. Αν $p = 1$, έχουμε $w \in A_1$, δηλαδή $\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\ ess\inf_I w$. Για $q > 1$,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} &\leq (c\ ess\inf_I w)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I (ess\inf_I w)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1}\\ &= (c\ ess\inf_I w)\big((ess\inf_I w)^{-\frac{1}{q-1}}\big)^{q-1}\\ &= (c\ ess\inf_I w)(ess\inf_I w)^{-1} = c,\end{aligned}$$

άρα $w \in A_q$.

Αν $p > 1$, έχουμε $w \in A_p$, δηλαδή

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c.$$

Για $q > p$, θεωρούμε $r = \frac{q-1}{p-1} > 1$ και εφαρμόζουμε ανισότητα Hölder με τους συζυγείς εκθέτες $r = \frac{q-1}{p-1}$, $r' = \frac{q-1}{q-p}$ για να πάρουμε

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1}\\ &\leq \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\Big(\int_I w(y)^{-\frac{r}{q-1}}dy\Big)^{\frac{1}{r}}\Big(\int_I 1^{r'}dy\Big)^{\frac{1}{r'}}\Big)^{q-1}\\ &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\Big(\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{\frac{p-1}{q-1}}\Big(\int_I 1dy\Big)^{\frac{q-p}{q-1}}\Big)^{q-1}\\ &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\Big)^{q-1}\Big(\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1}|I|^{q-p}\\ &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\Big)^{p-1}\Big(\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1}\\ &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c.\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 3

A_1 βάρη

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε τα A_1 βάρη. Σύμφωνα με αυτά που είδαμε ως τώρα, η A_1 συνθήκη είναι αναγκαία ώστε ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood M να απεικονίζει τον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{1,\infty}_\mu(\mathbb{R}^n)$. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε εύκολα ως εξής: Προκειμένου να έχουμε $Mf \in L^{1,\infty}_\mu(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$, πρέπει για κάθε $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει ότι $\lambda\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | |Mf(x)| > \lambda\}\big) \leq c\|f\|_{L^1_\mu}$ για κάθε $\lambda > 0$ για κάποια σταθερά c. Τότε ικανοποιείται η συνθήκη (2.1) για $p = 1$, άρα $w \in A_1$. Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι εάν είναι και ικανή συνθήκη.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *(Muckenhoupt) Έστω $w \in A_1$. Τότε ο M απεικονίζει τον $L^1_\mu(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{1,\infty}_\mu(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα ανεξάρτητη στον A_1.*

Απόδειξη. Αρχικά, ας παρατηρήσουμε ότι αν $w \in A_1$, τότε το μέτρο μ είναι doubling, με doubling σταθερά $\leq c(A_1$ σταθερά της $w)$. Πράγματι, για κάθε ανοικτό κύβο I,

$$\frac{1}{|2I|}\int_{2I} w(y)dy \leq c\, ess \inf_{2I} w \leq c\, ess \inf_{I} w \leq c\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy,$$

οπότε

$$\mu(2I) \leq c\mu(I)\frac{|2I|}{|I|}.$$

Δηλαδή $\mu(2I) \leq c\mu(I)$, όπου $c \leq 2^n(A_1$ σταθερά της $w)$.
Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I |f(y)|dy &= \frac{\mu(I)}{|I|}\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|dy \leq c\, ess\inf_I w\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|dy \\ &= c\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)| ess\inf_I w dy \leq c\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|w(y)dy \\ &= c\frac{1}{\mu(I)}\int_I |f(y)|d\mu(y).\end{aligned}$$

Οπότε $Mf(x) \leq cM_\mu f(x)$, με c την A_1 σταθερά της w.
Συνεπώς, για κάθε $\lambda > 0$, $\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\} \subset \{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu f(x) > \frac{\lambda}{c}\}$, άρα

$$\begin{aligned}\lambda\mu\big(\,\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}\big) &\leq \lambda\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\mu f(x) > \frac{\lambda}{c}\}\big) \\ &\leq \lambda\frac{c}{\lambda}(\text{doubling σταθερά του } \mu)^2\|f\|_{L^1_\mu} \\ &\leq c^3 2^{2n}\|f\|_{L^1_\mu}.\end{aligned}$$

□

Κάποιες παρατηρήσεις σχετικά με τον A_1 είναι προφανείς. Για παράδειγμα, ένας ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε την A_1 συνθήκη είναι

$$Mw(x) \leq cw(x) \text{ σχεδόν παντού.}$$

Αν η w ικανοποιεί την A_1 συνθήκη, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ανοικτό κύβο $I \ni x$

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\, ess \inf_I w \leq cw(x) \text{ για σχεδόν κάθε } x \in I,$$

άρα

$$Mw(x) \leq cw(x) \text{ σχεδόν παντού.}$$

Αν τώρα η w ικανοποιεί ότι $Mw(x) \leq cw(x)$ σχεδόν παντού, τότε έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ότι $\sup_{I\ni x} \frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq cw(x)$, άρα $\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq cw(x)$ για κάθε $I \ni x$ για σχεδόν κάθε x. Αν επιλέξω κάποιο I, τότε η παραπάνω σχέση θα ισχύει για σχεδόν κάθε $x \in I$, οπότε το $\frac{1}{c}\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy$ είναι essential κάτω φράγμα της w στο I. Συνεπώς

$$c\, ess \inf_I w \geq c\frac{1}{c}\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy = \frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy,$$

το οποίο είναι ακριβώς η A_1 συνθήκη.

Το θέμα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι τι είναι τα A_1 βάρη. Μπορούμε να δώσουμε κάποια παραδείγματα ή κάποιο γενικό χαρακτηρισμό; Σαν ένα πρώτο βήμα, θα εξετάσουμε δυνάμεις του $|x|$, για παράδειγμα $|x|^\eta$. Για $n = 1$ και $\eta > 0$, παίρνοντας $I = (0, b)$ βλέπουμε ότι $\frac{1}{b}\int_{(0,b)} x^\eta dx = \frac{b^\eta}{\eta+1} \to +\infty$ για $b \to +\infty$, ενώ $\inf_I x^\eta = 0$. Οπότε οι θετικές δυνάμεις του $|x|$ απορρίπτονται. Ως προς τις αρνητικές δυνάμεις, αρχικά θα πρέπει να έχουμε $-n < \eta \leq 0$, γιατί διαφορετικά η $|x|^\eta$ δεν είναι τοπικά ολοκληρώσιμη. Ωστόσο, αυτός είναι ουσιαστικά ο μόνος περιορισμός. Ισχύει το εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. *Έστω $-n < \eta \leq 0$. Τότε $|x|^\eta \in A_1$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει σταθερά c ανεξάρτητη του I τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{|I|}\int_I |x|^\eta dx \leq c \inf_{x\in I}\big(|x|^\eta\big).$$

Απόδειξη. Έστω ανοικτός κύβος I και I_0 η μεταφορά του έτσι ώστε να έχει το κέντρο του στο 0. Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $2I_0 \cap I \neq \emptyset$. Τότε $I \subset 6I_0$ και

$$\frac{1}{|I|}\int_I |x|^\eta dx \leq \frac{1}{|I|}\int_{6I_0} |x|^\eta dx \leq c|I|^{\frac{\eta}{n}},$$

όπου c μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n και όχι από την επιλογή του κύβου I. Έστω $y \in 2I_0 \cap I$. Τότε $|y| \leq \sqrt{n}|I|^{\frac{1}{n}}$ και $|x - y| \leq diam I = \sqrt{n}|I|^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $x \in I$, άρα $|x| \leq |x - y| + |y| \leq 2\sqrt{n}|I|^{\frac{1}{n}}$. Οπότε $|x|^\eta \geq (2\sqrt{n}|I|^{\frac{1}{n}})^\eta$, άρα

$$|I|^{\frac{\eta}{n}} \leq \frac{1}{(2\sqrt{n})^\eta}|x|^\eta < (2\sqrt{n})^n|x|^\eta, \text{ για κάθε } x \in I.$$

Συνεπώς
$$\frac{1}{|I|}\int_I |x|^\eta dx \leq c \inf_{x\in I}\big(|x|^\eta\big).$$

Περίπτωση 2η: $2I_0 \cap I = \emptyset$. Τότε, για κάθε $x, y \in I$,

$$|x| \leq |x-y| + |y| \leq \sqrt{n}|I|^{\frac{1}{n}} + |y| \leq \sqrt{n}|y| + |y| = c|y|.$$

Όμοια και $|y| \leq c|x|$, άρα $x \sim y$. Οπότε, για κάθε $y \in I$, $|y| \leq c \inf_{x\in I}|x|^\eta$ και

$$\frac{1}{|I|}\int_I |y|^\eta dy \leq \frac{1}{|I|}\int_{x\in I} c \inf_I |x|^\eta dy = c \inf_{x\in I}|x|^\eta.$$

Δηλαδή $\frac{1}{|I|}\int_I |x|^\eta dx \leq c \inf_{x\in I}|x|^\eta$.

□

Τώρα θα αναζητήσουμε συναρτήσεις που συμπεριφέρονται όμοια με τις $|x|^\eta$ όταν $-n < \eta \leq 0$ και θα δείξουμε ότι και αυτές είναι A_1 βάρη. Πρώτα όμως θα αποδείξουμε ένα Λήμμα που θα μας φανεί χρήσιμο στην πορεία.

ΛΗΜΜΑ 3. *Για κάθε $0 < \alpha < \infty, 0 < \beta < 1$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(i) Για κάθε $E \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο, $\int_E \big|f(x)\big|^\alpha dx \leq c|E|^\beta$.
(ii) $f \in L^{\frac{\alpha}{1-\beta},\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Αν υποθέσουμε ότι $\int_E \big|f(x)\big|^\alpha dx \leq c|E|^\beta$ για κάθε $E \subset \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο, αυτό θα ισχύει και για το σύνολο $\mathcal{O}_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \big| |f(x)| > \lambda\}$. Δηλαδή,

$$\int_{O_\lambda} \big|f(x)\big|^\alpha dx \leq c|O_\lambda|^\beta.$$

Τότε
$$\int_{O_\lambda} \lambda^\alpha dx \leq \int_{O_\lambda} \big|f(x)\big|^\alpha dx \leq c|O_\lambda|^\beta,$$

δηλαδή
$$\lambda^\alpha |O_\lambda| \leq c|O_\lambda|^\beta,$$

οπότε
$$\lambda^\alpha |O_\lambda|^{1-\beta} \leq c$$

και τελικά έχουμε
$$\lambda^{\frac{\alpha}{1-\beta}} |\{x \in \mathbb{R}^n \big| \big|f(x)\big| > \lambda\}| \leq c.$$

Αν υποθέσουμε ότι $f \in L^{\frac{\alpha}{1-\beta},\infty}(\mathbb{R}^n)$, τότε για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει

$$\lambda^{\frac{\alpha}{1-\beta}} |\{x \in \mathbb{R}^n \big| \big|f(x)\big| > \lambda\}| \leq c \text{ για κάποια σταθερά } c.$$

Τότε για μετρήσιμο $E \subset \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_E \big|f(x)\big|^\alpha dx &= \int_E \int_0^{|f(x)|^\alpha} d\lambda^\alpha dx = \int_E \int_0^{+\infty} \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n||f(x)|>\lambda\}}(\lambda) d\lambda^\alpha dx \\
&= \int_0^{+\infty} \int_E \chi_{\{x\in\mathbb{R}^n||f(x)|>\lambda\}}(x) dx d\lambda^\alpha \\
&= \int_0^{+\infty} |\{x\in E|\big|f(x)\big| > \lambda\}| d\lambda^\alpha \\
&\le \int_0^{+\infty} \min\{|E|, \frac{c}{\lambda^{\frac{\alpha}{1-\beta}}}\} d\lambda^\alpha \\
&\le \int_0^{\left(\frac{c}{|E|}\right)^{1-\beta}} |E| d\lambda^\alpha + \int_{\left(\frac{c}{|E|}\right)^{1-\beta}}^{+\infty} \frac{c}{\lambda^{\frac{\alpha}{1-\beta}}} d\lambda^\alpha \\
&= |E|\big(\frac{c}{|E|}\big)^{1-\beta} + \int_{\left(\frac{c}{|E|}\right)^{1-\beta}}^{+\infty} \frac{c}{\mu^{\frac{1}{1-\beta}}} d\mu \\
&= c^{1-\beta}|E|^\beta + c\frac{1-\beta}{\beta}\big(\frac{c}{|E|}\big)^{-\beta} \\
&= c^{1-\beta}|E|^\beta + \frac{1-\beta}{\beta} c^{1-\beta}|E|^\beta \\
&= \frac{1}{\beta} c^{1-\beta}|E|^\beta.
\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. *(Coifman-Rochberg) Έστω μ θετικό μέτρο Borel που ικανοποιεί ότι η $M\mu(x)$ δεν είναι ταυτοτικά ∞. Τότε για κάθε $0 \le \epsilon < 1$ έχουμε ότι $M\mu(x)^\epsilon \in A_1$ με A_1 σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το ϵ.*

Απόδειξη.

$$M\mu(x) = \sup_{I\ni x} \frac{1}{|I|}\mu(I).$$

Έστω ανοικτός κύβος I. Θεωρούμε $A = \inf_I M\mu(x)$. Θα εκτιμήσουμε το $\frac{1}{|I|}\int_I M\mu(x)^\epsilon dx$ ως εξής:
Για κάθε $x \in I$, χωρίζουμε τους ανοικτούς κύβους Q που περιέχουν το x σε δύο οικογένειες.

$$J_1 = \{Q||Q| \le |2I|\}, \quad J_2 = \{Q||Q| > |2I|\}$$

Έτσι

$$\begin{aligned}
M\mu(x) &= \sup_{Q\ni x} \frac{1}{|Q|}\mu(Q) \\
&\le \sup_{Q\in J_1} \frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu(y) + \sup_{Q\in J_2} \frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu(y) \\
&= A(x) + B(x).
\end{aligned}$$

Για κάθε $Q \in J_2$, συμπεραίνουμε ότι $3Q \supset I$, αφού $|Q| > |2I|$ και $Q \cap 2I \neq \emptyset$. Οπότε

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu(y) \le \frac{3^n}{|3Q|}\int_{3Q} d\mu(y) \le 3^n M\mu(y)$$

για κάθε $y \in 3Q$, άρα

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu(y) \leq 3^n \inf_{3Q} M\mu(y) \leq 3^n \inf_I M\mu(y) = 3^n A.$$

Δηλαδή $B(x) \leq cA$, με τη σταθερά c να μην εξαρτάται από το μ.

Για κάθε $Q \in J_1$, έχουμε ότι $Q \subset 6I$ και, αν θεωρήσουμε μ_1 τον περιορισμό του μ στο $6I$, δηλαδή αν πάρουμε $d\mu_1(y) = \chi_{6I}(y)d\mu(y)$, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu(y) = \frac{1}{|Q|}\int_Q \chi_{6I}(y)d\mu(y) = \frac{1}{|Q|}\int_Q d\mu_1(y) \leq M\mu_1(x).$$

Επομένως $A(x) \leq M\mu_1(x)$. Οπότε, από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I M\mu(x)^\epsilon dx \leq \frac{1}{|I|}\int_I \big(A(x)^\epsilon + B(x)^\epsilon\big)dx \leq \frac{1}{|I|}\int_I M\mu_1(x)^\epsilon dx + cA^\epsilon.$$

Αξιοποιώντας το Λήμμα που αποδείξαμε πριν λίγο με $\alpha = \epsilon$, $\beta = 1-\epsilon$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I M\mu_1(x)^\epsilon dx &\leq \frac{1}{|I|}c(\text{ασθενής} - L^1 \text{ νόρμα του } M\mu_1)^\epsilon |I|^{1-\epsilon}\\ &\leq c\Big(\frac{1}{|I|}\int_{6I} d\mu(x)\Big)^\epsilon \leq cA^\epsilon,\end{aligned}$$

με τη σταθερά c να εξαρτάται μόνο από το ϵ.

□

Ενδιαφέρον είναι ότι ισχύει και το αντίστροφο της παραπάνω Πρότασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. *(Coifman-Rochberg) Έστω $w \in A_1$. Τότε υπάρχουν συναρτήσεις b και f και κάποιο $0 \leq \epsilon < 1$ τέτοια ώστε*
(i) $0 < A \leq b(x) \leq B < +\infty$ σχεδόν παντού,
(ii) $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $Mf(x)^\epsilon$ είναι πεπερασμένο σχεδόν παντού και $w(x) = b(x)Mf(x)^\epsilon$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος αυτού βασίζεται στη λεγόμενη "αντίστροφη Hölder" ιδιότητα του w. Αυτή η ιδιότητα παρουσιάζει ξεχωριστό ενδιαφέρον και παίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία βαρών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. *(Αντίστροφη Hölder) Έστω $w \in A_1$. Τότε υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1+\eta}dx\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq c\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx$$

για κάθε ανοικτό κύβο I, για κάποια σταθερά $c = c_\eta$ ανεξάρτητη στον A_1 και ανεξάρτητη του I, αλλά όχι ανεξάρτητη του η. Θα λέμε ότι $w \in RH_{1+\eta}$.

Απόδειξη. Προκειμένου να εξασφαλίσουμε ότι τα ολοκληρώματα θα είναι πεπερασμένα, θα πάρουμε τη συνάρτηση

$$v(x) = \min\{w(x), N\}.$$

Προφανώς έχουμε ότι $v \in A_1$ και η A_1 σταθερά της v είναι μικρότερη ή ίση της A_1 σταθεράς της w, ανεξαρτήτως του N. Πράγματι, για ανοικτό κύβο I παίρνω $K = ess\inf_I w$

και εξετάζω δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $K \geq N$

$$\frac{1}{|I|}\int_I v(y)dy \leq N = ess\inf_I v.$$

Περίπτωση 2η: $K < N$

$$\frac{1}{|I|}\int_I v(y)dy \leq \frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\ ess\inf_I w \leq c\ ess\inf_I v.$$

Έστω τώρα $\eta > 0$. Παίρνουμε $v_I = \frac{1}{|I|}\int_I v(y)dy$ και παρατηρούμε ότι

$$\int_I v(y)^{1+\eta}dy = \int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}} v(y)^{1+\eta}dy + \int_{\{y\in I|v(y)\leq v_I\}} v(y)^{1+\eta}dy = A + B.$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $B \leq |I|v_I^{1+\eta}$. Το να βγάλουμε ένα τέτοιο φράγμα για το A απαιτεί περισσότερη δουλειά. Προσέχουμε ότι οι σταθερές που εμφανίζονται εξαρτώνται μόνο από την A_1 σταθερά της v και το η (δηλαδή δεν εξαρτώνται ούτε από την ίδια τη v ούτε από τον κύβο I).

Αν $\mathcal{O}_t = \{y \in I|v(y) > t\}$,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}} v(y)^{1+\eta}dy = \int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}}\int_0^{v(y)}(1+\eta)t^\eta dtdy \\
&= (1+\eta)\int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}}\int_0^{+\infty} t^\eta \chi_{\{t\in\mathbb{R}|t<v(y)\}}(t)dtdy \\
&= (1+\eta)\int_0^{+\infty} t^\eta \int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}} \chi_{\{y\in\mathbb{R}^n|v(y)>t\}}(t)dydt \\
&= (1+\eta)\int_{v_I}^{+\infty} t^\eta|\mathcal{O}_t|dt \\
&= -(1+\eta)\int_{v_I}^{+\infty} t^\eta\Big(\int_t^{+\infty}|\mathcal{O}_s|ds\Big)'dt \\
&= -(1+\eta)\Big(t^\eta\int_t^{+\infty}|\mathcal{O}_s|ds\Big)\Big|_{v_I}^{+\infty} + (1+\eta)\int_{v_I}^{+\infty}\eta t^{\eta-1}\int_t^{+\infty}|\mathcal{O}_s|dsdt \\
&= C + D.
\end{aligned}$$

Όμως, αφού $v \leq N$, για $s \geq N$ έχουμε $|\mathcal{O}_s| = 0$, άρα

$$\begin{aligned}
C &= (1+\eta)v_I^\eta\int_{v_I}^{+\infty}|\mathcal{O}_s|ds = (1+\eta)v_I^\eta\int_{v_I}^{+\infty}\int_{\{y\in I|v(y)>s\}}dyds \\
&= (1+\eta)v_I^\eta\int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}}\int_0^{v(y)}dsdy \\
&= (1+\eta)v_I^\eta\int_{\{y\in I|v(y)>v_I\}}v(y)dy \leq (1+\eta)v_I^\eta|I|v_I \\
&= (1+\eta)v_I^{1+\eta}|I|.
\end{aligned}$$

Επιπλέον, θα δείξουμε ότι, για κατάλληλο η, το D κυριαρχείται από την πεπερασμένη ποσότητα $\frac{1}{2}\int_I v(y)^{1+\eta}dy$.
Για $t > v_I$,

$$\int_t^{+\infty} |\mathcal{O}_s|ds = \int_t^{+\infty}\int_{\{y\in I|v(y)>s\}} dyds = \int_{\{y\in I|v(y)>t\}}\int_0^{v(y)} dsdy$$
$$= \int_{\{y\in I|v(y)>t\}} v(y)dy.$$

Τώρα, καθώς $t > v_I$, θα χρησιμοποιήσουμε διάσπαση Calderon-Zygmund της v στο επίπεδο t. Παίρνουμε λοιπόν μια συλλογή ανοικτών ξένων ανά δύο κύβων $\{I_j\}$, με $I_j \subset I$ για κάθε j, με τις εξής ιδιότητες:
(i) $v(y) \leq t$ σχεδόν παντού στο $I \setminus \bigcup_j I_j$,
(ii) $t \leq \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} v(y)dy \leq 2^n t$ για κάθε j.

Οπότε $y \in \bigcup_j I_j$ για σχεδόν κάθε $y \in I$ με $v(y) > t$, άρα

$$\int_{\{y\in I|v(y)>t\}} v(y)dy \leq \int_{\bigcup_j I_j} v(y)dy = \sum_j \int_{I_j} v(y)dy = \sum_j |I_j|v_{I_j}.$$

Ακόμα, αφού $v \in A_1$, έχουμε ότι $v_{I_j} \leq c\ ess \inf_{I_j} v$ για κάθε j. Επίσης, από το (ii), $v_{I_j} \leq 2^n t$ για κάθε j. Συνεπώς, για κάθε $0 < \epsilon < 1$, για κάθε j,

$$v_{I_j} \leq (c\ ess \inf_{I_j} v)^{1-\epsilon}(2^n t)^{\epsilon}.$$

Τότε για κάθε j έχουμε

$$|I_j|v_{I_j} \leq c|I_j|t^{\epsilon}(ess \inf_{I_j} v)^{1-\epsilon} \leq ct^{\epsilon}\int_{I_j} v(y)^{1-\epsilon}dy.$$

Άρα

$$\int_{\{y\in I|v(y)>t\}} v(y)dy \leq \sum_j |I_j|v_{I_j} \leq ct^{\epsilon}\int_{\bigcup_j I_j} v(y)^{1-\epsilon}dy.$$

Επίσης, καθώς $t \leq \frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} v(y)dy$ για κάθε j, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \bigcup_j I_j$ υπάρχει κάποιος I_{j_0} που περιέχει το x και έχουμε $Mv(x) \geq \frac{1}{|I_{j_0}|}\int_{I_{j_0}} v(y)dy \geq t$, άρα

$$\bigcup_j I_j \subset \{y \in I|Mv(y) > t\}.$$

Καθώς $v \in A_1$ και $Mv(x) \leq cv(x)$ σχεδόν παντού, συμπεραίνουμε επίσης ότι

$$\bigcup_j I_j \subset \{y \in I|v(y) > \frac{t}{c}\}.$$

Κατά συνέπεια, για κάθε $0 < \epsilon < 1$,

$$\int_{\{y\in I|v(y)>t\}} v(y)dy \leq ct^{\epsilon}\int_{\bigcup_j I_j} v(y)^{1-\epsilon}dy \leq ct^{\epsilon}\int_{\{y\in I|v(y)>\frac{t}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon}dy.$$

Δηλαδή, τελικά, για $t > v_I$ έχουμε

$$\int_t^{+\infty} |\mathcal{O}_s| ds \leq ct^{\epsilon} \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{t}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon} dy.$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
D &= (1+\eta) \int_{v_I}^{+\infty} \eta t^{\eta-1} \int_t^{+\infty} |\mathcal{O}_s| ds dt \\
&\leq (1+\eta)\eta \int_{v_I}^{+\infty} t^{\eta-1} ct^{\epsilon} \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{t}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon} dy dt \\
&= c(1+\eta)\eta \int_{v_I}^{+\infty} t^{\eta+\epsilon-1} \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{t}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon} dy dt \\
&= c(1+\eta)\eta \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{v_I}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon} \int_{v_I}^{cv(y)} t^{\eta+\epsilon-1} dt dy \\
&= c(1+\eta)\eta \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{v_I}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon} \Big(\frac{c^{\epsilon+\eta}}{\epsilon+\eta} v(y)^{\epsilon+\eta} - \frac{1}{\epsilon+\eta} v_I^{\epsilon+\eta} \Big) dy \\
&\leq \frac{c\eta(1+\eta)}{\epsilon+\eta} \int_{\{y\in I | v(y) > \frac{v_I}{c}\}} v(y)^{1-\epsilon+\epsilon+\eta} dy \\
&\leq c\eta \frac{1+\eta}{\epsilon+\eta} \int_I v(y)^{1+\eta} dy.
\end{aligned}$$

Θα επιλέξουμε πρώτα $0 < \epsilon < 1$ και έπειτα $\eta > 0$ ώστε $c\eta\frac{1+\eta}{\epsilon+\eta} < \frac{1}{2}$. Τότε

$$D \leq \frac{1}{2} \int_I v(y)^{1+\eta} dy.$$

Δείξαμε δηλαδή ότι

$$\int_I v(y)^{1+\eta} dy = B + C + D \leq v_I^{1+\eta}|I| + (1+\eta) v_I^{1+\eta}|I| + \frac{1}{2}\int_I v(y)^{1+\eta} dy,$$

άρα

$$\frac{1}{2}\int_I v(y)^{1+\eta} dy \leq (2+\eta) v_I^{1+\eta}|I|.$$

Συνεπώς

$$\Big(\frac{1}{|I|} \int_I v(y)^{1+\eta} dy \Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq c v_I = c\frac{1}{|I|}\int_I v(y) dy.$$

Από Λήμμα Fatou,

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|} \int_I w(y)^{1+\eta} dy \Big)^{\frac{1}{1+\eta}} &\leq \liminf_{N\to+\infty} \Big(\frac{1}{|I|} \int_I v(y)^{1+\eta} dy \Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
&\leq c \liminf_{N\to+\infty} \Big(\frac{1}{|I|} \int_I v(y) dy \Big) \\
&\leq c \frac{1}{|I|} \int_I w(y) dy.
\end{aligned}$$

□

Τώρα, αξιοποιώντας την αντίστροφη ιδιότητα Hölder των A_1 βαρών που μόλις αποδείξαμε, μπορούμε να προχωρήσουμε και στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.

Απόδειξη. (Θεωρήματος 4)
Αν $w \in A_1$, τότε για κάποιο $\eta > 0$ έχουμε ότι

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1+\eta}dx\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq c_\eta \frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx,$$

άρα

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{1+\eta}dx &\leq \Big(c_\eta \frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\Big)^{1+\eta}\\ &\leq \Big(c_\eta c\, ess \inf_I w\Big)^{1+\eta}\\ &= (c_\eta c)^{1+\eta} ess \inf_I w^{1+\eta}.\end{aligned}$$

Δηλαδή, $w^{1+\eta} \in A_1$.
Επίσης,

$$M(w^{1+\eta})(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|}\int_I w^{1+\eta}(y)dy \leq (c_\eta c)^{1+\eta} w^{1+\eta}(x) \quad \text{για σχεδόν κάθε } x.$$

Οπότε, αν επιλέξουμε

$$b(x) = \frac{w(x)}{M(w^{1+\eta})(x)^{\frac{1}{1+\eta}}}, \quad f(x) = w(x)^{1+\eta} \text{ και } \epsilon = \frac{1}{1+\eta},$$

το Θεώρημα Coifman-Rochberg ισχύει.

□

Κεφάλαιο 4

A_p **βάρη,** $p > 1$

Τώρα θα ασχοληθούμε με τα A_p βάρη για $p > 1$. Από τον ορισμό των A_p βαρών που δώσαμε στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η A_p συνθήκη είναι αναγκαία προκειμένου ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood M να απεικονίζει τον $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{p,\infty}_\mu(\mathbb{R}^n)$. Μπορούμε να δείξουμε ότι είναι και ικανή συνθήκη. Εμείς θα αποδείξουμε ότι ισχύει κάτι ακόμα πιο ισχυρό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. *(Muckenhoupt) Έστω $w \in A_p$, $1 < p < +\infty$. Τότε ο M απεικονίζει τον $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ συνεχώς στον εαυτό του, με νόρμα ανεξάρτητη στον A_p.*

Απόδειξη. Για μη-αρνητική $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ και ακέραιο $-\infty < k < +\infty$, παίρνουμε

$$A_k = \{y \in \mathbb{R}^n | 2^k < Mf(y) \leq 2^{k+1}\}$$

και έστω U_k συμπαγές υποσύνολο του A_k.
Για κάθε $y \in A_k$, επιλέγουμε ανοικτό κύβο I_y τέτοιο ώστε $y \in I_y$ και

$$2^k < \frac{1}{|I_y|} \int_{I_y} f(x)dx \leq 2^{k+1}.$$

Το U_k είναι συμπαγές υποσύνολο του A_k και τα I_y καλύπτουν το A_k, άρα υπάρχουν πεπερασμένα τέτοια I_y, έστω $\{I_{j,k}\}_{j=1}^{n(k)}$, ώστε το καθένα να μην περιέχεται στην ένωση των υπόλοιπων και να ισχύει

$$2^k < \frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(x)dx \leq 2^{k+1} \text{ για κάθε } k, 1 \leq j \leq n(k)$$

και

$$U_k \subset \bigcup_{j=1}^{n(k)} I_{j,k}.$$

$$J = \int_{\bigcup_k U_k} Mf(y)^p d\mu(y) = \sum_k \int_{U_k} Mf(y)^p d\mu(y) \leq \sum_k 2^{(k+1)p} \mu(U_k).$$

Πρέπει να εκτιμήσουμε το δεξί μέλος της ανισότητας. Μια καλή εκτίμηση θα προκύψει αν μπορούμε να αποφύγουμε τις μη αναγκαίες επικαλύψεις των $I_{j,k}$. Αυτό θα το επιτύχουμε

ως εξής:
Θέτουμε

$$
\begin{aligned}
&E_{1,k} = I_{1,k} \cap U_k, \\
&E_{2,k} = (I_{2,k} \setminus I_{1,k}) \cap U_k, \\
&... \\
&E_{j,k} = (I_{j,k} \setminus \bigcup_{i<j} I_{i,k}) \cap U_k \quad \text{για κάθε } \ j = 1, 2, ..., n(k).
\end{aligned}
$$

Τότε, για κάθε k, τα $E_{j,k}$ είναι ξένα ανά δύο και

$$\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{j,k} = (\bigcup_{j=1}^{n(k)} I_{j,k}) \cap U_k = U_k.$$

Κατά συνέπεια,

$$
\begin{aligned}
J &\le \sum_k 2^{(k+1)p} \mu(U_k) = \sum_k 2^{(k+1)p} \mu(\bigcup_{j=1}^{n(k)} E_{j,k}) \\
&= \sum_{j,k} 2^{(k+1)p} \mu(E_{j,k}) \\
&\le 2^p \sum_{j,k} \mu(E_{j,k}) \Big(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(x) dx \Big)^p.
\end{aligned}
$$

Παίρνουμε $v(x) = w(x)^{-\frac{1}{p-1}}$ και $d\nu(x) = v(x)dx$. Τότε

$$\sum_{j,k} \mu(E_{j,k}) \Big(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(x) dx \Big)^p = \sum_{j,k} \mu(E_{j,k}) \Big(\frac{\nu(I_{j,k})}{|I_{j,k}|} \Big)^p \Big(\frac{1}{\nu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \frac{f(x)}{v(x)} d\nu(x) \Big)^p.$$

Αυτό που προσπαθούμε να κάνουμε είναι να συνδυάσουμε τη συνθήκη A_p με το Θεώρημα 1, που μας λέει ότι ο τελεστής M_μ είναι ασθενώς-(1,1) αν το μέτρο μ έχει κάποιες ιδιότητες.
Ορίζουμε m το μέτρο στο $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}$ που δίνεται από

$$m((j,k)) = \mu(E_{j,k}) \Big(\frac{\nu(I_{j,k})}{|I_{j,k}|} \Big)^p.$$

Οπότε, αν $a_{j,k} = \frac{1}{\nu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \frac{f(x)}{v(x)} d\nu(x)$, τότε

$$
\begin{aligned}
\sum_{j,k} \mu(E_{j,k}) \Big(\frac{\nu(I_{j,k})}{|I_{j,k}|} \Big)^p \Big(\frac{1}{\nu(I_{j,k})} \int_{I_{j,k}} \frac{f(x)}{v(x)} d\nu(x) \Big)^p &= \sum_{j,k} m((j,k)) (a_{j,k})^p \\
&= \| \{a_{j,k}\} \|^p_{l^p_m}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Επίσης, αν $\mathcal{O}_\lambda = \{(j,k) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z} | a_{j,k} > \lambda\}$, τότε η (4.1) ισούται με $\int_0^{+\infty} m(\mathcal{O}_\lambda) d\lambda^p$.

Αυτό που χρειαζόμαστε τώρα είναι να υπολογίσουμε το $m(\mathcal{O}_\lambda)$. Θα γράφουμε

$$I(\lambda) = \bigcup_{(j,k) \in \mathcal{O}_\lambda} I_{j,k}.$$

Για κάθε $(j,k) \in \mathcal{O}_\lambda$, από την A_p συνθήκη έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\nu(I_{j,k})}{|I_{j,k}|}\Big)^p &= \Big(\frac{1}{|I_{j,k}|}\int_{I_{j,k}} w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\Big)^p \leq \Big(\frac{1}{|I_{j,k}|}\Big(\frac{c|I_{j,k}|}{\mu(I_{j,k})^{\frac{1}{p}}}\Big)^{p'}\Big)^p \\
&= c\frac{|I_{j,k}|^{p'p-p}}{\mu(I_{j,k})^{p'}} = c\Big(\frac{|I_{j,k}|}{\mu(I_{j,k})}\Big)^{p'} = c\Big(\frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I_{j,k}} dx\Big)^{p'} \\
&\leq c\Big(\frac{1}{\mu(I_{j,k})}\int_{I_{j,k}} \chi_{I(\lambda)}(x)\frac{1}{w(x)}d\mu(x)\Big)^{p'} \\
&\leq c\Big(\inf_{x\in I_{j,k}} M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'} \\
&\leq c\Big(\inf_{x\in E_{j,k}} M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'}.
\end{aligned}$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
m((j,k)) = \mu(E_{j,k})\Big(\frac{\nu(I_{j,k})}{|I_{j,k}|}\Big)^p &\leq c\mu(E_{j,k})\Big(\inf_{x\in E_{j,k}} M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'} \\
&\leq c\int_{E_{j,k}} \Big(M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'}d\mu(x).
\end{aligned}$$

Άρα

$$m(\mathcal{O}_\lambda) = \sum_{(j,k)\in\mathcal{O}_\lambda} m((j,k)) \leq c\sum_{(j,k)\in\mathcal{O}_\lambda}\int_{E_{j,k}} \Big(M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'}d\mu(x).$$

Καθώς τα $E_{j,k}$ είναι ξένα ανά δύο και ο τελεστής M_μ ισχυρά-(p',p'),

$$\begin{aligned}
m(\mathcal{O}_\lambda) &\leq c\int_{\mathbb{R}^n} \Big(M_\mu\big(\frac{\chi_{I(\lambda)}}{w}\big)(x)\Big)^{p'}d\mu(x) \leq c\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\frac{\chi_{I(\lambda)}(x)}{w(x)}\Big)^{p'}d\mu(x) \\
&= c\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I(\lambda)}(x)^{p'}w(x)^{-p'}w(x)dx \\
&= c\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I(\lambda)}(x)^{p'}w(x)^{1-p'}dx \\
&= c\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{I(\lambda)}(x)^{p'}d\nu(x) \\
&= c\nu(I(\lambda)).
\end{aligned}$$

Τώρα θα ασχοληθούμε με τους ανοικτούς κύβους $I_{j,k}$ που αποτελούν το $I(\lambda)$. Εξ ορισμού του $\mathcal{O}_\lambda$, αν $(j,k)\in\mathcal{O}_\lambda$ έχουμε $a_{j,k} > \lambda$. Δηλαδή

$$\lambda < \frac{1}{\nu(I_{j,k})}\int_{I_{j,k}} \frac{f(x)}{v(x)}d\nu(x).$$

Συνεπώς για κάθε τέτοιο $I_{j,k}$ και για κάθε $x\in I_{j,k}$ έχουμε $M_\nu\big(\frac{f}{v}\big)(x) > \lambda$, άρα

$$I_{j,k} \subset \{x\in\mathbb{R}^n | M_\nu\big(\frac{f}{v}\big)(x) > \lambda\},$$

άρα

$$I(\lambda) \subset \{x\in\mathbb{R}^n | M_\nu\big(\frac{f}{v}\big)(x) > \lambda\}.$$

Οπότε

$$m(\mathcal{O}_\lambda) \leq c\nu(I(\lambda)) \leq c\nu(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\nu(\frac{f}{v})(x) > \lambda\}).$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το ότι ο τελεστής M_ν είναι ισχυρά-(p,p),

$$\begin{aligned}
J &\leq \int_0^{+\infty} m(\mathcal{O}_\lambda) d\lambda^p \leq c \int_0^{+\infty} \nu(\{x \in \mathbb{R}^n | M_\nu(\frac{f}{v})(x) > \lambda\}) d\lambda^p \\
&= c \int_{\mathbb{R}^n} M_\nu(\frac{f}{v})(x)^p d\nu(x) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\frac{f(x)}{v(x)}\Big)^p d\nu(x) \\
&= c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)^{-p} v(x) dx = c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p w(x) dx \\
&= c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p d\mu(x).
\end{aligned}$$

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\int_{\bigcup_k U_k} Mf(y)^p d\mu(y) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p d\mu(x) = c\|f\|^p_{L^p_\mu}.$$

$\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. *Ο τελεστής M απεικονίζει τον $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ στον εαυτό του αν και μόνο αν ο M απεικονίζει τον $L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{p,\infty}_\mu(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < +\infty$.*

Και πάλι η ερώτηση που μας απασχολεί είναι τι ακριβώς είναι τα A_p βάρη. Έχουμε ήδη επαληθεύσει κάποιες ιδιότητες μέσα σε άλλες αποδείξεις, όπως το ότι

$$w \in A_p \quad \text{αν και μόνο αν} \quad w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}, \quad \text{όπου } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad 1 < p < +\infty.$$

Χρειαζόμαστε όμως και κάποια παραδείγματα και, αν είναι δυνατόν, ένα χαρακτηρισμό τέτοιων βαρών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. *Έστω $w_1, w_2 \in A_1$ και $w(x) = w_1(x)w_2(x)^{1-p}$, $1 < p < +\infty$. Τότε $w \in A_p$.*

Απόδειξη. Έστω ανοικτός κύβος I. Αφού $w_1, w_2 \in A_1$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I w_1(x) dx \leq c_1 \; ess \inf_I w_1,$$
$$\frac{1}{|I|}\int_I w_2(x) dx \leq c_2 \; ess \inf_I w_2.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)dx\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx\Big)^{p-1} = \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(x)w_2(x)^{1-p}dx\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(x)^{-\frac{1}{p-1}}w_2(x)dx\Big)^{p-1} \\
&\leq \frac{1}{|I|}\int_I w_1(x)dx \; (ess \inf_I w_2)^{1-p}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(x)dx \; (ess \inf_I w_1)^{-\frac{1}{p-1}}\Big)^{p-1} \\
&\leq (c_1 \; ess \inf_I w_1)(ess \inf_I w_1)^{-1}(c_2 \; ess \inf_I w_2)^{p-1}(ess \inf_I w_2)^{1-p} \\
&\leq c.
\end{aligned}$$

$\square$

Συνεπώς, με βάση τα παραδείγματα στα οποία είχαμε εστιάσει στο Κεφάλαιο 3 για τα A_1 βάρη, μπορούμε να βρούμε και αντίστοιχα παραδείγματα A_p βαρών.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4. *$|x|^\eta \in A_p$, $1 < p < +\infty$, αν και μόνο αν $-n < \eta < n(p-1)$.*

Για τις w που αναφερθήκαμε στην Πρόταση 3 μπορούμε να δείξουμε ότι ικανοποιούν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4. *Έστω $w(x) = w_1(x)w_2(x)^{1-p}$ για $w_1, w_2 \in A_1$, $1 < p < +\infty$. Τότε:*
(i) (Ιδιότητα ανοικτού άκρου) $w \in A_{p-\epsilon}$ για κάποιο $\epsilon > 0$.
(ii) (Αντίστροφη Hölder) $w \in RH_{1+\eta}$ για κάποιο $\eta > 0$.
(iii) (Αντίστροφη doubling) Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε ανοικτό κύβο I και για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του I,

$$\frac{\mu(E)}{\mu(I)} \leq c\Big(\frac{|E|}{|I|}\Big)^{\delta},$$

όπου c σταθερά ανεξάρτητη στον A_p και ανεξάρτητη των I, E.
(iv)

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-np} d\mu(x) \leq c\mu(I_0),$$

όπου I_0 ο μοναδιαίος κύβος στο $\mathbb{R}^n$ και c σταθερά ανεξάρτητη στον A_p.

Απόδειξη. (i) Αφού $w_2 \in A_1$, από την αντίστροφη Hölder έχουμε ότι $w_2 \in RH_{1+\eta}$ για κάποιο $\eta > 0$, δηλαδή υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq c\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)dy$$

για κάθε ανοικτό κύβο I, για κάποια σταθερά $c = c_\eta$. Παίρνουμε $\epsilon = \frac{\eta}{1+\eta}(p-1) > 0$. Παρατηρούμε ότι $p - \epsilon - 1 = (p-1)\big(1 - \frac{\eta}{1+\eta}\big) = \frac{p-1}{1+\eta}$. Οπότε

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-\epsilon-1}}dy\Big)^{p-\epsilon-1} &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I \big(w_1(y)w_2(y)^{1-p}\big)^{-\frac{1}{p-\epsilon-1}}dy\Big)^{p-\epsilon-1}\\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)^{-\frac{1+\eta}{p-1}}w_2(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{p-1}{1+\eta}}\\
&\leq \Big(\frac{1}{|I|}(ess\inf_I w_1)^{-\frac{1+\eta}{p-1}}\int_I w_2(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{p-1}{1+\eta}}\\
&= \frac{1}{ess\inf_I w_1}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{p-1}{1+\eta}}\\
&\leq c\frac{1}{ess\inf_I w_1}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)dy\Big)^{p-1}.
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy = \frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)w_2(y)^{1-p}dy \leq \frac{1}{(ess\inf_I w_2)^{p-1}}\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)dy.$$

Άρα, αφού $w_1, w_2 \in A_1$,

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-\epsilon-1}}dy\Big)^{p-\epsilon-1}\\
&\qquad\qquad \le c\frac{1}{ess\inf_I w_1}\frac{1}{(ess\inf_I w_2)^{p-1}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)dy\Big)^{p-1}\\
&\qquad\qquad \le c\frac{1}{ess\inf_I w_1}\frac{1}{(ess\inf_I w_2)^{p-1}}(ess\inf_I w_1)(ess\inf_I w_2)^{p-1}\\
&\qquad\qquad \le c.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $w \in A_{p-\epsilon}$.

(ii) Θα εφαρμόσουμε ανισότητα Hölder και θα αξιοποιήσουμε το ότι $w_2 \in A_1$.

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{|I|}\int_I 1dy = \frac{1}{|I|}\int_I \frac{w_2(y)^{\frac{1}{p'}}}{w_2(y)^{\frac{1}{p'}}}dy\\
&\le \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{\frac{p'}{p'}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{-\frac{p}{p'}}dy\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)dy\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\le (c\ ess\inf_I w_2)^{\frac{1}{p'}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy\Big)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

άρα

$$c(ess\inf_I w_2)^{\frac{p}{p'}}\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy \ge 1$$

άρα

$$c(ess\inf_I w_2)^{p-1}\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy \ge 1$$

άρα

$$(ess\inf_I w_2)^{1-p} \le c\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy.$$

Ας υποθέσουμε ότι $w_1 \in RH_{1+\eta}$. Τότε

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \le c\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)dy$$

για κάθε ανοικτό κύβο I, για κάποια σταθερά $c = c_\eta$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I \big(w_1(y)w_2(y)^{1-p}\big)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
&\leq \Big(\frac{1}{|I|}(\inf_I w_2)^{(1-p)(1+\eta)}\int_I \big(w_1(y)\big)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
&= (\inf_I w_2)^{1-p}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}} \\
&\leq c(\inf_I w_2)^{1-p}\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)dy \\
&\leq c\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_1(y)dy\Big) \\
&\leq c\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}dy\Big)ess\inf_I w_1 \\
&= c\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}ess\inf_I w_1 dy\Big) \\
&\leq c\frac{1}{|I|}\int_I w_2(y)^{1-p}w_1(y)dy \\
&= c\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $w \in RH_{1+\eta}$.

(iii) Έστω ότι $w \in RH_{1+\eta}$.
Τότε, για ανοικτό κύβο I και E μετρήσιμο υποσύνολο του I, εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για $\frac{1}{1+\eta} + \frac{1}{\frac{1+\eta}{\eta}} = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(E) = \int_E w(y)dy &= \int_E w(y)1dy \\
&\leq \Big(\int_E w(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}}\Big(\int_E 1^{\frac{1+\eta}{\eta}}dy\Big)^{\frac{\eta}{1+\eta}} \\
&= \Big(\int_E w(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}}|E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} \\
&\leq \Big(|I|\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{1+\eta}dy\Big)^{\frac{1}{1+\eta}}|E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} \\
&\leq |I|^{\frac{1}{1+\eta}}c\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy|E|^{\frac{\eta}{1+\eta}} \\
&= c\Big(\frac{|E|}{|I|}\Big)^{\frac{\eta}{1+\eta}}\mu(I).
\end{aligned}$$

Δηλαδή, για $\delta = \frac{\eta}{1+\eta}$, έχουμε

$$\frac{\mu(E)}{\mu(I)} \leq c\Big(\frac{|E|}{|I|}\Big)^{\delta}.$$

(iv) Αφού $w \in A_{p-\epsilon}$, από το Θεώρημα 2 ξέρουμε ότι για κάθε ανοικτό κύβο I και E μετρήσιμο υποσύνολο του I ισχύει

$$\mu(I) \leq c\Big(\frac{|I|}{|E|}\Big)^{p-\epsilon}\mu(E).$$

Οπότε αν πάρουμε $I = 2^k I_0$ και $E = I_0$ για $k \geq 1$,

$$\mu(2^k I_0) \leq c 2^{kn(p-\epsilon)}\mu(I_0).$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x|)^{-np}d\mu(x) &= \int_{\bigcup_{k=0}^{+\infty}2^kI_0}\frac{1}{(1+|x|)^{np}}d\mu(x)\\
&\leq \int_{I_0}\frac{1}{(1+|x|)^{np}}d\mu(x) + \sum_{k=1}^{+\infty}\int_{2^kI_0\setminus 2^{k-1}I_0}\frac{1}{(1+|x|)^{np}}d\mu(x)\\
&\leq \mu(I_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} c\, 2^{-knp}\mu(2^kI_0\setminus 2^{k-1}I_0)\\
&\leq \mu(I_0) + c\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-knp}2^{nk(p-\epsilon)}\mu(I_0)\\
&= (1 + c\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-knp}2^{nk(p-\epsilon)})\mu(I_0)\\
&= (1 + c\sum_{k=1}^{+\infty}2^{-kn\epsilon})\mu(I_0).
\end{aligned}$$

□

Κεφάλαιο 5

Παραγοντοποίηση των A_p βαρών

Σε αυτό το Κεφάλαιο σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το αντίστροφο της Πρότασης 3. Πρώτα όμως θα χρειαστούμε κάποιες παρατηρήσεις.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι ο τελεστής T είναι admissible αν ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.*
(i) Υπάρχει $1 < r < +\infty$ τέτοιο ώστε ο T να είναι φραγμένος στον $L^r(\mathbb{R}^n)$.
(ii) Ο T είναι θετικός, δηλαδή $Tf(x) \geq 0$ για κάθε $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
(iii) Ο T είναι θετικά ομογενής, δηλαδή $T(\lambda f)(x) = \lambda Tf(x)$ σχεδόν παντού, για κάθε $f \in L^r(\mathbb{R}^n)$, για κάθε $\lambda > 0$.
(iv) Ο T είναι subadditive, δηλαδή $T(f+g)(x) \leq Tf(x) + Tg(x)$ σχεδόν παντού, για κάθε $f, g \in {}^r(\mathbb{R}^n)$,

Μερικά παραδείγματα admissible τελεστών είναι οι $|f(x)|$, $Mf(x)$, $\Big(M\big(\frac{|f|^p}{v^\eta}\big)(x)v(x)^\eta\Big)^{\frac{1}{p}}$ για κατάλληλα $1 < p < +\infty$, $0 < \eta \leq 1$.

Θα προσπαθήσουμε να επαληθεύσουμε ότι το τελευταίο από τα παραδείγματα που δώσαμε είναι όντως admissible τελεστής. Στην πορεία επαλήθευσης βρίσκουμε και τις απαραίτητες προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιεί το v ώστε να ισχύει αυτό.

Αρχικά χρειαζόμαστε να προσδιορίσουμε το r. Επιλέγουμε $r = \frac{p}{\eta}$. Τότε έχουμε

$$\|Tf\|_r^r = \int_{\mathbb{R}^n} M\Big(\frac{|f|^p}{v^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{\eta}} v(x)dx$$

και, αν υποθέσουμε ότι $v \in A_{\frac{1}{\eta}}$,

$$\|Tf\|_r^r \leq c\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^{\frac{p}{\eta}}}{v(x)} v(x)dx = c\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{\frac{p}{\eta}} = c\|f\|_r^r,$$

άρα η ιδιότητα (i) ικανοποιείται.
Η επαλήθευση των ιδιοτήτων (ii), (iii) είναι άμεση. Μένει να ελέγξουμε την ιδιότητα (iv). Φιξάρουμε x και παίρνουμε ανοικτό κύβο I που περιέχει το x. Τότε, από την ανισότητα Minkowski,

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{|f(y)+g(y)|^p}{v(y)^\eta}dy\Big)^{\frac{1}{p}} &\leq \Big(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{|f(y)|^p}{v(y)^\eta}dy\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\frac{1}{|I|}\int_I \frac{|g(y)|^p}{v(y)^\eta}dy\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M\Big(\frac{|f|^p}{v^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{p}} + M\Big(\frac{|g|^p}{v^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

άρα
$$M\Big(\frac{|f+g|^p}{\upsilon^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{p}} \le M\Big(\frac{|f|^p}{\upsilon^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{p}} + M\Big(\frac{|g|^p}{\upsilon^\eta}\Big)(x)^{\frac{1}{p}}.$$

Μια σημαντική ιδιότητα των admissible τελεστών είναι η ακόλουθη. Λέμε ότι ο T είναι σ-subadditive.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5. *Έστω T admissible τελεστής και r ο δείκτης της ιδιότητας (i) στον ορισμό των admissible τελεστών. Αν έχουμε ακολουθία $\{f_i\}$ και συνάρτηση f με $f_i, f \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και $\lim_{N\to+\infty}\sum_{j=1}^N f_j = f$ στον L^r, τότε*
$$Tf(x) \le \sum_{j=1}^{+\infty} Tf_j(x) \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη.
$$f = (f - \sum_{j=1}^N f_j) + \sum_{j=1}^N f_j$$
Συνεπώς, από τις ιδιότητες (ii) και (iv) του admissible τελεστή T,
$$\begin{aligned} Tf(x) &= T\Big((f - \sum_{j=1}^N f_j) + \sum_{j=1}^N f_j\Big)(x) \\ &\le T\Big(f - \sum_{j=1}^N f_j\Big)(x) + T\Big(\sum_{j=1}^N f_j\Big)(x) \\ &\le T\Big(f - \sum_{j=1}^N f_j\Big)(x) + \sum_{j=1}^N Tf_j(x) \\ &\le T\Big(f - \sum_{j=1}^N f_j\Big)(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} Tf_j(x). \end{aligned}$$

Επιπλέον,
$$\|T(f - \sum_{j=1}^N f_j)\|_r \le c\|f - \sum_{j=1}^N f_j\|_r \to 0 \quad \text{όταν} \quad N \to +\infty.$$

Άρα υπάρχει υποακολουθία $N_k \to +\infty$ τέτοια ώστε
$$\lim_{N_k\to+\infty} T(f - \sum_{j=1}^N f_j)(x) = 0 \quad \text{σχεδόν παντού.}$$
Αυτή την ακολουθία παίρνουμε ως N και έχουμε
$$Tf(x) \le T\Big(f - \sum_{j=1}^{N_k} f_j\Big)(x) + \sum_{j=1}^{+\infty} Tf_j(x) \to \sum_{j=1}^{+\infty} Tf_j(x)$$
σχεδόν παντού για $N_k \to +\infty$. Οπότε
$$Tf(x) \le \sum_{j=1}^{+\infty} Tf_j(x) \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

□

Θα χρειαστούμε ακόμα έναν ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω T admissible τελεστής. Λέμε ότι η μη-αρνητική συνάρτηση w είναι στον $A_1(T)$ αν*

$$Tw(x) \leq cw(x) \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 6. *Έστω T_1 και T_2 admissible τελεστές με τον ίδιο δείκτη r στο (i). Τότε υπάρχει συνάρτηση $\phi \in L^r(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε η ϕ να είναι ταυτόχρονα στον $A_1(T_1)$ και στον $A_1(T_2)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $T = T_1 + T_2$. Τότε ο τελεστής T είναι επίσης ένας admissible τελεστής. Έστω $A > \|T\|$, όπου $\|T\|$ η νόρμα του T στον $L^r(\mathbb{R}^n)$. Για τυχαία, μη-αρνητική συνάρτηση $g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ θέτουμε

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^j g(x)}{A^j}.$$

Θα δείξουμε ότι αυτή είναι η ϕ που ψάχνουμε.

Αρχικά,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\|T^j g\|_r}{A^j} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\|T\|^j \|g\|_r}{A^j} = \|g\|_r \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\frac{\|T\|}{A}\Big)^j < +\infty$$

γιατί $\frac{\|T\|}{A} < 1$, οπότε $\phi \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, αφού ο T_1 είναι σ-subadditive,

$$\begin{aligned} T_1\phi(x) = T_1\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^j g}{A^j}\Big)(x) &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T_1(T^j g)(x)}{A^j} \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{T^{j+1} g(x)}{A^j} = A \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{T^j g(x)}{A^j} \\ &\leq A\phi(x) \quad \text{σχεδόν παντού.} \end{aligned}$$

Συνεπώς $\phi \in A_1(T_1)$. Όμοια $\phi \in A_1(T_2)$. □

Τώρα ειναι εύκολο να αποδείξουμε το Θεώρημα παραγοντοποίησης για τα A_p βάρη που μας ενδιαφέρει.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. *(Jones) Έστω $w \in A_p$, $1 < p < +\infty$. Τότε υπάρχουν $w_1, w_2 \in A_1$ τέτοιες ώστε*

$$w(x) = w_1(x) w_2(x)^{1-p}.$$

Απόδειξη. Καθώς $w \in A_p$, $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, όπως έχουμε ήδη δει. Παίρνουμε $r = pp'$ και θέτουμε

$$T_1 f(x) = \Big(M\big(\frac{|f|^{p'}}{w^{\frac{1}{p}}}\big)(x) w(x)^{\frac{1}{p}}\Big)^{\frac{1}{p'}}$$

και

$$T_2 f(x) = \Big(M\big(\frac{|f|^{p}}{w^{-\frac{1}{p}}}\big)(x) w(x)^{-\frac{1}{p}}\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Βάσει όσων έχουμε πει, οι T_1, T_2 είναι admissible τελεστές. Οπότε, από την προηγούμενη Πρόταση, υπάρχει κάποια μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση ϕ, η οποία είναι ταυτόχρονα στον $A_1(T_1)$ και στον $A_1(T_2)$. Άρα $T_1\phi(x) \leq c\phi(x)$ και $T_2\phi(x) \leq c\phi(x)$ σχεδόν παντού. Δηλαδή

$$M(\phi^{p'} w^{-\frac{1}{p}})(x) \leq c\phi(x)^{p'} w(x)^{-\frac{1}{p}}$$

και

$$M(\phi^{p} w^{\frac{1}{p}})(x) \leq c\phi(x)^{p} w(x)^{\frac{1}{p}}$$

σχεδόν παντού.
Συνεπώς οι $\phi^p w^{\frac{1}{p}}$, $\phi^{p'} w^{-\frac{1}{p}}$ είναι A_1 βάρη. Παίρνοντας $w_1 = \phi^p w^{\frac{1}{p}}$ και $w_2 = \phi^{p'} w^{-\frac{1}{p}}$, έχουμε

$$w_1 w_2^{1-p} = \phi^p w^{\frac{1}{p}} \phi^{p'(1-p)} w^{-\frac{1-p}{p}} = w.$$

□

Σχόλιο. Μετά το συγκεκριμένο Θεώρημα, γίνεται προφανές ότι τα A_p βάρη ικανοποιούν τις ιδιότητες (i)-(iv) που είδαμε στην Πρόταση 4.

Κεφάλαιο 6

A_p βάρη και ο χώρος BMO

Καθώς τόσο η συνθήκη A_p όσο και ο ορισμός του BMO έχουν να κάνουν με μέσους όρους συναρτήσεων, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε εάν υπάρχει κάποια σύνδεση μεταξύ των δύο εννοιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν για $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ορίσουμε*

$$M^{\#}f(x) = \sup_{I \ni x} \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - f_I| dx,$$

λέμε ότι $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$ αν υπάρχει $c \geq 0$ τέτοιο ώστε $M^{\#}f(x) \leq c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Επίσης ορίζουμε

$$\|f\|_* = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} M^{\#}f(x).$$

Θα διατυπώσουμε τη γνωστή ανισότητα John-Nirenberg χωρίς να την αποδείξουμε, διότι θα μας φανεί απαραίτητη για τη συνέχεια.

ΛΗΜΜΑ 4. *(Ανισότητα John-Nirenberg) Έστω $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, ανεξάρτητες των f, I, ώστε*

$$|\{y \in I | |f(y) - f_I| > \lambda\}| \leq c_1 e^{-c_2 \frac{\lambda}{\|f\|_*}} |I|$$

για κάθε $\lambda > 0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7. *Έστω w μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε* $\ln w \in BMO(\mathbb{R}^n)$ *αν και μόνο αν υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $w^\eta \in A_2$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\ln w \in BMO(\mathbb{R}^n)$. Από την ανισότητα John-Nirenberg, υπάρχουν σταθερές c_1, k, που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση, τέτοιες ώστε

$$|\{y \in I | |\ln w(y) - (\ln w)_I| > \lambda\}| \leq c_1 e^{-k \frac{\lambda}{\|\ln w\|_*}} |I|$$

για κάθε $\lambda > 0$. Άρα για $\eta \leq \frac{k}{\|\ln w\|_*}$,

$$\begin{aligned}\int_I e^{\eta|\ln w(y)-(\ln w)_I|}dy &= \int_I \Big(\int_0^{|\ln w(y)-(\ln w)_I|} \eta e^{\eta\lambda}d\lambda + 1\Big)dy \\ &= \int_I \int_0^{|\ln w(y)-(\ln w)_I|} \eta e^{\eta\lambda}d\lambda dy + |I| \\ &= \eta \int_0^{+\infty} e^{\eta\lambda} \int_I \chi_{\{y\in I||\ln w(y)-(\ln w)_I|>\lambda\}}(y)dyd\lambda + |I| \\ &= \eta \int_0^{+\infty} e^{\eta\lambda}|\{y \in I||\ln w(y) - (\ln w)_I| > \lambda\}|d\lambda + |I| \\ &\leq \eta \int_0^{+\infty} e^{\eta\lambda}c_1 e^{-k\frac{\lambda}{\|\ln w\|_*}}|I|d\lambda + |I| \\ &= \eta c_1|I| \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\big(\frac{k}{\|\ln w\|_*}-\eta\big)}d\lambda + |I| \\ &= \Big(\frac{\eta c_1}{\frac{k}{\|\ln w\|_*} - \eta} + 1\Big)|I| = c|I|.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta\big(\ln w(y)-(\ln w)_I\big)}dy \leq c$$

και

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{-\eta\big(\ln w(y)-(\ln w)_I\big)}dy \leq c.$$

Πολλαπλασιάζοντας τις δύο ανισότητες έχουμε

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta\ln w(y)}dy\ \ e^{-\eta(\ln w)_I}\frac{1}{|I|}\int_I e^{-\eta\ln w(y)}dy\ \ e^{\eta(\ln w)_I} \leq c^2,$$

οπότε

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^\eta dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\eta}dy\Big) \leq c^2,$$

δηλαδή $w^\eta \in A_2$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $w^\eta \in A_2$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta|\ln w(y)-(\ln w)_I|}dy &\leq \frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta\big(\ln w(y)-(\ln w)_I\big)}dy + \frac{1}{|I|}\int_I e^{-\eta\big(\ln w(y)-(\ln w)_I\big)}dy \\ &= \frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta\ln w(y)}dy\ \ e^{-\eta(\ln w)_I} + \frac{1}{|I|}\int_I e^{-\eta\ln w(y)}dy\ \ e^{\eta(\ln w)_I} \\ &= A + B.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen θα πάρουμε ότι

$$\begin{aligned}A = \Big(\frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta\ln w(y)}dy\Big)e^{-\eta(\ln w)_I} &= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^\eta dy\Big)e^{\frac{1}{|I|}\int_I \eta\ln(\frac{1}{w(y)})dy} \\ \leq \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^\eta dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\eta}dy\Big) &\leq (A_2 \text{ σταθερά της } w^\eta).\end{aligned}$$

Όμοια και για το B. □

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα ισχύει και για τον A_p.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5. *Έστω w μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε για κάποιο $\eta > 0$ να ισχύει $w^\eta \in A_p$, $1 \leq p < +\infty$. Τότε $\ln w \in BMO(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Αν $p \leq 2$, τότε έχουμε και $w^\eta \in A_2$. Οπότε το ότι $\ln w \in BMO(\mathbb{R}^n)$ έπεται από την προηγούμενη Πρόταση.

Αν $p > 2$, τότε $w^{-\frac{\eta}{p-1}} \in A_{p'}$ και $p' < 2$, άρα πάλι από την προηγούμενη Πρόταση συμπεραίνουμε ότι $\ln(w^{-\frac{\eta}{p-1}}) \in BMO(\mathbb{R}^n)$, άρα $\ln w \in BMO(\mathbb{R}^n)$. □

ΠΡΟΤΑΣΗ 8. *Έστω w μη-αρνητική τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε $w \in A_p$ αν και μόνο αν*

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I e^{\ln w(y)-(\ln w)_I}dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I e^{-\frac{\ln w(y)-(\ln w)_I}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c \tag{6.1}$$

με σταθερά c ανεξάρτητη του I.

Η απόδειξη είναι προφανής, οπότε παραλείπεται. Ωστόσο, θα σημειώσουμε ότι, από την ανισότητα Jensen, κάθε παράγοντας της (6.1) είναι ≥ 1. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $w \in A_p$ αν και μόνο αν

$$\sup_I \Big(\frac{1}{|I|}\int_I e^{\ln w(y)-(\ln w)_I}dy\Big) \leq c$$

και

$$\sup_I \Big(\frac{1}{|I|}\int_I e^{-\frac{\ln w(y)-(\ln w)_I}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c.$$

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή αυτών των αποτελεσμάτων έχει να κάνει με τον υπολογισμό της απόστασης από BMO σε L^∞, ή πιο συγκεκριμένα, μια εκτίμηση της έκφρασης

$$\inf_{g\in L^\infty} \|\phi - g\|_*, \quad \phi \in BMO(\mathbb{R}^n).$$

Ορίζουμε την ποσότητα $\eta(\phi)$ ως εξής:
Για $\eta > 0$, επαληθεύουμε ότι $\sup_I \frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta|\phi(y)-\phi_I|}dy < +\infty$ και παίρνουμε

$$\eta(\phi) = \sup\{\eta > 0 | \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I e^{\eta|\phi(y)-\phi_I|}dy < +\infty\}.$$

Πρώτα απ' όλα, από την ανισότητα John-Nirenberg έχουμε ότι

$$\eta(\phi) \leq \frac{c}{\|\phi\|_*} \quad \text{για κάποιο } \ c > 0.$$

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε φραγμένη συνάρτηση g έχουμε

$$\eta(\phi - g) = \eta(\phi).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. *(Garnett-Jones) Υπάρχουν απόλυτες σταθερές (που εξαρτώνται μόνο από τη διάσταση) c_1, c_2 τέτοιες ώστε*

$$\frac{c_1}{\eta(\phi)} \leq \inf_{g\in L^\infty} \|\phi - g\|_* \leq \frac{c_2}{\eta(\phi)}.$$

Απόδειξη. Για την αριστερή ανισότητα, από τις ιδιότητες που αναφέραμε έχουμε ότι

$$\|\phi - g\|_* \geq \frac{c}{\eta(\phi - g)} = \frac{c}{\eta(\phi)} \quad \text{για κάθε } g \in L^\infty.$$

Για τη δεξιά ανισότητα:
Έστω $\phi \in BMO(\mathbb{R}^n)$ και $\eta > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{\eta(\phi)}{2} < \eta < \eta(\phi)$. Από την Πρόταση 7, $e^{\eta\phi} \in A_2$. Συνεπώς, από το Θεώρημα Jones, υπάρχουν $w_1, w_2 \in A_1$ τέτοιες ώστε

$$e^{\eta\phi(y)} = w_1(y)w_2(y)^{-1},$$

ή, ισοδύναμα,

$$\eta\phi(y) = \ln w_1(y) - \ln w_2(y).$$

Τώρα, σύμφωνα με την Πρόταση 2, $Mw_1(x)^\epsilon \in A_1$ για $0 < \epsilon < 1$, με A_1 σταθερά που εξαρτάται μόνο από το ϵ. Από την Πρόταση 7 έπεται ότι $\|\ln w_1\|_* \leq c$, όπου c κάποια απόλυτη σταθερά. Όμοια και για το w_2. Επιπλέον, καθώς $w_1(y) \leq Mw_1(y) \leq cw_1(y)$ σχεδόν παντού,

$$g_1(y) = \ln\Big(\frac{w_1(y)}{Mw_1(y)}\Big) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

και όμοια

$$g_2(y) = \ln\Big(\frac{w_2(y)}{Mw_2(y)}\Big) \in L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\eta\phi(y) &= \ln w_1(y) - \ln w_2(y) \\
&= \big(\ln Mw_1(y) - \ln Mw_2(y)\big) + \ln\Big(\frac{w_1(y)}{Mw_1(y)}\Big) - \ln\Big(\frac{w_2(y)}{Mw_2(y)}\Big) \\
&= b(y) + g(y).
\end{aligned}$$

Τώρα βλέπουμε ότι $\phi(y) = \frac{b(y)}{\eta} + \frac{g(y)}{\eta}$, η $\frac{g}{\eta}$ είναι φραγμένη συνάρτηση και

$$\|\phi - \frac{g}{\eta}\|_* = \|\frac{b}{\eta}\|_* \leq \frac{c}{\eta} \leq \frac{c}{\eta(\phi)}.$$

Επομένως και η δεξιά ανισότητα ισχύει. $\square$

Κεφάλαιο 7

Ένα αποτέλεσμα παρέκτασης

Αυτό το κεφάλαιο είναι αφιερωμένο σε μια σημαντική ιδιότητα παρέκτασης των A_p βαρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Λέμε ότι το ζεύγος μη- αρνητικών τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων* (w, v) *ικανοποιεί την* A_p *συνθήκη, για* $1 < p < +\infty$*, και γράφουμε* $(w, v) \in A_p$*, αν για κάθε ανοικτό κύβο* I *και κάποια σταθερά* c*, ανεξάρτητη του* I*, ισχύει*

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{p-1} \leq c.$$

Το infimum των c *ονομάζεται* A_p *σταθερά των* (w, v) *και λέμε για μια πρόταση που αναφέρεται στο ζεύγος* (w, v) *ότι είναι ανεξάρτητη στον* A_p *αν εξαρτάται μόνο από την* A_p *σταθερά του ζεύγους και όχι από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις.*
Όμοια, λέμε ότι $(w, v) \in A_1$ *αν*

$$\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy \leq c\ ess\inf_I v$$

για κάθε I*, για κάποια σταθερά* c *ανεξάρτητη του* I*.*

Ένα παράδειγμα αποτελέσματος που είναι ανεξάρτητο στον A_p είναι το εξής:
Έστω $d\mu(y) = w(y)dy$, $d\nu(y) = v(y)dy$, όπου μ κανονικό doubling μέτρο. Τότε η ασθενής προσέγγιση

$$\lambda^p \mu(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}) \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p d\nu(y)$$

ισχύει εφόσον $(w, v) \in A_p$, με τη σταθερά c ανεξάρτητη στον A_p.

Θα το δείξουμε για την περίπτωση $p > 1$.

Έστω $f \geq 0$. Τότε για κάθε ανοικτό κύβο I,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy &= \frac{1}{|I|}\int_I f(y)v(y)^{\frac{1}{p}}v(y)^{-\frac{1}{p}}dy \\
&\leq \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p v(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{p'}{p}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p v(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{p}}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I v(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{\frac{1}{p}}} \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p d\nu(y)\Big)^{\frac{1}{p}} c^{\frac{1}{p}} \Big(\frac{|I|}{\mu(I)}\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $f_I < \lambda$,

$$\mu(I) \leq c\Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p d\nu(y)\Big)|I|(f_I)^{-p} \leq c\lambda^{-p}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I f(y)^p d\nu(y)\Big)$$

για κάθε I.
Έστω τώρα K συμπαγές υποσύνολο του $\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}$. Τότε, επειδή το μ είναι doubling μέτρο, αν πάρουμε $I_1, ..., I_k$ ανοικτούς κύβους ξένους ανά δύο τέτοιους ώστε $K \subset \bigcup_{j=1}^k 3I_j$, έχουμε

$$\mu(K) \leq c\sum_{j=1}^k \mu(I_j) \leq c\lambda^{-p}\sum_{j=1}^k \int_I f(y)^p d\nu(y) \leq c\lambda^{-p}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p d\nu(y),$$

με c ανεξάρτητη στον A_p. Και καθώς το μ είναι κανονικό μέτρο,

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n | Mf(x) > \lambda\}) \leq c\lambda^{-p}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^p d\nu(y).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 9. *Έστω $0 < \eta \leq 1$, $1 < p < +\infty$ και $w \in A_p$. Έστω $g \in L_\mu^{\frac{p'}{\eta}}(\mathbb{R}^n)$ και $G(y) = \Big(\frac{M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y)}{w(y)}\Big)^\eta$. Τότε:*
(i) $\|G\|_{L_\mu^{\frac{p'}{\eta}}} \leq c\|g\|_{L_\mu^{\frac{p'}{\eta}}}$, και
(ii) $(gw, Gw) \in A_{\eta+p(1-\eta)}$.
Επιπλέον, η σταθερά c στο (i) και η $A_{\eta+p(1-\eta)}$ σταθερά του ζεύγους (gw, Gw) είναι ανεξάρτητες στον A_p.

Απόδειξη. Το (i) έχει ήδη αποδειχθεί στο Κεφάλαιο 5.
(ii) Θέτουμε $q = \eta + p(1-\eta)$. Τότε $q - 1 = (p-1)(1-\eta)$, άρα $q \geq 1$.
Αν $\eta = 1$, τότε και $q = 1$, οπότε η G γίνεται $G = \frac{M\big(gw\big)}{w}$, δηλαδή $Gw = M\big(gw\big)$. Οπότε εύκολα βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I g(y)w(y)dy \leq ess\inf_I M\big(gw\big) = ess\inf_I Gw$$

δηλαδή ότι $(gw, Gw) \in A_1$ με A_1 σταθερά 1.

Αν $0 < \eta < 1$, πρέπει να δείξω ότι

$$\Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(y)w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\Big(\frac{M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y)}{w(y)}\Big)^{-\frac{\eta}{q-1}}w(y)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} \le c$$

για σταθερά c ανεξάρτητη του I και ανεξάρτητη στον A_p.
Από ανισότητα Hölder με δείκτες $\frac{1}{\frac{1}{\eta}} + \frac{1}{\frac{1}{1-\eta}} = 1$, έχουμε

$$\frac{1}{|I|}\int_I g(y)w(y)dy \le \Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(y)^{\frac{1}{\eta}}w(y)dy\Big)^{\eta}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{1-\eta}.$$

Για κάθε $y \in I$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{|I|}\int_I g(x)^{\frac{1}{\eta}}w(x)dx \le M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y).$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\Big(\frac{M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y)}{w(y)}\Big)^{-\frac{\eta}{q-1}}w(y)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} &= \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I\Big(M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y)\Big)^{-\frac{\eta}{q-1}}w(y)^{\frac{\eta-1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} \\
&\le \Big(\frac{1}{|I|}\int_I\Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(x)^{\frac{1}{\eta}}w(x)dx\Big)^{-\frac{\eta}{q-1}}w(y)^{\frac{\eta-1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(x)^{\frac{1}{\eta}}w(x)dx\Big)^{-\eta}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{\frac{\eta-1}{q-1}}dy\Big)^{q-1} \\
&= \Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(x)^{\frac{1}{\eta}}w(x)dx\Big)^{-\eta}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{(p-1)(1-\eta)}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{1}{|I|}\int_I g(y)w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I\Big(\frac{M\big(g^{\frac{1}{\eta}}w\big)(y)}{w(y)}\Big)^{-\frac{\eta}{q-1}}w(y)^{-\frac{1}{q-1}}dy\Big)^{q-1}& \\
&\le \Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)^{1-\eta}\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{(p-1)(1-\eta)} \\
&= \Big(\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)dy\Big)\Big(\frac{1}{|I|}\int_I w(y)^{-\frac{1}{p-1}}dy\Big)^{(p-1)}\Big)^{1-\eta} \\
&\le (A_p \text{ σταθερά της } w)^{1-\eta}.
\end{aligned}$$

□

Σχόλιο. Παρατηρούμε ότι αν $p_0 = q = \eta + p(1-\eta)$, τότε $1 \le p_0 < p$ και $(\frac{p}{p_0})' = \frac{p'}{\eta}$.
Τότε η παραπάνω Πρόταση μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως εξής:
Έστω $1 \le p_0 < p$ και $w \in A_p$. Τότε σε κάθε μη-αρνητική συνάρτηση $g \in L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $G \ge g$ τέτοια ώστε

$$\|G\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \le c\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}}$$

και
$$(gw, Gw) \in A_{p_0},$$
με τις σταθερές c και την A_{p_0} σταθερά του ζεύγους (gw, Gw) να είναι ανεξάρτητες στον A_p.

Στην πραγματικότητα, ισχύει ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 10. *Έστω $1 \leq p_0 < p$ και $w \in A_p$. Τότε σε κάθε μη-αρνητική συνάρτηση $g \in L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $G \geq g$ τέτοια ώστε*
$$\|G\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq c\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}}$$
και
$$Gw \in A_{p_0},$$
με τις σταθερές c και την A_{p_0} σταθερά της Gw να είναι ανεξάρτητες στον A_p.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή.

Θέτουμε $g_0 = g$ και g_1 η G που αντιστοιχεί στη g_0 σύμφωνα με την Παρατήρηση. Οπότε, για τη g_1 έχουμε
$$\|g_1\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq c\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \quad \text{και} \quad (g_0 w, g_1 w) \in A_{p_0},$$
άρα
$$\lambda^{p_0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n | Mf(y) > \lambda\}} g_0(y) w(y) dy \leq k \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_0} g_1(y) w(y) dy$$
για κάθε $f \in L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$, με σταθερές c, k ανεξάρτητες στον A_p.
Ακολουθούμε όμοια διαδικασία και για δεδομένη g_j παίρνουμε $g_{j+1} \geq g_j$ τέτοια ώστε
$$\|g_{j+1}\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq c\|g_j\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq c^{j+1}\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}}$$
και
$$\lambda^{p_0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n | Mf(y) > \lambda\}} g_j(y) w(y) dy \leq k \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_0} g_{j+1}(y) w(y) dy \tag{7.1}$$
για κάθε $f \in L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}(\mathbb{R}^n)$, $\lambda > 0$, με σταθερές c, k ανεξάρτητες στον A_p.
Θεωρούμε $G(y) = \sum_{j=0}^{+\infty} (c+1)^{-j} g_j(y)$. Τότε
$$(c+1)^{-j}\|g_j\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq (c+1)^{-j} c^j \|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} = \Big(\frac{c}{c+1}\Big)^j \|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}},$$
οπότε η σειρά που ορίζει τη G συγκλίνει στον $L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}(\mathbb{R}^n)$.
Επίσης εύκολα βλέπουμε ότι $G \geq g$ και $\|G\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq (c+1)\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}}$.

Αν τώρα για κάθε j πολλαπλασιάσουμε την (7.1) με $(c+1)^{-j}$, παίρνουμε
$$\lambda^{p_0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n | Mf(y) > \lambda\}} (c+1)^{-j} g_j(y) w(y) dy \leq$$
$$\leq k(c+1) \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_0} (c+1)^{-(j+1)} g_{j+1}(y) w(y) dy$$

και προσθέτοντας για όλα τα j έχουμε

$$\lambda^{p_0}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n|Mf(y)>\lambda\}} G(y)w(y)dy \leq k(c+1)\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^{p_0}G(y)w(y)dy.$$

Δηλαδή ο μεγιστικός τελεστής Hardy-Littlewood απεικονίζει τον $L^{p_0}_{Gw}(\mathbb{R}^n)$ στον $L^{p_0,\infty}_{Gw}(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα ανεξάρτητη στον A_p. $\square$

Ισχύει και το παρακάτω για την περίπτωση $p<p_0$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11. *Έστω $1<p<p_0$ και $w\in A_p$. Τότε σε κάθε μη-αρνητική συνάρτηση $g\in L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί μια συνάρτηση $G\geq g$ τέτοια ώστε*

$$\|G\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}}\leq c\|g\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}}$$

και

$$G^{-1}w\in A_{p_0},$$

με τις σταθερές c και την A_{p_0} σταθερά της $G^{-1}w$ να είναι ανεξάρτητες στον A_p.

Απόδειξη. Αφού $1<p<p_0$, προφανώς $1<p_0'<p'$. Επίσης, η $v=w^{-\frac{1}{p-1}}\in A_{p'}$ και η $A_{p'}$ σταθερά της v είναι ίση με την A_p σταθερά της w. Παίρνουμε $d\nu(x)=v(x)dx$. Τότε, από την Πρόταση 10, συμπεραίνουμε ότι σε κάθε μη-αρνητική $h\in L_\nu^{(\frac{p'}{p_0'})'}(\mathbb{R}^n)$ αντιστοιχεί κάποια $H\geq h$ τέτοια ώστε

$$\|H\|_{L_\nu^{(\frac{p'}{p_0'})'}}\leq c\|h\|_{L_\nu^{(\frac{p'}{p_0'})'}}\quad\text{και}\quad Hv\in A_{p_0'},$$

με τις σταθερές c και την $A_{p_0'}$ σταθερά της Hv να είναι ανεξάρτητες στον A_p.
Όμως, αν $q=(\frac{p'}{p_0'})'$, έχουμε ότι $\frac{p_0'}{p'}+\frac{1}{q}=1$, άρα $q=\frac{1}{1-\frac{p_0'}{p'}}=\frac{p'}{p'-p_0'}=\frac{\frac{p}{p-1}}{\frac{p}{p-1}-\frac{p_0}{p_0-1}}=\frac{(p_0-1)p}{p_0-p}$.
Δηλαδή $(\frac{p'}{p_0'})'=\frac{(p_0-1)p}{p_0-p}$. Αφού $h\in L_\nu^{(\frac{p'}{p_0'})'}(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}h(x)^{(\frac{p'}{p_0'})'}d\nu(x)<+\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^n}h(x)^{\frac{(p_0-1)p}{p_0-p}}w(x)^{-\frac{1}{p-1}}dx<+\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^n}h(x)^{\frac{(p_0-1)p}{p_0-p}}w(x)^{-\frac{p}{p-1}}d\mu(x)<+\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(h(x)^{p_0-1}w(x)^{-\frac{p_0-p}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p_0-p}}d\mu(x)<+\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$h^{p_0-1}w^{-\frac{p_0-p}{p-1}}\in L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}(\mathbb{R}^n).$$

Επίσης $Hv\in A_{p_0'}$, άρα

$$(Hv)^{-\frac{1}{p_0'-1}}\in A_{p_0},$$

άρα
$$H^{-(p_0-1)}w^{\frac{p_0-p}{p-1}}w \in A_{p_0},$$
άρα
$$(H^{p_0-1}w^{-\frac{p_0-p}{p-1}})^{-1}w \in A_{p_0}.$$
Οπότε, για δεδομένη $g \in L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}$ έχουμε ότι $g = h^{p_0-1}w^{-\frac{p_0-p}{p-1}}$ για κάποια $h \in L_\nu^{(\frac{p'}{p'_0})'}(\mathbb{R}^n)$ και τότε παίρνουμε $H \geq h$ τέτοια ώστε
$$\|H\|_{L_\nu^{(\frac{p'}{p'_0})'}} \leq c\|h\|_{L_\nu^{(\frac{p'}{p'_0})'}} \quad \text{και} \quad Hv \in A_{p'_0}.$$
Αν τώρα πάρουμε $G = H^{p_0-1}w^{-\frac{p_0-p}{p-1}}$, βλέπουμε ότι
$$\|G\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}} \leq c\|g\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}} \quad \text{και} \quad G^{-1}w \in A_{p_0}.$$
□

Τώρα είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα Παρέκτασης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. *(Rubio de Francia) Έστω T υπογραμμικός τελεστής που ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:*
Υπάρχει p_0, $1 \leq p_0 < +\infty$, τέτοιο ώστε για κάθε $w \in A_{p_0}$ και $d\mu(x) = w(x)dx$ ισχύει
$$\|Tf\|_{L_\mu^{p_0}} \leq c\|f\|_{L_\mu^{p_0}}, \tag{7.2}$$
με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη της f και ανεξάρτητη στον A_{p_0}.
Τότε για κάθε p με $1 < p < +\infty$ και κάθε $w \in A_p$, ο T επίσης ικανοποιεί την ανισότητα
$$\|Tf\|_{L_\mu^p} \leq c\|f\|_{L_\mu^p},$$
με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη της f και ανεξάρτητη στον A_p.

Απόδειξη. Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις.

Περίπτωση 1η: $1 \leq p_0 < p$. Παίρνουμε $w \in A_p$ και $f \in L_\mu^p(\mathbb{R}^n)$. Τότε
$$\|Tf\|_{L_\mu^p}^{p_0} = \||Tf|^{p_0}\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0}}} = \sup \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(y)|^{p_0} g(y)d\mu(y),$$
παίρνοντας supremum πάνω από τις μη-αρνητικές $g \in L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}$ με $\|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq 1$.
Φιξάρουμε μια τέτοια g και αντιστοιχίζουμε σε αυτήν τη $G \geq g$ που δίνεται από την Πρόταση 10. Τότε, από την (7.2) και τις ιδιότητες της G που δίνει η Πρόταση 10 ($Gw \in A_{p_0}$), θεωρώντας $d\nu(y) = G(y)w(y)dy$,
$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(y)|^{p_0} g(y)d\mu(y) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(y)|^{p_0} G(y)d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(y)|^{p_0} d\nu(y) \\
&= \|Tf\|_{L_\nu^{p_0}}^{p_0} \leq c\|f\|_{L_\nu^{p_0}}^{p_0} = c\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_0} d\nu(y) \\
&= c\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p_0} G(y)d\mu(y) \leq c\||f|^{p_0}\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0}}} \|G\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \\
&\leq c\||f|^{p_0}\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0}}} \|g\|_{L_\mu^{(\frac{p}{p_0})'}} \leq \||f|^{p_0}\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0}}} \\
&= c\Big(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p d\mu(y)\Big)^{\frac{p_0}{p}} = c\|f\|_{L_\mu^p}^{p_0},
\end{aligned}$$

με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη της g και ανεξάρτητη στον A_p. Οπότε

$$\|Tf\|_{L^p_\mu} \le c\|f\|_{L^p_\mu},$$

για κάθε $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$, με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη της f και ανεξάρτητη στον A_p.

Περίπτωση 2η: $1 < p < p_0$. Παίρνουμε $w \in A_p$ και $f \in L^p_\mu(\mathbb{R}^n)$. Θεωρούμε

$$g(x) = \begin{cases} \|f\|_{L^p_\mu}^{p-p_0}|f(x)|^{p_0-p}, & \text{αν } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{αν } f(x) = 0 \end{cases}.$$

Τότε

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)\neq 0\}} |f(x)|^{p_0} g(x)^{-1} d\mu(x) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)\neq 0\}} |f(x)|^p d\mu(x) \|f\|_{L^p_\mu}^{p_0-p} = \|f\|_{L^p_\mu}^{p_0}$$

και

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}} &= \Big(\int_{\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)\neq 0\}} \big(\|f\|_{L^p_\mu}^{p-p_0}|f(x)|^{p_0-p}\big)^{\frac{p}{p_0-p}} d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0-p}{p}} \\ &= \Big(\|f\|_{L^p_\mu}^{-p} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)\neq 0\}} |f(x)|^p d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0-p}{p}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Για αυτή τη g, από την Πρόταση 11, παίρνουμε μια $G \ge g$. Τότε, από την (7.2) και τις ιδιότητες της G που δίνει η Πρόταση 11 ($G^{-1}w \in A_{p_0}$), θεωρώντας $d\nu(x) = G(x)^{-1}w(x)dx$,

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^p_\mu}^{p_0} &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0}{p}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|Tf(x)|^{p_0}}{G(x)})^{\frac{p}{p_0}} G(x)^{\frac{p}{p_0}} d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0}{p}} \\ &\le \Big(\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \big(G(x)^{\frac{p}{p_0}}\big)^{\frac{p_0}{p_0-p}} d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0-p}{p_0}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} (\frac{|Tf(x)|^{p_0}}{G(x)})^{\frac{p}{p_0}\frac{p_0}{p}} d\mu(x)\Big)^{\frac{p}{p_0}}\Big)^{\frac{p_0}{p}} \\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n} G(x)^{\frac{p}{p_0-p}} d\mu(x)\Big)^{\frac{p_0-p}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|Tf(x)|^{p_0}}{G(x)} d\mu(x) \\ &= \|G\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p_0} G(x)^{-1} d\mu(x) \\ &\le c\|g\|_{L_\mu^{\frac{p}{p_0-p}}} \int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^{p_0} d\nu(x) = c1\|Tf\|_{L_\nu^{p_0}}^{p_0} \le c\|f\|_{L_\nu^{p_0}}^{p_0} \\ &= c\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p_0} G(x)^{-1} d\mu(x) \le c\int_{\{x\in\mathbb{R}^n | f(x)\neq 0\}} |f(x)|^{p_0} g(x)^{-1} d\mu(x) \\ &= c\|f\|_{L^p_\mu}^{p_0}, \end{aligned}$$

με τη σταθερά c να είναι ανεξάρτητη της f και ανεξάρτητη στον A_p.

□

Βιβλιογραφία

[1] Alberto Torchinsky, *Real-Variable Methods in Harmonic Analysis*, Academic Press, 1986.