Μαρία Ντεκουμέ

Ο μετασχηματισμός Fourier

Πτυχιακή εργασία

Εαρινό εξάμηνο 2013-2014

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Επιτροπή κρίσης:

Μιχάλης Κολουντζάκης

Θεμιστοκλής Μήτσης

Μιχάλης Παπαδημητράκης, επιβλέπων.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ο μετασχηματισμός Fourier στον L^1

1.1 Ορισμός του μετασχηματισμού Fourier.

Για κάθε $f \in L^1$, το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt$ υπάρχει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού

$$\Big| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt \Big| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixt}||f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty,$$

διότι $f \in L^1$.
Ορίζουμε το **μετασχηματισμό Fourier** $\hat{f}$ της $f \in L^1$:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Καθώς $|\hat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixt}||f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt = \|f\|_1$, βλέπουμε ότι η $\hat{f}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$ και

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1.$$

Επιπλέον, η $\hat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, γιατί:
Για κάθε $x, h \in \mathbb{R}$,

$$\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x+h)t} f(t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)(e^{iht} - 1)dt.$$

Οπότε,

$$|\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixt}||f(t)||e^{iht} - 1|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)||e^{iht} - 1|dt$$

Όμως

$$|e^{iht} - 1||f(t)| \leq \big(|e^{iht}| + 1\big)|f(t)| = 2|f(t)|$$

και

$$\lim_{h \to 0} |e^{iht} - 1||f(t)| = 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\lim_{h \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{iht} - 1||f(t)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \to 0} \big(|e^{iht} - 1||f(t)|\big)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} 0dt = 0.$$

Άρα

$$\lim_{h \to 0} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| = 0$$

συνεπώς

$$\lim_{h \to 0} \hat{f}(x+h) = \hat{f}(x),$$

δηλαδή η $\hat{f}$ είναι συνεχής στο x.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. *Αν $f_1, f_2, ... \in L^1$ και $\|f_n - f\|_1 \to 0$ όταν $n \to +\infty$, τότε*

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{f}_n(x) = \hat{f}(x) \quad \textit{ομοιόμορφα, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Όπως δείξαμε παραπάνω,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}_n(x) - \hat{f}(x)| \leq \|f_n - f\|_1 \quad \text{, για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Άρα

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}_n(x) - \hat{f}(x)| \to 0 \quad \text{όταν } n \to +\infty.$$

Οπότε

$$\lim_{n \to +\infty} \hat{f}_n(x) = \hat{f}(x) \quad \text{ομοιόμορφα, για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. *Έστω $f \in L^1$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Τότε ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t+a)$ είναι $\hat{f}(x)e^{-iax}$. Επίσης, ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{ibt}f(t)$ είναι $\hat{f}(x+b)$. Δηλαδή, κάθε μεταφορά του μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης του L^1 είναι πάλι μετασχηματισμός Fourier.*

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός Fourier της $f(t+a)$ είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t+a)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t-a)} f(t)dt \\ &= e^{-ixa} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt = e^{-iax}\hat{f}(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της $e^{ibt}f(t)$ είναι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{ibt} f(t)dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(x+b)} f(t)dt \\ &= \hat{f}(x+b) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\square$

1.2 Το Θεώρημα Riemann-Lebesgue.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. *(Riemann-Lebesgue) Αν $f \in L^1$, τότε*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt = 0.$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt. \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad -\hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{ixt} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\pi} e^{ixt} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t+\frac{\pi}{x})} f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t-\frac{\pi}{x})dt. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1.1), (1.2) έχουμε:

$$2\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\big(f(t) - f(t-\frac{\pi}{x})\big)dt.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} 2|\hat{f}(x)| &= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\big(f(t) - f(t-\frac{\pi}{x})\big)dt \Big| \\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{ixt}||f(t) - f(t-\frac{\pi}{x})|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t-\frac{\pi}{x})|dt. \end{aligned}$$

Όμως, αφού $f \in L^1$, γνωρίζουμε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - f(t-\frac{\pi}{x})|dt = 0$.
Άρα

$$\lim_{x\to\pm\infty} |\hat{f}(x)| = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x) = 0.$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 1. *Αν $f \in L^1$, τότε*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt dt = \lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos xt dt = 0.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3 (Riemann-Lebesgue), $\lim_{x\to\pm\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dt = 0$.
Συνεπώς:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{ixt} - e^{-ixt}}{2i}dt \\ &= \frac{1}{2i}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\Big) \\ &= \frac{1}{2i}\big(\hat{f}(x) - \hat{f}(-x)\big) \to 0 \quad \text{όταν } x \to \pm\infty. \end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos xt dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{e^{ixt} + e^{-ixt}}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}dt\Big) \\ &= \frac{1}{2}\big(\hat{f}(x) + \hat{f}(-x)\big) \to 0 \quad \text{όταν } x \to \pm\infty. \end{aligned}$$

□

Έχουμε αποδείξει λοιπόν ότι, για κάθε $f \in L^1$, η συνάρτηση $\hat{f}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x) = 0$. Είναι φυσικό τώρα να αναρωτηθούμε εάν κάθε συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες, δηλαδή κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και μηδενίζεται στο $\pm\infty$, είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης του L^1. Η απάντηση είναι όχι.

Για παράδειγμα:
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\log x}, & \text{αν } x > e \\ \frac{x}{e}, & \text{αν } 0 \le x \le e \\ -g(-x), & \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$:
Στα διαστήματα $(0, e)$ και $(e, +\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Στο $x = e$ έχουμε

$$\lim_{x\to e^+} g(x) = 1 = \lim_{x\to e^-} g(x) = g(e),$$

άρα η g είναι συνεχής στο e.
Στο $x = 0$ έχουμε

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -\lim_{x\to 0^-} g(-x) = -\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 = \lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0),$$

άρα η g είναι συνεχής στο 0.
Και αφού η g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$, η $-g(-x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$, άρα η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Η g μηδενίζεται στο $\pm\infty$, γιατί

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log x} = 0$$

και

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\lim_{x\to-\infty} g(-x) = -\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.$$

Ωστόσο, θα δείξουμε ότι η g δεν είναι μετασχηματισμός Fourier.

Μπορούμε να δούμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \int_e^N \frac{g(x)}{x} dx = \lim_{N\to+\infty} \int_e^N \frac{1}{x\log x} dx = \lim_{N\to+\infty} (\log\log N - \log\log e) = +\infty.$$

Τώρα ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $f \in L^1$ τέτοια ώστε $g = \hat{f}$. Τότε

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

και καθώς $g(x) = -g(-x)$, έχουμε επίσης

$$g(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1.3), (1.4) παίρνουμε

$$2g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\big(e^{ixt} - e^{-ixt}\big) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2i \sin xt dt.$$

Τότε

$$\begin{aligned}
g(x) &= i\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin xt dt = i\int_{-\infty}^{0} f(t)\sin xt dt + i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin xt dt\\
&= i\int_{0}^{+\infty} f(t)\sin xt dt - i\int_{0}^{+\infty} f(-t)\sin xt dt\\
&= i\int_{0}^{+\infty} \big(f(t)-f(-t)\big)\sin xt dt = \int_{0}^{+\infty} F(t)\sin xt dt, \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},\\
&\text{όπου } F(t) = i\big(f(t)-f(-t)\big) \quad \text{με } \int_{0}^{+\infty}|F(t)|dt \le 2\int_{0}^{+\infty}|f(t)|dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Για κάθε $N = 3, 4, 5, ...$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{e}^{N}\frac{g(x)}{x}dx &= \int_{e}^{N}\frac{1}{x}\Big(\int_{0}^{+\infty}F(t)\sin xt dt\Big)dx = \int_{e}^{N}\int_{0}^{+\infty}\frac{F(t)\sin xt}{x}dtdx\\
&= \int_{0}^{+\infty}\int_{e}^{N}\frac{F(t)\sin xt}{x}dxdt = \int_{0}^{+\infty}F(t)\int_{e}^{N}\frac{\sin xt}{x}dxdt\\
&= \int_{0}^{+\infty}F(t)\int_{et}^{Nt}\frac{\sin x}{x}dxdt.
\end{aligned}$$

Η αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης είναι δυνατή γιατί

$$\begin{aligned}
\int_{e}^{N}\int_{0}^{+\infty}\Big|\frac{F(t)\sin xt}{x}\Big|dtdx &\le \int_{e}^{N}\frac{1}{e}dx\int_{0}^{+\infty}|F(t)|dt\\
&= \frac{1}{e}(N-e)\int_{0}^{+\infty}|F(t)|dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ το $\left|\int_a^b \frac{\sin t}{t}dt\right|$ είναι φραγμένο.
Άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ υπάρχει το $\lim_{N\to+\infty}\int_{et}^{Nt}\frac{\sin x}{x}dx = l \in \mathbb{R}$.
Συνεπώς, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}F(t)\int_{et}^{Nt}\frac{\sin x}{x}dxdt &= \int_{0}^{+\infty}\lim_{N\to+\infty}\Big(F(t)\int_{et}^{Nt}\frac{\sin x}{x}dx\Big)dt\\
&= \int_{0}^{+\infty}F(t)l dt \le l\int_{0}^{+\infty}|F(t)|dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Άρα $\int_e^N \frac{g(x)}{x}dx < +\infty$. Καταλήξαμε λοιπόν σε άτοπο.
Συνεπώς, η g δεν είναι μετασχηματισμός Fourier.

1.3 Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier.

Ορίσαμε την $\hat{f}$ για $f \in L^1$. Τώρα το ερώτημα είναι: Αν ξέρουμε ότι μια συνάρτηση $\hat{f}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας $f \in L^1$, μπορούμε να προσδιορίσουμε ποια είναι αυτή η f από τις τιμές $\hat{f}(x)$ της $\hat{f}$; Η απάντηση είναι ναι, υπό κατάλληλες προϋποθέσεις.
Αν $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}f(t)dt$, τότε $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\hat{f}(x)dx$.
Ωστόσο, υπάρχουν μετασχηματισμοί Fourier $\hat{f}$ για τους οποίους το $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\hat{f}(x)dx$ δεν

υπάρχει σαν ολοκλήρωμα Lebesgue. Δηλαδή, $\hat{f} \notin L^1$.
Για παράδειγμα, αν

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t}, & \text{αν } t \geq 0 \\ 0, & \text{αν } t < 0 \end{cases},$$

τότε $\hat{f}(x) = \frac{1}{1-ix}$.
Προκειμένου να υπάρχει το ζητούμενο ολοκλήρωμα για ένα δοσμένο t, πρέπει να τεθούν κατάλληλες συνθήκες στην f κοντά στο t και πρέπει να δοθεί κατάλληλη ερμηνεία στο ολοκλήρωμα αυτό.

ΛΗΜΜΑ 1. *Έστω a συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[0,\delta]$ για κάποιο $\delta > 0$. Τότε*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt = \frac{1}{2} a(0+).$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης μπορεί να γραφεί σαν διαφορά δύο φραγμένων αυξουσών συναρτήσεων. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε το Λήμμα για συνάρτηση αύξουσα και φραγμένη στο $[0,\delta]$. Τότε, $a = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 αύξουσες και φραγμένες στο $[0,\delta]$, άρα

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta f_1(t) \frac{\sin Rt}{t} dt = \frac{1}{2} f_1(0+)$$

και

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta f_2(t) \frac{\sin Rt}{t} dt = \frac{1}{2} f_2(0+),$$

άρα

$$\begin{aligned} \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt &= \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \big(f_1(t) - f_2(t)\big) \frac{\sin Rt}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} f_1(0+) + \frac{1}{2} f_2(0+) = \frac{1}{2} a(0+). \end{aligned}$$

Περίπτωση 1: $a(0+) = 0$
Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει η τέτοιο ώστε $0 < \eta < \delta$ και $|a(t)| \leq \epsilon$ για κάθε $t \in (0,\eta)$. Από γνωστό Θεώρημα, υπάρχει $\xi \in [0,\eta]$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \int_0^\eta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt &= a(\eta-) \int_\xi^\eta \frac{\sin Rt}{t} dt + a(0+) \int_0^\xi \frac{\sin Rt}{t} dt \\ &= a(\eta-) \int_\xi^\eta \frac{\sin Rt}{t} dt + 0 \\ &= a(\eta-) \int_{R\xi}^{R\eta} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε A τέτοιο ώστε $\left| \int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq A$ για κάθε α, β. Οπότε,

$$\Big| \int_0^\eta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt \Big| \leq a(\eta-) A \leq \epsilon A.$$

Συνεπώς,

$$\Big| \int_0^\delta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt \Big| \leq \epsilon A + \Big| \int_\eta^\delta a(t) \frac{\sin Rt}{t} dt \Big|.$$

Η a είναι φραγμένη στο $[0,\delta]$, δηλαδή υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $|a(t)|\le M$ για κάθε $t\in[0,\delta]$.
Άρα
$$\Big|\frac{a(t)}{t}\Big| \le \frac{|a(t)|}{\eta} \le \frac{M}{\eta} \quad \text{για κάθε } t\in[\eta,\delta]$$
συνεπώς
$$\int_\eta^\delta \Big|\frac{a(t)}{t}\Big|dt \le \frac{M}{\eta}(\delta-\eta).$$
Η συνάρτηση $\frac{a(t)}{t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\eta,\delta]$, οπότε από το Πόρισμα 1,
$$\lim_{R\to+\infty}\int_\eta^\delta a(t)\frac{\sin Rt}{t}dt = 0.$$
Άρα,
$$\limsup_{R\to+\infty}\Big|\int_0^\delta a(t)\frac{\sin Rt}{t}dt\Big| \le \epsilon A.$$
Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, άρα
$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta a(t)\frac{\sin Rt}{t}dt = 0 = \frac{1}{2}a(0+).$$
Περίπτωση 2: $a(0+)\neq 0$
Θεωρούμε $b(t)=a(t)-a(0+)$.
Τότε $b(0+)=0$, άρα από την περίπτωση 1 θα έχουμε
$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\delta b(t)\frac{\sin Rt}{t}dt = 0.$$
Επίσης,
$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^\delta \frac{\sin Rt}{t}dt = \lim_{R\to+\infty}\int_0^{R\delta}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$
Οπότε:
$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta a(t)\frac{\sin Rt}{t}dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta \big(b(t)+a(0+)\big)\frac{\sin Rt}{t}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\delta b(t)\frac{\sin Rt}{t}dt + a(0+)\frac{1}{\pi}\int_0^\delta\frac{\sin Rt}{t}dt\\ &\to \frac{a(0+)}{2} \quad \text{όταν } R\to+\infty.\end{aligned}$$
Δηλαδή,
$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\delta a(t)\frac{\sin Rt}{t}dt = \frac{1}{2}a(0+).$$
□

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. *Αν $f\in L^1$ και η f είναι φραγμένης κύμανσης σε κάποια γειτονιά ενός σημείου u, τότε*
$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^R e^{-iux}\hat f(x)dx = \frac{1}{2}\big(f(u+)+f(u-)\big).$$

Απόδειξη. Για κάθε $R > 0$:

$$S_R(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{-iux}\hat{f}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} e^{-iux}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}f(t)dtdx.$$

Επειδή $f \in L^1$,

$$\int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-iux}||e^{ixt}||f(t)|dtdx = \int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dtdx = 2R\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty,$$

άρα μπορούμε να κάνουμε αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης και έχουμε:

$$\begin{aligned}
S_R(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-R}^{R} e^{-iux}e^{ixt}f(t)dxdt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\int_{-R}^{R} e^{-ix(u-t)}dxdt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)2\frac{\sin R(u-t)}{u-t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-t)\frac{\sin Rt}{t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{0} f(u-t)\frac{\sin Rt}{t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(u-t)\frac{\sin Rt}{t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{0}^{+\infty} f(u+t)\frac{\sin R(-t)}{-t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(u-t)\frac{\sin Rt}{t}dt\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{\sin Rt}{t}dt = I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{\sin Rt}{t}dt, \\
I_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{\sin Rt}{t}dt,
\end{aligned}$$

για $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η f να είναι φραγμένης κύμανσης στο $[u-\delta, u+\delta]$.
Από το Λήμμα 1,

$$\lim_{R\to+\infty} I_1 = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} \big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{\sin Rt}{t}dt = \frac{1}{2}\big(f(u+)+f(u-)\big).$$

Επίσης, η $\frac{f(u+t)+f(u-t)}{t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[\delta, +\infty]$, γιατί

$$\begin{aligned}
\int_{\delta}^{+\infty} \Big|\frac{f(u+t)+f(u-t)}{t}\Big|dt &\le \frac{1}{\delta}\Big(\int_{\delta}^{+\infty} |f(u+t)|dt + \int_{\delta}^{+\infty} |f(u-t)|dt\Big) \\
&< \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty.
\end{aligned}$$

Άρα, από το Πόρισμα 1, έχουμε

$$\lim_{R\to+\infty} I_2 = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{1}{t}\sin Rtdt = 0.$$

Οπότε,

$$\lim_{R\to\infty} S_R(u) = \lim_{R\to+\infty} I_1 + \lim_{R\to+\infty} I_2 = \frac{1}{2}\big(f(u+)+f(u-)\big).$$

□

Είναι προφανές ότι αν $f \in L^1$ και η f είναι φραγμένης κύμανσης σε μια γειτονιά ενός σημείου u και η f είναι συνεχής στο u, τότε

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} e^{-iux} \hat{f}(x) dx.$$

Βρήκαμε, λοιπόν, κάποιες συνθήκες ώστε να ισχύει ότι

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \hat{f}(x) dx.$$

1.4 Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier με χρήση (C,1) αθροισιμότητας.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Έστω συνάρτηση a ολοκληρώσιμη στο $[-R, R]$ για κάθε $R > 0$. Το $\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx$ λέμε ότι είναι (C,1) αθροίσιμο στην τιμή A αν*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big) a(x) dx = A.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. *Αν $a \in L^1$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx = A$, τότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx$ είναι (C,1) αθροίσιμο στο A.*

Απόδειξη. Για κάθε $R > 0$ θεωρούμε

$$a_R(x) = \begin{cases} \Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big) a(x), & \text{αν } |x| \leq R \\ 0, & \text{αν } |x| > R \end{cases}$$

Τότε $|a_R(x)| \leq |a(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{R \to +\infty} a_R(x) = a(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού $a \in L^1$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} \Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big) a(x) dx &= \lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} a_R(x) dx = \lim_{R \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} a_R(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{R \to +\infty} a_R(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x) dx = A. \end{aligned}$$

Οπότε το $\int_{-\infty}^{+\infty} a(x)dx$ είναι (C,1) αθροίσιμο στο A. □

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο Lebesgue της f είναι το σύνολο των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{0}^{h} \big|f(x+t) - f(x)\big| dt = 0.$$

Αν η f είναι συνεχής στο x, τότε το x προφανώς ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. *Αν $f \in L^1$ και το u ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f, τότε*

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{R} \Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big) e^{-iux} \hat{f}(x) dx = f(u).$$

Απόδειξη. Για κάθε $R > 0$, για κάθε $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} S_R(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-iux}\hat{f}(x)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-iux}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}f(t)dtdx. \end{aligned}$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|1-\frac{|x|}{R}\Big||e^{-iux}||e^{ixt}||f(t)|dtdx &\le \int_{-R}^{R}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dtdx \\ &= 2R\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt < +\infty, \end{aligned}$$

μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, οπότε:

$$\begin{aligned} S_R(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-iux}e^{ixt}f(t)dxdt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-ix(u-t)}dxdt. \end{aligned}$$

Για $t \neq u$:

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-ix(u-t)}dx = \\ &= \int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)\cos x(u-t)dx - i\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)\sin x(u-t)dx \\ &= 2\int_{0}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)\cos x(u-t)dx + 0 \\ &= 2\int_{0}^{R}\frac{1}{R}\frac{\sin x(u-t)}{u-t}dx = -\frac{2}{R(u-t)^2}\big(\cos R(u-t)-1\big) \\ &= 2\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} S_R(u) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u-t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}f(u-t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(u-t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(u+t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}f(u-t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\big(f(u+t)+f(u-t)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt = \int_{0}^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Οπότε,

$$S_R(u) - f(u) = \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{+\infty} \big(f(u+t) + f(u-t)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt - \frac{\pi}{2}2f(u)\Big)$$
$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_0^{+\infty} \big(f(u+t) + f(u-t)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt - 2f(u)\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt\Big)$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \big(f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt = I_1 + I_2,$$

όπου

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta} \big(f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt$$

και

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_\delta^{+\infty} \big(f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt$$

με $\delta > 0$ που θα προσδιορίσουμε σε λίγο.
Θεωρούμε

$$\phi(t) = \big|f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big|$$
$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(y)dy.$$

Για $\frac{1}{R} < \delta$:

$$|\pi I_1| = \Big|\int_0^{\delta} \big(f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt\Big|$$
$$\leq \int_0^{\delta} \big|f(u+t) + f(u-t) - 2f(u)\big|\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \tag{1.5}$$
$$= \int_0^{\delta} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt = I_1' + I_1'',$$

όπου

$$I_1' = \int_0^{\frac{1}{R}} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt$$
$$I_1'' = \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt.$$

Το u είναι στο σύνολο Lebesgue της f, άρα $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \big|f(u+t)-f(u)\big|dt = 0$. Συνεπώς:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^h \big|f(u-t) - f(u)\big|dt = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^{-h}\big|f(u+t) - f(u)\big|dt = 0.$$

Άρα

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t \big|f(u+y) + f(u-y) - 2f(u)\big|dy = 0.$$

Έστω $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $t \in [0,\delta]$ να ισχύει ότι $\Phi(t) \leq \epsilon t$.
Αυτό είναι λοιπόν το δ που θα επιλέξουμε.
Επειδή $1 - \cos\theta \leq \frac{\theta^2}{2}$ για κάθε θ, έχουμε ότι:

$$I_1' = \int_0^{\frac{1}{R}} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \leq \frac{R}{2}\int_0^{\frac{1}{R}}\phi(t)dt = \frac{R}{2}\Phi\big(\frac{1}{R}\big) \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.6}$$

Επίσης, επειδή $1-\cos\theta \le 2$ για κάθε θ και επειδή από το Θεώρημα Lebesgue η Φ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού με $\Phi'(t)=\phi(t)$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
I_1'' &= \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \le \int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \phi(t)\frac{2}{Rt^2}dt = 2\int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \Phi'(t)\frac{1}{Rt^2}dt \\
&= \frac{2\Phi(\delta)}{R\delta^2} - 2R\Phi\Big(\frac{1}{R}\Big) + 4\int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \Phi(t)\frac{1}{Rt^3}dt \\
&\le \frac{2\Phi(\delta)}{R\delta^2} + 4\int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \Phi(t)\frac{1}{Rt^3}dt \le \frac{2\epsilon}{R\delta} + 4\int_{\frac{1}{R}}^{\delta} \epsilon\frac{1}{Rt^2}dt \\
&= \frac{2\epsilon}{R\delta} + \frac{4\epsilon}{R}\big(R-\frac{1}{\delta}\big) = \frac{2\epsilon}{R\delta} - \frac{4\epsilon}{R\delta} + 4\epsilon \le \frac{2\epsilon}{R\delta} + 4\epsilon \le 6\epsilon.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Από τις (1.5), (1.6), (1.7), βλέπουμε ότι

$$|\pi I_1| \le I_1' + I_1'' \le \frac{\epsilon}{2} + 6\epsilon = 13\frac{\epsilon}{2}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \Big|\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \big(f(u+t)+f(u-t)-2f(u)\big)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt\Big| \\
&\le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \big|f(u+t)+f(u-t)-2f(u)\big|\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \phi(t)\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}dt \le \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{+\infty} \phi(t)\frac{2}{Rt^2}dt = \frac{2}{\pi R}\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^2}dt
\end{aligned}$$

και επειδή

$$\int_{\delta}^{+\infty} \frac{\phi(t)}{t^2}dt = \int_{\delta}^{+\infty} \frac{\big|f(u+t)+f(u-t)-2f(u)\big|}{t^2}dt \le \frac{1}{\delta^2}4\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty,$$

έχουμε ότι $\lim_{R\to+\infty}|I_2| = 0$. Συνεπώς

$$\big|S_R(u)-f(u)\big| = |I_1+I_2| \le |I_1| + |I_2|$$

άρα

$$\limsup_{R\to+\infty}\big|S_R(u)-f(u)\big| \le \limsup_{R\to+\infty}|I_1| + \limsup_{R\to+\infty}|I_2| \le \frac{13\epsilon}{2\pi}$$

που σημαίνει ότι

$$\limsup_{R\to+\infty}\big|S_R(u)-f(u)\big| = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{R\to+\infty} S_R(u) = f(u).$$

Άρα

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\Big(1-\frac{|x|}{R}\Big)e^{-iux}\hat{f}(x)dx = f(u).$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 2. *Αν $f, \hat{f} \in L^1$ και η f είναι συνεχής στο u, τότε*

$$f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\hat{f}(x)dx.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6, η $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\hat{f}(x)dx$ είναι (C,1) αθροίσιμη στο $f(u)$. Όμως, αφού $\hat{f} \in L^1$, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|e^{-iux}\hat{f}(x)\right|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|dx < +\infty,$$

δηλαδή $e^{-iux}\hat{f}(x) \in L^1$. Συνεπώς, από το Θεώρημα 5, $f(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\hat{f}(x)dx$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 3. *Αν $f \in L^1$ και αν $\hat{f}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε*

$$f(t) = 0 \qquad \text{για σχεδόν κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Αφού $f \in L^1$, σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{R}$ ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f. Άρα, από το Θεώρημα 6, για σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big)e^{-itx}\hat{f}(x)dx = 0.$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 4. *Αν $f, g \in L^1$ και αν $\hat{f}(x) = \hat{g}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε*

$$f(t) = g(t) \qquad \text{για σχεδόν κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f - g$ είναι $\hat{f} - \hat{g}$, που είναι ταυτοτικά 0. Άρα, από το Πόρισμα 3, $f(t) = g(t)$ για σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-R, R]$ για κάθε $R > 0$ και αν $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt < +\infty$, τότε*

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1 - \cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = f(u) \qquad \text{για σχεδόν κάθε } \ u \in \mathbb{R}.$$

Πιο ειδικά, αυτό ισχύει αν η $f \in L^1$ ή αν η f είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|dt < +\infty$, δηλαδή ότι $f \in L^1$.
Από το Θεώρημα 6,

$$f(u) = \lim_{R\to+\infty} S_R(u) \qquad \text{για σχεδόν κάθε } u \in \mathbb{R},$$

όπου $S_R(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\Big(1 - \frac{|x|}{R}\Big)e^{-iux}\hat{f}(x)dx$. Όμως, όπως δείξαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6,

$$S_R(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1 - \cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt,$$

άρα

$$f(u) = \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1 - \cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt \qquad \text{για σχεδόν κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε μόνο ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2}dt < +\infty$.
Για κάθε $s > 0$ θεωρούμε

$$f_s(t) = \begin{cases} f(t), & \text{αν } |t| \le s \\ 0, & \text{αν} |t| > s \end{cases}$$

Τότε

$$|f_s(t)| \leq \frac{1+s^2}{1+t^2}|f(t)| \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_s(t)|dt \leq (1+s^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} < +\infty,$$

δηλαδή $f_s \in L^1$.
Οπότε, από την περίπτωση 1,

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_s(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = f_s(u) \quad \text{για σχεδόν κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-s}^{s} f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = f(u) \quad \text{για σχεδόν κάθε } u \in [-s,s].$$

Για $|u| < s$:

$$\Big|\int_{|t|\geq s} f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt\Big| \leq \frac{2}{R}\int_{|t|\geq s} \frac{|f(t)|}{(u-t)^2}dt$$

και

$$\int_{|t|\geq s} \frac{|f(t)|}{(u-t)^2}dt < +\infty$$

γιατί υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{(u-t)^2} \leq c\frac{1}{1+t^2}$.
Άρα, για $|u| < s$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{|t|\geq s} f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = 0.$$

Οπότε,

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = f(u)+0 = f(u) \qquad \text{για σχεδόν κάθε } |u| < s.$$

Αυτό ισχύει για κάθε $s > 0$, άρα

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1-\cos R(u-t)}{R(u-t)^2}dt = f(u) \qquad \text{για σχεδόν κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

□

1.5 Συνέλιξη.

ΛΗΜΜΑ 2. *Αν $f, g \in L^1$, τότε το ολοκλήρωμα*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

υπάρχει για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση του x.

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty,$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)g(t)|dxdt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|dxdt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dxdt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.\end{aligned}$$

Συνεπώς, το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dxdt$ συγκλίνει απόλυτα, άρα από το Θεώρημα Fubini το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$ υπάρχει για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση του x. □

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $f, g \in L^1$ και αν*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \quad \textit{όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα},$$

λέμε ότι η h είναι η **συνέλιξη** *των f, g. Συμβολίζουμε $h = f * g$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. *(i)Για κάθε $f, g \in L^1$, $f * g = g * f$.*
(ii)Για κάθε $f, g, k \in L^1$, $(f * g) * k = f * (g * k)$.

Απόδειξη. (i)

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(x-s)ds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-s)f(s)ds = (g*f)(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\big((f*g)*k\big)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f*g)(x-t)k(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t-s)g(s)dsk(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s-t)dsk(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)g(s-t)k(t)dtds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)\int_{-\infty}^{+\infty} g(s-t)k(t)dtds \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-s)(g*k)(s)ds = \big(f*(g*k)\big)(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. *Αν $f, g \in L^1$, τότε*

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Απόδειξη.

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt = (f*g)(x)$$

$$\begin{aligned}
\|h\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt \Big| dx \\
&\le \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)||g(t)|dtdx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)||g(t)|dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-t)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \\
&= \|f\|_1 \|g\|_1.
\end{aligned}$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 10. *Έστω $f, g \in L^1$ και $h = f * g$. Τότε*

$$\widehat{f*g} = \hat{h} = \hat{f}\hat{g}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} h(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)dudt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t-u)g(u)dtdu = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t-u)dtdu \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t+u)} f(t)dtdu = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{ixu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)dtdu \\
&= \hat{g}(x)\hat{f}(x).
\end{aligned}$$

□

1.6 Κάποιες σημαντικές ειδικές συναρτήσεις.

Δεν υπάρχει $d \in L^1$ τέτοια ώστε $d * f = f$ για κάθε $f \in L^1$. Και αυτό γιατί: Αν υπήρχε, τότε θα ίσχυε $d * d = d$. Όμως τότε $\big(\hat{d}(x)\big)^2 = \hat{d}(x)$. Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει είτε $\hat{d}(x) = 0$ είτε $\hat{d}(x) = 1$. Επειδή η $\hat{d}$ είναι συνεχής, αναγκαστικά θα έχουμε είτε $\hat{d} \equiv 0$ είτε $\hat{d} \equiv 1$. Αφού $\lim_{x\to\pm\infty} \hat{d}(x) = 0$, αναγκαστικά $\hat{d}(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, από το Πόρισμα 3, $d(t) = 0$ για σχεδόν κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τότε δε γίνεται να ισχύει $d * f$ για κάθε $f \in L^1$, αφού για κάθε f που δεν είναι σχεδόν παντού μηδέν δεν γίνεται να ισχύει.
Ωστόσο, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία $\delta_1, \delta_2, ...$ στον L^1 τέτοια ώστε $\lim_{N\to+\infty} \|\delta_N * f - f\|_1 = 0$ για κάθε $f \in L^1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1-|t|, & \text{αν } |t| \le 1 \\ 0, & \text{αν } |t| > 1 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos t}{t^2}, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta(t)|dt = \int_{-1}^{1}(1-|t|)dt = 2-2\int_{0}^{1} tdt = 1 < +\infty.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta(t)|dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2(\sin\frac{t}{2})^2}{4\left(\frac{t}{2}\right)^2}dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sin t)^2}{t^2}dt = \frac{1}{2} < +\infty.$$

Άρα $\Delta, \delta \in L^1$.

$$\hat{\Delta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\Delta(t)dt = 2\int_{0}^{+\infty} \Delta(t)\cos xtdt = 2\int_{0}^{1}(1-t)\cos xtdt$$
$$= 2\int_{0}^{1}\frac{\sin xt}{x}dt = -2\frac{\cos x}{x^2} + 2\frac{1}{x^2} = \frac{2(1-\cos x)}{x^2}$$
$$= 2\pi\delta(x).$$

Αφού $\delta, \Delta \in L^1$ και η Δ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, από το Πόρισμα 2 έχουμε ότι

$$\Delta(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\hat{\Delta}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iux}\delta(x)dx.$$

Επειδή $\Delta(u) = \Delta(-u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι

$$\Delta(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\delta(x)dx,$$

άρα $\Delta = \hat{\delta}$.
Για κάθε $R > 0$:

$$\Delta\big(\frac{x}{R}\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\frac{t}{R}}\delta(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} Re^{ixt}\delta(Rt)dt.$$

Οπότε αν θεωρήσουμε

$$\Delta_R(x) = \Delta\big(\frac{x}{R}\big),$$
$$\delta_R(x) = R\delta(Rt),$$

έχουμε $\Delta_R = \hat{\delta}_R$.
Για $x = 0$ παίρνουμε

$$1 = \Delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} R\delta(Rt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_R(t)dt = \|\delta_R\|_1.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. *Για κάθε $R > 0$:*

$$\delta_R(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos Rt}{Rt^2}, \quad \textit{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

$$\Delta_R(x) = \begin{cases} 1-\frac{|x|}{R}, & \textit{αν } |x| \leq R \\ 0, & \textit{αν } |x| > R \end{cases}.$$

Τότε $\|\delta_R\|_1 = 1$ και $\Delta_R = \hat{\delta}_R$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12. *Έστω* $f \in L^1$ *και* $\delta_N(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1-\cos Nt}{Nt^2}$ *για κάθε* $N \in \mathbb{N}$. *Τότε*

$$\lim_{N\to+\infty} \|\delta_N * f - f\|_1 = 0.$$

Απόδειξη. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$:

$$(\delta_N * f)(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(u-t)f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1-\cos N(u-t)}{N(u-t)^2}dt.$$

Επειδή $f \in L^1$, από το Θεώρημα 7,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\frac{1-\cos N(u-t)}{N(u-t)^2}dt = f(u) \quad \text{για σχεδόν κάθε } u \in \mathbb{R},$$

δηλαδή $\lim_{N\to+\infty}(\delta_N * f)(u) = f(u)$ σχεδόν παντού.
Από το Λήμμα Fatou,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \le \liminf_{N\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |(\delta_N * f)(x)|dx,$$

άρα

$$\|f\|_1 \le \liminf_{N\to+\infty} \|\delta_n * f\|_1.$$

Από το Θεώρημα 11, $\|\delta_N\|_1 = 1$.
Από το Θεώρημα 9, $\|\delta_N * f\|_1 \le \|\delta_N\|_1\|f\|_1 = \|f\|_1$. Άρα, $\limsup_{N\to+\infty} \|\delta_N * f\|_1 \le \|f\|_1$. Οπότε,

$$\lim_{N\to+\infty} \|\delta_N * f\|_1 = \|f\|_1.$$

Αφού, λοιπόν, $\lim_{N\to+\infty}(\delta_N * f)(u) = f(u)$ σχεδόν παντού και $\limsup_{N\to+\infty} \|\delta_N * f\|_1 \le \|f\|_1$, έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty} \|\delta_N * f - f\|_1 = 0.$$

□

Σχόλιο. Από το Θεώρημα 10, ο μετασχηματισμός Fourier της $\delta_N * f$ είναι $\hat{\delta}_N \hat{f} = \Delta_N \hat{f}$, το οποίο μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-N, N]$. Άρα το Θεώρημα 12 μας δείχνει ότι: Κάθε $f \in L^1$ μπορεί να πλησιαστεί όσο θέλουμε κοντά στην L^1 νόρμα από μια συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier μηδενίζεται έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα. Όπως δείξαμε πριν, δεν υπάρχει συνάρτηση στον L^1 της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier να είναι ταυτοτικά ίσος με τη μονάδα στο $\mathbb{R}$. Θα δείξουμε όμως τώρα ότι για κάθε φραγμένο διάστημα $[a, b]$ υπάρχει συνάρτηση στον L^1 της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier είναι ταυτοτικά 1 στο $[a, b]$ και ταυτοτικά 0 έξω από ένα λίγο μεγαλύτερο διάστημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13. *Δεδομένων πραγματικών αριθμών* $a < b, h > 0$, *υπάρχει* $\omega \in L^1$ *τέτοια ώστε*

$$\hat{\omega}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } a \le x \le b \\ 0, & \text{αν } x \le a-h \text{ ή } x \ge b+h \end{cases}$$

και $\hat{\omega}$ *γραμμική στα* $[a-h, a]$ *και* $[b, b+h]$.

Απόδειξη. Παίρνουμε $c = \frac{b-a}{2}$. Από το Θεώρημα 11, για κάθε $R > 0$ η Δ_R είναι μετασχηματισμός Fourier. Άρα η συνάρτηση

$$\frac{1}{h}\big((c+h)\Delta_{c+h} - c\Delta_c\big)(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } -c \leq x \leq c \\ 0, & \text{αν } x \leq -c-h \text{ ή } x \geq c+h \\ c+h+x, & \text{αν } -c-h < x < -c \\ c+h-x, & \text{αν } c < x < c+h \end{cases}$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης $\omega_1 \in L^1$. Δηλαδή,

$$\hat{\omega}_1(x) = \frac{1}{h}\big((c+h)\Delta_{c+h}(x) - c\Delta_c(x)\big) = \begin{cases} 1, & \text{αν } -c \leq x \leq c \\ 0, & \text{αν } x \leq -c-h \text{ ή } x \geq c+h \end{cases}$$

και $\hat{\omega}_1$ γραμμική στα $[-c-h, -c]$ και $[c, c+h]$.
Τώρα παίρνουμε τη συνάρτηση $\omega(t) = e^{-\frac{1}{2}(a+b)it}\omega_1(t)$.
Από το Θεώρημα 2, $\hat{\omega}(x) = \hat{\omega}_1\big(x - \frac{a+b}{2}\big)$. Άρα:

$$\hat{\omega}(x) = 1, \qquad \text{για } a \leq x \leq b,$$

$$\hat{\omega}(x) = 0, \qquad \text{για } x \leq a-h \text{ ή } x \geq b+h,$$

και $\hat{\omega}$ γραμμική για $a - h \leq x \leq a$ και $b \leq x \leq b+h$. □

Μια χρήσιμη εφαρμογή αυτού του Θεωρήματος είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14. *Αν $f \in L^1$, $\hat{f}(0) = 0$ και $\epsilon > 0$, τότε υπάρχει $h \in L^1$ με τις εξής ιδιότητες:*
(i) $\|h\|_1 < \epsilon$
(ii) $\hat{h}(x) = \hat{f}(x)$ *για κάθε x σε μια γειτονιά του* 0
(iii) $\hat{h}(x) = 0$ *για κάθε x τέτοιο ώστε* $\hat{f}(x) = 0$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 13, παίρνοντας $a = -1, b = 1$, μπορούμε να βρούμε $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε $\hat{\omega}(x) = 1$ για $|x| \leq 1$.
Για κάθε $R > 0$: $\omega_R(t) = R\omega(Rt)$. Τότε

$$\hat{\omega}_R(x) = \hat{\omega}\big(\frac{x}{R}\big) = 1 \quad \text{για } |x| \leq R.$$

Επειδή $\hat{f}(0) = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \hat{f}(0) = 0$.

$$\begin{aligned}(\omega_R * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_R(x-t)f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_R(x-t)f(t)dt - 0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_R(x-t)f(t)dt - \omega_R(x)\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\omega_R(x-t) - \omega_R(x)\big)f(t)dt.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\|\omega_R * f\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |(\omega_R * f)(x)|dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big|\omega_R(x-t) - \omega_R(x)\big||f(t)|dtdx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \big|\omega_R(x-t) - \omega_R(x)\big||f(t)|dxdt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|R\omega(Rx-Rt) - R\omega(Rx)\big|dxdt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|\omega(x-Rt) - \omega(x)\big|dxdt.\end{aligned}$$

Η αλλαγή σειράς ολοκλήρωσης που κάναμε είναι δυνατή, γιατί

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} & \big|\omega_R(x-t)-\omega_R(x)\big||f(t)|dtdx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega_R(x-t)||f(t)|dt+\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega_R(x)||f(t)|dt\Big)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\big(|\omega_R|*|f|\big)(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt\int_{-\infty}^{+\infty}|\omega_R(x)|dx \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dx &\leq \int_{-\infty}^{+\infty}\big(|\omega(x-Rt)|+|\omega(x)|\big)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)\big|dx+\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x)\big|dx \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x)\big|dx = 2\|\omega\|_1.
\end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\lim_{R\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dx = 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dx \leq 2|f(t)|\|\omega\|_1$$

με

$$\int_{-\infty}^{+\infty}2|f(t)|\|\omega\|_1 dt = 2\|\omega\|_1\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < +\infty$$

και

$$\lim_{R\to 0}|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dx = 0.$$

Άρα, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης,

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)| & \int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dxdt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{R\to 0}|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dxdt \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για το ϵ που έχουμε, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για $|R| < \delta$ να ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\int_{-\infty}^{+\infty}\big|\omega(x-Rt)-\omega(x)\big|dxdt < \epsilon.$$

Επιλέγοντας $0 < R < \delta$, έχουμε $\|\omega_R * f\|_1 < \epsilon$.
Για αυτό το R λοιπόν παίρνουμε $h = \omega_R * f$. Τότε $\|h\|_1 < \epsilon$.
Από το Θεώρημα 10, $\hat{h} = \hat{\omega}_R\hat{f}$, οπότε για $|x| \leq R$: $\hat{h}(x) = \hat{f}(x)$ και αν $\hat{f}(x) = 0$, τότε $\hat{h}(x) = 0$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 15. *Υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\hat{g}(x) > 0 \qquad \text{για } x > 0$$

$$\hat{g}(x) = 0 \qquad \text{για } x \leq 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{(1+it)^2}, \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

$$G(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{αν } x > 0 \\ 0, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |G(x)|dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 < +\infty.$$

Άρα $G \in L^1$.

$$\begin{aligned}
\hat{G}(-x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}G(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-ixt}te^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-t(1+ix)}tdt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}t}{(1+ix)^2}dt \\
&= \frac{1}{(1+ix)^2}\int_0^{+\infty} e^{-t}tdt = \frac{1}{(1+ix)^2} = 2\pi g(x).
\end{aligned}$$

Άρα $\hat{G}(x) = 2\pi g(-x)$.
Όπως δείξαμε, $G \in L^1$. Επίσης, $\hat{G} \in L^1$, γιατί

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{G}(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{1}{(1+ix)^2}|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+ix)^2}dx = \pi < +\infty.$$

Η G είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Άρα, από το Πόρισμα 2,

$$G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\hat{G}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}g(-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}g(x)dx = \hat{g}(t).$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 5. *Για κάθε διάστημα της μορφής $(\infty, a]$ ή $[a, +\infty)$ υπάρχει ένας μετασχηματισμός Fourier ο οποίος μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, αλλά δεν μηδενίζεται έξω από το διάστημα.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2, η $\hat{g}(x-a)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας $h \in L^1$. Αυτό μηδενίζεται στο $(-\infty, a]$, αλλά όχι έξω από αυτό.
Ο μετασχηματισμός Fourier της $h(-t)$ είναι $\hat{h}(-x) = \hat{g}(a-x)$, το οποίο μηδενίζεται στο $[a, +\infty)$, αλλά όχι έξω από αυτό. □

1.7 Αναλυτικές Συναρτήσεις Μετασχηματισμών Fourier.

Στο σημείο αυτό αναρωτιόμαστε: Για ποιες συναρτήσεις ϕ αληθεύει ότι αν $\hat{f}$ είναι ένας μετασχηματισμός Fourier, τότε και η $\phi(\hat{f})$ είναι μετασχηματισμός Fourier; Δηλαδή, για ποιες ϕ ισχύει ότι

$$\text{για κάθε } f \in L^1 \text{ υπάρχει } g \in L^1 \text{ τέτοια ώστε } \phi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{g}(x);$$

Η συνάρτηση $\phi(z) = z^2$ έχει αυτή την ιδιότητα, γιατί $\phi(\hat{f}) = \hat{f}^2 = \widehat{f * f}$. Όμοια, $\hat{f}^3 = \widehat{f * f * f}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $\hat{f}^n$ είναι μετασχηματισμός Fourier. Οπότε, αν

$$P(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n, \qquad a_i \in \mathbb{C} \text{ για } i = 1, 2, ..., n$$

τότε η P πηγαίνει μετασχηματισμούς Fourier σε μετασχηματισμούς Fourier.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. *Αν η $\phi(z)$ είναι αναλυτική για $|z| < \epsilon$, όπου $\epsilon > 0$, αν $\phi(0) = 0$ και αν η $h \in L^1$ είναι τέτοια ώστε $\|h\|_1 < \epsilon$, τότε η $\phi(\hat{h})$ είναι μετασχηματισμός Fourier. Δηλαδή, υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε $\phi\big(\hat{h}(x)\big) = \hat{g}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Λόγω υπόθεσης, μπορούμε να γράψουμε τη ϕ ως

$$\phi(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k z^k.$$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < \epsilon$. Επίσης, $|\hat{h}(x)| \leq \|h\|_1 < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\phi\big(\hat{h}(x)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \big(\hat{h}(x)\big)^k \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Παίρνουμε $h_1 = h$ και $h_k = h_{k-1} * h$ για $k = 2, 3, ...$ (Δηλαδή, $h_k = h * h * ... * h$, για $k \in \mathbb{N}$.)
Από το Θεώρημα 9, $\|h_k\|_1 \leq \|h\|_1^k$.
Από το Θεώρημα 10, $\hat{h}_k(x) = \big(\hat{h}(x)\big)^k$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Τώρα, για $n \geq m$, έχουμε:

$$\|\sum_{k=m}^{n} a_k h_k\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} \|a_k h_k\|_1 = \sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h_k\|_1 \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h\|_1^k.$$

Αφού $\|h\|_1 < \epsilon$, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \|h\|_1^k$ συγκλίνει. Συνεπώς,

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \|h\|_1^k \to 0 \qquad \text{όταν } m, n \to +\infty.$$

Άρα

$$\|\sum_{k=1}^{n} a_k h_k - \sum_{k=1}^{m} a_k h_k\|_1 = \|\sum_{k=m}^{n} a_k h_k\|_1 \to 0 \qquad \text{όταν } m, n \to +\infty,$$

δηλαδή η ακολουθία $\big(\sum_{k=1}^n a_k h_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy. Συνεπώς, λόγω της πληρότητας του L^1, υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} \| \sum_{k=1}^{n} a_k h_k - g\|_1 = 0.$$

Οπότε, από το Θεώρημα 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \hat{h}_k(x) = \hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα:

$$\hat{g}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \hat{h}_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \big(\hat{h}(x)\big)^k = \phi\big(\hat{h}(x)\big) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δηλαδή $\phi(\hat{h}) = \hat{g}$. □

ΠΟΡΙΣΜΑ 6. *Αν $\phi(0) = 0$ και αν η ϕ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, τότε η ϕ απεικονίζει μετασχηματισμούς Fourier σε μετασχηματισμούς Fourier.*

Τώρα θα δούμε ένα σημαντικό αποτέλεσμα που οφείλεται στους Helson και Kahane.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17. *Υποθέτουμε ότι $\psi(0) = 0$ και ότι η ψ ορίζεται στο $[-1, 1]$. Αν $\psi(\hat{f})$ είναι μετασχηματισμός Fourier όποτε η $\hat{f}$ είναι μετασχηματισμός Fourier του οποίου το εύρος περιέχεται στο $[-1, 1]$, τότε η ψ συμπίπτει στο $[-1, 1]$ με μια συνάρτηση αναλυτική σε κάθε σημείο μιας περιοχής που περιέχεται στο $[-1, 1]$.*

Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος είναι πέρα από τους σκοπούς μας.

Για λόγους απλότητας, μεταχειριστήκαμε την ερώτηση ”ποιες συναρτήσεις απεικονίζουν μετασχηματισμούς Fourier σε μετασχηματισμούς Fourier” με στοιχειώδη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων. Θα μπορούσαμε να θέσουμε και άλλες συνθήκες, που θα ήταν πιο κοντά στο ικανό και αναγκαίο, δεν θα ήταν όμως χρήσιμο στη συνέχεια.

Στο Θεώρημα 16 και στο Πόρισμα 6, η υπόθεση $\phi(0) = 0$ είναι ουσιώδης. Αν

$$Q(z) = a_0 + P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n \qquad \text{με } a_0 \neq 0,$$

τότε για καμία $f \in L^1$ δεν είναι η $Q(\hat{f})$ μετασχηματισμός Fourier. Όπως δείξαμε στην αρχή της ενότητας, η $P(\hat{f})$ είναι μετασχηματισμός Fourier, άρα από το Θεώρημα 3

$$\lim_{x\to\pm\infty} P\big(\hat{f}(x)\big) = 0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to\pm\infty} Q\big(\hat{f}(x)\big) = a_0 + \lim_{x\to\pm\infty} P\big(\hat{f}(x)\big) = a_0 \neq 0.$$

Η $Q(\hat{f})$ δεν μηδενίζεται στο $\pm\infty$, άρα δεν μπορει να είναι μετασχηματισμός Fourier. Ωστόσο, στο Θεώρημα 13 δείξαμε ότι για δεδομένο διάστημα $[a, b]$ πεπερασμένου μήκους, υπάρχει $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε $\hat{\omega}(x) = 1$ για κάθε $x \in [a, b]$. Οπότε, αν η Q είναι της μορφής που είπαμε παραπάνω, τότε για κάθε $f \in L^1$ η $Q(\hat{f})$ συμπίπτει στο $[a,b]$ με κάποιο μετασχηματισμό Fourier. Πράγματι,

$$Q\big(\hat{f}(x)\big) = a_0\hat{\omega}(x) + P\big(\hat{f}(x)\big) \quad \text{για κάθε } x \in [a,b]$$

δηλαδή στο $[a,b]$ η $Q(\hat{f})$ συμπίπτει με το μετασχηματισμό Fourier $a_0\hat{\omega} + P(\hat{f})$.

Μπορούμε επίσης να ρωτήσουμε το εξής: "Έστω $[a,b]$ διάστημα πεπερασμένου μήκους. Ποιες συναρτήσεις ϕ έχουν την ιδιότητα η $\phi(\hat{f})$ να συμπίπτει στο $[a,b]$ με έναν μετασχηματισμό Fourier όποτε η $\hat{f}$ είναι μετασχηματισμός Fourier;" Όπως δείξαμε, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση έχει αυτή την ιδιότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18. *Έστω $\phi(z)$ αναλυτική σε κάθε σημείο ενός ανοικτού συνεκτικού συνόλου D του μιγαδικού επιπέδου. Έστω $[a,b]$ κλειστό φραγμένο διάστημα. Τότε, αν $f \in L^1$ και $\hat{f}(x) \in D$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in [a,b].$$

Δηλαδή, στο $[a,b]$ η $\phi(\hat{f})$ συμπίπτει με ένα μετασχηματισμό Fourier.)

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα αυτό θα αναφέρουμε ένα τοπικό αποτέλεσμα, θα δειξουμε ότι για να το αποδείξουμε αρκεί να αποδείξουμε μια ειδική περίπτωση, θα αποδείξουμε την ειδική περίπτωση και τέλος με ένα επιχείρημα συμπάγειας θα οδηγηθούμε από το τοπικό αποτέλεσμα στο Θεώρημα που θέλουμε να αποδείξουμε.

ΘΕΩΡΗΜΑ 19. *Αν $f \in L^1$, $\hat{f}(a) = b$ και $\phi(z)$ αναλυτική στο b, τότε υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ σε κάποια γειτονιά του } a.$$

Σχόλιο. Αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 19 για την περίπτωση $a = 0$.
Ας υποθέσουμε ότι η περίπτωση αυτή έχει αποδειχθεί και ότι $a \neq 0$. Από το Θεώρημα 2, αν $f_1(t) = e^{iat}f(t)$, τότε

$$\hat{f}_1(x) = \hat{f}(x+a).$$

Ειδικότερα, $\hat{f}_1(0) = \hat{f}(a) = b$. Η περίπτωση $a = 0$ συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιας $g_1 \in L^1$ τέτοιας ώστε $\phi\big(\hat{f}_1(x)\big) = \hat{g}_1(x)$ για κάθε x σε κάποια γειτονιά N_0 του 0.
Θέτοντας $g(t) = e^{-iat}g_1(t)$, έχουμε $\hat{g}(x) = \hat{g}_1(x-a) = \phi\big(\hat{f}_1(x-a)\big) = \phi\big(\hat{f}(x)\big)$ για κάθε x σε κάποια γειτονιά N_a του a.
Άρα το Θεώρημα 19 ισχύει και αν $a \neq 0$. Άρα θα ασχοληθούμε μόνο με την απόδειξη της περίπτωσης $a = 0$.

Σχόλιο. Αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 19 για την περίπτωση $b = 0$.
Ας υποθέσουμε ότι η περίπτωση αυτή έχει αποδειχθεί και ότι $b \neq 0$. Έστω $\hat{f}_1(x) = \hat{f}(x) - b\hat{\omega}(x)$, όπου η ω είναι συνάρτηση τέτοια ώστε $\hat{\omega}(x) = 1$ για $|x| \leq 1$. (Την ύπαρξη τέτοιας συνάρτησης την αποδείξαμε στο Θεώρημα 13.) Επίσης έστω $\psi(z) = \phi(z+b)$.
Αφού $\hat{f}_1(0) = \hat{f}(0) - b\hat{\omega}(0) = b - b = 0$ και η $\psi(z)$ είναι αναλυτική στο 0, η περίπτωση $b = 0$ συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιας $g \in L^1$ τέτοιας ώστε $\psi\big(\hat{f}_1(x)\big) = \hat{g}(x)$ για κάθε x σε κάποια γειτονιά N_0 του 0.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N_0 \subset [-1,1]$. Τότε , για $x \in N_0$ έχουμε

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \psi\big(\hat{f}(x) - b\big) = \psi\big(\hat{f}(x) - b\hat{\omega}(x)\big) = \psi\big(\hat{f}_1(x)\big) = \hat{g}(x).$$

Άρα το Θεώρημα 19 ισχύει και αν $b \neq 0$. Άρα θα ασχοληθούμε μόνο με την απόδειξη της περίπτωσης $b = 0$.

Σχόλιο. Αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 19 για την περίπτωση $\phi(0) = 0$.
Ας υποθέσουμε ότι η περίπτωση αυτή έχει αποδειχθεί και ότι $\phi(0) \neq 0$. Έστω $\psi(z) = \phi(z) - \phi(0)$. Αφού $\psi(0) = 0$, η περίπτωση $\phi(0) = 0$ συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιας $g_1 \in L^1$ τέτοιας ώστε $\psi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{g}_1(x)$ για κάθε x σε κάποια γειτονιά N_0 του 0.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το N_0 είναι φραγμένο. Οπότε, από το Θεώρημα 13, υπάρχει $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε $\hat{\omega}(x) = 1$ για κάθε $x \in N_0$.
Θέτοντας $\hat{g} = \hat{g}_1 + \phi(0)\hat{\omega}$, έχουμε για κάθε $x \in N_0$:

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \psi\big(\hat{f}(x)\big) + \phi(0) = \psi\big(\hat{f}(x)\big) + \phi(0)\hat{\omega}(x) = \hat{g}_1(x) + \phi(0)\hat{\omega}(x) = \hat{g}(x).$$

Έτσι, το Θεώρημα 19 ισχύει και αν $\phi(0) \neq 0$. Άρα θα ασχοληθούμε μόνο με την απόδειξη της περίπτωσης $\phi(0) = 0$.

Συνεπώς, η απόδειξη του Θεωρήματος 19 ανάγεται στην απόδειξη του ακόλουθου Θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 20. *Αν $f \in L^1$, $\hat{f}(0) = 0$, $\phi(0) = 0$ και η $\phi(z)$ είναι αναλυτική στο 0, τότε υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{g}(x) \quad \textit{για κάθε } x \textit{ σε κάποια γειτονιά του } 0.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση, υπάρχει $\epsilon > 0$ τέτοιο ώστε η ϕ να είναι αναλυτική για $|z| < \epsilon$. Από το Θεώρημα 14, μπορούμε να βρούμε $h \in L^1$ τέτοια ώστε $\|h\|_1 < \epsilon$ και $\hat{f}(x) = \hat{h}(x)$ για κάθε x σε κάποια γειτονιά N_0 του 0.
Καθώς $\|h\|_1 < \epsilon$, το Θεώρημα 16 συνεπάγεται την ύπαρξη κάποιας $g \in L^1$ τέτοιας ώστε $\phi\big(\hat{h}(x)\big) = \hat{g}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Έτσι, για $x \in N_0$ έχουμε:

$$\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \phi\big(\hat{h}(x)\big) = \hat{g}(x).$$

□

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 18.

Απόδειξη. (Θεώρημα 18)
Από το Θεώρημα 19, κάθε $x \in [a, b]$ περιέχεται σε ένα ανοιχτό διάστημα όπου η $\phi(\hat{f})$ συμπίπτει με κάποιο μετασχηματισμό Fourier. Σύμφωνα με το θεώρημα Heine-Borel, ένας πεπερασμένος αριθμός από αυτά τα διαστήματα καλύπτει το $[a, b]$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κανένα από αυτά τα διαστήματα δεν περιέχει κάποιο άλλο. Τώρα έστω (a_1, b_1), (a_2, b_2) δύο από αυτά τα διαστήματα τα οποία έχουν κοινό σημείο. Υποθέτουμε ότι $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$. Επιλέγουμε $g_1, g_2 \in L^1$ τέτοιες ώστε

$$\phi\big(\hat{h}(x)\big) = \hat{g}_1(x) \quad \text{αν } a_1 < x < b_1$$

$$\phi\big(\hat{h}(x)\big) = \hat{g}_2(x) \quad \text{αν } a_2 < x < b_2.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $\hat{g}_1(x) = \hat{g}_2(x)$ για $x \in (a_2, b_1)$ και ως εκ τούτου για $x \in [a_2, b_1]$.
Από το Θεώρημα 13, μπορούμε να βρούμε $\omega_1, \omega_2 \in L^1$ τέτοιες ώστε

$$\hat{\omega}_1(x) = 1 \quad \text{αν } a_1 \leq x \leq a_2$$

$$\hat{\omega}_1(x) = 0 \quad \text{αν } b_1 \leq x \leq b_2$$

$$\hat{\omega}_2(x) = 1 \quad \text{αν } b_1 \le x \le b_2$$

$$\hat{\omega}_2(x) = 0 \quad \text{αν } a_1 \le x \le a_2$$

και $\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2$ γραμμικές στο $[a_2, b_1]$. Έστω τώρα $\hat{\theta} = \hat{\omega}_1 \hat{g}_1 + \hat{\omega}_2 \hat{g}_2$. Τότε
Αν $x \in (a_1, a_2)$, έχουμε

$$\hat{\theta}(x) = \hat{\omega}_1(x)\hat{g}_1(x) + \hat{\omega}_2(x)\hat{g}_2(x) = \hat{\omega}_1(x)\hat{g}_1(x) + 0 = \hat{g}_1(x) = \phi\big(\hat{f}(x)\big).$$

Αν $x \in (a_2, b_1)$, έχουμε

$$\hat{\theta}(x) = \hat{\omega}_1(x)\hat{g}_1(x) + \hat{\omega}_2(x)\hat{g}_2(x) = \big(\hat{\omega}_1(x) + \hat{\omega}_2(x)\big)\hat{g}_1(x) = \hat{g}_1(x) = \phi\big(\hat{f}(x)\big).$$

Αν $x \in (b_1, b_2)$, έχουμε

$$\hat{\theta}(x) = \hat{\omega}_1(x)\hat{g}_1(x) + \hat{\omega}_2(x)\hat{g}_2(x) = \hat{\omega}_2(x)\hat{g}_2(x) + 0 = \hat{g}_2(x) = \phi\big(\hat{f}(x)\big).$$

Άρα, $\phi\big(\hat{f}(x)\big) = \hat{\theta}(x)$ για $a_1 < x < b_2$.
Δηλαδή, η $\phi(\hat{f})$ συμπίπτει με ένα μετασχηματισμό Fourier στο (a_1, b_2). Επαναλαμβάνοντας αυτό το επιχείρημα ένα πεπερασμένο πλήθος φορών (τόσο ώστε να φτάσουμε στην ένωση όλων των διαστημάτων που επιλέξαμε που καλύπτουν το $[a, b]$) ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Σχόλιο. Η μόνη ιδιότητα του $[a, b]$ που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος 18 ήταν το γεγονός ότι από κάθε κάλυψη του $[a, b]$ από ανοικτά διαστήματα μπορούμε να εξάγουμε ένα πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων που ακόμα αποτελούν κάλυψη. Έτσι, το Θεώρημα 18 συνεχίζει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το $[a, b]$ από οποιοδήποτε σύνολο πραγματικών αριθμών με αυτή την ιδιότητα, δηλαδή οποιοδήποτε συμπαγές σύνολο.

Αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 18 για κάποιο συμπαγές σύνολο και για $\phi(z) = \frac{1}{z}$, παίρνουμε το ακόλουθο Πόρισμα που θα χρησιμοποιήσουμε πολλές φορές στη συνέχεια.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7. *Έστω K συμπαγές σύνολο πραγματικών αριθμών. Αν $f \in L^1$ και $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in K$, τότε υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{\hat{f}(x)} = \hat{g}(x) \qquad \text{για κάθε } x \in K.$$

1.8 Κλειστότητα των μεταφορών στον L^1.

Πρώτος ο Wiener έδειξε μια σχέση ανάμεσα στο σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των μεταφορών μιας συνάρτησης $f \in L^1$ και του μετασχηματισμού Fourier της f. Το αρχικό του αποτέλεσμα είχε πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα, κάποια από τα οποία θα αναλύσουμε στο Κεφάλαιο 3. Σε αυτή την ενότητα θα δώσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος του Wiener.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $E \subset L^1$, τότε με $\bar{E}$ θα συμβολίζουμε την κλειστότητα του E στον L^1. Δηλαδή, αν $f \in L^1$, τότε $f \in \bar{E}$ αν, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $g \in E$ τέτοια ώστε $\|f - g\|_1 \le \epsilon$. Αν $E = \bar{E}$ λέμε ότι το E είναι* **κλειστό**.

Έτσι,

$$f \in \bar{E} \quad \text{αν και μόνο αν υπάρχουν } f_1, f_2, ... \in E \quad \text{τέτοιες ώστε} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_1 = 0.$$

Προφανώς, $E \subset \bar{E}$ και $\bar{\bar{E}} = \bar{E}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $f \in L^1$, τότε με T_f θα συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $h \in L^1$ τέτοιων ώστε η h να είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός μεταφορών της f. Δηλαδή,*

$$h \in T_f \quad \textit{αν} \quad h(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x + c_k) \quad \textit{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, $c_k \in \mathbb{R}$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$, $a_k \in \mathbb{C}$ για κάθε $k = 1, 2, ..., n$.

Έτσι, αν $f \in L^1$, το υποσύνολο $\bar{T}_f$ του L^1 ορίζεται από τους δύο παραπάνω ορισμούς.

Η ερώτηση που θα μας απασχολήσει είναι: Για ποιες $f \in L^1$ ο $\bar{T}_f$ αποτελεί όλο τον L^1; Θα χρησιμοποιήσουμε τα ακόλουθα:
(i) Αν $g_1, g_2 \in \bar{T}_f$, τότε $(a_1 g_1 + a_2 g_2) \in \bar{T}_f$ γα κάθε $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$.
(ii) Αν $g \in \bar{T}_f$ και αν, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$, $g_1(x) = g(x + c)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $g_1 \in \bar{T}_f$.
(iii) Αν $g \in \bar{T}_f$, τότε $\bar{T}_g \subset \bar{T}_f$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21. *(Wiener) Αν $f \in L^1$ και $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{T}_f = L^1$.*

Θα δώσουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος Wiener στο τέλος της ενότητας.

Σημείωση. Μπορούμε να δούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $f \in L^1$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν μηδενίζεται. Πράγματι, αν $f(t) = e^{-t^2}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, τότε

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} e^{-t^2} dt = e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = e^{-\frac{x^2}{4}} \sqrt{\pi}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, που δεν είναι ποτέ 0.

Πριν ξεκινήσουμε να αποδείξουμε το Θεώρημα Wiener, θα αποδείξουμε ένα θεώρημα από το οποίο εύκολα προκύπτει το αντίστροφο του Θεωρήματος Wiener.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22. *Αν $f \in L^1$ και $\hat{f}(\lambda) = 0$, τότε $\hat{g}(\lambda) = 0$ για κάθε $g \in \bar{T}_f$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι $h \in T_f$, δηλαδή ότι $h(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(t + c_k)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Τότε, από το Θεώρημα 2, ο μετασχηματισμός Fourier της h είναι

$$\hat{h}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{ic_k x} \hat{f}(x).$$

Οπότε, αν $h \in T_f$, έχουμε $\hat{h}(\lambda) = 0$.
Τώρα, αν $g \in \bar{T}_f$, τότε υπάρχει ακολουθία $g_1, g_2, ...$ στον T_f τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} \|g - g_n\|_1 = 0.$$

Από το Θεώρημα 1, $\hat{g}(\lambda) = \lim_{n\to+\infty} \hat{g}_n(\lambda)$. Όμως, αφού $g_n \in T_f$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι $\hat{g}_n(\lambda) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\hat{g}(\lambda) = 0$. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 23. *(Αντίστροφο του Θεωρήματος Wiener) Αν $f \in L^1$ και αν $\bar{T}_f = L^1$, τότε $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\hat{f}(\lambda) = 0$.
Από το Θεώρημα 13, υπάρχει $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε $\hat{\omega}(\lambda) = 1$.
Όμως τότε, από το Θεώρημα 22, δεν γίνεται να ισχύει ότι $\omega \in \bar{T}_f$. Αυτό είναι άτοπο, καθώς $T_f = L^1$.
Άρα $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. □

Πριν αποδείξουμε το Θεώρημα Wiener χρειαζόμαστε κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24. *Έστω $f \in L^1$. Αν $g \in \bar{T}_f$ και $h \in L^1$, τότε $g * h \in \bar{T}_f$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ούτε η g ούτε η h είναι η μηδενική συνάρτηση. Έστω $H = g * h$, έτσι ώστε

$$H(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)h(t)dt \qquad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δεδομένου $\epsilon > 0$, επιλέγουμε N τέτοιο ώστε

$$\int_{|t| \geq N} |h(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2\|g\|_1}$$

και παίρνουμε

$$H_N(x) = \int_{-N}^{N} g(x-t)h(t)dt \qquad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τότε

$$H(x) - H_N(x) = \int_{|t| \geq N} g(x-t)h(t)dt \qquad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\|H - H_N\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H(x) - H_N(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \int_{|t| \geq N} g(x-t)h(t)dt \Big| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{|t| \geq N} |g(x-t)||h(t)|dtdx = \int_{|t| \geq N} \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)||h(t)|dxdt \\
&= \int_{|t| \geq N} |h(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-t)|dxdt = \int_{|t| \geq N} |h(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|dxdt \\
&= \int_{|t| \geq N} |h(t)|\|g\|_1 dt = \|g\|_1 \int_{|t| \geq N} |h(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Άρα $\|H - H_N\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Επίσης, ξέρουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\text{αν } |y| \leq \delta \quad \text{τότε} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x-y) - g(x)|dx \leq \frac{\epsilon}{2\|h\|_1}.$$

Επιλέγουμε διαμέριση του $[-N, N]$

$$-N = t_0 < t_1 < ... < t_n = N \qquad \text{τέτοια ώστε } t_k - t_{k-1} \leq \delta \text{ για κάθε } k = 1, 2, ..., n.$$

Τότε έχουμε

$$H_N(x) = \int_{-N}^{N} g(x-t)h(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} g(x-t)h(t)dt.$$

Παίρνουμε

$$h_N(x) = \sum_{k=1}^{n} g(x-t_k) \int_{t_{k-1}}^{t_k} h(t)dt.$$

Τότε προφανώς $h_N \in T_g$. Επιπλέον,

$$H_N(x) - h_N(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(g(x-t) - g(x-t_k)\big)h(t)dt.$$

Οπότε

$$\begin{aligned}
\|H_N - h_N\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big(g(x-t) - g(x-t_k)\big)h(t)dt \Big| dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|g(x-t) - g(x-t_k)\big||h(t)|dtdx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \big|g(x-t) - g(x-t_k)\big||h(t)|dtdx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x-t) - g(x-t_k)\big||h(t)|dxdt \\
&= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |h(t)| \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x-t) - g(x-t_k)\big|dxdt.
\end{aligned}$$

Αν $t_{k-1} \leq t \leq t_k$, τότε $|t - t_k| \leq \delta$, άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x-t) - g(x-t_k)\big|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \big|g(x-t+t_k) - g(x)\big|dx \leq \frac{\epsilon}{2\|h\|_1}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\|H_N - h_N\|_1 &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |h(t)| \frac{\epsilon}{2\|h\|_1} dt = \frac{\epsilon}{2\|h\|_1} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |h(t)|dt \\
&= \frac{\epsilon}{2\|h\|_1} \int_{-N}^{N} |h(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2\|h\|_1} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή $\|H_N - h_N\|_1 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Οπότε

$$\|H - h_N\|_1 \leq \|H - H_N\|_1 + \|H_N - h_N\|_1 \leq \epsilon.$$

Καθώς το ϵ ήταν τυχαίο και $h_N \in T_g$, έχουμε ότι $H \in \bar{T}_g$.
Όμως, από υπόθεση, $g \in \bar{T}_f$, άρα $\bar{T}_g \subset \bar{T}_f$.
Άρα $H \in \bar{T}_f$. $\square$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι, αν $f \in L^1$, τότε η $\bar{T}_f$ θα περιέχει όλο τον L^1 εάν η $\bar{T}_f$ περιέχει την ακολουθία δ_N όπως ορίστηκε στην ενότητα 1.6.

ΘΕΩΡΗΜΑ 25. *Αν $f \in L^1$ και αν $\delta_N \in \bar{T}_f$ για κάθε $N = 1, 2, ...$, τότε $\bar{T}_f = L^1$.*

Απόδειξη. Για κάθε $h \in L^1$, λόγω του Θεωρήματος 24,

$$\delta_N * h \in \bar{T}_f \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Όμως, από το Θεώρημα 12,

$$\lim_{N \to +\infty} \|\delta_N * h - h\|_1 = 0.$$

Άρα $h \in \overline{\bar{T}}_f = \bar{T}_f$.
Οπότε $L^1 \subset \bar{T}_f$, άρα $L^1 = \bar{T}_f$. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 26. *Αν $f \in L^1$ και αν $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\delta_N \in \bar{T}_f$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $N \in \mathbb{N}$. Λόγω της υπόθεσης, η $\hat{f}$ δεν μηδενίζεται στο $[-N, N]$.
Από το Πόρισμα 7, υπάρχει $g \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\hat{f}(x)} = \hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in [-N, N].$$

Επίσης, από το Θεώρημα 11 ξέρουμε ότι $\Delta_N = \hat{\delta}_N$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Οπότε

$$\frac{\Delta_N(x)}{\hat{f}(x)} = \Delta_N(x)\hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα

$$\Delta_N(x) = \hat{f}(x)\Delta_N(x)\hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Από το Θεώρημα 10, η $\hat{f}\Delta_N\hat{g}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f * \delta_N * g$.
Λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Fourier,

$$\delta_N = f * \delta_N * g.$$

Η $f \in \bar{T}_f$ και $\delta_N * g \in L^1$, άρα από το Θεώρημα 24 $\delta_N \in \bar{T}_f$. □

Τώρα είναι αρκετά εύκολο να αποδείξουμε το Θεώρημα Wiener.

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 21)

Αν $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε από το Θεώρημα 26 ξέρουμε ότι $\delta_N \in \bar{T}_f$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.
Άρα, από το Θεώρημα 25, $\bar{T}_f = L^1$. □

1.9 Αλγεβρική αναδιατύπωση

Η έννοια μιας μεταθετικής άλγβρας Banach είναι θεμελιώδης για μεγάλο κομμάτι της σύγχρονης αρμονικής ανάλυσης. Σε αυτή την ενότητα θα αναδιατυπώσουμε κάποια από τα προηγούμενα αποτελέσματα με όρους ιδεωδών σε μια μεταθετική άλγεβρα Banach.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν στη μεταθετική άλγεβρα A υπάρχει ορισμένη νόρμα $\|.\|$ τέτοια ώστε*
(i)$\|\bar{0}\| = 0$*, όπου* $\bar{0}$ *το μηδενικό στοιχείο της* A*,*
(ii)$\|a\| > 0$*, αν* $a \in A, a \neq \bar{0}$*,*
(iii)$\|\lambda a\| = |\lambda|\|a\|$*, αν* $a \in A, \lambda \in \mathbb{C}$*,*
(iv)$\|a \dotplus b\| \leq \|a\| + \|b\|$*, αν* $a, b \in A$*,* $\dotplus$ *η πρόσθεση στην* A*,*
(v)$\|a * b\| \leq \|a\|\|b\|$*, αν* $a, b \in A$*,* $*$ *ο πολλαπλασιασμός στην* A*,*
τότε η A *ονομάζεται* **μεταθετική άλγεβρα με νόρμα**.
Αν επιπλέον η A *είναι πλήρης ως προς τη νόρμα, δηλαδή αν για κάθε ακολουθία* $a_1, a_2, \ldots$ *στην* A *με* $\lim_{m,n\to+\infty} \|a_m - a_n\| = 0$ *υπάρχει* $a \in A$ *τέτοιο ώστε* $\lim_{n\to+\infty} \|a_n - a\| = 0$*, τότε η* A *ονομάζεται* **μεταθετική άλγεβρα Banach**.

Θεωρούμε τώρα το χώρο L^1. Τότε, με πρόσθεση τη γνωστή μας πρόσθεση συναρτήσεων και πολλαπλασιασμό τη συνέλιξη συναρτήσεων, ο L^1 είναι μεταθετική άλγεβρα. Επιπλέον, βασιζόμενοι σε όσα έχουμε ήδη δει, μπορούμε να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 27. *Ο* L^1 *(με νόρμα την* $\|.\|_1$ *και πολλαπλασιασμό τη συνέλιξη) είναι μεταθετική άλγεβρα Banach.*

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν η* A *είναι μεταθετική άλγεβρα και* $I \subset A$*, λέμε ότι το* I *είναι* **ιδεώδες** *του* A *αν*
(i)το I *είναι άλγεβρα ως προς τις πράξεις του* A*, και*
(ii)$g * h \in I$ *γαι κάθε* $g \in I, h \in A$*.*
Τα $A, \bar{0}$ *είναι ιδεώδη του* A*. Κάθε άλλο ιδεώδες του* A*, εκτός των* $A, \bar{0}$*, λέγεται* **γνήσιο**.
Ένα γνήσιο ιδεώδες M *του* A *λέγεται* **μεγιστικό** *αν το* M *δεν περιέχεται σε κανένα γνήσιο ιδεώδες του* A *εκτός από το ίδιο το* M*.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 28. *Αν* I *ιδεώδες του* L^1*, τότε η κλειστότητα του* I *(*$\bar{I}$*) είναι επίσης ιδεώδες του* L^1*.*

Απόδειξη. Αρχικά, πρέπει να δείξουμε ότι η $\bar{I}$ είναι μεταθετική άλγεβρα. Έστω $f, g \in \bar{I}$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε υπάρχει ακολουθία $f_1, f_2, \ldots$ στο I τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ και ακολουθία $g_1, g_2, \ldots$ στο I τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$. Αφού το I είναι ιδεώδες, έχουμε ότι $\lambda f_n + \mu g_n \in I$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης,

$$\|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_1 \leq |\lambda|\|f_n - f\|_1 + |\mu|\|g_n - g\|_1 \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N},$$

άρα $\lim_{n\to+\infty} \|(\lambda f_n + \mu g_n) - (\lambda f + \mu g)\|_1 = 0$. Συνεπώς, $\lambda f + \mu g \in \bar{I}$.
Οι υπόλοιπες ιδιότητες μιας μεταθετικής άλγεβρας ισχύουν διότι $\bar{I} \subset L^1$. Άρα η $\bar{I}$ είναι μεταθετική άλγεβρα.
Έστω τώρα $g \in \bar{I}, h \in L^1$.
Τότε υπάρχει ακολουθία $g_1, g_2, \ldots$ στην I τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$. Οπότε,

$$\|g_n * h - g * h\|_1 = \|(g_n - g) * h\|_1 \leq \|g_n - g\|_1\|h\|_1.$$

Αφού $\|h\|_1 < +\infty$, καθώς $h \in L^1$, και $\lim_{n\to+\infty} \|g_n - g\|_1 = 0$, όπως είδαμε προηγουμένως, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{n\to+\infty} \|g_n * h - g * h\|_1 = 0$. Επίσης, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

ότι $g_n \in I, h \in L^1$, άρα $g_n * h \in I$, γιατί το I είναι ιδεώδες. Συνεπώς, $g * h \in \bar{I}$.
Άρα το $\bar{I}$ είναι ιδεώδες του L^1. $\square$

ΘΕΩΡΗΜΑ 29. *Αν το M είναι μεγιστικό ιδεώδες του L^1, τότε είτε το M είναι κλειστό είτε $\bar{M} = L^1$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 28, αφού το M είναι ιδεώδες, και το $\bar{M}$ είναι ιδεώδες. Επίσης $M \subseteq \bar{M}$.
Αν $M = \bar{M}$, τότε το M είναι κλειστό.
Αν $M \subsetneq \bar{M}$, το γεγονός ότι το M είναι μεγιστικό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $\bar{M}$ δεν είναι γνήσιο ιδώδες, δηλαδή $\bar{M} = L^1$.
Οπότε, το M είναι κλειστό ή $\bar{M} = L^1$. $\square$

Τώρα θα δείξουμε ότι τα υποσύνολα $\bar{T}_f$ στα οποία αναφερθήκαμε στην προηγούμενη ενότητα είναι ιδεώδη στην άλγεβρα L^1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30. *Αν $f \in L^1$, τότε το $\bar{T}_f$ είναι κλειστό ιδεώδες στον L^1.*

Απόδειξη. Καθώς $\bar{\bar{T}}_f = \bar{T}_f$, προφανώς το $\bar{T}_f$ είναι κλειστό.
Αν $g \in \bar{T}_f, h \in L^1$, τότε, από το Θεώρημα 24, έχουμε ότι $g * h \in \bar{T}_f$. Όλες οι υπόλοιπες ιδιότητες ενός ιδεώδους είναι αποδεδειγμέν ήδη ότι ισχύουν για το $\bar{T}_f$, άρα είναι ένα κλειστό ιδεώδες στον L^1. $\square$

Δείξαμε, λοιπόν, ότι κάθε σύνολο $\bar{T}_f$ είναι κλειστό ιδεώδες στον L^1. Αυτό που δεν έχουμε δείξει ακόμα είναι αν κάθε κλειστό ιδεώδες στον L^1 είναι της μορφής $\bar{T}_f$ για κάπια $f \in L^1$. Έχοντας δείξει ότι το $\bar{T}_f$ είναι κλειστό ιδεώδες που περιέχει την f, τώρα θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε ότι είναι το μικρότερο με αυτή την ιδιότητα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 31. *Αν $f \in L^1$ και I οποιοδήποτε κλειστό ιδεώδες του L^1 που περιέχει την f, τότε $\bar{T}_f \subset I$.*

Απόδειξη. Έστω $g(x) = f(x+a)$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πρώτα θα δείξουμε ότι $g \in I$.
Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ παίρνουμε $\delta_N^a(x) = \delta_N(x+a)$, όπου δ_N όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 11. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
(\delta_N^a * f)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N^a(x-t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(x+a-t) f(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(x-t) f(t+a) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(x-t) g(t) dt \\
&= (\delta_N * g)(x)
\end{aligned}
$$

άρα $\delta_N^a * f = \delta_N * g$.
Αφού $f \in I, \delta_N^a \in L^1$ και το I είναι ιδεώδες, $\delta_N^a * f \in I$, άρα και $\delta_N * g \in I$. Όπως είχαμε αποδείξει στο Θεώρημα 12, $\delta_N * g \to g$ όταν $N \to +\infty$, άρα $g \in \bar{I}$. Το γεγονός ότι το I είναι κλειστό μας δείχνει ότι τελικά $g \in I$. Έτσι συμπεραίνουμε ότι κάθε μεταφορά της f είναι στο I, άρα $T_f \subset I$. Λόγω του ότι το I είναι κλειστό, έχουμε ότι $\bar{T}_f \subset I$. $\square$

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε τον ακόλουθο ενδιαφέροντα χαρακτηρισμό για τα κλειστά ιδεώδη στον L^1.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το $J \subset L^1$ λέγεται* **γραμμικός υπόχωρος** *του L^1 αν για κάθε $f, g \in L^1$, $af + bg \in J$ για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 32. *Έστω $I \subset L^1$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*
(1)Το I είναι κλειστό ιδεώδες του L^1.
(2)Το I είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του L^1 με την ιδιότητα ότι αν $f \in I$, τότε κάθε μεταφορά της F είναι επίσης στο I.

Απόδειξη. (1) $\Longrightarrow$ (2):
Το συμπέρασμα αυτό συνάγεται άμεσα από το Θεώρημα 31.
(2) $\Longrightarrow$ (1):
Υποθέτουμε ότι το (2) αληθεύει και παίρνουμε $g \in I, h \in L^1$. Τότε, $T_g \subset I$. Καθώς το I είναι κλειστό, $\bar{T}_g \subset I$. Από το Θεώρημα 30, το $\bar{T}_g$ είναι ιδεώδες, άρα $g * h \in \bar{T}_g$. Συνεπώς $g * h \in I$. Άρα το I είναι ιδεώδες του L^1. □

Τώρα θα ξεκινήσουμε να προσδιορίσουμε τι είναι τα κλειστά μεγιστικά ιδεώδη στον L^1.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε με M_λ το σύνολο όλων των $f \in L^1$ για τις οποίες $\hat{f}(\lambda) = 0$.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 33. *Κάθε M_λ είναι κλειστό μεγιστικό ιδεώδες του L^1.*

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι το M_λ είναι κλειστό.
Έστω $f \in \bar{M}_\lambda$.
Τότε υπάρχει ακολουθία $f_1, f_2, ...$ στον M_λ τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$. Τότε, όπως δείξαμε στο Θεώρημα 1, $\lim_{n\to+\infty} \hat{f}_n(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$. Αφού $f_n \in M_\lambda$, έχουμε ότι $\hat{f}_n(\lambda) = 0$, άρα $\hat{f}(\lambda) = 0$. Οπότε $f \in M_\lambda$. Ως εκ τούτου, $\bar{M}_\lambda \subset M_\lambda$, άρα το M_λ είναι κλειστό.

Τώρα θα δείξουμε ότι το M_λ είναι ιδεώδες του L^1.
Έστω $g \in M_\lambda, h \in L^1$. Τότε

$$\widehat{(g * h)}(\lambda) = \hat{g}(\lambda)\hat{h}(\lambda) = 0\hat{h}(\lambda) = 0$$

άρα $g * h \in M_\lambda$.
Το ότι το M_λ είναι άλγεβρα ως προς τις πράξεις του L^1 αποδεικνύεται εύκολα. Συνεπώς το M_λ είναι ιδεώδες στον L^1.

Τέλος, θα δείξουμε ότι το M_λ είναι μεγιστικό ιδεώδες.
Έστω M ιδεώδες του L^1 τέτοιο ώστε $M \supset M_\lambda, M \neq M_\lambda$. Θα αποδείξουμε ότι $M = L^1$.
Καθώς $M \neq M_\lambda$, υπάρχει $g \in M$ τέτοια ώστε $\hat{g}(\lambda) \neq 0$.
Για κάθε $h \in L^1$, μπορούμε να γράψουμε

$$\hat{h}(x) = \frac{\hat{h}(\lambda)}{\hat{g}(\lambda)}\hat{g}(x) + \hat{h}_1(x)$$

με $\hat{h}_1(\lambda) = \hat{h}(\lambda) - \frac{\hat{h}(\lambda)}{\hat{g}(\lambda)}\hat{g}(\lambda) = 0$.
Άρα $h_1 \in M_\lambda$, οπότε και $h_1 \in M$. Αφού $g \in M$, συμπεραίνουμε ότι $h \in M$.
Συνεπώς, $L^1 = M$. Οπότε το M_λ είναι μεγιστικό ιδεώδες. □

Αυτό που δείξαμε, λοιπόν, είναι ότι σε κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί ένα κλειστό μεγιστικό ιδεώδες M_λ. Θα δούμε τώρα ότι αν $\lambda_1 \neq \lambda_2$, τότε $M_{\lambda_1} \neq M_{\lambda_2}$.

Αν έχουμε $\lambda_1 \neq \lambda_2$, μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $\omega \in L^1$ με $\omega \in M_{\lambda_1}$ και $\omega \notin M_{\lambda_2}$.
Ας θεωρήσουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_2$. Τότε, από το Θεώρημα 13, υπάρχει $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\hat{\omega}(x) = 0 \quad \text{αν } x < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

και

$$\hat{\omega}(x) = 1 \quad \text{αν } \lambda_2 \leq x \leq \lambda_2 + 1.$$

Άρα:

$$\hat{\omega}(\lambda_1) = 0, \quad \text{συνεπώς } \omega \in M_{\lambda_1}$$
$$\hat{\omega}(\lambda_2) = 1, \quad \text{συνεπώς } \omega \notin M_{\lambda_2}.$$

Άρα $M_{\lambda_1} \neq M_{\lambda_2}$.

Τα επόμενα δύο Θεωρήματα μας δείχνουν ότι τα M_λ είναι όλα τα κλειστά μεγιστικά ιδεώδη του L^1.

ΘΕΩΡΗΜΑ 34. *Αν το I είναι ένα γνήσιο κλειστό ιδεώδες του L^1, τότε $I \subset M_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το I δεν περιέχεται σε κανένα M_λ. Θα δείξουμε ότι τότε $I = L^1$, δηλαδή δεν είναι γνήσιο ιδεώδες, το οποίο θα είναι άτοπο.
Έστω $N \in \mathbb{N}$. Αφού το I δεν περιέχεται σε κανένα M_λ, για κάθε $\lambda \in [-N, N]$ υπάρχει $f_\lambda \in I$ τέτοια ώστε $\hat{f}_\lambda(\lambda) \neq 0$.
Αν $g_\lambda(t) = \overline{f_\lambda(-t)}$, τότε

$$\hat{g}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g_\lambda(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt}\overline{f_\lambda(-t)}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt}\overline{f_\lambda(t)}dt = \overline{\hat{f}_\lambda(x)}$$

άρα $\hat{g}_\lambda = \overline{\hat{f}_\lambda}$.
Παίρνω $h_\lambda = g_\lambda * f_\lambda$. Τότε, αφού $f_\lambda \in I$ και I ιδεώδες, $h_\lambda \in I$.
Επίσης

$$\hat{h}_\lambda = \hat{g}_\lambda \hat{f}_\lambda = \overline{\hat{f}_\lambda}\hat{f}_\lambda = |\hat{f}_\lambda|^2.$$

Άρα $\hat{h}_\lambda(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\hat{h}_\lambda(\lambda) = |\hat{f}_\lambda(\lambda)|^2 > 0$. Οπότε $\hat{h}_\lambda(x) > 0$ για κάθε x σε μια γειτονιά N_λ του λ, αφού η $\hat{h}_\lambda$ είναι συνεχής.
Το σύνολο αυτών των N_λ για όλα τα $\lambda \in [-N, N]$ αποτελεί κάλυψη του $[-N, N]$. Επειδή, όμως το $[-N, N]$ είναι συμπαγές, μπορει να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους τέτοιες γειτονιές $N_{\lambda_1}, N_{\lambda_2}, ..., N_{\lambda_n}$.
Θεωρούμε τώρα

$$h = h_{\lambda_1} + h_{\lambda_2} + ... + h_{\lambda_n}.$$

Τότε $h \in I$ και $\hat{h}(x) > 0$ για κάθε $x \in [-N, N]$.
Από το Πόρισμα 7, υπάρχει $k \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\hat{h}(x)} = \hat{k}(x) \quad \text{για κάθε } x \in [-N, N].$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με την $\Delta_N = \hat{\delta}_N$ όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 11, έχουμε

$$\frac{\Delta_N(x)}{\hat{h}(x)} = \Delta_N(x)\hat{k}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα, $\Delta_N = \hat{h}\hat{k}\Delta_N$, δηλαδή $\delta_N = h * k * \delta_N$.
Αφού $h \in I$, $h * k * \delta_N \in I$, δηλαδή $\delta_N \in I$. Έτσι βλέπυμε ότι $\delta_N \in I$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα $f \in L^1$. Από το Θεώρημα 12, $\lim_{N\to+\infty} \|\delta_N * f - f\| = 0$. Επίσης, $\delta_N * f \in I$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Επειδή το I είναι κλειστό, $f \in I$.
Άρα $L^1 \subset I$. Συνεπώς $I = L^1$, που είναι άτοπο. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 35. *Έστω M κλειστό μεγιστικό ιδεώδες του L^1. Τότε $M = M_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Δηλαδή, τα M_λ περιλαμβάνουν όλα τα κλειστά μεγιστικά ιδεώδη του L^1.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 34, $M \subset M_\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα, αφού το M ειναι μεγιστικό, $M = M_\lambda$. □

Έχουμε, λοιπόν, μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των πραγματικών αριθμών και του συνόλου όλων των μεγιστικών ιδεωδών του L^1.

Σχόλιο. Το γεγονός ότι κάθε γνήσιο κλειστό ιδεώδες του L^1 περιέχεται σε ένα μεγιστικό ιδεώδες, όπως δείξαμε στο Θεώρημα 34, μπορεί να θεωρηθεί ως μια αναδιατύπωση του Θεωρήματος του Wiener.
Αν $f \in L^1$, τότε το $\bar{T}_f$, που από το Θεώρημα 30 είναι κλειστό ιδεώδες, είναι όλος ο L^1 αν η $\hat{f}$ δεν μηδενίζεται ποτέ, δηλαδή αν το $\bar{T}_f$ δεν περιέχεται σε κανένα μεγιστικό ιδεώδες.
Τώρα υποθέτουμε ότι, για κάποια $f \in L^1$, το $\bar{T}_f$ είναι γνήσιο ιδεώδες. Τότε περιέχεται σε ένα ή περισσότερα από τα μεγιστικά ιδεώδη M_λ. Αν πάρουμε την τομή των μεγιστικών ιδεωδών M_λ που περιέχουν το $\bar{T}_f$, παίρνουμε ένα ιδεώδες που περιέχει το $\bar{T}_f$.
Τώρα η ερώτηση είναι: Ποιες $f \in L^1$ έχουν την ιδιότητα το $\bar{T}_f$ να είναι ακριβώς η τομή των μεγιστικών ιδεωδών που το περιέχουν; Να σημειώσουμε ότι έχει ανακαλυφθεί πως υπάρχει $f \in L^1$ που δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Για να θέσουμε το ερώτημα αυτό σε λίγο διαφορετική γλώσσα, θα διατυπώσουμε μια σειρά ισοδύναμων προτάσεων, καταλήγοντας στη μορφή του προβλήματος που θα διερευνήσουμε αργότερα.

Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:
(1) Το $\bar{T}_f$ είναι η τομή όλων των μεγιστικών ιδεωδών M_λ για τα οποία ισχύει ότι $\bar{T}_f \subset M_\lambda$.
(2) Αν $g \in M_\lambda$ για κάθε M_λ για το οποίο ισχύει ότι $\bar{T}_f \subset M_\lambda$, τότε $g \in \bar{T}_f$.
(3) Αν $\hat{g}(\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $\bar{T}_f \subset M_\lambda$, τότε $g \in \bar{T}_f$.
(4) Αν $\hat{g}(\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $f \in M_\lambda$, τότε $g \in \bar{T}_f$.
(5) Αν $\hat{g}(\lambda) = 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει ότι $\hat{f}(\lambda) = 0$, τότε $g \in \bar{T}_f$.

Κεφάλαιο 2

Ο μετασχηματισμός Fourier στον L^2

2.1 Ο μετασχηματισμός Fourier στον $L^1 \cap L^2$.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, ορίσαμε το μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}$ για $f \in L^1$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier για $f \in L^2$ και θα προσδιορίσουμε κάποιες ιδιότητές του. Προκύπτει ότι αν $f \in L^2$ ο μετασχηματισμός Fourier $\hat{f}$ της f είναι επίσης στον L^2 και $\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2$.

ΛΗΜΜΑ 3. *Για κάθε πραγματικούς αριθμούς $\epsilon > 0, a$ έχουμε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat}e^{-\epsilon t^2}dt = \Big(\frac{\pi}{\epsilon}\Big)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}.$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε από το γνωστό τύπο

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Για κάθε $b \in \mathbb{R}$, για κάθε $R > 0$, ολοκληρώνουμε την αναλυτική συνάρτηση e^{-z^2} στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο D με κορυφές $\pm R, \pm R + ib$. Τότε $\int_D e^{-z^2}dx = 0$. Ισοδύναμα:

$$\int_0^b e^{-(R+it)^2}idt - \int_{-R}^{R} e^{-(-t+ib)^2}dt - i\int_0^b e^{-(-R+ib-it)^2}dt + \int_{-R}^{R} e^{-t^2}dt = 0.$$

Παίρνοντας όριο για $R \to +\infty$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(-x+ib)^2}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$$

Γνωρίζουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \pi^{\frac{1}{2}}$, άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-2xbi}e^{b^2}dx = \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-2xbi}dx = \pi^{\frac{1}{2}}e^{-b^2}.$$

Για $b = \frac{a}{2\epsilon^{\frac{1}{2}}}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{ia\epsilon^{-\frac{1}{2}}x} dx = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}$$

οπότε με αλλαγή μεταβλητής έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} e^{-\epsilon t^2} \epsilon^{\frac{1}{2}} dt = \pi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}.$$

Τελικά καταλήγουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iat} e^{-\epsilon t^2} dt = \Big(\frac{\pi}{\epsilon}\Big)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{a^2}{4\epsilon}}.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 36. *Έστω $f \in L^1 \cap L^2$. Τότε $\hat{f} \in L^2$ και*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$$

δηλαδή

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$|\hat{f}(x)|^2 = \hat{f}(x)\overline{\hat{f}(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \overline{f(u)} du.$$

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{-\frac{x^2}{n}}$,για $n \in \mathbb{N}$, και ολοκληρώνοντας ως προς x, έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixu} \overline{f(u)} du \Big) dx.$$

Αφού $f \in L^1$, το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα. Επομένως μπορώ να αλλάξω σειρά ολοκλήρωσης:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t-u)} e^{-\frac{x^2}{n}} dx \Big) dt \Big) du.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3 για $a = t - u, \epsilon = \frac{1}{n} > 0$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(t-u)} e^{-\frac{x^2}{n}} dx = (\pi n)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{n(t-u)^2}{4}}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx &= (\pi n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n(t-u)^2}{4}} f(t) dt \Big) du \\
&= (\pi n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{4}} f(t+u) dt \Big) du \\
&= (\pi n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{4}} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} f(t+u) du \Big) dt \\
&= (\pi n)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{nt^2}{4}} F(t) dt
\end{aligned}$$

όπου $F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} f(t+u) du$.
Άρα
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F(2n^{-\frac{1}{2}} t) dt.$$

Θα δείξουμε ότι η $F(t)$ είναι συνεχής στο $t = 0$.
$$\begin{aligned}|F(t) - F(0)| &= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(t+u)\overline{f(u)} - \big(f(u)\overline{f(u)}\big) du\Big| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u) - f(u)||\overline{f(u)}| du.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Schwarz έχουμε
$$\begin{aligned}|F(t) - F(0)|^2 &\leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u) - f(u)||\overline{f(u)}| du\Big)^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u) - f(u)|^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} |\overline{f(u)}|^2 du.\end{aligned}$$

Γνωρίζουμε ότι $\lim_{t\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u) - f(u)|^2 du = 0$. Άρα
$$\lim_{t\to 0} F(t) = F(0).$$

Τώρα, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε, πάλι από την ανισότητα Schwarz, ότι
$$\begin{aligned}|F(t)|^2 &= \Big| \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(u)} f(t+u) du\Big|^2 \\ &\leq \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u)||f(u)| du\Big)^2 \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+u)|^2 du \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^2 du \\ &= \|f\|_2^2 \|f\|_2^2 = \|f\|_2^4.\end{aligned}$$

Άρα $\left|e^{-t^2} F(2n^{-\frac{1}{2}} t)\right| \leq e^{-t^2} M$ για κάποια σταθερά $M > 0$.
Λόγω αυτού, της συνέχειας της F στο 0 και του Θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, έχουμε ότι
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F(2n^{-\frac{1}{2}} t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F(0) dt \\ &= F(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \pi^{\frac{1}{2}} F(0).\end{aligned}$$

Όμως
$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\overline{f(u)} du = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(u)|^2 du = \|f\|_2^2.$$

Συνεπώς
$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx &= \lim_{n\to+\infty} 2\pi^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} F(2n^{-\frac{1}{2}} t) dt \\ &= 2\pi^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} F(0) \\ &= 2\pi \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα Fatou,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx \\ &\leq \lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{n}} |\hat{f}(x)|^2 dx \\ &= 2\pi \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Άρα $\hat{f} \in L^2$.
Επίσης, από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^2 dx = 2\pi \|f\|_2^2 \quad \text{άρα} \quad \|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

□

2.2 Το Θεώρημα του Plancherel.

Σε αυτή την ενότητα θα ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier στον L^2 και θα αποδείξουμε τις πιο σημαντικές του ιδιότητες. Κάποια από αυτά τα αποτελέσματα θα συνοψιστούν στο τέλος της ενότητας σε ένα θεώρημα που φέρει το όνομα αυτού που το ανακάλυψε, του Plancherel.
Το μετασχηματισμό Fourier $\hat{f}$ της $f \in L^2$ θα τον ορίσουμε ως το όριο μιας ακολουθίας μετασχηματισμών Fourier $\hat{f}_N$, όπου f_N μια συγκεκριμένη ακολουθία συναρτήσεων στον $L^1 \cap L^2$ που συγκλίνει στον L^2 στην f. Το ότι η ακολουθία αυτή $\hat{f}_N$ συγκλίνει θα το αποδείξουμε στο επόμενο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 37. *Έστω $f \in L^2$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θεωρούμε*

$$f_N(t) = \begin{cases} f(t), & \text{αν } |t| \leq N \\ 0, & \text{αν } |t| > N \end{cases}$$

Τότε $f_N \in L^1 \cap L^2$ και $\hat{f}_N \in L^2$. Επιπλέον, καθώς $N \to +\infty$, η $\hat{f}_N$ συγκλίνει στον L^2 σε μια συνάρτηση στον L^2.

Απόδειξη. Από την ανισότητα Schwarz έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |f_N(t)| dt &= \int_{-N}^{N} |f(t)| dt \\ &\leq \Big(\int_{-N}^{N} |f(t)|^2 dt \int_{-N}^{N} 1 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_2 (2N)^{\frac{1}{2}} < +\infty\end{aligned}$$

άρα $f_N \in L^1$.
Επιπλέον, αφού $|f_N(t)| \leq |f(t)|$, προφανώς $f_N \in L^2$. Άρα $f_N \in L^1 \cap L^2$.
Από το Θεώρημα 36, $\hat{f}_N \in L^2$.
Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία των $\hat{f}_N$ συγκλίνει στον L^2. Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ακολουθία Cauchy, διότι ο L^2 είναι πλήρης. Δηλαδή, αρκεί να δείξουμε ότι

$\lim_{M,N\to+\infty} \|\hat{f}_M - \hat{f}_N\|_2 = 0$.
Ο $\hat{f}_M - \hat{f}_N$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $f_M - f_N$, η οποία ανήκει στον $L^1 \cap L^2$.
Άρα, από το Θεώρημα 36,

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}_M - \hat{f}_N\|_2^2 &= 2\pi \|f_M - f_N\|_2^2 \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f_M(t) - f_N(t)|^2 dt \\
&= 2\pi \Big(\int_{-N}^{M} |f(t)|^2 dt + \int_{M}^{N} |f(t)|^2 dt \Big) \to 0 \quad \text{όταν } M, N \to +\infty.
\end{aligned}$$

Άρα $\|\hat{f}_M - \hat{f}_N\|_2 \to 0$ όταν $M, N \to +\infty$. □

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης του L^2.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Για $f \in L^2$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό Fourier της f, $\hat{f}$, ως εξής:*

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} e^{ixt} f(t) dt \tag{2.1}$$

το όριο στον L^2.
Να σημειώσουμε ότι η (2.1) ισοδυναμεί με $\lim_{N\to+\infty} \|\hat{f} - \hat{f}_N\|_2 = 0$.

Σχόλιο. Παραπάνω ορίσαμε την $\hat{f}$ για $f \in L^2$. Βέβαια, καθώς η $\hat{f}$ ορίστηκε ως στοιχείο του L^2, η $\hat{f}(x)$ ορίζεται μόνο σχεδόν παντού.
Όμως, αν $f \in L^1$, από τον γνωστό μας από το πρώτο Κεφάλαιο ορισμό της $\hat{f}$ έχουμε ότι

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t) dt \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

που μπορεί να γραφεί ως

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to+\infty} \hat{f}_N(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, αν $f \in L^1 \cap L^2$, έχουμε τώρα δύο ορισμούς του $\hat{f}$, τους (2.1) και (2.2). Ωστόσο, η $\hat{f}$ που ορίζεται σπό το (2.2), η οποία είχαμε δείξει ότι είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζει το ίδιο στοιχείο του L^2 με την $\hat{f}$ που ορίζεται στο (2.1). Άρα οι δύο ορισμοί μας είναι συνεπείς.

Στο Θεώρημα 36 είδαμε ότι αν $f \in L^1 \cap L^2$, τότε η 2-νόρμα της $\hat{f}$ είναι $\sqrt{2\pi}$ φορές η 2-νόρμα της f. Δηλαδή, εκτός από ένα σταθερό παράγοντα, η απεικόνιση $f \to \hat{f}$ διατηρεί τη 2-νόρμα. Τώρα θα αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε $f \in L^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 38. *(Σχέση Parseval)*
Έστω $f \in L^2$. Τότε

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \|f\|_2.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε τις f_N όπως στο Θεώρημα 37. Τότε $\lim_{N\to+\infty} \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2 = 0$.

$$\big| \|\hat{f}_N\|_2 - \|\hat{f}\|_2 \big| \le \|\hat{f}_N - \hat{f}\|_2$$

άρα

$$\lim_{N\to+\infty} \big| \|\hat{f}_N\|_2 - \|\hat{f}\|_2 \big| = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \lim_{N\to+\infty} \|\hat{f}_N\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Εξ ορισμού της f_N, $\lim_{N\to+\infty}\|f_N\|_2 = \|f\|_2$.
Καθώς $f_N \in L^1 \cap L^2$, από το Θεώρημα 36,

$$\|\hat{f}_N\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f_N\|_2.$$

Συνεπώς

$$\|\hat{f}\|_2 = \lim_{N\to+\infty}\|\hat{f}_N\|_2 = \lim_{N\to+\infty}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f_N\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2.$$

□

Μια εύκολη αλλά σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 38 είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 39. *Αν $f, g \in L^2$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 38,

$$\|\hat{f}+\hat{g}\|_2^2 = 2\pi\|f+g\|_2^2.$$

Δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)+\hat{g}(x)|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)+g(x)|^2dx$$

άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\hat{f}(x)+\hat{g}(x)\big)\big(\overline{\hat{f}(x)}+\overline{\hat{g}(x)}\big)dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)\big(\overline{f(x)}+\overline{g(x)}\big)dx.$$

Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(x)|^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{f}(x)}\hat{g}(x)dx =$$
$$= 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2dx + \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}g(x)dx\Big).$$

Τότε, από το Θεώρημα 38,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{f}(x)|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(x)|^2dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2dx$$

άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{f}(x)}\hat{g}(x)dx =&\\ = 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\overline{g(x)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)}g(x)dx\Big).&\end{aligned} \tag{2.3}$$

Αφού το g είναι τυχαίο στοιχείο του L^2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα $\hat{g}, g$ με τα $i\hat{g}, ig$, αντίστοιχα, και έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\big(i\hat{g}(x)\big)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(x)}\big(i\hat{g}(x)\big)dx = \\ = 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\big(ig(x)\big)}dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\big(ig(x)\big)dx\Big)$$

άρα

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(x)}\hat{g}(x)dx = \\ = 2\pi\Big(-i\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx + i\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx\Big)$$

το οποίο μας δίνει, αν διαιρέσουμε με $-i$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(x)}\hat{g}(x)dx = \\ = 2\pi\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}g(x)dx\Big). \tag{2.4}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2.3), (2.4) παίρνουμε

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = 4\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$$

το οποίο μας δίνει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx = 2\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

□

Σημείωση. Αν στο Θεώρημα 39 βάλουμε $g = f$, παίρνουμε το Θεώρημα 38.

Στις ενότητες 1.3, 1.4 ασχοληθήκαμε με την αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier στον L^1. Στα επόμενα θεωρήματα θα δούμε ότι η αντιστροφή στην οποία αναφερθήκαμε στην ενότητα 1.3 μπορεί να μεταφραστεί και στον L^2. Επιπλέον, αντίθετα με την περίπτωση του L^1, η αντιστροφή στον L^2 δε χρειάζεται επιπρόσθετες υποθέσεις.

ΘΕΩΡΗΜΑ 40. *Αν $f, g \in L^2$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε f_N, g_N όπως ορίστηκαν στο Θεώρημα 37. Για κάθε $M, N \in \mathbb{N}$ έχουμε:

$$\hat{f}_M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f_M(t)dt$$

$$\hat{g}_N(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} g_N(t)dt.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_M(x)g_N(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty}g_N(x)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}f_M(t)dt\Big)dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}g_N(x)dx\Big)dt \qquad (2.5)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\hat{g}_N(t)dt.\end{aligned}$$

Η αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης είναι δυνατή διότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, καθώς γνωρίζουμε από το Θεώρημα 37 ότι $f_M, g_N \in L^1$.

$$\lim_{N\to+\infty}\|g_N - g\|_2 = 0 = \lim_{N\to+\infty}\|\hat{g}_N - \hat{g}\|_2.$$

$$\lim_{N\to+\infty}\|f_M - f\|_2 = 0 = \lim_{N\to+\infty}\|\hat{f}_M - \hat{f}\|_2.$$

Άρα

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_M(x)g_N(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_M(x)g(x)dx$$

και

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\hat{g}_N(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\hat{g}(t)dt.$$

Παίρνοντας τώρα όρια για $N \to +\infty$ στην (2.5), έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_M(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\hat{g}(t)dt.$$

Όμως

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}_M(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)g(x)dx$$

και

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_M(t)\hat{g}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{g}(t)dt.$$

Παίρνοντας όρια για $M \to +\infty$ έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\hat{g}(t)dt.$$

□

ΘΕΩΡΗΜΑ 41. *Εστω $f \in L^2$ και $g = \overline{\hat{f}}$. Τότε*

$$f = \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}}.$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}\|f - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\big|f(x) - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}(x)}\big|^2dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(x) - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}(x)}\big)\overline{\big(f(x) - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}(x)}\big)}dx\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\big(f(x) - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}(x)}\big)\big(\overline{f(x)} - \frac{1}{2\pi}\hat{g}(x)\big)dx\\ &= \|f\|_2^2 + \frac{1}{4\pi^2}\|\hat{g}\|_2^2 - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\hat{g}(x)dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{f(x)\hat{g}(x)}dx.\end{aligned}$$

Όμως $g = \overline{\hat{f}}$, άρα χρησιμοποιώντας τα Θεωρήματα 38, 40:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\hat{g}(x)dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)g(x)dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x)\overline{\hat{f}(x)}dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 dx \\ &= \|\hat{f}\|_2^2 = 2\pi\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Όμως τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)\hat{g}(x)}dx = 2\pi\|f\|_2^2.$$

Από το Θεώρημα 38,

$$\|\hat{g}\|_2^2 = 2\pi\|g\|_2^2 = 2\pi\|\hat{f}\|_2^2 = 4\pi^2\|f\|_2^2.$$

Άρα

$$\|f - \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}}\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|f\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|f\|_2^2 = 0.$$

Συνεπώς

$$f = \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}}.$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 8. *(Αντιστροφή του μετασχηματισμού Fourier στον L^2)*
Αν $f \in L^2$, τότε

$$f(t) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}\hat{f}(x)dx \quad \text{το όριο στον } L^2.$$

Απόδειξη. Έστω $g = \overline{\hat{f}}$. Τότε, από το Θεώρημα 41, $\bar{f} = \frac{1}{2\pi}\hat{g}$, δηλαδή

$$\begin{aligned}\overline{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\hat{g}(t) &= \frac{1}{2\pi}\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} e^{ixt}g(x)dx \\ &= \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{ixt}\overline{\hat{f}(x)}dx \quad \text{το όριο στον } L^2.\end{aligned}$$

Παίρνοντας συζυγείς:

$$f(t) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}\hat{f}(x)dx \quad \text{το όριο στον } L^2.$$

□

Στην ενότητα 1.2 είχαμε δείξει ότι, παρόλο που ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης του L^1 πρέπει να είναι συνεχής και να μηδενίζεται στο $\pm\infty$, δεν ισχύει ότι όλες οι συναρτήσεις που είναι συνεχείς και πηγαίνουν στο 0 στο $\pm\infty$ είναι μετασχηματισμοί Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.
Στην περίπτωση του L^2, τα πράγματα είναι διαφορετικά. Κάθε στοιχείο του L^2 είναι ο μετασχηματισμός Fourier κάποιας συνάρτησης του L^2.

ΠΟΡΙΣΜΑ 9. *Κάθε $f \in L^2$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier ενός μοναδικού στοιχείου του L^2.*

Απόδειξη. Έστω $f \in L^2$. Παίρνουμε $h = \overline{f}$, $g = \overline{\hat{h}}$. Από το Θεώρημα 41,

$$\overline{f} = h = \frac{1}{2\pi}\overline{\hat{g}}, \quad \text{άρα} \quad f = \frac{1}{2\pi}\hat{g}.$$

Τότε, η f είναι ο μετασχηματσιμός Fourier της $\frac{1}{2\pi}g$.

Η μοναδικότητα ακολουθεί εύκολα από το Πόρισμα 8. Αν $f = \hat{g}_1$ και $f = \hat{g}_2$ με g_1, g_2 να μην είναι το ίδιο στοιχείο του L^2, τότε

$$\begin{aligned}
g_1(t) &= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}\hat{g}_1(x)dx \quad \text{το όριο στον } L^2 \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}f(x)dx \\
&= \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}\hat{g}_2(x)dx \\
&= g_2(t)
\end{aligned}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό είναι άτοπο. $\square$

Στο ακόλουθο Θεώρημα θα συνοψίσουμε κάποια από τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας.

ΘΕΩΡΗΜΑ 42. *(Plancherel)*
Αν $f \in L^2$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $\hat{f} \in L^2$, που ονομάζεται μετασχηματισμός Fourier της f, τέτοια ώστε

$$\hat{f}(x) = \lim_{N\to+\infty} \int_{-N}^{N} e^{ixt}f(t)dt \quad \text{το όριο στον } L^2,$$

$$f(t) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}\hat{f}(x)dx \quad \text{το όριο στον } L^2$$

και

$$\|\hat{f}\|_2 = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\|f\|_2.$$

Κάθε $f \in L^2$ μπορεί να εκφραστεί ως $f = \hat{g}$ για μια μοναδική $g \in L^2$.

Κεφάλαιο 3

Γενικεύσεις του Θεωρήματος Wiener

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε περισσότερο τη σχέση που αρχικά διερευνήσαμε στην ενότητα 1.8 μεταξύ των ριζών του μετασχηματισμού Fourier της $f \in L^1$ και της κλειστότητας των μεταφορών της, $\bar{T}_f$.

Αρχικά θα αναφέρουμε κάποιες απαραίτητες γνώσεις σχετικά με τα σύνολα σημείων.

3.1 Σύνολα σημείων.

Θα ξεκινήσουμε αναφέροντας κάποιους ορισμούς σχετικά με σύνολα σημείων πραγματικών αριθμών. Με το γράμμα E θα συμβολίζουμε ένα σύνολο πραγματικών αριθμών.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *(1)* **Γειτονιά** *ενός $x \in \mathbb{R}$ λέγεται κάθε σύνολο που περιέχει ένα διάστημα της μορφής $(x-\delta, x+\delta)$ για κάποιο $\delta > 0$. Η γειτονιά του x θα συμβολίζεται με N_x.*
(2) Το σημείο x λέγεται **εσωτερικό σημείο** *του συνόλου E αν το E είναι μια γειτονιά του x. Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του E θα συμβολίζεται με $IntE$.*
(3) Το σύνολο E λέγεται **ανοικτό** *αν $IntE = E$.*
(4) Το σημείο x λέγεται **οριακό σημείο** *του E αν κάθε γειτονιά του x περιέχει ένα σημείο του E. (Τότε, προφανώς, αν $x \in E$, το x είναι οριακό σημείο του E.) Άρα, το x είναι οριακό σημείο του E αν και μόνο αν υπάρχουν $x_1, x_2, ... \in E$ (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Το σύνολο όλων των οριακών σημείων του E θα συμβολίζεται με $\bar{E}$.*
(5) Το σύνολο E λέγεται **κλειστό** *αν $E = \bar{E}$.*
(6) Το σημείο x λέγεται **σημείο συσσώρευσης** *του E αν κάθε γειτονιά του x περιέχει άπειρου πλήθους σημεία του E. (Άρα κάθε σημείο συσσώρευσης του E είναι οριακό σημείο του E.)*
(7) Το σημείο x λέγεται **συνοριακό σημείο** *του E αν κάθε γειτονιά του x περιέχει ένα σημείο που ανήκει στο E και ένα σημείο που δεν ανήκει στο E. (Άρα ένα συνοριακό σημείο του E είναι οριακό σημείο του E, αλλά όχι εσωτερικό σημείο του E. Ένα κλειστό σύνολο, λοιπόν, περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.) Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του E θα συμβολίζεται με FrE.*
(8) Ένα σύνολο E λέγεται **φραγμένο** *αν το E περιέχεται σε κάποιο διάστημα πεπερασμένου μέτρου.*
(9) Ένα σύνολο E λέγεται **συμπαγές** *αν το E είναι κλειστό και φραγμένο. (Ειδικότερα, αν $a, b \in \mathbb{R}$, το σύνολο $[a, b]$ είναι συμπαγές.)*

Παραθέτουμε τα παρακάτω γνωστά θεωρήματα για αναφορές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 43. *(1) (Θεώρημα Heine-Borel)*
Έστω E συμπαγές και, για κάθε $x \in E$, η N_x είναι μια γειτονιά του x. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, ..., x_n \in E$ (πεπερασμένου πλήθους) τέτοια ώστε

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{n} N_{x_k}.$$

(2) (Θεώρημα Bolzano-Weierstrass)
Αν το E είναι φραγμένο και περιέχει άπειρο πλήθος στοιχείων, τότε υπάρχει ένα σημείο συσσώρευσης του E.

3.2 Οι ρίζες του μετασχηματισμού Fourier.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Αν $f \in L^1$, τότε με $S(f)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $x \in \mathbb{R}$ τέτοιων ώστε $\hat{f}(x) = 0$. Το $S(f)$ ονομάζεται* **φάσμα** *(spectrum) της f.*

Καθώς το $S(f)$ αποτελείται από ρίζες της συνεχούς συνάρτησης $\hat{f}$, το ακόλουθο θεώρημα είναι άμεσο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 44. *Αν $f \in L^1$, τοτε το $S(f)$ είναι κλειστό.*

Απόδειξη. Έστω $x \in \overline{S(f)}$. Τότε υπάρχουν $x_1, x_2, ... \in S(f)$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.
Αφού η $\hat{f}$ είναι συνεχής,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{f}(x_n) = \hat{f}(x).$$

Όμως $\hat{f}(x_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού $x_n \in S(f)$. Άρα $\hat{f}(x) = 0$, συνεπώς $x \in S(f)$.
Δηλαδή έχουμε ότι $\overline{S(f)} \subset S(f)$. Επίσης, προφανώς, $S(f) \subset \overline{S(f)}$. Οπότε $S(f) = \overline{S(f)}$, δηλαδή το $S(f)$ είναι κλειστό. □

ΘΕΩΡΗΜΑ 45. *Έστω E κλειστό σύνολο πραγματικών αριθμών. Τότε $E = S(f)$ για κάποια $f \in L^1$.*

Απόδειξη. Αν το E είναι κενό, τότε $E = S(f)$ για κάποια $f \in L^1$ της οποίας ο μετασχηματισμός Fourier δεν μηδενίζεται πουθενά. (Είχαμε δείξει στην ενότητα 1.8 ότι υπάρχει τέτοια $f \in L^1$.)
Ας υποθέσουμε ότι το E δεν είναι κενό. Από το Θεώρημα 13, για δεδομένο φραγμένο ανοικτό διάστημα (a, b), υπάρχει $\omega \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\hat{\omega}(x) = 0 \quad \text{για } x \notin (a, b)$$

και

$$\hat{\omega}(x) > 0 \quad \text{για } x \in (a, b).$$

Διαιρώντας την ω με κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να κάνουμε το $\|\omega\|_1$ μικρότερο από οποιοδήποτε προκαθορισμένο θετικό αριθμό θέλουμε, χωρίς να χάσουμε την ιδιότητα της ω που μας ενδιαφέρει.
Είναι γνωστό ότι το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών που δεν ανήκουν στο E μπορεί να γραφεί ως $F = \bigcup_{j=1}^{+\infty} I_j$, όπου τα I_j είναι ανοικτά διαστήματα ξένα ανά δύο.
Όπως παρατηρήσαμε προηγουμένως, για κάθε φραγμένο ανοικτό διάστημα I_j μπορούμε να βρούμε $\omega_j \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|\omega_j\|_1 < 2^{-j},$$

$$\hat{\omega}_j(x) = 0 \quad \text{για } x \notin I_j$$

και

$$\hat{\omega}(x) > 0 \quad \text{για } x \in I_j.$$

Αν το I_j δεν είναι φραγμένο, η ύπαρξη τέτοιας ω_j διασφαλίζεται από το Πόρισμα 5.

$$\Big\| \sum_{j=m}^{n} \omega_j \Big\|_1 \leq \sum_{j=m}^{n} \|\omega_j\|_1 < \sum_{j=m}^{n} 2^{-j} < 2^{-m+1}$$

άρα, επειδή ο L^1 είναι πλήρης, υπάρχει $f \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to+\infty} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \omega_j - f \Big\|_1 = 0.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 1,

$$\hat{f}(x) = \lim_{n\to+\infty} \widehat{\sum_{j=1}^{n} \omega_j}(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{\omega}_j(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Οπότε, για $x \in E$, έχουμε ότι $x \notin I_j$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\hat{\omega}_j(x) = 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, συνεπώς $\hat{f}(x) = 0$.
Για $x \notin E$, έχουμε ότι $x \in I_{j_0}$ για κάποιο $j_0 \in \mathbb{N}$, άρα $\hat{\omega}_{j_0}(x) > 0$ για κάποιο $j_0 \in \mathbb{N}$ και $\hat{\omega}_k(x) = 0$ για κάθε $k \neq j_0$, συνεπώς $\hat{f}(x) = \hat{\omega}_{j_0}(x) > 0$.
Άρα $S(f) = E$. □

Σχόλιο. Το Θεώρημα του Wiener μπορεί, λοιπόν, να τεθεί και ως εξής:

Έστω $f \in L^1$. Τότε $\bar{T}_f = L^1$ αν $S(f) = \emptyset$.

Οπότε, το ότι

$$\text{αν } S(g) \supset S(f), \quad \text{τότε } g \in \bar{T}_f \tag{3.1}$$

είναι αληθές αν $S(f) = \emptyset$.
Στην επόμενη ενότητα θα δειξουμε ότι η (3.1) είναι αληθής για μια μεγάλη κλάση f με $S(f) \neq \emptyset$.
Επίσης, να σημειώσουμε ότι από το Θεώρημα 22 το αντίστροφο της (3.1) ισχύει για κάθε $f \in L^1$.

3.3 Τα κύρια αποτελέσματα.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε μια γενίκευση του Θεωρήματος Wiener.

ΘΕΩΡΗΜΑ 46. *Αν $f, g \in L^1$ και αν $S(f) \subset IntS(g)$, τότε $g \in \bar{T}_f$.*

Απόδειξη. Αν $x \notin S(f)$, τότε το $\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)}$ είναι καλά ορισμένο. Αν $x \in S(f)$, ορίζουμε $\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)} = 0$.
Καθώς $S(f) \subset IntS(g)$, προφανώς η $\frac{\hat{g}(x)}{\hat{f}(x)}$ είναι συνεχής.
Παίρνουμε $N \in \mathbb{N}$ και C_N το υποσύνολο του $[-N, N]$ όπου $\hat{g} \neq 0$.

Αν $x \in \bar{C}_N$, τότε $\hat{f}(x) \neq 0$. Το $\bar{C}_N$ είναι κλειστό και φραγμένο, άρα συμπαγές. Άρα, αφού $\hat{f}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \bar{C}_N$, από το Πόρισμα 7, υπάρχει $h \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\hat{f}(x)} = \hat{h}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \bar{C}_N$$

άρα $\hat{f}(x)\hat{h}(x) = 1$ για κάθε $x \in \bar{C}_N$. Συνεπώς, καθώς $\hat{g}(x) = 0$ αν $x \in [-N, N]$ και $x \notin \bar{C}_N$,

$$\hat{f}(x)\hat{h}(x)\hat{g}(x) = \hat{g}(x) \quad \text{για κάθε } x \in [-N < N].$$

Πολλαπλασιάζοντας κα τα δύο μέλη με τη Δ_N, όπως ορίστηκε στο Θεώρημα 11, έχουμε ότι

$$\Delta_N(x)\hat{g}(x) = \Delta_N(x)\hat{g}(x)\hat{f}(x)\hat{h}(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $\Delta_N\hat{g} = \hat{f}\Delta_N\hat{g}\hat{h}$. Από το Πόρισμα 4 και το Θεώρημα 10,

$$\delta_N * g = f * \delta_N * g * h.$$

Καθώς $f \in \bar{T}_f$, από το Θεώρημα 24 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $f * \delta_N * g * h \in \bar{T}_f$, άρα $\delta_N * g \in \bar{T}_f$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $g \in \bar{T}_f$. $\square$

Να σημειώσουμε εδώ ότι παρόλο που το Θεώρημα 46 είναι πολύ ισχυρότερο αποτέλεσμα σε σύγκριση με το Θεώρημα 21, η απόδείξεις τος είναι πολύ κοντά.

Μετά από τα επόμενα δύο λήμματα θα αποδείξουμε μια ακόμα γενίκευση του Θεωρήματος του Wiener.

ΛΗΜΜΑ 4. *Έστω $f \in L^1$ τέτοια ώστε $S(f) \neq \emptyset$ και $x_0 \in S(f)$. Τότε, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $h \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\|f - h\|_1 < \epsilon$$
$$x_0 \in IntS(h)$$
$$S(f) \subset S(h).$$

Απόδειξη. Περίπτωση 1: $x_0 = 0$
Αν $x_0 = 0$, τότε $0 \in S(f)$, άρα $\hat{f}(0) = 0$. Από το Θεώρημα 14, υπάρχει $h_1 \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|h_1\|_1 < \epsilon$$
$$\hat{h}_1(x) = \hat{f}(x) \quad \text{για κάθε } x \text{ σε μια γειτονιά } N_0 \text{ του } 0$$
$$S(f) \subset S(h_1).$$

Θεωρούμε $h = f - h_1$. Τότε

$$\|f - h\|_1 = \|f - f + h_1\|_1 = \|h_1\|_1 < \epsilon.$$

Αφού $\hat{h}_1(x) = \hat{f}(x)$ για κάθε $x \in N_0$, έχουμε ότι $\hat{h}(x) = \hat{f}(x) - \hat{h}_1(x) = 0$ για κάθε $x \in N_0$. Συνεπώς $N_0 \subset S(h)$, άρα $x_0 \in IntS(h)$.
Έστω τώρα $x \in S(f)$. Αφού $S(f) \subset S(h_1)$, έχουμε ότι $x \in S(h_1)$. Άρα $\hat{f}(x) = \hat{h}_1(x) = 0$. Τότε $\hat{h}(x) = 0$, δηλαδή $x \in S(h)$. Συνεπώς $S(f) \subset S(h)$.

Περίπτωση 2: $x_0 \neq 0$
Θεωρούμε $f_1(t) = f(t)e^{ix_0t}$. Από το Θεώρημα 2, $\hat{f_1}(x) = \hat{f}(x + x_0)$. Τότε, αφού $x_0 \in S(f)$, $\hat{f_1}(0) = \hat{f}(x_0) = 0$. Από την Περίπτωση 1, υπάρχει $k \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|f_1 - k\|_1 < \epsilon$$

$$0 \in IntS(k)$$

$$S(f_1) \subset S(k).$$

Τώρα θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $h(t) = k(t)e^{-ix_0t}$. Τότε $\hat{h}(x) = \hat{k}(x - x_0)$.

$$\begin{aligned}
\|f - h\|_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f(t) - h(t)\big| dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big|f_1(t)e^{-ix_0t} - k(t)e^{-ix_0t}\big| dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big|e^{-ix_0t}\big|\big|f_1(t) - k(t)\big| dt \\
&= \|f_1 - k\|_1 < \epsilon.
\end{aligned}$$

Αφού $0 \in IntS(k)$, υπάρχει N_0 γειτονιά του 0 τέτοια ώστε $N_0 \subset S(k)$. Δηλαδή, για κάθε $x \in N_0$, $\hat{k}(x) = 0$. Άρα υπάρχει N_{x_0} γειτονιά του x_0 τέτοια ώστε για κάθε $x \in N_{x_0}$ ισχύει ότι $\hat{k}(x - x_0) = 0$, άρα και $\hat{h}(x) = 0$, δηλαδή $x \in S(h)$. Οπότε $x_0 \in IntS(h)$.
Έστω τώρα $x \in S(f)$. Τότε $\hat{f}(x) = 0$, άρα $\hat{f_1}(x - x_0) = 0$, δηλαδή $x - x_0 \in S(f_1)$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $x - x_0 \in S(k)$, που σημαίνει ότι $\hat{k}(x - x_0) = 0$. Άρα $\hat{h}(x) = 0$ οπότε $x \in S(h)$. Συνεπώς $S(f) \subset S(h)$. □

ΛΗΜΜΑ 5. *Έστω $f \in L^1$ τέτοια ώστε $S(f) \neq \emptyset$ και $x_1, x_2, ..., x_n$ πεπερασμένου πλήθους σημεία του $S(f)$. Τότε, για δεδομένο $\epsilon > 0$, υπάρχει $h \in L^1$ τέτοια ώστε*

$$\|f - h\|_1 < \epsilon$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \in IntS(h)$$

$$S(f) \subset S(h).$$

Απόδειξη. Αποδεικνύεται με n εφαρμογές του Λήμματος 4.
Αρχικά, εφαρμόουμε το Λήμμα 4 για την f και το x_1, με $\frac{\epsilon}{n}$. Τότε υπάρχει $h_1 \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|f - h_1\|_1 < \frac{\epsilon}{n}$$

$$x_1 \in IntS(h_1)$$

$$S(f) \subset S(h_1).$$

Έπειτα εφαρμόζουμε πάλι το Λήμμα 4 για την h_1 και το x_2, με $\frac{\epsilon}{n}$. Τότε υπάρχει $h_2 \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|h_1 - h_2\|_1 < \frac{\epsilon}{n}$$

$$x_2 \in IntS(h_2)$$

$$S(h_1) \subset S(h_2).$$

Τότε και το $x_1 \in IntS(h_2)$ γιατί $x_1 \in IntS(h_1)$ και $IntS(h_1) \subset IntS(h_2)$.
Ακολουθώντας τη διαδικασία με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε $h_n \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|f - h_n\|_1 \leq \|f - h_1\|_1 + \|h_1 - h_2\|_1 + ... + \|h_{n-1} - h_n\|_1 < \epsilon$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \in IntS(h_n)$$

$$S(f) \subset S(h_1) \subset ... \subset S(h_n).$$

□

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε μια ακόμα γενίκευση του Θεωρήματος Wiener.

ΘΕΩΡΗΜΑ 47. *Έστω $f \in L^1$ τέτοιο ώστε το $FrS(f)$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Υποθέτουμε ότι $S(g) \supset S(f)$. Τότε $g \in \bar{T}_f$.*

Απόδειξη. Στην τελευταία παρατήρηση της προηγούμενης ενότητας δείξαμε ότι αν $S(f) = \emptyset$, το Θεώρημα ισχύει (αναγόμαστε στο Θεώρημα Wiener). Οπότε μπορούμε τώρα να θεωρήσουμε ότι $S(f) \neq \emptyset$.
Αν $FrS(f) = \emptyset$, αναγκαστικά $S(f) = \mathbb{R}$. Οπότε, αν $S(g) \supset S(f)$, τότε $S(g) = \mathbb{R}$ άρα $\hat{f} \equiv 0 \equiv \hat{g}$, άρα $g \in \bar{T}_f$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι $FrS(f) \neq \emptyset$.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 12 και το γεγονός ότι το $\bar{T}_f$ είναι κλειστό, αρκεί να δείξουμε ότι $\delta_N * g \in \bar{T}_f$ για κάθε N αρκετά μεγάλο, προκειμένου να αποδείξουμε ότι $g \in \bar{T}_f$.
Έστω $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε το $FrS(f)$ να περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του $[-N, N]$.
Από την υπόθεσή μας, το $FrS(f)$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Άρα, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass, μπορούν να υπάρχουν μόνο πεπερασμένου πλήθους σημεία $x_1, ..., x_n \in FrS(f) \cap [-N, N]$.
Αφού $S(f) \subset S(g)$, προφανώς $S(f) \subset S(\delta_N) \cup S(g) = S(\delta_N * g)$. Επίσης, όπως είδαμε στο Θεώρημα 44, το $S(f)$ είναι κλειστό, άρα $FrS(f) \subset S(f)$. Συνεπώς

$$FrS(f) \subset S(\delta_N * g).$$

Άρα $x_1, ..., x_n \in S(\delta_N * g)$.
Από το Λήμμα 5, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $h \in L^1$ τέτοια ώστε

$$\|\delta_N * g - h\|_1 < \epsilon$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \in IntS(h)$$

$$S(\delta_N * g) \subset S(h).$$

Όμως η $\hat{\delta}_N = \Delta_N$ μηδενίζεται έξω από το διάστημα $[-N, N]$, άρα το $S(\delta_N * g)$ περιέχει κάθε σημείο έξω από το $[-N, N]$. Οπότε και το $S(h)$ περιέχει κάθε σημείο έξω από το $[-N, N]$, Άρα το $IntS(h)$ περιέχει κάθε σημείο του $FrS(f)$ διαφορετικό από τα $x_1, ..., x_n$, άρα έχουμε ότι $IntS(h) \supset FrS(f)$. Επίσης $S(f) \subset S(\delta_N * g) \subset S(h)$, άρα $IntS(f) \subset IntS(h)$. Συνεπώς

$$S(f) \subset IntS(h).$$

Από το Θεώρημα 46 τώρα συμπεραίνουμε ότι $h \in \bar{T}_f$. Καθώς το ϵ ήταν τυχαίο, $\delta_N * g \in \bar{T}_f$. Αυτό το παίρνουμε για κάθε N αρκετά μεγάλο, άρα $g \in \bar{T}_f$. □

Οι προηγούμενες μέθοδοι, συνδυασμένες με ένα επιχείρημα υπερπεπερασμένης επαγωγής, μπορούν να μας οδηγήσουν σε ένα ισχυρότερο θεώρημα, το οποίο θα αναφέρουμε χωρίς απόδειξη μετά τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Το σύνολο E είναι* **τέλειο** *αν το E συμπίπτει με το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του E. Ισοδύναμα, το E είναι τέλειο αν είναι κλειστό και δεν έχει μεμονωμένα σημεία.*

ΘΕΩΡΗΜΑ 48. *Έστω $f \in L^1$ τέτοια ώστε το $FrS(f)$ δεν περιέχει κανένα μη κενό τέλειο σύνολο. Υποθέτουμε ότι $S(g) \supset S(f)$. Τότε $g \in \bar{T}_f$.*

Ο Malliavin έδειξε ότι υπάρχει $f \in L^1$ για την οποία η πρόταση

$$\text{αν } S(g) \supset S(f) \quad \text{τότε } g \in \bar{T}_f \tag{3.2}$$

είναι ψευδής για κάποια $g \in L^1$.
Ο Rudin χρησιμοποίησε μια κατασκευή του Malliavin για να δείξει την ύπαρξη μιας $g \in L^1$ τέτοιας ώστε $g \notin \bar{T}_{g*g}$. Αυτό προφανώς έρχεται σε αντίφαση με την (3.2), καθώς $S(g) = S(g * g)$.

Κεφάλαιο 4

Το θεώρημα του Bochner

Αν μ μιγαδικό μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$, η e^{ixt} είναι συνεχής και φραγμένη στο $\mathbb{R}$ για κάθε x, οπότε ορίζεται το

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}$$

και ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier-Stieltjes** του μ.

Ο Bochner απέδειξε ένα διάσημο θεώρημα το οποίο χαρακτήρισε τους μετασχηματισμούς Fourier-Stieltjes μέτρων Borel ως συνεχείς συναρτήσεις θετικού τύπου. Αυτό το θεώρημα είναι ουσιαστικά το θέμα αυτού του κεφαλαίου.

4.1 Συναρτήσεις θετικού τύπου.

ΟΡΙΣΜΟΣ. *Μια συνάρτηση (όχι απαραίτητα μετρήσιμη) F που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ λέγεται* **θετικού τύπου** *αν*

$$\sum_{m=1}^{s} \sum_{n=1}^{s} a_m \overline{a_n} F(x_m - x_n) \geq 0$$

για κάθε πεπερασμένου πλήθους $x_1, ..., x_s \in \mathbb{R}$ και $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$.
Το σύνολο των συναρτήσεων θετικού τύπου θα συμβολίζεται με P.

Τα επόμενα δύο θεωρήματα συνοψίζουν τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Συλλογικά αναφέρονται ως το Θεώρημα του Bochner.

ΘΕΩΡΗΜΑ 49. *Αν μ μέτρο Borel και αν*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R},$$

τότε $F \in P$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 50. *Αντίστροφα, αν F μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και $F \in P$, τότε υπάρχει μέτρο Borel μ τέτοιο ώστε*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} d\mu(t), \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε τα θεωρήματα 49 και 50. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ο Bochner αρχικά υπέθεσε ότι η F στο Θεώρημα 50 είναι συνεχής και απέδειξε ότι η (4.1) ήταν αληθής για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πρώτος ο Riesz έδειξε ότι η μετρησιμότητα ήταν αρκετή για να ισχύει η (4.1) για σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 49.

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 49)

Αφού $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} d\mu(t)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n}F(x_m - x_n) &= \sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x_m-x_n)t}d\mu(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n}e^{ix_mt}e^{-ix_nt}d\mu(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{s} a_m e^{ix_mt}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{s}\overline{a_n}e^{-ix_nt}\Big)d\mu(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{s} a_m e^{ix_mt}\Big)\overline{\Big(\sum_{n=1}^{s} a_n e^{ix_nt}\Big)}d\mu(t)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_{m=1}^{s} a_m e^{ix_mt}\Big|^2 d\mu(t) \geq 0.
\end{aligned}$$

Άρα $F \in P$. □

4.3 Απόδειξη του Θεωρήματος 50.

Αυτή η απόδειξη είναι πολύ πιο δύσκολη. Θα ξεκινήσουμε αποδεικνύοντας τρία Λήμματα που θα μας φανούν χρήσιμα.

ΛΗΜΜΑ 6. *Αν $F \in P$, τότε*

$$F(0) \geq 0 \qquad \textit{και} \qquad \big|F(x)\big| \leq F(0) \quad \textit{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Αφού $F \in P$, συμπεραίνουμε ότι $\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n}F(x_m-x_n) \geq 0$ για κάθε πεπερασμένου πλήθους $x_1, ..., x_s \in \mathbb{R}$ και $a_1, ..., a_s \in \mathbb{C}$.
Παίρνουμε $n = 1$. Τότε $a_1\overline{a_1}F(x_1 - x_1) \geq 0$, άρα $|a_1|^2F(0) \geq 0$, οπότε $F(0) \geq 0$.
Τώρα παίρνουμε $n = 2$ και $x_1 = x, x_2 = 0$. Τότε

$$\sum_{m=1}^{2}\sum_{n=1}^{2} a_m\overline{a_n}F(x_m - x_n) \geq 0$$

άρα

$$a_1\overline{a_1}F(x_1 - x_1) + a_1\overline{a_2}F(x_1 - x_2) + a_2\overline{a_1}F(x_2 - x_1) + a_2\overline{a_2}F(x_2 - x_2) \geq 0$$

άρα

$$|a_1|^2F(0) + a_1\overline{a_2}F(x) + a_2\overline{a_1}F(-x) + |a_2|^2F(0) \geq 0$$

άρα

$$F(0)\big(|a_1|^2 + |a_2|^2\big) + a_1\overline{a_2}F(x) + a_2\overline{a_1}F(-x) \geq 0. \tag{4.2}$$

Αν πάρουμε $a_2 = 1$ στην (4.2):

$$F(0)\big(|a_1|^2 + 1\big) + a_1F(x) + \overline{a_1}F(-x) \geq 0.$$

Όμως $F(0) \geq 0$, άρα $F(0) \in \mathbb{R}$, οπότε

$$a_1 F(x) + \overline{a_1} F(-x) \in \mathbb{R} \quad \text{για κάθε } a_1 \in \mathbb{C}. \tag{4.3}$$

Αν πάρουμε $a_1 = 1$ στην (4.3):

$$F(x) + F(-x) = A \in \mathbb{R}.$$

Αν πάρουμε $a_1 = i$ στην (4.3):

$$iF(x) - iF(-x) \in \mathbb{R}$$

άρα

$$F(x) - F(-x) = iB, B \in \mathbb{R}.$$

Συνεπώς $F(x) = \frac{A}{2} + i\frac{B}{2}$ και $F(-x) = \frac{A}{2} - i\frac{B}{2}$. Δηλαδή $F(-x) = \overline{F(x)}$.
Υποθέτουμε ότι $F(0) = 0$. Τότε, για $a_1 = 1, a_2 = -F(x)$ στην (4.2):

$$\overline{\big(-F(x)\big)} F(x) + \big(-F(x)\big) F(-x) \geq 0$$

άρα

$$-2\big|F(x)\big|^2 \geq 0$$

άρα

$$F(x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Τότε όντως $\big|F(x)\big| \leq F(0)$.
Τώρα υποθέτουμε ότι $F(0) > 0$. Αν πάρουμε $a_1 = F(0), a_2 = -F(x)$ στην (4.2):

$$F(0)\Big(\big|F(0)\big|^2 + \big|F(x)\big|^2\Big) - F(x)F(0)\overline{F(x)} - F(-x)F(0)F(x) \geq 0$$

άρα

$$F(0)\Big(\big(F(0)\big)^2 + \big|F(x)\big|^2\Big) \geq 2F(0)\big|F(x)\big|^2.$$

Όμως, επειδή $F(0) > 0$,

$$\big(F(0)\big)^2 + \big|F(x)\big|^2 \geq 2\big|F(x)\big|^2$$

άρα

$$\big|F(x)\big|^2 \leq \big(F(0)\big)^2$$

άρα

$$\big|F(x)\big| \leq F(0).$$

□

ΛΗΜΜΑ 7. *Έστω $F \in P$. Για κάθε $\epsilon > 0$ θεωρούμε*

$$G(x) = e^{-\epsilon x^2} F(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Τότε $G \in P$,

Απόδειξη. Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 3 για $\frac{1}{4\epsilon}$ και έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{4\epsilon}t^2} dt = (4\pi\epsilon)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2\epsilon}.$$

Άρα

$$e^{-\epsilon x^2} = \frac{1}{2(\pi\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\epsilon}} e^{itx} dt.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} 2(\pi\epsilon)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n} G(x_m - x_n) &= \sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n} 2(\pi\epsilon)^{\frac{1}{2}} e^{-\epsilon(x_m-x_n)^2} F(x_m - x_n) \\ &= \sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n} F(x_m - x_n) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\epsilon}} e^{it(x_m-x_n)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{4\epsilon}} \Big(\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} (a_m e^{itx_m})\overline{(a_n e^{itx_n})} F(x_m - x_n) \Big) dt. \end{aligned}$$

Το $\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s}(a_m e^{itx_m})\overline{(a_n e^{itx_n})}F(x_m - x_n)$ είναι της μορφής $\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} b_m\overline{b_n}F(x_m - x_n)$ άρα είναι μη αρνητικό για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αφού $F \in P$.
Οπότε $\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} a_m\overline{a_n}G(x_m - x_n) \geq 0$, άρα $G \in P$. □

ΛΗΜΜΑ 8. *Έστω $F \in L^1 \cap P$. Τότε υπάρχει $\phi \in L^2$ τέτοια ώστε*

$$(a) F = \hat{\phi}$$

$$(b) 2\pi\phi(x) = \hat{F}(-x) \quad \textit{σχεδόν παντού}$$

$$(c) \phi(x) \geq 0 \quad \textit{σχεδόν παντού.}$$

Απόδειξη. Καθώς $F \in P$, έχουμε ότι

$$\sum_{m=1}^{s}\sum_{n=1}^{s} e^{ix(u_m-u_n)} F(u_m - u_n) \geq 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad \text{για κάθε } u_1, ..., u_s \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Ολοκληρώνουμε το αριστερό μέλος της ανισότητας ως προς κάθε u_j μεταξύ 0 και N, όπου $N \in \mathbb{N}$.
Οι όροι για τους οποίους έχουμε ότι $m = n$ μας δίνουν:

$$\begin{aligned} \int_0^N ... \int_0^N \Big(\sum_{n=1}^{s} e^{ix0} F(0) \Big) du_1...du_s &= \int_0^N ... \int_0^N \big(sF(0) \big) du_1...du_s \\ &= \int_0^N ... \int_0^N \big(NsF(0) \big) du_2...du_s \\ &= ... = N^s sF(0). \end{aligned}$$

Οι όροι για τους οποίους έχουμε ότι $m \neq n$ μας δίνουν: Για κάθε $m, n = 1, 2, ..., s$

$$\int_0^N \int_0^N e^{ix(u_m-u_n)} F(u_m - u_n) du_m du_n = \int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)} F(t-u) dt du.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_0^N \dots \int_0^N & e^{ix(u_m-u_n)}F(u_m-u_n)du_1...du_s \\ &= \int_0^N \dots \int_0^N e^{ix(u_m-u_n)}F(u_m-u_n)du_m du_n du_1...du_s \\ &= \int_0^N \dots \int_0^N \Big(\int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu \Big) \underbrace{du_1...du_s}_{s-2} \\ &= A_N N^{s-2}\end{aligned}$$

όπου $A_N = \int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu$. Οπότε:

$$\begin{aligned}\sum_{m,n=1,m\neq n}^{s} \int_0^N \dots \int_0^N & e^{ix(u_m-u_n)}F(u_m-u_n)du_1...du_s = \\ &= \sum_{m,n=1,m\neq n}^{s} A_N N^{s-2} \\ &= (s-1)sA_N N^{s-2} \\ &= s(s-1)N^{s-2}\int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν ολοκληρώσουμε την (4.4) όπως είπαμε, θα έχουμε συνολικά ότι

$$N^s sF(0) + s(s-1)N^{s-2}\int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu \geq 0$$

και επειδή $s(s-1)N^{s-1} > 0$,

$$\frac{F(0)N}{s-1} + \frac{1}{N}\int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu \geq 0.$$

Παίρνοντας όριο για $s \to +\infty$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{N}\int_0^N \int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Όμως

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\int_0^N\int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dtdu\\
&\quad=\frac{1}{N}\int_0^N\Big(\int_0^N e^{ix(t-u)}F(t-u)dt\Big)du\\
&\quad=\frac{1}{N}\int_0^N\Big(\int_{-u}^{N-u} e^{ixt}F(t)dt\Big)du\\
&\quad=\frac{1}{N}\int_0^N\Big(\int_0^{N-t} e^{ixt}F(t)du\Big)dt+\frac{1}{N}\int_{-N}^0\Big(\int_{-t}^{N} e^{ixt}F(t)du\Big)dt\\
&\quad=\frac{1}{N}\int_0^N(N-t)e^{ixt}F(t)dt+\frac{1}{N}\int_{-N}^0(N+t)e^{ixt}F(t)dt\\
&\quad=\int_0^N(1-\frac{t}{N})e^{ixt}F(t)dt+\int_{-N}^0(1+\frac{t}{N})e^{ixt}F(t)dt\\
&\quad=\int_{-N}^N(1-\frac{|t|}{N})e^{ixt}F(t)dt\\
&\quad=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}F(t)\Delta_N(t)dt.
\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}F(t)\Delta_N(t)dt\geq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Αφού

$$\lim_{N\to+\infty}\Delta_N(x)=1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$|e^{ixt}F(t)\Delta_N(t)|=|F(t)|\big(1-\frac{|t|}{N}\big)\leq|F(t)|,$$

από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}F(t)\Delta_N(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}F(t)dt,$$

οπότε

$$\hat{F}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ixt}F(t)dt\geq 0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Από το Λήμμα 6,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|^2dt\leq\int_{-\infty}^{+\infty}F(0)|F(t)|dt=F(0)\int_{-\infty}^{+\infty}|F(t)|dt<+\infty$$

άρα $F\in L^2$.
Συνεπώς, από το Πόρισμα 9 γνωρίζουμε πως υπάρχει $\phi\in L^2$ τέτοια ώστε $F=\hat{\phi}$. Αποδείξαμε λοιπόν το (a).
Από το Πόρισμα 8,

$$2\pi\phi(x)=\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N}e^{-ixt}F(t)dt \quad \text{το όριο στον } L^2.$$

Όμως $F \in L^1$, άρα το $\lim_{N\to+\infty}\int_{-N}^{N} e^{-ixt}F(t)dt$ υπάρχει για κάθε x και είναι ίσο με το $\hat{F}(-x)$. Άρα

$$2\pi\phi(x) = \hat{F}(-x) \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξαμε λοιπόν και το (b).
Τέλος, αφού έχουμε δείξει ότι $\hat{F}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\phi(x) = \frac{\hat{F}(-x)}{2\pi} \geq 0 \quad \text{σχεδόν παντού}$$

άρα αποδείξαμε και το (c). □

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος του Bochner.

Απόδειξη. (του Θεωρήματος 50)
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$F_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}}F(x).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7 για $\epsilon = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι $F_n \in P$. Επιπλέον, από το Λήμμα 6, η F είναι φραγμένη, άρα $F_n \in L^1$. Τότε, από το Λήμμα 8, υπάρχουν $\phi_n \in L^2$ τέτοιες ώστε

$$F_n = \hat{\phi}_n$$

$$2\pi\phi_n(x) = \hat{F}_n(-x) \quad \text{σχεδόν παντού}$$

$$\phi_n(x) \geq 0 \quad \text{σχεδόν παντού.}$$

Επιλέγουμε κάποιο $N \in \mathbb{N}$. Τότε

$$2\pi\delta_N(x-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x-t)}\Delta_N(u)du \quad \text{για κάθε } x, t \in \mathbb{R}.$$

Άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(x-t)F_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iu(x-t)}\Delta_N(u)dudt.$$

Αφού $F_n, \Delta_N \in L^1$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(t)||e^{iu(x-t)}||\Delta_N(u)|dudt &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(t)|\int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_N(u)|dudt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F_n(t)|dt\int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_N(u)|du \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

Άρα μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(x-t)F_n(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\Delta_N(u)\int_{-\infty}^{+\infty} F_n(t)e^{-iut}dtdu \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\Delta_N(u)\hat{F}_n(-u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\Delta_N(u)2\pi\phi_n(u)du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux}\Delta_N(u)\phi_n(u)du.\end{aligned}$$

Για $x = 0$ παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(-t)F_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_N(u)\phi_n(u)du$$

άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_N(u)\phi_n(u)du \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(-t)|F_n(t)|dt.$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_N(u)\phi_n(u)du &\leq F_n(0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_N(-t)dt \\ &= F_n(0)\|\delta_N\|_1 \\ &= F_n(0) \\ &= F(0).\end{aligned}$$

$$\lim_{N\to+\infty} \Delta_N(u)\phi_n(u) = \lim_{N\to+\infty} \big(1 - \frac{|u|}{N}\big)\phi_n(u) = \phi_n(u)$$

οπότε από Fatou

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(u)du &\leq \liminf_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_N(u)\phi_n(u)du \\ &\leq F(0) \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Άρα $\phi_n \in L^1$ και $\|\phi_n\|_1 \leq F(0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε μέτρο Borel στο $\mathbb{R}$ μ_n με τύπο

$$\mu_n(E) = \int_E \phi_n(t)dt \quad \text{για κάθε } E \in \mathcal{B}.$$

Προφανώς,

$$\mu_n(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} \phi_n(t)dt = \|\phi_n\|_1 \leq F(0)$$
$$\|\mu_n\| = |\mu_n|(\mathbb{R}) = \mu_n(\mathbb{R}) \leq F(0).$$

Η $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι λοιπόν ακολουθία στην κλειστή μπάλα με ακτίνα $F(0)$ στο σύνολο των μιγαδικών μέτρων Borel $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \quad : f \text{ συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ και } f(x) \to 0 \text{ όταν } x \to \pm\infty\}$$

Θεωρούμε

$$\begin{aligned}T : \mathcal{M}(\mathbb{R}) &\to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})^* \\ \mu &\to T(\mu) = l_\mu\end{aligned}$$

με

$$l_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}).$$

Το l_μ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στο $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

$$|l_\mu(f)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)|d|\mu|(t) \leq \|f\|_\infty|\mu|(\mathbb{R}) = \|f\|_\infty\|\mu\|$$

άρα
$$\|l_\mu\| \leq \|\mu\|.$$
Αποδεικνύεται ότι $\|l_\mu\| = \|\mu\|$.
Η T είναι γραμμική απεικόνιση και ισομετρία, γιατί
$$\|T(\mu)\| = \|l_\mu\| = \|\mu\|.$$

Από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, είναι και επί. Άρα οι χώροι $\mathcal{M}(\mathbb{R}), \mathcal{C}_0(\mathbb{R})^*$ είναι ισομετρικοί.
Για τα μ_n που ορίσαμε προηγουμένως έχουμε ότι $\|T(\mu_n)\| = \|l_{\mu_n}\| = \|\mu_n\| \leq F(0)$. Έχουμε λοιπόν ότι η $(l_{\mu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία στην κλειστή μπάλα με ακτίνα $F(0)$ στον $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})^*$. Από το Θεώρημα Banach-Alaoglou, η μπάλα αυτή είναι w*-συμπαγής. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(l_{\mu_{n_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε
$$l_{\mu_{n_k}} \to l_\mu \quad \text{w* για κάποιο } l_\mu \text{ σε αυτή τη μπάλα.}$$

Δηλαδή
$$l_{\mu_{n_k}}(f) \to l_\mu(f) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \quad \text{όταν } k \to +\infty.$$
Οπότε
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_{n_k}(t) \to \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \quad \text{για κάθε } f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \quad \text{όταν } k \to +\infty.$$

Όπως είχαμε ορίσει τα μέτρα Borel μ_{n_k},
$$\mu_{n_k}(E) = \int_E \phi_{n_k}(t)dt.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu_{n_k}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_{n_k}(t)dt \quad \text{για κάθε } f \text{ φραγμένη Borel μετρήσιμη.}$$

Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$,
$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\phi_{n_k}(t)dt \to \int_{\mathbb{R}} f(t)d\mu(t) \quad \text{όταν } k \to +\infty.$$

Συνεπώς
$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\phi_{n_k}(t)dt \to \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}d\mu(t) \quad \text{όταν } k \to +\infty.$$
Όμως
$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\phi_{n_k}(t)dt = \hat{\phi}_{n_k}(x) = F_{n_k}(x) = e^{-\frac{x^2}{n_k}}F(x) \to F(x) \quad \text{όταν } k \to +\infty.$$

Άρα
$$F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt}d\mu(t) \quad \text{για σχεδόν κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

□