Παπαγεωργίου Φανή

Μεταπτυχιακή Εργασία

Επιβλέπων καθηγητής: Μιχάλης Παπαδημητράκης

Εαρινό Εξάμηνο 2016

Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Κατεύθυνση: Θεωρητικά Μαθηματικά

Μεταπτυχιακό πρόγραμμα : Μαθηματικά και Εφαρμογές τους

Επιτροπή κρίσης:

Μ. Παπαδημητράκης, Θ. Μήτσης, Π. Γαλανόπουλος

Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ $\mathbb{H}_1^0$ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BMO

(Με Μιγαδικές Μεθόδους)

Ευχαριστίες.

Θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου, Μιχάλη Παπαδημητράκη, για την στηριξή του καθ'όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, δεν θα μπορούσα να φτάσω μέχρι εδώ χωρίς την πολύτιμη βοήθειά του.

Και σίγουρα, θέλω να δώσω ένα μεγάλο ευχαριστώ στην μητέρα μου, Μαρία, και στον πατέρα μου, Γιώργο, που πάντα με στηρίζαν και συνεχίζουν να το κάνουν.

Περιεχόμενα

1. Ο ΔΥΪΚΟΣ ΤΟΥ $\mathbb{H}_1^0$ ΩΣ ΧΩΡΟΣ ΠΗΛΙΚΟ.

Θα εργαστούμε στον μοναδιαίο δίσκο. Παρόμοια και, κατά μία έννοια, πιο συμμετρικά αποτελέσματα παίρνουμε για το άνω ημιεπίπεδο $\Im z > 0$ με ανάλογες μεθόδους. Κοιτώντας τις συνοριακές τιμές $f(e^{i\theta})$ με $f \in \mathbb{H}_1$, βλέπουμε ότι ο $\mathbb{H}_1$ μπορεί να θεωρηθεί ως $\|\cdot\|_1$- κλειστός υπόχωρος του $\mathbb{L}_1(\mathbb{T})$ (δείτε Παράρτημα Β).

Συμβολισμός: $\mathbb{H}_1^0 = \{f \in \mathbb{H}_1 : \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})d\theta = 0\} = z\mathbb{H}_1.$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ο δυϊκός του $\mathbb{H}_1^0$ είναι ο χώρος πηλίκο $\mathbb{L}_\infty/\mathbb{H}_\infty$.

Απόδειξη:
Έστω $L \in \mathbb{L}_\infty$ και $f \in \mathbb{H}_\infty$. Τότε $[L] = \{L + h | h \in \mathbb{H}_\infty\} = [L + f]$ και ορίζουμε :

$$\Lambda(g) := \int_{-\pi}^{\pi} (L(e^{i\theta}) + f(e^{i\theta}))g(e^{i\theta})d\theta, \ \ g \in \mathbb{H}_1^0 \quad (*).$$

Τότε η $\Lambda(g)$ είναι γραμμική συνάρτηση του g και εξαρτάται μόνο από το σύμπλοκο $[L]$ και όχι από την L και την f, αφού:

αν $f_1, f_2 \in \mathbb{H}_\infty$ και $g \in \mathbb{H}_1^0$ τότε $(f_1 - f_2)g \in \mathbb{H}_1^0$ και άρα ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f_1 - f_2)(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta = 0 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} (L(e^{i\theta}) + f_1(e^{i\theta}))g(e^{i\theta})d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (L(e^{i\theta}) + f_2(e^{i\theta}))g(e^{i\theta})d\theta\,,$$

με $L \in \mathbb{L}_\infty$.

Επίσης,

$$|\Lambda g| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |L(e^{i\theta}) + f(e^{i\theta})||g(e^{i\theta})|d\theta \leq \|L + f\|_\infty \|g\|_1\,,$$

δηλαδή $\Lambda \in (\mathbb{H}_1^0)^*$.

Τώρα, έστω ένα γραμμικό συναρτησοειδές Λ στον $\mathbb{H}_1^0$. Από Hahn-Banach το Λ επεκτείνεται σε γραμμικό συναρτησοειδές $\widetilde{\Lambda}$ στον $\mathbb{L}_1$, με $\|\widetilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$ και $\widetilde{\Lambda}(g) = \Lambda(g)$ για $g \in \mathbb{H}_1^0$ και έχουμε ότι υπάρχει $L \in \mathbb{L}_\infty$ τέτοιο ώστε $\widetilde{\Lambda}(g) = \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta$, $g \in \mathbb{L}_1$ και $\|\widetilde{\Lambda}\| = \|L\|_\infty$. Τότε , αν περιορίσουμε το $\widetilde{\Lambda}$ στον $\mathbb{H}_1^0$ έχουμε ότι

$\Lambda(g) = \int_{-\pi}^{\pi} L(e^{i\theta})g(e^{i\theta})d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} (L(e^{i\theta}) + f(e^{i\theta}))g(e^{i\theta})d\theta, \;\; g \in \mathbb{H}_1^0,$ δηλαδή το Λ δίνεται από το σύμπλοκο $[L]$ και άρα είναι της μορφής $(*)$.

Μένει να δείξουμε ότι $\|\Lambda\| = \|[L]\|$.

Έχουμε ότι,

$|\Lambda(g)| \leq \|L+f\|_\infty \|g\|_1 \Rightarrow \|\Lambda\| = \sup\limits_{g\in\mathbb{H}_1^0, \|g\|_1=1} |\Lambda(g)| \leq \|L+f\|_\infty, \forall f \in \mathbb{H}_\infty \Rightarrow$
$\|\Lambda\| \leq \inf\limits_{f\in\mathbb{H}_\infty} \|L+f\|_\infty = \|[L]\|$.

Δηλαδή, $\|\Lambda\| \leq \|[L]\|$. Επιπλέον,

$\|[L]\| \leq \|L+f\|_\infty \leq \|L\|_\infty + \|f\|_\infty, \; \forall f \in \mathbb{H}_\infty \Rightarrow \|[L]\| \leq \|L\|_\infty = \|\widetilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$.

Δηλαδή, $\|[L]\| \leq \|\Lambda\|$.

Οπότε από τις δύο παραπάνω ανισότητες παίρνουμε την ισότητα των νορμών και έχουμε το ζητούμενο.

2. Ο ΔΥΪΣΜΟΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ $\mathbb{H}_1^0$ ΚΑΙ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ BMO.

Σε ολόκληρο το κεφάλαιο αυτό θα εργαστούμε στον μοναδιαίο δίσκο $\{|z| < 1\}$. Στο κεφάλαιο 1 είδαμε ότι ο $\mathbb{H}_1^0 = \{zf(z) : f \in \mathbb{H}_1\}$ έχει δυικό τον χώρο πηλίκο $\mathbb{L}_\infty/\mathbb{H}_\infty$. Στα τέλη του 1960 ο C.Fefferman έδειξε ότι ο δυϊκός του $\Re\mathbb{H}_1^0$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας πραγματικός χώρος συναρτήσεων και όχι απλά ως ένας χώρος πηλίκο. Οι συναρτήσεις αυτού του χώρου χαρακτηρίζονται από μία *απλή γεωμετρική ιδιότητα*, συγκεκριμένα , ότι οι συναρτήσεις αυτές έχουν *φραγμένη μέση ταλάντωση (bounded mean oscillation)*. Αυτή η ιδιότητα ανακαλύφθηκε από τους Nirenberg και John.

A. Ο δυϊκός του $\Re\mathbb{H}_1^0$.

Αν $\psi(\theta) \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, ξέρουμε ότι, από Θεώρημα 5 του Παραρτήματος Β, η αρμονική της συζυγής,

$$\widetilde{\psi}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \fint_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(\theta - t)}{\tan(\frac{t}{2})} dt = \frac{1}{2\pi} \fint_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(t)}{\tan(\frac{\theta - t}{2})} dt$$

υπάρχει σ.π. και ανήκει στον $\mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ για όλα τα $1 \leq p < \infty$.

ΛΗΜΜΑ 2.1: Έστω $\psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$. Τότε για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$, το όριο

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\psi}(\theta)\Re f(re^{i\theta})d\theta$$

υπάρχει και είναι ίσο με,

$$-\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\Im f(e^{i\theta})d\theta$$

.

Απόδειξη:
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω ψ πραγματική και έστω $f \in \mathbb{H}_1^0$. Αφού, για παράδειγμα (από Θεώρημα 4, Παράρτημα B) $\psi + i\widetilde{\psi} \in \mathbb{H}_2$, έχουμε ότι η συνάρτηση $(\psi(\theta) + i\widetilde{\psi}(\theta))f(re^{i\theta})$ ανήκει στον $\mathbb{H}_1^0$, άρα από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\psi(\theta) + i\widetilde{\psi}(\theta))f(re^{i\theta})d\theta = 0$$

Παίρνοντας φανταστικά μέρη βρίσκουμε ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \widetilde{\psi}(\theta)\Re f(re^{i\theta})d\theta = -\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\Im f(re^{i\theta})d\theta.$$

Και αφού $f \in \mathbb{H}_1$ έχουμε, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|d\theta \longrightarrow 0$, καθώς $r \to 1$ (από Θεώρημα 2, Παράρτημα B).

Οπότε, αφού $\psi \in \mathbb{L}_\infty$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\Im f(re^{i\theta})d\theta \longrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \psi(\theta)\Im f(e^{i\theta})d\theta,$$

καθώς $r \to 1$, και έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1: (*Τα πραγματικά γραμμικά συναρτησοειδή στον* $\mathbb{H}_1^0$.)
Κάθε πραγματικό γραμμικό συναρτησοειδές L στον $\mathbb{H}_1^0$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή,

$$Lf = \lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta))\Re f(re^{i\theta})d\theta,$$

με $f \in \mathbb{H}_1^0$, και $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές.

Αντιστρόφως, αν $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές, τότε το όριο

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta))\Re f(re^{i\theta})d\theta$$

υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και ορίζει ένα πραγματικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{H}_1^0$.

Απόδειξη:
Έστω L ένα πραγματικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{H}_1^0$. Τότε, για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$,
$Lf = \Re\Lambda f$, όπου Λ ένα μιγαδικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{H}_1^0$. (Θεώρημα Bohneblust-Sobczyk) Από το Κεφάλαιο 1 ,το Λ ταυτίζεται με ένα στοιχείο του $\mathbb{L}_\infty/\mathbb{H}_\infty$, έτσι υπάρχει μια 2π-περιοδική συνάρτηση στον $\mathbb{L}_\infty$, έστω $\phi + i\psi$ με ϕ, ψ πραγματικές, τέτοια ώστε

$$\Lambda f = \int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + i\psi(\theta))f(e^{i\theta})d\theta \text{ , } f \in \mathbb{H}_1^0.$$

Παίρνοντας πραγματικά μέρη έχουμε,

$$Lf = \int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta)\Re f(e^{i\theta}) - \psi(\theta)\Im f(e^{i\theta}))d\theta. \quad (1)$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 2.1 και το Θεώρημα 2 του Παραρτήματος Β, το οποίο ήδη χρησιμοποιήθηκε παραπάνω, η (1) ισούται με,

$$\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta))\Re f(re^{i\theta})d\theta \text{ ,}$$

και έχουμε το ζητούμενο.

Το αντίστροφο βγαίνει άμεσα από το Λήμμα 2.1 και από το Θεώρημα 2,Παράρτημα Β.

Σχόλιο 2.1: Δίνοντας ένα $\Re f$ υπάρχει μοναδικό $f \in \mathbb{H}_1^0$. Επομένως, μπορούμε να δούμε τον $\Re\mathbb{H}_1^0$ ως έναν πραγματικό χώρο Banach με νόρμα, $\|\Re f\| = \|f\|_1,\ f \in \mathbb{H}_1^0$.
Ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$ αντιστοιχεί σε ένα πραγματικό γραμμικό συναρτησοειδές στον $\mathbb{H}_1^0$ και αντίστροφα.

Από το Θεώρημα 2.1, ο (πραγματικός) δυϊκός του $\Re\mathbb{H}_1^0$ ταυτίζεται με το σύνολο αθροισμάτων $\Re\mathbb{L}_\infty(\mathbb{T}) + \widetilde{\Re\mathbb{L}}_\infty(\mathbb{T})$.
Πότε ένα άθροισμα της μορφής $\phi + \widetilde{\psi}$ αντιστοιχεί στο μηδενικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$;
Με άλλα λόγια , πότε ισχύει $\lim_{r\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta))\Re f(re^{i\theta})d\theta = 0$ για όλα τα $f \in \mathbb{H}_1^0$;
Παίρνοντας, αρχικά $f(z) = z^n$ και μετά $f(z) = iz^n$ με $n = 1, 2, 3, ..$ έχουμε ,

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta)) \left\{ \begin{array}{c} sin(n\theta) \\ cos(n\theta) \end{array} \right\} d\theta = 0 \ , \quad n = 1, 2, 3, ..$$ άρα $\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta) = c$, όπου c κάποια σταθερά. Το αντίστροφο είναι προφανές.

Επιπλέον, από το Κεφάλαιο 1, είδαμε ότι $\|\Lambda\| = \|\phi + i\psi\|_\infty$ και άρα παίρνουμε ότι $\|\Lambda\| = \|L\| = \|\phi + i\psi\|_\infty$, αφού :

το $\Lambda \in (\mathbb{H}_1^0)^*$, άρα είναι της μορφής $\Lambda f = |\Lambda f| e^{i\theta}$, με $f \in \mathbb{H}_1^0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, και άρα $|\Lambda f| = e^{-i\theta} \Lambda f = \Lambda(e^{-i\theta} f) = \Re\Lambda(e^{-i\theta} f) = L(e^{-i\theta} f)$. Οπότε, $|\Lambda f| \leq \|L\| \|e^{-i\theta} f\|_1 = \|L\| \|f\|_1$, δηλαδή $\|\Lambda\| \leq \|L\|$.

Επίσης, αφού $Lf = \Re\Lambda f$ έχουμε $|Lf| \leq |\Lambda f| \Rightarrow \|L\| \leq \|\Lambda\|$.

Έτσι έχουμε ότι:
Ο δυϊκός του $\Re\mathbb{H}_1^0$ είναι το σύνολο αθροισμάτων $\Re\mathbb{L}_\infty(\mathbb{T}) + \widetilde{\Re\mathbb{L}}_\infty(\mathbb{T})$ modulo τις σταθερές συναρτήσεις .

B. Οι συναρτήσεις BMO.

Μία συνάρτηση η οποία μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta)$, με ϕ, ψ πραγματικές, 2π-περοδικές και (ουσιωδώς) φραγμένες, μπορεί φυσικά να γραφτεί με παραπάνω από έναν τρόπους. Για αυτόν τον λόγο ο *φυσικός* χαρακτηρισμός τέτοιων αθροισμάτων είναι σημαντικός. Ο Fefferman βρήκε έναν τέτοιο χαρακτηρισμό.

Συμβολισμός: Αν $G(\theta)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ και I ένα οποιοδήποτε διάστημα, τότε γράφουμε, $G_I = \frac{1}{|I|} \int_I G(\theta) d\theta$, για την ***μέση τιμή*** της G στο I.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1: Μια τοπικά ολοκληρώσιμη, 2π-περιοδική συνάρτηση $G(\theta)$ λέμε ότι έχει ***φραγμένη μέση ταλάντωση (bounded mean oscillation)*** και θα γράφουμε $G \in BMO$, αν $\frac{1}{|I|} \int_I |G(\theta) - G_I| d\theta \leq C$, όπου C κάποια σταθερά, για όλα τα διαστήματα $I \subseteq \mathbb{R}$.

Αν $G \in BMO$, θα γράφουμε, $\|G\|_* := \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |G(\theta) - G_I| d\theta$, με το sup να λαμβάνεται πάνω από όλα τα διαστήματα I.

Παρατήρηση 2.1: Αν c σταθερά τότε από τον ορισμό είναι προφανές ότι, $\|c\|_* = 0$ και $\|G - c\|_* = \|G\|_*$ για $G \in BMO$.

Παρατήρηση 2.2: Για τοπικά ολοκληρώσιμες, 2π-περιοδικές συναρτήσεις f, **προκειμένου να εξετάσουμε ότι $\|f\|_* < \infty$, αρκεί να ελέγξουμε ότι $\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(\theta) - f_I| d\theta$ είναι φραγμένο πάνω από όλα τα διαστήματα I μήκους $\leq$ από ένα αυθαίρετο δοσμένο** $l > 0$.

Αφού:

Έστω $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$ και έστω διάστημα με $l < |I| \leq 2\pi$. Χωρίζουμε το σε n ίσα υποσδιαστήματα I_k, δηλαδή $I = \cup_{k=1}^{n} I_k$ με $|I_k| = \frac{1}{n}|I|$, $k = 1, 2, 3, .., n$ ώστε $\frac{1}{n}|I| \leq l < \frac{1}{n-1}|I|$.

Έστω τώρα,

$$\frac{1}{|I_k|}\int\limits_{I_k} |f(\theta) - f_{I_k}| d\theta \leq M \ ,$$

με M κάποια σταθερά.

Τότε,

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(\theta) d\theta = \frac{1}{|I|}\int\limits_{\cup_{k=1}^{n}} f(\theta) d\theta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|I_k|}\int\limits_{I_k} f(\theta) d\theta = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_{I_k} \ .$$

Οπότε,

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f - f_I| d\theta = \frac{1}{|I|}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{I_k} |f(\theta) - f_I| d\theta \leq$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|I_k|}\int\limits_{I_k} |f(\theta) - f_{I_k}| d\theta + \frac{1}{|I|}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|I_k|}\int\limits_{I_k} |f_{I_k} - f_I| d\theta \leq M + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f_{I_k} - f_I| \quad (1).$$

Τώρα,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f_{I_k} - f_I| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |f_{I_k} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{I_j}| = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{I_k} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_{I_j}| =$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (f_{I_k} - f_{I_j})| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |f_{I_k} - f_{I_j}| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (|f_{I_k}| + |f_{I_j}|) \quad (2).$$

Αν, $\Lambda = \max\limits_{k=1,2,..,n} |f_{I_k}|$, τότε: (2) $\leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 2\Lambda = 2\Lambda$.

Άρα η (1) γίνεται,

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I |f(\theta) - f_I| d\theta \leq M + 2\Lambda = K \ .$$

Και άρα έχουμε δείξει ότι, $\|f\|_* < \infty$.

ΛΗΜΜΑ 2.2: Έστω I ένα οποιοδήποτε διάστημα και $G \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Τότε αν c κάποια σταθερά,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |G(t) - G_I|dt \leq \frac{2}{|I|}\int_I |G(t) - c|dt \ .$$

Απόδειξη:

Γράφουμε, $G(t) - G_I = (G(t) - c) - (G_I - c)$. Όμως, $|G_I - c| \leq \frac{1}{|I|}\int_I |G(t) - c|dt$.

Επομένως,

$$\frac{1}{|I|}\int_I |G(t) - G_I|dt \leq \frac{1}{|I|}\int_I |G(t) - c|dt + |G_I - c| \leq \frac{2}{|I|}\int_I |G(t) - c|dt.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2: Έστω $G = \phi + \widetilde{\psi}$, με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$. Τότε, $G \in BMO$.

Απόδειξη:

Έχουμε από το Λήμμα 2.2 (με $c = 0$),

$$\frac{1}{|J|}\int_J |\phi(\theta) - \phi_J|d\theta \leq \frac{2}{|J|}\int_J |\phi(\theta)|d\theta \leq 2\|\phi\|_\infty. \text{ Άρα, } \|\phi\|_* \leq 2\|\phi\|_\infty.$$

Οπότε αρκεί να δείξουμε ότι $\|\widetilde{\psi}\|_* < \infty$ και θα έχουμε το ζητούμενο.

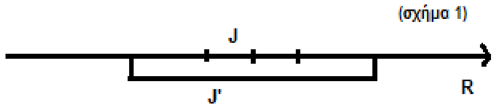
Από Παρατήρηση 2.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}(t) - \widetilde{\psi}_J|dt \leq c < \infty \ ,$$

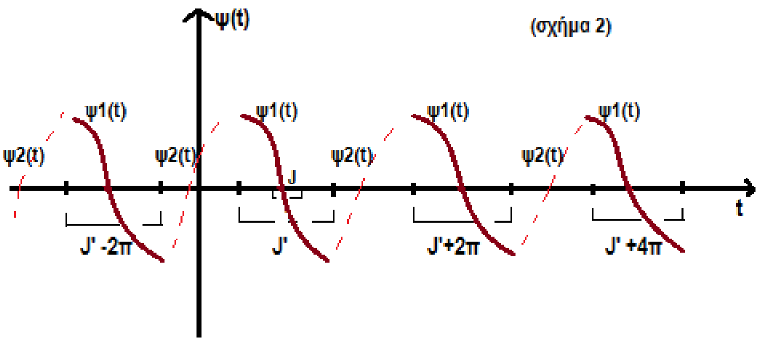
όπου c κάποια σταθερά, για κάθε διάστημα J μήκους $\leq \frac{2\pi}{3}$.

Έστω διάστημα J μήκους $\leq \frac{2\pi}{3}$, J' ένα διάστημα με το ίδιο μέσο με το J και με τριπλάσιο μήκος.

(σχήμα 1)



Έπειτα παίρνουμε, $\psi_1(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in \bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty} (J' + 2\pi n) \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$ και $\psi_2(t) = \psi(t) - \psi_1(t)$.



Αφού $\widetilde{\psi} = \widetilde{\psi}_1 + \widetilde{\psi}_2$ και $\widetilde{\psi}_J = (\widetilde{\psi}_1)_J + (\widetilde{\psi}_2)_J$ έχουμε,

$$\frac{1}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}(t) - \widetilde{\psi}_J| dt \leq \frac{1}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}_1(t) - (\widetilde{\psi}_1)_J| dt + \frac{1}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}_2(t) - (\widetilde{\psi}_2)_J| dt = A + B.$$

Από το Λήμμα 2.2 (με $c = 0$) έχουμε,

$$A \leq \frac{2}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}_1(t)| dt \,.$$

Και από Cauchy-Schwartz και ανισότητα Hilbert (Θεώρημα 4, Παράρτημα Β) έχουμε ,

$$\int_J |\widetilde{\psi}_1(t)| dt \leq \left(|J| \int_J |\widetilde{\psi}_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(|J| \int_{-\pi}^{\pi} |\widetilde{\psi}_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(|J| \int_0^{2\pi} |\psi_1(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)\,.$$

Αφού, στο $[0, 2\pi]$, η $\psi_1(t)$ μηδενίζεται έξω από διάστημα μήκους $|J'| = 3|J|$ έχουμε,

$$(1) \;=\; \left(|J| \int_{J'} |\psi(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq (|J| 3|J| \|\psi\|_\infty^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}|J| \|\psi\|_\infty.$$ Επομένως,

$$A \leq 2\sqrt{3}\|\psi\|_\infty \,.$$

Τώρα, πάλι από το Λήμμα 2.2 έχουμε,

$$B \leq \frac{2}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}_2(t) - c| dt \,,$$

όπου εδώ παίρνουμε $c = \widetilde{\psi}_2(m)$,με m να είναι το μέσο του J.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $J = (-\alpha, \alpha)$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, τότε $m = 0$ δηλαδή $c = \widetilde{\psi}(0)$ και, στο $[-\pi, \pi]$, η $\psi_2(t)$ μηδενίζεται στο $[-3\alpha, 3\alpha]$.

Έτσι παίρνουμε,

$$c = \widetilde{\psi}_2(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{3\alpha \leq |t| \leq \pi} \frac{\psi(t)}{tan(\frac{t}{2})} dt \,.$$

Οπότε έχουμε,

$$B \leq \frac{2}{|J|}\int_J |\widetilde{\psi}_2(\theta) - c| d\theta = \frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\widetilde{\psi}_2(\theta) - \widetilde{\psi}_2(0)| d\theta \leq$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}|\frac{1}{2\pi}\int_{3\alpha\leq|t|\leq\pi}[\frac{1}{tan(\frac{\theta-t}{2})}+\frac{1}{tan(\frac{t}{2})}]\psi(t)dt|d\theta\leq\frac{\|\psi\|_\infty}{2\pi\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{2\alpha\leq|t|\leq\pi}|\frac{1}{tan(\frac{\theta-t}{2})}+\frac{1}{tan(\frac{t}{2})}|dtd\theta$$
(2) .

Επιπλέον,
$$\frac{1}{tan(\frac{\theta-t}{2})}+\frac{1}{tan(\frac{t}{2})}=\frac{1+tan(\frac{\theta}{2})tan(\frac{t}{2})}{tan(\frac{\theta}{2})-tan(\frac{t}{2})}+\frac{1}{tan(\frac{t}{2})}=\frac{tan(\frac{\theta}{2})sec^2(\frac{t}{2})}{tan(\frac{t}{2})[tan(\frac{\theta}{2})-tan(\frac{t}{2})]},$$
άρα για $-\alpha\leq\theta\leq\alpha$ έχουμε,

$$\int_{2\alpha\leq|t|\leq\pi}|\frac{1}{tan(\frac{\theta-t}{2})}+\frac{1}{tan(\frac{t}{2})}|dt=2|tan(\frac{\theta}{2})|\int_{2\alpha\leq|t|\leq\pi}\frac{dtan(\frac{t}{2})}{|tan^2(\frac{t}{2})-tan(\frac{t}{2})tan(\frac{\theta}{2})|}\leq 8|tan(\frac{\theta}{2})|\int_{tan\alpha}^{\infty}\frac{d\tau}{\tau^2}$$
$$\leq\frac{8|tan(\frac{\theta}{2})|}{tan\alpha}.$$

Άρα,
$$(2)\leq\frac{4\|\psi\|_\infty}{\pi\alpha tan\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}|tan(\frac{\theta}{2})|d\theta\leq\frac{4}{\pi}\|\psi\|_\infty.$$
Δηλαδή,
$$B\leq\frac{4}{\pi}\|\psi\|_\infty\ .$$

Επομένως έχουμε να ισχύει ότι,
$$\frac{1}{|J|}\int_J|\widetilde{\psi}(t)-\widetilde{\psi}_J|dt\leq(2\sqrt{3}+\frac{4}{\pi})\|\psi\|_\infty,$$

με $|J|\leq\frac{2\pi}{3}$, δηλαδή $\|\widetilde{\psi}\|_*<\infty$ και άρα έχουμε το ζητούμενο.

Παρατήρηση 2.3: Από τους παραπάνω υπολογισμούς (στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2) σε συνδιασμό με την Παρατήρηση 2.2, έχουμε ότι:
$\|\phi+\widetilde{\psi}\|_*\leq K(\|\phi\|_\infty+\|\psi\|_\infty)$, για ϕ,ψ 2π-περιοδικές, με να είναι *αυστηρά αριθμητική* σταθερά.

C. Η νόρμα Garsia $\mathfrak{N}(\cdot)$.

Ο Garsia παρατήρησε ότι υπάρχει μια άλλη νόρμα για τις συναρτήσεις BMO που μπορούμε να την χειριστούμε ευκολότερα, η *νόρμα Garsia* , η οποία είναι ισοδύναμη με την νόρμα BMO $\|\cdot\|_*$.

Συμβολισμός: Αν $\phi(\theta)$ είναι τοπικά ολοκληρώσιμη και 2π-περιοδική, τότε για $|z|<1$ έχουμε,

$$U_\phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\phi(t)dt\ ,$$

με U_ϕ να είναι η ***αρμονική επέκταση*** *της* $\phi(t)$ στο $\{|z|<1\}$.

ΛΗΜΜΑ 2.3: Για $|z|<1$ ισχύει,

$$U_{\phi^2}(z)-(U_\phi(z))^2=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\phi(t)-\phi(s))^2\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}dtds.$$

Απόδειξη:
Υπολογίζουμε,

$$U_{\phi^2}(z)-(U_\phi(z))^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\phi^2(t)dt-\frac{1}{4\pi^2}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\phi(t)dt\right)^2$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}\phi^2(t)dtds-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}\phi(t)\phi(s)dtds$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}\phi^2(t)dtds+\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}\phi^2(s)dtds\ -$$

$$\frac{2}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}\phi(t)\phi(s)dtds$$

$$=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\phi(t)-\phi(s))^2\frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\frac{1-|z|^2}{|e^{is}-z|^2}dtds.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2: Αν ϕ τοπικά ολοκληρώσιμη, πραγματική και 2π-περιοδική, τότε $\mathfrak{N}(\phi):=\sup\limits_{|z|<1}\{U_{\phi^2}(z)-(U_\phi(z))^2\}^{\frac{1}{2}}$ και την $\mathfrak{N}(\phi)$ την λέμε ***νόρμα Garsia*** της ϕ, η οποία είναι πράγματι νόρμα (Λήμμα 2.4).

ΛΗΜΜΑ 2.4: Αν α πραγματική σταθερά , τότε $\mathfrak{N}(\alpha\phi)=|\alpha|\mathfrak{N}(\phi)$ και $\mathfrak{N}(\phi+\psi)\leq\mathfrak{N}(\phi)+\mathfrak{N}(\psi)$.

Απόδειξη:
Το πρώτο είναι προφανες. Το δεύτερο βγαίνει από το Λήμμα 2.3 και την τριγωνική ανισότητα των νορμών σε χώρους Hilbert. Από το Λήμμα 2.3, την ποσότητα $\{U_{\phi^2}(z)-(U_\phi(z))^2\}^{\frac{1}{2}}$,

για φιξαρισμένο z , μπορούμε να την δούμε σε χώρο Hilbert ως νόρμα του $\phi(s)-\phi(t)$ στο $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$, χρησιμοποιώντας ως θετικό μέτρο το $P(z,e^{it})P(z,e^{is})dm$, όπου m το μέτρο Lebesgue.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3: Αν $\phi,\psi\in\mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές, τότε

$$\mathfrak{N}(\phi+\widetilde{\psi})\le\sqrt{2}(\|\phi\|_\infty+\|\psi\|_\infty).$$

Απόδειξη:
Αν $|z|<1$ τότε από Λήμμα 2.3 και από Παράρτημα A (ιδιότητες του πυρήνα του Poisson) έχουμε,

$$U_{\phi^2}(z)-(U_\phi(z))^2=\frac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\phi(t)-\phi(s))^2P(z,e^{it})P(z,e^{is})dtds$$

$$\le\frac{1}{2}\sup_{-\pi\le s,t\le\pi}|\phi(t)-\phi(s)|^2\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(z,e^{it})dt\right)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(z,e^{is})ds\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sup_{-\pi\le s,t\le\pi}|\phi(t)-\phi(s)|^2=\frac{1}{2}\left(2\sup_{-\pi\le t\le\pi}|\phi(t)|^2+2\sup_{-\pi\le t\le\pi}|\phi(t)|^2\right)=2\|\phi\|_\infty^2.$$

Δηλαδή έχουμε,

$$\mathfrak{N}(\phi)\le\sqrt{2}\|\phi\|_\infty.$$

Τώρα, οι $U_\psi(z),U_{\widetilde{\psi}}(z)$ είναι οι αρμονικές επεκτάσεις των $\psi(t),\widetilde{\psi}(t)$,αντίστοιχα, στο $\{|z|<1\}$. Και αφού, $\left(U_\psi(z)+iU_{\widetilde{\psi}}(z)\right)^2=(U_\psi(z))^2-(U_{\widetilde{\psi}}(z))^2-2iU_\psi(z)U_{\widetilde{\psi}}(z)$ έχουμε ότι η $(U_\psi(z))^2-(U_{\widetilde{\psi}}(z))^2$ είναι αρμονική (και πραγματική) για $|z|<1$.

Αφού $\psi+i\widetilde{\psi}\in\mathbb{H}_p$ για κάθε $p<\infty$ (από Θεώρημα 5, Παράρτημα B), την αρμονική συνάρτηση $(U_\psi(z))^2-(U_{\widetilde{\psi}}(z))^2$ μπορούμε να την ανακτήσουμε από τις συνοριακές της τιμές $\psi^2-\widetilde{\psi}^2$ από τον τύπο του Poisson,

———-
$U_\psi(z)=P[\psi]\Rightarrow\lim_{r\to1}U_\psi(re^{i\theta})=\psi(\theta)$ (το οποίο υπάρχει σ.π.) $\Rightarrow\lim_{r\to1}(U_\psi(re^{i\theta}))^2=\psi^2(\theta)$. Όμοια, $\lim_{r\to1}(U_{\widetilde{\psi}}(re^{i\theta}))^2=\widetilde{\psi}^2(\theta)$,
———-

δηλαδή παίρνουμε ότι,

$$(U_\psi(z))^2-(U_{\widetilde{\psi}}(z))^2=U_{\psi^2-\widetilde{\psi}^2}(z)=U_{\psi^2}(z)-U_{\widetilde{\psi}^2}(z),$$

και έτσι έχουμε την χρήσιμη ταυτότητα,

$$\boxed{U_{\widetilde{\psi}^2}(z)-(U_{\widetilde{\psi}}(z))^2=U_{\psi^2}(z)-(U_\psi(z))^2}.$$

Από την ταυτότητα αυτή βλέπουμε ότι $\mathfrak{N}(\widetilde{\psi})=\mathfrak{N}(\psi)$ και ,όμοια όπως πριν, από το Λήμμα 2.3 έχουμε

$$\mathfrak{N}(\psi)\le\sqrt{2}\|\psi\|_\infty.$$

Επομένως,

$$\mathfrak{N}(\phi+\widetilde{\psi}) \le \mathfrak{N}(\phi)+\mathfrak{N}(\widetilde{\psi}) = \mathfrak{N}(\phi)+\mathfrak{N}(\psi) \le \sqrt{2}(\|\phi\|_\infty+\|\psi\|_\infty).$$

(Η ανισότητα $\mathfrak{N}(\phi) \le$ σταθερά $\|\phi\|_*$, θα αποδειχτεί στην ενότητα F , η οποία είναι συνέπεια κάποιας κάπως *λεπτής εργασίας* των Nivenberg και John, οι οποίοι είναι αυτοί που ανακαλύψαν τις συναρτήσεις BMO).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4: Έστω $\phi \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική. Τότε ισχύει ,

$$\|\phi\|_* \le K\mathfrak{N}(\phi),$$

όπου K μια σταθερά ανεξάρτητη της ϕ.

Απόδειξη:
Έστω I ένα οποιοδήποτε διάστημα, τότε από Cauchy - Schwartz έχουμε,

$$\frac{1}{|I|}\int_I|\phi(t)-\phi_I|dt \le \left(\frac{1}{|I|}\int_I(\phi(t)-\phi_I)^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και}$$

$$\frac{1}{|I|}\int_I(\phi(t)-\phi_I)^2dt = \frac{1}{|I|}\left(\frac{1}{|I|}\int_I\int_I\phi^2(t)dtds+\frac{1}{|I|}\int_I\int_I\phi(t)\phi(s)dtds-\frac{2}{|I|}\int_I\int_I\phi(t)\phi(s)dtds\right)$$

$$= \frac{1}{|I|}\left(\frac{1}{2|I|}\int_I\int_I\phi^2(t)dtds+\frac{1}{2|I|}\int_I\int_I\phi^2(s)dtds-\frac{2}{2|I|}\int_I\int_I\phi(t)\phi(s)dtds\right)$$

$$= \frac{1}{2|I|^2}\int_I\int_I(\phi(t)-\phi(s))^2dtds \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|I|}\int_I|\phi(t)-\phi_I|dt \le \left(\frac{1}{2|I|^2}\int_I\int_I(\phi(t)-\phi(s))^2dtds\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1).$$

Τώρα έστω $|I| \le 2\pi$ και , χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $I=(-\alpha,\alpha), 0<\alpha\le\pi$.
Παίρνουμε την ειδική τιμή $r=1-\sin(\frac{\alpha}{2})$ και $t\in[-\alpha,\alpha]$ και έχουμε ότι,

$$\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = \frac{(1+r)(1-r)}{(1-r)^2+4r\sin^2(\frac{t}{2})} \ge \frac{1}{5\sin(\frac{\alpha}{2})} \ge \frac{2}{5\alpha}$$

και άρα από Λήμμα 2.3 έχουμε,

$$U_{\phi^2}(r)-(U_\phi(r))^2 \ge (\frac{2}{5\alpha})^2(\frac{1}{8\pi^2})\int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha}(\phi(s)-\phi(t))^2dtds$$

$$= (\frac{1}{5\pi})^2\frac{1}{2|I|^2}\int_I\int_I(\phi(s)-\phi(t))^2dtds \quad (2).$$

Οπότε ,από την (1) και (2), έχουμε:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\phi(t)-\phi_I|dt \le \frac{5\pi}{2}\mathfrak{N}(\phi),$$

αν $|I| \le 2\pi$.

Τέλος, έστω $n \in \mathbb{N}$ και $2\pi n < |I| \le 2\pi(n+1)$. Έστω $J \supseteq I$ ένα διάστημα με $|J| = 2\pi(n+1)$ τότε,

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\phi(t)-\phi_J|dt \le \frac{n+1}{n}\frac{1}{|J|}\int\limits_J |\phi(t)-\phi_J|dt \le \frac{2}{|J|}\int\limits_J |\phi(t)-\phi_J|dt \quad (3).$$

Όμως από 2π-περιοδικότητα της ϕ , έχουμε ότι $\phi_J = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \phi(s)ds = c$, όπου c κάποια σταθερά, και $\frac{1}{|J|}\int\limits_J |\phi(t)-\phi_J|dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\phi(t)-c|dt \le \frac{5\pi}{2}\mathfrak{N}(\phi) \quad (4).$

Έτσι ,από Λήμμα 2.2 και από τις σχέσεις (3),(4), έχουμε:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I |\phi(t)-\phi_I|dt \le \frac{2}{|I|}\int\limits_I |\phi(t)-\phi_J|dt \le \frac{4}{|J|}\int\limits_J |\phi(t)-\phi_J|dt \le 10\pi\mathfrak{N}(\phi).$$

Οπότε έχουμε δείξει ότι,

$$\boxed{\|\phi\|_* \le 10\pi\mathfrak{N}(\phi)},$$

και έχουμε το ζητούμενο .

Παρατήρηση 2.4: Από τα Θεωρήματα 2.3 και 2.4 δείξαμε ότι, $\|\phi+\widetilde{\psi}\|_* \le K(\|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty)$ (το οποίο το έχουμε δείξει με διαφορετικό τρόπο και προηγουμένως (δείτε Παρατήρηση 2.3) απλά με μια (σημαντική) τεχική που χρησιμοποιείται συχνά για συναρτήσεις BMO).

Σχόλιο 2.2: Στο Σχόλιο 2.1 παρατηρήθηκε ότι ο δυικός του $\Re\mathbb{H}_1^0$ είναι το σύνολο αθροισμάτων $\Re\mathbb{L}_\infty + \widetilde{\Re\mathbb{L}_\infty}$.

Αυτό που ανακάλυψε ο Fefferman είναι ότι αυτή η σχέση χαρακτηρίζει τις συναρτήσεις που ανήκουν εκεί, με άλλα λόγια τις BMO συναρτήσεις.

Αυτό θα προκύψει αν , $\forall F \in BMO$, μπορούμε να δείξουμε ότι το όριο $\lim\limits_{R\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(re^{i\theta})F(\theta)d\theta$ υπάρχει και είναι φραγμένο από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του γινομένου $\|f\|_1 \, \|F\|_*$,

$\forall f \in \mathbb{H}_1^0$.
Η απόδειξη αυτή της ιδιότητας είναι και η κύρια δυσκολία του κεφαλαίου αυτού.

Μια προσέγγιση του εν λόγω προβλήμματος, με την οποία θα ασχοληθούμε και χρειάζεται τις επόμενες τρεις ενότητες, είναι χρησιμοποιώντας την νόρμα Garsia $\mathfrak{N}(\cdot)$, η οποία μας βοηθάει να αντιμετωπίσουμε κάποιες περίπλοκες σημαντικές τεχνικές που θα προκύψουν στην πορεία.

Μια διαφορετική και γρήγορη προσέγγιση (με την οποία δεν θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία) είναι μέσω της ατομικής δομής του $\mathbb{H}_1$, η οποία αποφεύγει όλη την δουλειά που θα γίνει στις επόμενες τρεις ενότητες, χάνοντας έτσι μια ενδιαφέρουσα διαδικασία και αρκετές σημαντικές τεχνικές (που έχουν διάφορες εφαρμογές), όπως κάποιους υπολογισμούς με το Θεώρημα του Green και το μέτρο Carleson.

D. Υπολογισμοί βασισμένοι στο Θεώρημα του Green

ΛΗΜΜΑ 2.4: Έστω $W(z)$ να είναι C^2 συνάρτηση στο $\{|z| \leq 1\}$ και έστω $W(0) = 0$. Τότε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\theta})d\theta = \iint_{|z|<1} \left(\log \frac{1}{|z|}\right) \nabla^2 W(z)dxdy.$$

Απόδειξη:

———-

Γράφουμε $z = re^{i\theta}$ και παίρνουμε $\rho : 0 < \rho < 1$ τότε για κάθε $r : \rho < r < 1$ έχουμε ότι η $\log \frac{1}{r}$ είναι αρμονική (δηλαδή στον δακτύλιο $D(0, \rho, 1)$) ,αφού:
Έστω δίσκος $D \subset D(0, \rho, 1)$ τότε η $\frac{1}{z}$ είναι ολόμορφη στον D και δεν έχει ρίζες στον D ,άρα ορίζεται κλάδος του $\log \frac{1}{z}$ στον D , δηλαδή υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση στον D τέτοια ώστε $e^g = \frac{1}{z}$. Και έστω $u = \Re g$ τότε u αρμονική στον D και $\frac{1}{r} = e^u \Rightarrow \log \frac{1}{r} = u$ και αυτό ισχύει για κάθε δίσκο $D \subset D(0, \rho, 1)$, δηλαδή η $\log \frac{1}{r}$ είναι αρμονική στον δακτύλιο $D(0, \rho, 1)$.

————

Οπότε, αφού η $\log \frac{1}{r}$ είναι αρμονική, από Θεώρημα του Green, έχουμε:

$$\iint_{\rho<r<1} \left(\log \frac{1}{r}\right) \nabla^2 W dxdy = \iint_{\rho<r<1} \left(\left(\log \frac{1}{r}\right) \nabla^2 W - W \nabla^2 \log \frac{1}{r}\right) dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial r}\right)_{r=1} d\theta - \int_0^{2\pi} \left(\log \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - W \frac{\partial(\log \frac{1}{r})}{\partial r}\right)_{r=\rho} \rho \; d\theta = A + B.$$

Τώρα, αφού $W(0)=0$,$W(\rho e^{i\theta})=\mathbf{O}(\rho)$, έχουμε ότι $B \longrightarrow_{\rho\to 0} 0$ και $A=\int\limits_{0}^{2\pi} W(e^{i\theta})d\theta$.

Άρα έχουμε το ζητούμενο, καθώς $\rho \to 0$.

ΛΗΜΜΑ 2.5: Έστω $W(z)=|z|W_1(z)$, με W_1 να είναι C^2 συνάρτηση στο $\{|z|\leq 1\}$. Τότε,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} W(e^{i\theta})d\theta = \iint\limits_{|z|<1} \left(\log\frac{1}{|z|}\right) \nabla^2 W(z)dxdy.$$

Απόδειξη:
Η απόδειξη είναι ακριβώς η ίδια με του Λήμματος 2.4.

Συμβολισμός: Εισάγουμε τον *διανυσματικό τελεστή* : $\underset{\rightarrow}{\nabla} = \underset{\rightarrow}{i}\frac{\partial}{\partial x} + \underset{\rightarrow}{j}\frac{\partial}{\partial y}$, όπου $\underset{\rightarrow}{i}, \underset{\rightarrow}{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα στις κατευθύνσεις των x, y καρτεσιανών συντεταγμένων, αντίστοιχα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5: Έστω $u(z), V(z)$ αρμονικές στο $\{|z|<R\}$, όπου $R>1$, και έστω $u(0)=0$. Τότε,

$$\boxed{\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})V(e^{i\theta})d\theta = 2\iint\limits_{|z|<1} \left(\log\frac{1}{|z|}\right) (\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)dxdy}.$$

Απόδειξη:
Έστω $W(z)=u(z)V(z)$, τότε η W ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 2.4 , άρα έχουμε,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(e^{i\theta})V(e^{i\theta})d\theta = \iint\limits_{|z|<1} \left(\log\frac{1}{|z|}\right) \nabla^2 (uV)dxdy.$$

Όμως, $\nabla^2(uV) = (\nabla^2 u)V + u\nabla^2 V + 2\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V = 2\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V$, αφού u, V αρμονικές, και έχουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2.6: *(από τον P.Stein περίπου το 1933)*
Έστω $f(z)$ ολόμορφη στο $\{|z|<R\}$, όπου $R>1$, και η f έχει ρίζα μόνο στην αρχή των αξόνων για $|z|<R$. Τότε η $|f(z)|$ είναι C^∞ στο $\{0<|z|<R\}$ και $\nabla^2|f| = \dfrac{\underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f}{|f|}$, για $0<|z|<R$.

Απόδειξη:
Γράφουμε $f = u + iv$ με u, v πραγματικές και αρμονικές στο $\{|z| < R\}$. Τότε έχουμε, $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$ και ότι , η $|f|$ είναι $\mathcal{C}_\infty$ στο $\{0 < |z| < R\}$ αφού u, v είναι στο $\{|z| < R\}$ και αφού $u^2 + v^2 \neq 0$ για $z : 0 < |z| < R$.

Τώρα βλέπουμε ότι, για $z : 0 < |z| < R$, έχουμε:

$$\frac{\partial|f|}{\partial x} = \frac{uu_x + vv_x}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{\partial^2|f|}{\partial x^2} = \frac{u_x^2 + v_x^2}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{uu_{xx} + vv_{xx}}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{(uu_x + vv_x)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Όμοια βγάζουμε ότι, $\dfrac{\partial^2|f|}{\partial y^2} = \dfrac{u_y^2 + v_y^2}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{uu_{yy} + vv_{yy}}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{(uu_y + vv_y)^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Και αφού f ολόμορφη στο $\{|z| < R\}$ έχουμε, $u_x = v_y$ και $u_y = -v_x$, άρα:
$(uu_x + vv_x)^2 + (uu_y + vv_y)^2 = (u^2 + v^2)(u_x^2 + u_y^2)$.

Επιπλέον, $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ v_{xx} + v_{yy} = 0$ (αφού u, v αρμονικές).

Επομένως ,για $z : 0 < |z| < R$ έχουμε, $\nabla^2|f| = \dfrac{\partial^2|f|}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2|f|}{\partial y^2} = \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}$

και $\dfrac{\underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f}{|f|} = \dfrac{(u_x, u_y)\cdot(u_x, u_y)}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{(u^2+v^2)^{\frac{1}{2}}}$, οπότε έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.6: Έστω $f(z)$ ολόμορφη για $|z| < R$,όπου $R > 1$, και έστω η f να έχει μια απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < R$. Τότε,

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta = \iint_{|z|<1} \left(\log \frac{1}{|z|}\right) \frac{\underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f}{|f(z)|} dxdy}.$$

(*Η νόρμα του* $\mathbb{H}_1$ *ως διπλό ολοκλήρωμα.*)

Απόδειξη:
Έχουμε ότι η $\frac{f(z)}{z}$ δεν έχει ρίζες για $|z| < R$ και είναι ολόμορφη για αυτά τα z, άρα από Λήμμα 2.6 η $|\frac{f(z)}{z}|$ είναι $\mathcal{C}_\infty$ στο $\{|z| < R\}$ και $\nabla^2|f| = \frac{\underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}\Re f}{|f|}$, για $|z| < R$.
Άρα, αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.5 με $W(z) = |f(z)| = |z||\frac{f(z)}{z}|$, έχουμε το ζητούμενο.

Σχόλιο 2.3: (*Εκφράζοντας την ιδιότητα ότι το F παράγει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον* $\Re\mathbb{H}_1^0$.)
Τώρα ξαναγυρνάμε στο πρόβλημα εύρεσης του *φυσικού* χαρακτηρισμού των συναρτήσεων της μορφής $\phi + \widetilde{\psi}$, με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές. Ξέρουμε ήδη από την ενότητα C ότι αν, $F = \phi + \widetilde{\psi}$ τότε $\mathfrak{N}(F) < \infty$, και τώρα βρισκόμαστε στο σημείο να δείξουμε ότι αν, $\mathfrak{N}(F) < \infty$, τότε η F μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα, $\phi + \widetilde{\psi}$, με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 (ενότητα A) αυτό βγαίνει αν δείξουμε ότι το

$\lim\limits_{r\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$ υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και παριστάνει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, όποτε $\mathfrak{N}(F) < \infty$ (δείτε Σχόλιο 2.8).

ΛΗΜΜΑ 2.7: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Το όριο

$$\lim_{R\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει και είναι ίσο με ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, αν υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε, για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και $R : 0 < R < 1$, $|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta| \leq c\|f\|_1$.

Απόδειξη:
Έστω $f \in \mathbb{H}_1^0$ και $\varepsilon < 0$. Από Θεώρημα 2 του Παραρτήματος B έχουμε,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - f(Re^{i\theta})|d\theta \longrightarrow_{R\to 1} 0,$$

ισοδύναμα,

$$\exists R < 1 : \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - f(R'e^{i\theta})|d\theta < \varepsilon, \ \forall R' : R < R' < 1.$$

Έστω τώρα, $R < R_1 < R_2 < 1$ τότε , αν $R' = \frac{R_1}{R_2}, R < R' < 1$ και $g(z) = f(z) - f(R'z)$, έχουμε $g \in \mathbb{H}_1^0$ και ,πάλι από Θεώρημα 2 του Παραρτήματος B,

$$\|g\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})|d\theta = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) - f(R'e^{i\theta})|d\theta < \varepsilon.$$

Επομένως, από υπόθεση, έχουμε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε,

$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re g(R_2e^{i\theta})F(\theta)d\theta| \leq c\|g\|_1 < c\varepsilon \Leftrightarrow$

$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(R_2e^{i\theta})F(\theta)d\theta - \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(R_1e^{i\theta})F(\theta)d\theta| < c\varepsilon$ με $R < R_1 < R_2 < 1$.

Άρα, έχουμε ότι το όριο

$$\lim_{R\to 1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει (από κριτήριο Cauchy) και ορίζει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$ και ,σαφώς,

$$|\lim_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta| \le c\|f\|_1.$$

ΛΗΜΜΑ 2.8: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Τότε, το όριο

$$\lim_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και είναι ίσο με ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, αν υπάρχει μια σταθερά c τέτοια ώστε, για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$, $R, \rho < 1$, $|\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| \le c\|f\|_1$.

Απόδειξη:
Έστω $f \in \mathbb{H}_1^0$ και $R < 1$ (τότε $f(Re^{i\theta})$ συνεχής). Άρα, αφού (από Θεώρημα 4, Παράρτημα Α),

$$\int_{-\pi}^{\pi}|U_F(\rho e^{i\theta}) - F(\theta)|d\theta \longrightarrow_{\rho\to 1} 0$$

άρα έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta = \lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta.$$

Από υπόθεση, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε,

$$|\lim_{\rho\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| \le c\|f\|_1.$$

Δηλαδή έχουμε ότι, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε, $\forall f \in \mathbb{H}_1^0$ και $R < 1$, $|\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta| \le c\|f\|_1$. Επομένως , από Λήμμα 2.7, έχουμε το ζητούμενο.

ΛΗΜΜΑ 2.9: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Για να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi}\Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και είναι ίσο με ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε , $\forall R, \rho < 1$, $|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| \leq c\|f\|_1$, όποτε $f \in \mathbb{H}_1^0$ έχει ακριβώς μια απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < 1$.

Απόδειξη:
Έστω $f \in \mathbb{H}_1^0$, τότε μπορούμε να γράψουμε (από Θεώρημα 3, Παράρτημα Γ), $f(z) = zB(z)g(z)$, όπου $B(z)$ να είναι το γινόμενο Blaschke, $g(z) \in \mathbb{H}_1$ η οποία να μην έχει ρίζες για $|z| < 1$ και $\|g\|_1 = \|f\|_1$.

Τώρα, αν πάρουμε (από Πόρισμα, Παράρτημα Γ) :

$f_1(z) = \frac{1}{2}z(B(z)-1)g(z)$, $f_2(z) = \frac{1}{2}z(B(z)+1)g(z)$, έχουμε ότι οι f_1, f_2 έχουνε μια απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < 1$ και $f = f_1 + f_2$.

Επίσης, έχουμε ότι $\|f_1\|_1 \leq \|f\|_1$ και $\|f_2\|_1 \leq \|f\|_1$.

Άρα ,από υπόθεση, υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε, $\forall R, \rho < 1$ να έχουμε ότι:

$$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| = |\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{2} \Re f_k(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| \leq \sum_{k=1}^{2} |\Re f_k(Re^{i\theta})U_F(\rho e^{i\theta})d\theta| \leq$$
$$c(\|f_1\|_1 + \|f_2\|_1) \leq 2c\|f\|_1.$$

Επομένως, από Λήμμα 2.8, έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.7: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Για να δείξουμε ότι το όριο

$$\lim_{R \to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και είναι ίσο με ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε,

$|\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)dxdy| \leq c\|f\|_1$, για $u(z) = \Re f(Rz)$, $V(z) = U_F(\rho z)$ και για όλα τα $R, \rho < 1$, όποτε $f \in \mathbb{H}_1^0$ έχει ακριβώς μια απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < 1$.

Απόδειξη:
Το ζητούμενο βγαίνει άμεσα συνδιάζοντας το Θεώρημα 2.5 και το Λήμμα 2.9.

E. Το Θεώρημα του Fefferman με την νόρμα Garsia.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.7 και το Θεώρημα 2.1 (ενότητα A) απομένει να απόδειξουμε ότι, ξεκινώντας από μία δοσμένη $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική , με $\mathfrak{N}(F) < \infty$, παίρνουμε ότι $F \in \Re\mathbb{L}_\infty + \widetilde{\Re\mathbb{L}_\infty}$, δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι με μια αριθμητική σταθερά K θα έχουμε:

$$\boxed{|\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right) (\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V) dxdy| \leq K\|f\|_1 \mathfrak{N}(F)},$$

με $f \in \mathbb{H}_1^0$ με μοναδική απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < 1$, *όπου, θα γράφουμε σε όλη αυτήν την ενότητα*:

$$\boxed{u(z) = \Re f(Rz)}\ ,\ \boxed{V(z) = U_F(\rho z)}$$

με $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική, *και τυχαία* $0 < R, \rho < 1$.

Στην ενότητα αυτή, που είναι η ”καρδιά” όλου του κεφαλαίου, στόχος μας είναι να αποδείξουμε την παραπάνω εγκιβωτισμένη ανισότητα.

Σχόλιο 2.4: (*Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Schwartz*)
Ενδιαφερόμαστε για την περίπτωση που $f \in \mathbb{H}_1^0$ έχει μοναδική απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη για $|z| < 1$.
O Fefferman είχε την ιδέα να εφαρμόσει την ανισότητα του Schwartz στη αριστερή μεριά της παραπάνω εγκιβωτισμένης ανισότητας , με τέτοιο τρόπο ώστε να εκμεταλευτεί το Θεώρημα 2.6 (ενότητα D).

Δηλαδή, έχουμε :

$$|\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right) (\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V) dxdy| \leq$$

$$\left[\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right) \frac{\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} u}{|f(Rz)|} dxdy\right]^{\frac{1}{2}} \left[\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right) (\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)|f(Rz)| dxdy\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Με $u(z) = \Re f(Rz)$ και $f \in \mathbb{H}_1^0$ να έχει μοναδική απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων (και καμία άλλη στον μαναδιαίο δίσκο), από το Θεώρημα 2.6 έχουμε ότι:

$$\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right) \frac{\underset{\rightarrow}{\nabla} u \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} u}{|f(Rz)|} dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta < \|f\|_1.$$

Άρα, για να δείξουμε την ζητούμενη εγκιβωτισμένη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\iint\limits_{|z|<1} \left(\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)|f(Rz)|dxdy \leq K\|f\|_1(\mathfrak{N}(F))^2, \quad (*)$$

για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ με μοναδική απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και με K μια αριθμητική σταθερά.

Σχόλιο 2.5: (*Ενα μέτρο που θα αποδειχθεί μέτρο Carleson*)
Στο Σχόλιο 1.4 , ο περιορισμός της $f \in \mathbb{H}_1^0$ να έχει μοναδική απλή ρίζα στην αρχή των αξόνων και καμία άλλη στο $\{|z| < 1\}$ ήταν η *απαίτηση* του Θεωρήματος 2.6.
Βέβαια δεν υπάρχει εμπόδιο για την απόδειξη της $(*)$ για όλες τις $f \in \mathbb{H}_1^0$.

Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική. Παρατηρούμε ότι για $f \in \mathbb{H}_1^0$, η $g(z) = \frac{f(Rz)}{z}$ είναι στον $\mathbb{H}_1$, με $0 < R < 1$, και προφανώς $\|g\|_1 \leq \|f\|_1$.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$\iint\limits_{|z|<1} \left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)|g(z)|dxdy \leq K(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

$\forall g \in \mathbb{H}_1$ και με K μια αριθμητική σταθερά.

Τώρα, βλέπουμε ότι (Ορισμός 2 και Θεώρημα 5, Παράρτημα Γ),
αρκεί να δείξουμε ότι η ποσότητα $\left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)dxdy$ **είναι μέτρο Carleson με τη** ***'σταθερά Carleson'*** **να ισούται με ένα αριθμητικό πολλαπλάσιο του** $(\mathfrak{N}(F))^2$**.**

ΛΗΜΜΑ 2.10: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική. Τότε,

$$\iint\limits_{|z|<\frac{1}{2}} \left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)|g(z)|dxdy \leq K'(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

για κάθε $g \in \mathbb{H}_1$ και με K' μια αριθμητική σταθερά.

Απόδειξη:
Έστω $g \in \mathbb{H}_1$. Τότε, για $|z| < \frac{1}{2}$, έχουμε ότι η συνάρτηση $|z|\log\left(\frac{1}{|z|}\right)$ πιάνει μέγιστο στο $\frac{1}{e}$, δηλαδή $|z|\log\left(\frac{1}{|z|}\right) \leq \frac{1}{e} \quad (1)$.

Επίσης , αφού $g \in \mathbb{H}_1$, έχουμε (από τον τύπο του Cauchy), για $|z| < \frac{1}{2} < r < 1$,

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r} \frac{g(\zeta)}{\zeta - z}dz \Rightarrow |g(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|g(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta}) - z|}rd\theta \leq \frac{r}{2\pi(r-\frac{1}{2})}\int\limits_0^{2\pi}|g(re^{i\theta})d\theta,$$

άρα κάθως $r \to 1$, παίρνουμε

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\pi}\|g\|_1 \quad (2) .$$

Τώρα, έστω (όπως και σε όλη την ενότητα αυτήν) $V(z) = U_F(\rho z)$, με $0 \leq \rho < 1$. Τότε,

$\underset{\to}{\nabla} V = \underset{\to}{\nabla} U_F(\rho z) = \underset{\to}{\nabla} U_{F_1}(\rho z)$, όπου $F_1(\theta) = F(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)dt.$

Αφού κάθε μερική παράγωγος του $U_F(z)$ είναι ίση με το ολοκλήρωμα της μερικής παραγώγου του πυρήνα Poisson και αφού μετά από κάποιους υπολογισμούς $|\underset{\to}{\nabla} P(\rho z, e^{it})| \leq 28$, έχουμε για $|z| < \frac{1}{2}$,

$$|\underset{\to}{\nabla} U_{F_1}(\rho z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\underset{\to}{\nabla} P(\rho z, e^{it})||F_1(t)|dt \leq 28\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F_1(t)|dt = \frac{14}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F_1(t)|dt.$$

Δηλαδή, $|\underset{\to}{\nabla} U_{F_1}(\rho z)| \leq 28\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)dt|d\theta$, για $|z| \leq \frac{1}{2}$.

Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4 (ενότητα C) , παίρνουμε για $|z| \leq \frac{1}{2}$,

$$|\underset{\to}{\nabla} U_{F_1}(\rho z)| \leq 28\tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |F(\theta) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)dt|d\theta \leq 70\mathfrak{N}(F) \quad (3) \ .$$

Επομένως , από τις εκτιμήσεις (1),(2),(3) , έχουμε:

$$\iint\limits_{|z|<\frac{1}{2}} \left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\to}{\nabla} V \cdot \underset{\to}{\nabla} V)|g(z)|dxdy \leq \frac{(35)^2(\pi)^2}{e}(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

και έχουμε το ζητούμενο.

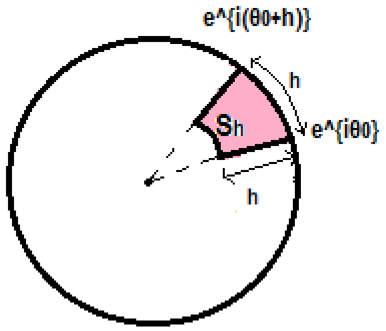
Σχόλιο 2.6: Τώρα βρισκόμαστε στο σημείο για το *κύριο Λήμμα* αυτού του κεφαλάιου, δηλαδή να αποδείξουμε ότι:

$$\iint\limits_{\frac{1}{2}<|z|<1} \left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\to}{\nabla} V \cdot \underset{\to}{\nabla} V)|g(z)|dxdy \leq K''(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

για κάθε $g \in \mathbb{H}_1$ και με K'' μια αριθμητική σταθερά.

Η απόδειξή της παραπάνω ανισότητας (Θεώρημα 2.8) βγαίνει από τον συνδιασμό του Θεμελιώδους Θεωρήματος των μέτρων Carleson για τον μοναδιαίο δίσκο (Θεώρημα 5, Παράρτημα Γ) και από το Λημμα 2.11.

ΛΗΜΜΑ 2.11: Έστω $0 < h \leq \frac{1}{2}$ και έστω S_h ένα οποιοδήποτε καμπυλόγραμμο κουτί της μορφής $1 - h \leq r < 1,\ \theta_0 < \theta < \theta_0 + h,$



Τότε,

$$\iint\limits_{S_h} \left(|z| \log(\frac{1}{|z|})\right) (\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V) dxdy \leq C(\mathfrak{N}(F))^2 h,$$

με C κάποια αριθμητική σταθερά.

Απόδειξη:
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, έστω $\theta_0 = -\frac{h}{2}$, έτσι $S_h = \{re^{i\theta} : 1 - h \leq r < 1, -\frac{h}{2} \leq \theta \leq \frac{h}{2}\}$.

Στην περίπτωση αυτή θα εκτιμήσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα με αλλαγή μεταβλητή, $z \mapsto \zeta$, όπου $\frac{i-\zeta}{i+\zeta} = z$, η οποία είναι *σύμμορφη απεικόνιση* του $\{|z| < 1\}$ επί του $\{\Im\zeta > 0\}$. Όπως συνήθως γράφουμε, $\zeta = \xi + i\eta$.

Έστω $V(z) = w(\zeta)$ με $z \mapsto \zeta$.

Τότε έχουμε για, $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$:

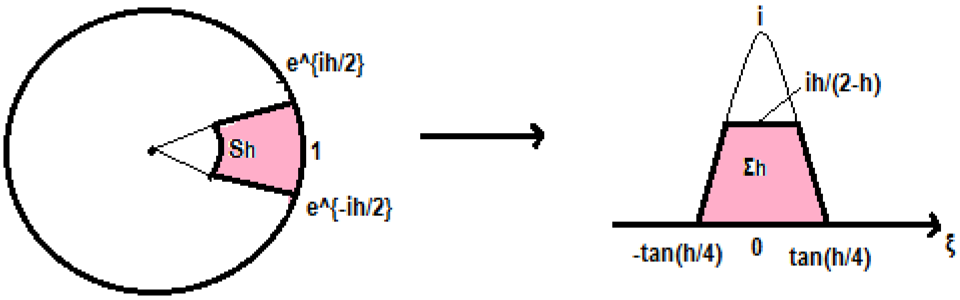
$|z| \log \frac{1}{|z|} \leq \frac{1}{2} \log \frac{1}{|z|^2} = \frac{1-|z|^2}{2}(1 + \frac{1}{2}(1-|z|^2) + \frac{1}{3}(1-|z|^2)^2 + ...) \leq \frac{1-|z|^2}{2|z|^2} \leq 2(1-|z|^2)$.

Τώρα, σε όρους του $\zeta = \xi + i\eta$, έχουμε ότι:

$|z|^2 = \frac{\xi^2+(\eta-1)^2}{\xi^2+(\eta+1)^2}$, άρα $1 - |z|^2 = \frac{4\eta}{\xi^2+(\eta+1)^2} \leq 4\eta$, και επομένως,

$\boxed{|z| \log \frac{1}{|z|} \leq 8\eta}$, για $\frac{1}{2} \leq |z| < 1$.

Τώρα αντιστοιχούμε το σύνολο S_h στο σύνολο Σ_h στο ζ-επίπεδο με την απεικόνιση $z \mapsto \zeta$:



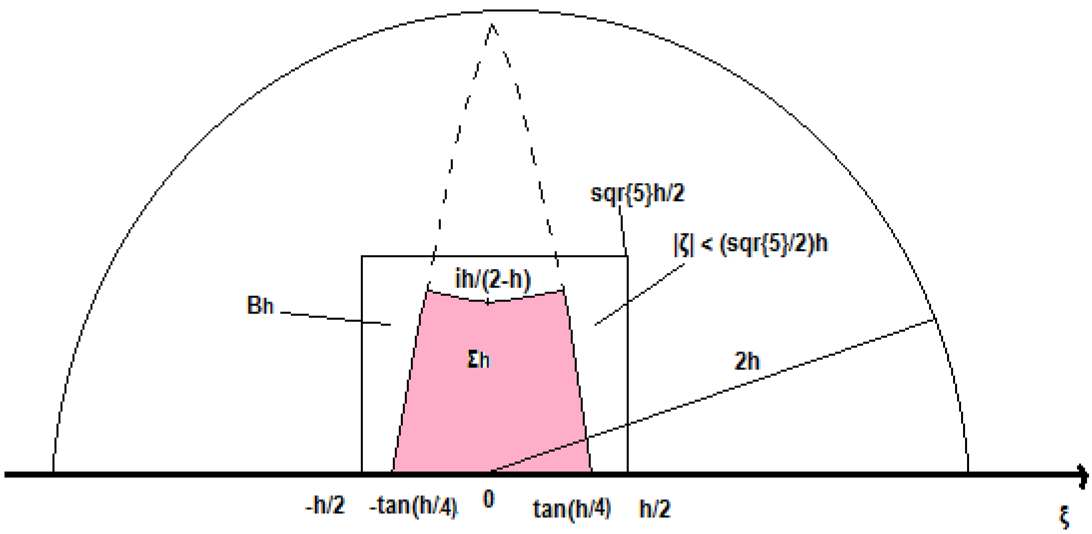
Τότε, αφού η απεικόνιση είναι σύμμορφη και σύμφωνα με την παραπάνω εγκιβωτισμένη ανισότητα, παίρνουμε:

$$\iint\limits_{S_h} \left(|z|\log\frac{1}{|z|}\right)\left[(\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2\right]dxdy = \iint\limits_{\Sigma_h} \left(|z|\log\frac{1}{|z|}\right)\left[(\frac{\partial w}{\partial \xi})^2+(\frac{\partial w}{\partial \eta})^2\right]d\xi d\eta$$
$$\leq \iint\limits_{\Sigma_h} 8\eta\left[(\frac{\partial w}{\partial \xi})^2+(\frac{\partial w}{\partial \eta})^2\right]d\xi d\eta.$$

Έπειτα, έχουμε ότι:

$$\iint\limits_{S_h} \left(|z|\log\frac{1}{|z|}\right)\left[(\frac{\partial V}{\partial x})^2+(\frac{\partial V}{\partial y})^2\right]dxdy \leq 8\iint\limits_{B_h} \eta\left[(\frac{\partial w}{\partial \xi})^2+(\frac{\partial w}{\partial \eta})^2\right]d\xi d\eta,$$

όπου $B_h = \{(\xi,\eta) : -\frac{h}{2} < \xi < \frac{h}{2}, 0 < \eta < h\}$, αφού έχουμε ότι το σύνολο Σ_h περιέχεται στο τετράγωνο B_h (πράγματι, είναι προφανές χωρίς υπολογισμούς ότι για $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$ το Σ_h περιέχεται πάντα στο B_{Ch} ,με C κάποια αριθμητική σταθερά, και εδώ ,για απλότητα στον τύπο, παίρνουμε $C = 1$).



Τώρα για την συνέχεια της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε ένα *trick*:

Το σύνολο B_h περιέχεται ολόκληρο στο ημικύκλιο $|\zeta| < 2h, \eta > 0$ και στο B_h

έχουμε ότι, $1-\frac{|\zeta|}{2h}>\frac{1}{4}$ (αφού στο εσωτερικό του ισχύει $|\zeta|<\frac{\sqrt{5}}{2}h$ και $\frac{|\zeta|}{2h}<\frac{\sqrt{5}}{4}\leq\frac{3}{4}$, άρα $\frac{|\zeta|}{2h}<\frac{3}{4}$).

Επομένως,

$$\iint\limits_{B_h}\eta(w_\xi^2+w_\eta^2)d\xi d\eta\leq 4\int\limits_{|\zeta|<2h}\int\limits_{\eta>0}(1-\frac{|\zeta|}{2h})\eta(w_\xi^2+w_\eta^2)d\xi d\eta$$

(ο παράγοντας $(1-\frac{|\zeta|}{2h})\eta$ μηδενίζεται στο σύνορο του συνόλου που ολοκληρώνουμε και αυτό θα μας βοηθήσει στην συνέχεια).

Έχουμε $w(\zeta)=V(z)$ με $z=\frac{i-\zeta}{i+\zeta}$, άρα η $w(\zeta)$ είναι αρμονική στο $\Im\zeta>0$ (υπενθυμίζουμε ότι $V(z)=U_F(\rho z), 0<\rho<1$ αυθαίρετο, σε όλη την ενότητα).
Τώρα , αφού η $w(\zeta)$ είναι αρμονική (δηλαδή $w_{\xi\xi}+w_{\eta\eta}=0$) έχουμε την εξής ταυτότητα: $\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)w^2=2(w_\xi^2+w_\eta^2)}$.

Άρα έχουμε να εκτιμήσουμε το εξής διπλό ολοκλήρωμα,

$$J=2\int\limits_{|\zeta|<2h}\int\limits_{\eta>0}(1-\frac{|\zeta|}{2h})\eta\nabla^2 w d\xi d\eta,$$

σε όρους του h και του $\mathfrak{N}(F)$.

Από Ορισμό 2.2 , $\mathfrak{N}(F)=\sup\limits_{|z|<1}\left(U_{F^2}(z)-(U_F(z))^2\right)^{\frac{1}{2}}$, άρα αν πάρουμε $Q(z)=U_{F^2}(z)-(U_F(z))^2$, για $|z|<1$, έχουμε:

$$\boxed{0\leq Q(z)\leq(\mathfrak{N}(F))^2}.$$

Τώρα , για $z=\frac{i-\zeta}{i+\zeta}$, έχουμε, $(w(\zeta))^2=(U_F(\rho z))^2=U_{F^2}(\rho z)-Q(\rho z)$, όπου η $U_{F^2}(\rho z)$ είναι αρμονική.

Επομένως, αν πάρουμε $b(\zeta)=Q(\rho z)$, έχουμε $\nabla^2 w=-\nabla^2 b$, οπότε:

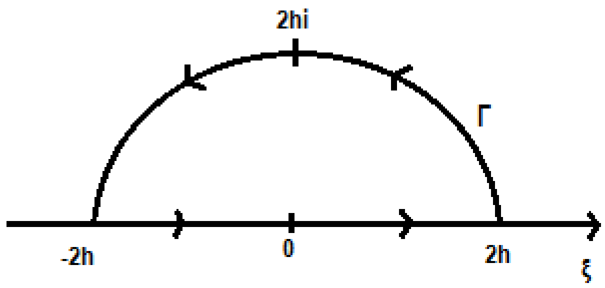
$$J=-2\int\limits_{|\zeta|<2h}\int\limits_{\eta>0}(1-\frac{|\zeta|}{2h})\eta\nabla^2 b d\xi d\eta,$$

όπου $\boxed{0\leq b(\zeta)\leq(\mathfrak{N}(F))^2}$.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Green στο J και βρίσκουμε:

$$J=-2\int\limits_{|\zeta|<2h}\int\limits_{\eta>0}b(\zeta)\nabla^2\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right)d\xi d\eta+2\int\limits_{\Gamma}\left[b(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right)-\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\frac{\partial b(\zeta)}{\partial n}\right]|d\zeta|,$$

με Γ να είναι η εξής καμπύλη:



και με $\frac{\partial}{\partial n}(u) := n \cdot Du$ να είναι *η εξωτερική κατά κατεύθυνση παράγωγος ως προς το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στα σημεία της Γ.*

Τώρα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω στην Γ είναι αρνητικό. Πράγματι, $\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h}) \equiv 0,\ \forall \zeta \in \Gamma$. Επιπλέον, $\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h}) > 0$ στο εσωτερικό της Γ , έτσι έχουμε $\frac{\partial}{\partial n}\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right) \leq 0,\ \forall \zeta \in \Gamma$. Άρα ,σύμφωνα με την τελευταία εγκιβωτισμένη ανισότητα , $b(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right) \leq 0,\ \forall \zeta \in \Gamma$.

Έτσι παίρνουμε,

$$J \leq -2 \int\limits_{|\zeta|<2h} \int\limits_{\eta>0} b(\zeta)\nabla^2\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right) d\xi d\eta.$$

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε τις πολικές συντεταγμένες $\zeta = \sigma e^{i\phi}$, τότε:
$\nabla^2 = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$ και $\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h}) = (1-\frac{\sigma}{2h})\sigma\sin\phi$, οπότε εύκολα βρίσκουμε, $\nabla^2\left(\eta(1-\frac{|\zeta|}{2h})\right) = -\frac{3}{2h}\sin\phi$, και τότε το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα γίνεται,

$$J \leq \frac{3}{h}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2h} b(\sigma e^{i\phi})\sigma\sin\phi d\sigma d\phi \leq \frac{3}{h}(\mathfrak{N}(F))^2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2h}\sigma\sin\phi d\sigma d\phi = 12(\mathfrak{N}(F))^2 h.$$

Επομένως έχουμε βρεί:

$$\iint\limits_{S_h}\left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla}V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}V)dxdy \leq 32J \leq 384(\mathfrak{N}(F))^2 h,$$

δηλαδή έχουμε (επιτέλους!) το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.8: Υπάρχει αριθμητική σταθερά K'' τέτοια ώστε,

$$\iint\limits_{\frac{1}{2}<|z|<1}\left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla}V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla}V)|g(z)|dxdy \leq K''(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

για κάθε $g \in \mathbb{H}_1$.

Σχόλιο 2.7: Συνδιάζοντας το Θεώρημα 2.8 με το Λήμμα 2.10 έχουμε ότι, υπάρχει αριθμητική σταθερά K τέτοια ώστε:

$$\iint\limits_{|z|<1} \left(|z|\log(\frac{1}{|z|})\right)(\underset{\rightarrow}{\nabla} V \cdot \underset{\rightarrow}{\nabla} V)|g(z)|dxdy \leq K(\mathfrak{N}(F))^2\|g\|_1,$$

για κάθε $g \in \mathbb{H}_1$.

Πιο συγκεκριμένα , έχουμε δείξει ότι ισχύει η σχέση $(*)$ στο Σχόλιο 2.4. Επομένως, εχουμε αποδείξει την ζητούμενη εγκιβωτισμένη ανισότητα (στην αρχή της ενότητας αυτής) και τώρα από το Θεώρημα 2.7 παίρνουμε ως αποτέλεσμα το Θεώρημα 2.9.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.9: Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$. Αν $\mathfrak{N}(F) < +\infty$, τότε το όριο

$$\lim_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$$

υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και ορίζει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$.

Σχόλιο 2.8: Η νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς στον $\Re\mathbb{H}_1^0$, την οποία μπορούμε να την πάρουμε με βάση το Θεώρημα 2.9, είναι $\leq$ (σταθερά) $\mathfrak{N}(F)$.

Πράγματι, από την απόδειξη του Λήμματος 2.9(ενότητα D) είδαμε ότι η νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς είναι $\leq 2c$, με c να είναι η αναφερόμενη σταθερά του Θεωρήματος 2.7(ενότητα D) και η αρχική εγκιβωτισμένη ανισότητα στην αρχή αυτής της ενότητας (η οποία αποδείχθηκε) είναι η ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 2.7 με $c = K\mathfrak{N}(F)$, με K αριθμητική σταθερά.

Επίσης, μπορούμε να καταλήξουμε και στο ότι η $\mathfrak{N}(F)$ είναι $\leq$ αριθμητικό πολλαπλάσιο της νόρμας του γραμμικού συναρτησοειδούς του Θεωρήματος 2.9.

Πράγματι, έστω $Lf = \lim\limits_{R\to 1}\int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$, για $f \in \mathbb{H}_1^0$. Από το Θεώρημα 2.1 (ενότητα A) δείξαμε ότι (με επιχείρημα του Hahn-Banach) μπορούμε να βρούμε συνάρτηση $\phi + i\psi$, με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές, τέτοια ώστε $Lf = \Re\int_{-\pi}^{\pi}(\phi(t) + i\psi(t))f(e^{it})dt$, για $f \in \mathbb{H}_1^0$ και $\|\phi + i\psi\|_\infty = \|L\|$.

Από το Λήμμα 2.1 (ενότητα A) έχουμε ότι, $Lf = \lim_{R\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})((\phi(t) + \widetilde{\psi}(t))d\theta$ και αφού $Lf = \lim_{R\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta,$ για $f \in \mathbb{H}_1^0,$ τότε (όπως εργαστήκαμε στο Σχόλιο 2.1) παίρνουμε ότι, $F(t) = \phi(t) + \widetilde{\psi}(t) + c_0,$ με c_0 κάποια σταθερά.

Τώρα, από το Λήμμα 2.3 και έπειτα από το Θεώρημα 2.3 (ενότητα C) παίρνουμε ότι:

$\mathfrak{N}(F) = \mathfrak{N}(\phi + \widetilde{\psi}) \leq \sqrt{2}(\|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty) \leq 2\sqrt{2}\|\phi + i\psi\|_\infty = 2\sqrt{2}\|L\|.$

Επιπλέον, $\|\phi\|_\infty + \|\psi\|_\infty \leq 2\|\phi + i\psi\|_\infty = 2\|L\| \leq 2K\mathfrak{N}(F)$.

Αν συνοψίσουμε όλα τα παραπάνω αποτελέσματα που αναφέρθηκαν παίρνουμε το (πλέον ποθητό!) Θεώρημα 2.10.

Θεώρημα 2.10: *(Το Θεώρημα του Fefferman με την νόρμα Garsia .)*
Αν $F(\theta)$ είναι πραγματική και 2π-περιοδική , τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
(i) Το $Lf = \lim_{R\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$ υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$.
(ii) $F(\theta) = \phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta),$ με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T}),$ πραγματικές.
(iii) $\mathfrak{N}(F) < +\infty.$

Επιπλέον, οι νόρμες $\|L\|$ και $\mathfrak{N}(F)$ είναι ισοδύναμες : $\exists c_1, c_2$ σταθερές τέτοιες ώστε, $c_1\|L\| \leq \mathfrak{N}(F) \leq c_2\|L\|.$
Επίσης, μπορούμε να βρούμε $\phi_1, \psi_1 \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T}),$ πραγματικές , τέτοιες ώστε $F(\theta) = \phi_1(\theta) + \widetilde{\psi_1}(\theta) + c_0,$ με c_0 κάποια σταθερά, και ώστε $M_1\mathfrak{N}(F) \leq \|\phi_1\|_\infty + \|\psi_1\|_\infty \leq M_2\mathfrak{N}(F),$ με M_1, M_2 κάποιες αριθμητικές σταθερές.

F. Το Θεώρημα του Fefferman με την νόρμα BMO .

Θα δούμε ότι στο Θεώρημα 2.10 η συνθήκη (iii), $\mathfrak{N}(F) < +\infty,$ μπορεί να αντικατασταθεί με την συνθήκη $\|F\|_* < +\infty,$ δηλαδή από το γεγονός ότι $F \in BMO.$

Έχουμε ήδη δει στην ενότητα C, ότι $\|F\|_* \leq$ σταθερά $\mathfrak{N}(F)$, και στην ενότητα αυτή θα δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, δηλαδή $\mathfrak{N}(F) \leq$ σταθερά $\|F\|_*$.

Έτσι θα έχουμε δείξει την ζητούμενη ισοδυναμία των νορμών $\mathfrak{N}(\cdot)$ και $\|\cdot\|_*$. Η απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας έγινε από τους Nirenberg και John.

ΛΗΜΜΑ 2.12: Αν $F \in BMO$ και αν I, J είναι οποιαδήποτε διαστήματα με κοινό *μέσο* και $I \subset J$, τότε:

$$|F_I - F_J| \leq 2\|F\|_* \left(\log_2(\frac{|J|}{|I|}) + 1\right).$$

Απόδειξη:
Αρχικά, έστω $I \subset J$ και $|J| \leq 2|I|$, τότε:

$$|F_I - F_J| = \tfrac{1}{|I|}|\int_I (F(t) - F_J)dt| \leq \frac{1}{|I|}\int_I |F(t) - F_J|dt \leq \frac{2}{|J|}\int_J |F(t) - F_J|dt \leq 2\|F\|_*,$$

άρα σε αυτή την περίπτωση έχουμε το ζητούμενο.

Στην γενική περίπτωση θα εργαστούμε με μαθηματική επαγωγή.

Έστω $I \subset J$ και $2^n|I| < |J| \leq 2^{n+1}|I|$. Και έστω ότι το αποτέλεσμα ισχύει για διαστήματα J' με $|J'| \leq 2^n|I|$, με J', I να έχουν κοινό μέσο και $|J'| = \frac{|J|}{2}$ τέτοιο ώστε $I \subset J' \subset J$.

Δηλαδή έχουμε ότι ισχύει, $|F_I - F_{J'}| \leq \|F\|_* \left(\log_2(\frac{|J'|}{|I|}) + 1\right)$ και αφού $|J| = 2|J'|$ έχουμε, $|F_J - F_{J'}| \leq 2\|F\|_*$, άρα:

$$|F_J - F_I| \leq |F_J - F_{J'}| + |F_{J'} - F_I| \leq 2\|F\|_* + 2\|F\|_* \left(\log_2(\tfrac{|J'|}{|I|}) + 1\right)$$
$$= 2\|F\|_* \left(\log_2(\tfrac{1}{2}\tfrac{|J|}{|I|}) + 2\right) = 2\|F\|_* \left(\log_2(\tfrac{|J|}{|I|}) + \log_2(\tfrac{1}{2}) + 2\right)$$
$$\Rightarrow |F_J - F_I| \leq 2\|F\|_* \left(\log_2(\tfrac{|J|}{|I|}) + 1\right),$$

και άρα έχουμε και στην γενική περίπτωση το ζητούμενο.

Σχόλιο 2.9: Οι συναρτήσεις BMO πρωτοεμφανίστηκαν όταν δημοσιεύθηκε το παρακάτω Θεώρημα των Nirenberg και John.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.12: *(Nirenberg και John)*
Έστω $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική. Τότε, για κάθε διάστημα I και θετικό ακέραιο n , ισχύει ότι:

$$|\{x \in I : F(x) - F_I > 4n\|F\|_*\}| \leq 2^{-n}|I|.$$

. **Απόδειξη:**
Με *αλλάγή κλίμακας*, δηλαδή παίρνουμε όπου $\|F\|_* \leq \frac{1}{2}$, αρκεί να δείξουμε ότι,

$$|\{x \in I : F(x) - F_I > 2n\}| \leq 2^{-n}|I|.$$

Τώρα, μια *αλλαγή μεταβλητής* μας επιτρέπει να πάρουμε $I = [0,1]$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας, παίρνουμε $F_I = 0$.

Με αυτές τις αναγωγές που έγιναν, μπορούμε να εργαστούμε με *δυαδικά υποδιαστήματα* του $I = [0,1]$. Τα δυαδικά αυτά υποδιαστήματα έχουν την ειδική μορφή, $\left[\frac{k}{2^l}, \frac{k+1}{2^l}\right]$, με k, l μη-αρνητικούς ακέραιους.

Τα δυαδικά διαστήματα έχουν την *βολική ιδιότητα* ότι, αν δύο από αυτά *αλληλοεπικαλύπτονται* τότε το ένα πρέπει να περιέχει το άλλο.

Θα δείξουμε την ζητούμενη ανισότητα για $n = 1$.

Έστω $E = \{x \in I : F(x) > 2\}$. Από το Θεώρημα του Lebesgue (διαφόριση αόριστου ολοκληρώματος), έχουμε ότι σχεδόν κάθε x περιέχεται σε ένα *μικρό δυαδικό διάστημα* $J \subset I$, με $F_J > 2 > 1$. Αφού $F_I = 0$, πρέπει εκεί, για σχεδόν κάθε $x \in E$, να υπάρχει δυαδικό διάστημα $J \subset I$ που περιέχει το x, με το μεγαλύτερο δυνατόν μήκος τέτοιο ώστε $F_J > 1$. Έστω τέτοιο J και θα το συμβολίζουμε με $J(x)$.

Αφού *πετάξουμε* από το E ένα σύνολο μέτρου μηδέν, θα έχουμε, $E \subseteq \bigcup_{x \in E} J(x)$.
Έστω $\mathcal{E} = \bigcup_{x \in E} J(x)$ και το $\mathcal{E}$ μπορεί να γραφτεί ως ξένη ένωση των $J(x)$. Πράγματι, έστω $x, y \in E$ και ότι $J(x), J(y)$ αλληλοεπικαλύπτονται.
Από την παραπάνω αναφερόμενη ιδιότητα των δυαδικών διαστημάτων, είτε $J(x) \subseteq J(y)$ είτε $J(y) \subseteq J(x)$. Έστω ότι $J(y) \supseteq J(x)$ και $|J(y)| > |J(x)|$, τότε έχουμε ότι $x \in J(y)$ και $F_{J(y)} > 1$, άρα έχουμε αντίφαση στο ότι το $J = J(x)$ είναι δυαδικό διάστημα που περιέχεται γνήσια στο I μέγιστου μήκους που περιέχει το x τέτοιο ώστε $F_J > 1$. Άρα , αν $J(y) \supseteq J(x)$ τότε $|J(y)| = |J(x)|$ και ,επομένως, το $J(y)$ πρέπει να είναι ίσο με το $J(x)$.

Βλέπουμε ότι τώρα μπορούμε να βρούμε ακολουθία σημείων $x_i \in E$ τέτοια ώστε τα $J(x_i)$ να είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{i=1}^{\infty} J(x_i) = \mathcal{E}$.
(Αυτή η ακολουθία σημείων, άρα και η ένωση, μπορεί για την ακρίβεια να είναι πεπερασμένη ή ακόμη και κενή). Η παραπάνω διαμέριση $\mathcal{E}$ σε ένα αριθμήσιμο σύνολο με ξένα ανά δυο δυαδικά διαστήματα καλείται *διαμέριση Calderon-Zygmund*.

Έχουμε τώρα, $|\mathcal{E}| < \frac{1}{2}|I|$. Πράγματι, αφού $F_I = 0$ έχουμε,

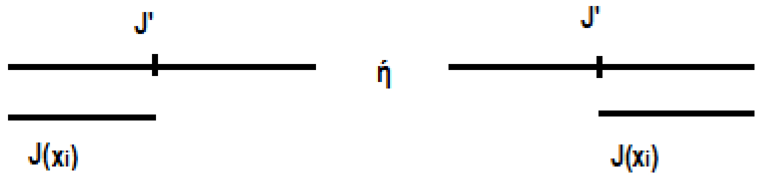
$$\frac{1}{|I|}\int_{\mathcal{E}} F(x)dx \leq \frac{1}{|I|}\int_{\mathcal{E}} |F(x) - F_I|dx \leq \frac{1}{|I|}\int_{I} |F(x) - F_I|dx \leq \|F\|_* \leq \frac{1}{2},$$

ενώ παράλληλα, $\frac{1}{|I|}\int_{\mathcal{E}} F(x)dx = \frac{1}{|I|}\sum_i \int_{J(x_i)} F(x)dx$, αφού τα $J(x_i)$ είναι ξένα ανά δύο και στην συνέχεια,

$$\frac{1}{|I|}\sum_i \int_{J(x_i)} F(x)dx = \frac{1}{|I|}\sum_i |J(x_i)| F_{J(x_i)} > \frac{1}{|I|}\sum_i |J(x_i)| = \frac{|\mathcal{E}|}{|I|} \ .$$

Άρα έχουμε βγάλει ότι, $\frac{|\mathcal{E}|}{|I|} < \frac{1}{2}$ και αφού $E \subseteq \mathcal{E}$ έχουμε δείξει το ζητούμενο για $n = 1$.

Τώρα μένει να δείξουμε την ζητούμενη σχέση για $n > 1$ και θα το κάνουμε με μαθηματική επαγωγή.
Έχουμε ότι, για κάθε i, $F_{J(x_i)} \leq 2$. Πράγματι, για δοσμένο $J(x_i)$, έστω J' να είναι ένα δυαδικό διάστημα $\subseteq I$ που να περιέχει το $J(x_i)$ και να έχει το διπλάσιο μήκος του. Σημειώνουμε ότι υπάρχει μόνο ένα $J(x_i) \subset I$ με τις παραπάνω ιδιότητες.



Τότε, από ιδιότητα διαστήματος μέγιστου μήκους σύμφωνα με ποιο $J(x_i)$ διαλέχθηκε (και αφού $F_I = 0$), έχουμε ότι $F_{J'} \leq 1$.
Τώρα, όπως κάναμε προηγουμένως με $J = J'$ και $I = J(x_i)$ έχουμε, $|F_{J'} - F_{J(x_i)}| \leq 2\|F\|_* \leq 1$, άρα πράγματι $F_{J(x_i)} \leq 2$.

Έστω $E = \{x \in E : F(x) > 2n\}$ και ότι $E \cap J(x_i) = E_i$. Αφού τα $J(x_i)$ είναι ξένα ανά δύο και $E \subseteq \mathcal{E}$ έχουμε, $E = \bigcap\limits_i E_i$ και $|E| = \sum\limits_i |E_i|$.
Αν $x \in E_i$, τότε $F(x) > 2n$ και άρα, αφού $F_{J(x_i)} \leq 2$, $F(x) - F_{J(x_i)} > 2(n-1)$. Όπως έχουμε ήδη δει, $E_i \subseteq \{x \in J(x_i) : F(x) - F_{J(x_i)} > 2(n-1)\}$, άρα αν το ζητούμενο ισχύει για $n-1$ (στην θέση του n) τότε έχουμε, $|E_i| \leq 2^{-(n-1)}|J(x_i)|$.

Επομένως, $|E| = \sum\limits_i |E_i| \leq 2^{-(n-1)} \sum\limits_i |J(x_i)| = 2^{-(n-1)}|\mathcal{E}| < 2^{-(n-1)}\dfrac{1}{2}|I| = 2^{-n}|I|$, και άρα έχουμε το ζητούμενο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.1: Αν $F \in BMO$ και I ένα οποιοδήποτε διάστημα, τότε:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I (F(x) - F_I)^2\, dx \leq C\|F\|_*^2,$$

με C να είναι αριθμητική σταθερά.

Απόδειξη:
Έστω $m(\lambda) = |\{x \in I : |F(x) - F_I| > \lambda\}|$. Τότε από Θεώρημα 2.12 έχουμε ότι, για κάθε μη-αρνητικό ακέραιο n, $m(\lambda) \leq 2 \times 2^{-n}|I|$, αν $\lambda > 4n\|F\|_*$ (ο παραπάνω παράγοντας 2 εμφανίστηκε γιατί κοιτάμε το μέτρο του συνόλου των x όπου $F(x) - F_I < -\lambda$ ή $F(x) - F_I > \lambda$).
Επομένως,

$$m(\lambda) \leq 2|I|e^{-\left[\frac{\lambda}{4\|F\|_*}\right]\log 2},$$

όπου $[t]$ συμβολίζουμε τον μεγαλύτερο ακέραιο $\leq t$.

Άρα, από τα παραπάνω και από Πόρισμα του Παραρτήματος Γ, έχουμε ότι:

$$\int_I |F(x)-F_I|^2 dx = 2\int_0^\infty \lambda m(\lambda)d\lambda \leq 4|I|\int_0^\infty \lambda e^{-\log 2\left[\frac{\lambda}{4\|F\|_*}\right]}d\lambda$$

$= 64|I|\|F\|_*^2\int_0^\infty se^{-[s]\log 2}ds = C|I|\|F\|_*^2,$ όπου $C = 64\int_0^\infty se^{-[s]\log 2}ds$ αριθμητική σταθερά.

ΛΗΜΜΑ 2.13: Έστω $f(t) \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική και $f(t) \geq 0$. Τότε υπάρχει μια αριθμητική σταθερά C τέτοια ώστε,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} f(t)dt \leq C\int_0^\infty \frac{(1-r)s^2}{((1-r)^2+s^2)^2}\left(\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t)dt\right)ds.$$

Απόδειξη:

Γράφουμε, $\dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} = \dfrac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2+4r\sin^2(\frac{t}{2})}$ και έχουμε,

$\dfrac{(1-r)(1+r)}{(1-r)^2+4r\sin^2(\frac{t}{2})} \leq k\dfrac{1-r}{(1-r)^2+t^2}$, για $0 \leq r < 1$ και $-\pi \leq t \leq \pi$, με k να είναι μια *βολική* αριθμητική σταθερά.

Τώρα, γράφουμε $1-r=u$. Τότε, αν $f(t) \geq 0$, έχουμε:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} f(t)dt = \int_0^{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t}(f(t)+f(-t))dt \leq k\int_0^{\pi} \frac{u}{u^2+t^2}(f(t)+f(-t))dt$$

$$\leq k\int_0^\infty \frac{u}{u^2+t^2}(f(t)+f(-t))dt = k\int_0^\infty (f(t)+f(-t))\int_t^\infty \frac{2us}{(u^2+s^2)^2}dsdt$$

$= k\displaystyle\int_0^\infty \frac{2us}{(u^2+s^2)^2}\int_0^s (f(t)+f(-t))dtds = 4k\int_0^\infty \frac{us^2}{(u^2+s^2)^2}\left(\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} f(t)dt\right)ds$, και έχουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.13: Αν $F \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, πραγματική, τότε έχουμε:

$$\mathfrak{N}(F) \leq K\|F\|_*,$$

με K να είναι αριθμητική σταθερά.

Απόδειξη:

Όπως ξέρουμε από τον Ορισμό 2.2, $(\mathfrak{N}(F))^2 = \sup_{|z|<1}\{U_{F^2}(z) - (U_F(z))^2\}$ και για να δείξουμε την ζητούμενη σχέση, αρκεί να εκτιμήσουμε την ποσότητα $U_{F^2}(z) - (U_F(z))^2$ σε όρους του $\|F\|_*$.

Αφού η $F(x)$ και η μεταφορά της κατά h, $F_h(x) = F(x-h)$ έχουν προφανώς την ίδια νόρμα BMO $\|\cdot\|_*$, δεν υπάρχει βλάβη της γενικότητας αν πάρουμε $z = r$ με $0 < r < 1$.

Τώρα, από το Λήμμα 2.3 (ενότητα C) ,έχουμε:

$$U_{F^2}(r) - (U_F(r))^2 = \tfrac{1}{8\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-r^2)^2(F(s)-F(t))^2}{(1+r^2-2r\cos s)(1+r^2-2r\cos t)}dsdt \qquad (1) \quad .$$

Αφού, $(F(s)-F(t))^2 \leq 0$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.13 δύο φορές για να εκτιμήσουμε το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα. Δηλαδή, έχουμε:

$$(1) \ \leq C^2\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{us^2}{(u^2+s^2)^2}\frac{ut^2}{(u^2+t^2)^2}\left(\frac{1}{4st}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}(F(\sigma)-F(\tau))^2 d\sigma d\tau\right)dsdt,$$

όπου $u = 1-r$ και C αριθμητική σταθερά.

Τώρα, αν I και J είναι οποιαδήποτε διαστήματα με *κοινό μέσο* , τότε:

$$\left(\tfrac{1}{|J|}\tfrac{1}{|I|}\int_J\int_I(F(\sigma)-F(\tau))^2 d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\tfrac{1}{|J|}\tfrac{1}{|I|}\int_J\int_I(F(\sigma)-F_I)^2 d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}} +$$
$$\left(\tfrac{1}{|I|}\tfrac{1}{|J|}\int_I\int_J(F(\tau)-F_J)^2 d\tau d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tfrac{1}{|I|}\tfrac{1}{|J|}\int_I\int_J(F_I-F_J)^2 d\tau d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \left(\tfrac{1}{|I|}\int_I(F(\sigma)-F_I)^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\tfrac{1}{|J|}\int_J(F(\tau)-F_J)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} + |F_I - F_J| \qquad (2) \quad .$$

Από Πόρισμα 2.1, έχουμε:

$$(2) \ \leq 2\sqrt{C}\|F\|_* + |F_I - F_J| \quad (3) \ .$$

Και, από Λήμμα 2.12,

$$(3) \ \leq 2\sqrt{C}\|F\|_* + 2\|F\|_*\left(1 + |\log_2(\frac{|J|}{|I|})|\right) .$$

Άρα , για $s, t > 0$, έχουμε βγάλει ότι:

$$\boxed{\left(\frac{1}{4st}\int_{-s}^{s}\int_{-t}^{t}(F(\sigma)-F(\tau))^2 d\sigma d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2c\|F\|_* + 2\|F\|_*\left(1 + |\log_2(\frac{s}{t})|\right)}.$$

Επομένως,

$$U_{F^2}(r) - (U_F(r))^2 \leq K_0 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{u^2 s^2 t^2 \|F\|_*^2 \left(1 + (\log(\frac{s}{t}))^2\right)}{(u^2+s^2)^2(u^2+t^2)^2} dtds \;\; (4) \;,$$

με K_0 να είναι μια *βολική* σταθερά και $u = 1 - r$.

Κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής, $x = \frac{s}{u}, y = \frac{t}{u}$, η σχέση (4) γίνεται,

$$K_0 \|F\|_*^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 y^2 (1 + (\log x - \log y)^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} dxdy \leq K_0 \|F\|_*^2 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^2 y^2 (1 + 2(\log x)^2 + 2(\log y)^2)}{(1+x^2)^2(1+y^2)^2} dxdy.$$

$= K\|F\|_*^2$, αφού το τελευταίο διπλό ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο .

Επομένως, με K να είναι αριθμητική σταθερά, έχουμε βγάλει,

$$\left(U_{F^2}(r) - (U_F(r))^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq K\|F\|_* \Rightarrow \mathfrak{N}(F) \leq K\|F\|_*.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.2: Οι νόρμες $\|\cdot\|_*$ και $\mathfrak{N}(\cdot)$ είναι ισοδύναμες.

Απόδεξη:
Τό ζητούμενο είναι άμεσο από τον συνδυασμό του Θεωρήματος 2.13 και του Θεωρήματος 2.4 (ενότητα C).

Σχόλιο 2.10: Συνδιάζοντας το Πόρισμα 1.2 με το Θεώρημα 1.10 (ενότητα Ε) , έχουμε φτάσει στο *τελικό σημείο* της εργασίας αυτής, δηλαδή στο Θεώρημα του Fefferman για τις συναρτήσεις BMO , το οποίο είναι το παρακάτω Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.14: *(Fefferman)*
Ο Δυικός του $\Re\mathbb{H}_1^0$ είναι οι συναρτήσεις $\Re BMO$ modulo τις σταθερές συναρτήσεις.
Αν $F(\theta)$ είναι πραγματική, 2π-περιοδική και τοπικά ολοκληρώσιμη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(i) το $L\Re f = \lim\limits_{R\to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \Re f(Re^{i\theta})F(\theta)d\theta$ υπάρχει για κάθε $f \in \mathbb{H}_1^0$ και το L είναι γραμμικό συναρτησοειδές στον $\Re\mathbb{H}_1^0$.
(ii) $F(\theta) = \phi(\theta) + \widetilde{\psi}(\theta)$, με $\phi, \psi \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$, πραγματικές.
(iii) $F \in \Re BMO$.

Στην περίπτωση που $F \in \Re BMO$, η νόρμα του γραμμικού συναρτησοειδούς L που δίνεται από την (i) είναι ισοδύναμη με την BMO νόρμα της F, $\|F\|_*$, και μπορούμε να βρούμε $\phi_1(\theta), \psi_1(\theta)$ 2π-περιοδικές τέτοιες ώστε $F(\theta) = \phi_1(\theta) + \widetilde{\psi_1}(\theta) + c_0$, με c_0 κάποια σταθερά, με $\|\phi_1\|_\infty + \|\psi_1\|_\infty \leq A\|F\|_* \leq B(\|\phi_1\|_\infty + \|\psi_1\|_\infty)$, με A, B αριθμητικές σταθερές.

Έτσι,

$$\boxed{\Re BMO = \Re\mathbb{L}_\infty(\mathbb{T}) + \widetilde{\Re\mathbb{L}}_\infty(\mathbb{T})}\,.$$

3. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Αρμονικές συναρτήσεις στον μοναδιαίο δίσκο.

Θα αναφερθούν κάποιοι ορισμοί και κάποια χρήσιμα αποτελέσματα στις αρμονικές συναρτήσεις του μοναδιαίου δίσκου (αρκετά συνοπτικά και χωρίς τις αποδείξεις τους) ,τα οποία αποτελέσματα (και όχι μόνο αυτά!) χρειάστηκαν για το κεφάλαιο 2.

Ο πυρήνας του Poisson: Η συνάρτηση $P_r(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} r^{|n|} e^{int}$, με $0 \leq r < 1, t \in \mathbb{R}$ (1), ονομάζεται *πυρήνας του Poisson*.

Αν $z = re^{i\theta}$, με $0 \leq r < 1, \theta, t \in \mathbb{R}$, τότε μετά από κάποιους υπολογισμούς έχουμε, $P_r(\theta - t) = \Re\left[\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right] = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2}$ (2)

Τώρα, από την (1), βλέπουμε ότι $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1.$

Από την (2) έχουμε, $P_r(t) > 0$, $P_r(t) = P_r(-t)$, $P_r(t) < P_r(\delta)$ $(0 < \delta < |t| \leq \pi)$ και $\lim_{r\to 1} P_r(\delta) = 0$ $(0 < \delta \leq \pi)$.

Επίσης, η (2) μπορεί να θεωρηθεί και ως συνάρτηση των $z = re^{i\theta}$ και e^{it}, δηλαδή έχουμε $P(z, e^{it}) = \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}$ για $z \in U$ και $e^{it} \in \mathbb{T}$.

Το ολοκλήρωμα του Poisson: Αν $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$ και $F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$, τότε η συνάρτηση F ορίζεται στο U και καλείται *ολοκλήρωμα του Poisson της f* και θα το συμβολίζουμε $F = P[f]$.
Αν *f* πραγματική τότε από την (2) βλέπουμε ότι το $P[f]$ είναι το πραγματικό μέρος της $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} f(t)dt$, η οποία είναι ολόμορφη συνάρτηση του $z = re^{i\theta}$ στο U, έτσι και το $P[f]$ είναι αρμονική συνάρτηση στο U.

Θεώρημα 1: Αν $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$ τότε το $P[f]$ είναι αρμονική συνάρτηση στο U.

Θεώρημα 2: Αν $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T})$ και η Hf ορίζεται στο $\overline{U}$, με $(Hf)(re^{i\theta}) = \left\{ \begin{array}{ll} f(e^{i\theta}) & \text{αν} \quad r = 1 \\ P[f](re^{i\theta}) & \text{αν} \quad 0 \leq r < 1 \end{array} \right\}$, τότε $Hf \in \mathbb{C}(\overline{U})$.

Θεώρημα 3: Αν u είναι συνεχής συνάρτηση στο $\partial D(a,R),\ R>0$, και αν η u ορίζεται στον $D(a,R)$, με $u(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(\theta-t)+r^2}u(a+Re^{it})dt$ (1), τότε η u είναι συνεχής στον $\overline{D}(a,R)$ και αρμονική στον $D(a,R)$.

Επιπλέον, αν u είναι αρμονική (και πραγματική) σε ένα ανοιχτό σύνολο Ω και αν $\overline{D}(a,R)\subset\Omega$, τότε η u ικανοποιεί την (1) στον $D(a,R)$ και υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f η οποία ορίζεται στον $D(a,R)$ και το πραγματικό της μέρος είναι η u. Αυτή η f ορίζεται μοναδικά, με διαφορά μιας σταθεράς στο φανταστικό της μέρος (Αν δύο ολόμορφες συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό και συνεκτικό χωρίο έχουν το ίδιο πραγματικό μέρος, τότε η διαφορά τους είναι μια σταθερά. Δηλαδή έχουμε ότι, κάθε πραγματική αρμονική συνάρτηση είναι τοπικά το πραγματικό μέρος μιας ολόμορφης συνάρτησης).

Τώρα ας συνδέσουμε κάθε συνάρτηση u στο U με μία οικογένεια συναρτήσεων u_r στον $\mathbb{T}$, με $u_r(e^{i\theta})=u(re^{i\theta})\quad(0\le r<1)$.
Έτσι η οικογένεια συναρτήσεων u_r είναι ουσιαστικά ο περιορισμός της u στον κύκλο με ακτίνα r και κέντρο το 0, απλά μετατοπίζουμε το πεδιό ορισμού της u_r στον $\mathbb{T}$.

Θεώρημα 4: Αν $1\le p\le\infty,\ f\in\mathbb{L}_p(\mathbb{T})$, και $u=P[f]$, τότε u αρμονική στο U και $\|u_r\|_p\le\|f\|_p\ ,\ 0\le r<1$.

Αν $1\le p<\infty$, τότε $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})-f(\theta)|^p d\theta\longrightarrow_{r\to1}0$.
Και αν $p=\infty$ τότε $u(re^{i\theta})\longrightarrow^{w^*}f(\theta)$ καθώς $r\to1$.

Θεώρημα 5: Έστω μ ένα μιγαδικό μέτρο στο $[-\pi,\pi]$. Τότε η $u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}P_r(\theta-t)d\mu(t)$,και θα το συμβολίζουμε $u=P[d\mu]$, είναι αρμονική για $|z|<1$ και $\int\limits_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\theta})|d\theta\le\|\mu\|$.

Μη-εφαπτομενικά όρια: Μια συνάρτηση F που ορίζεται στο U, λέμε ότι έχει *μη-εφαπτομενικό όριο* λ στο $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$, αν, για κάθε $\alpha < 1$, $\lim_{j\to\infty} F(z_j) = \lambda$, για κάθε ακολουθία (z_j) με $z_j \to e^{i\theta}$ και $z_j \in e^{i\theta}\Omega_\alpha, \forall j$, με $\{\Omega_\alpha$, για $0 < \alpha < 1\}$ να είναι το μικρότερο κυρτό ανοιχτό σύνολο που περιέχει τον ανοιχτό δίσκο $D(0,\alpha)$ και το 1 στο σύνορο του, καλείται *μη-εφαπτομενικό προσεγγιστικό χωρίο με κορυφή το 1* .

Θα συμβολίζουμε : $\lim\limits_{z \to_\angle e^{i\theta}} F(z) = \lambda$.

Θεώρημα 6: Αν $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T}), 1 \leq p \leq \infty$, τότε το $P[f]$ (που είναι αρμονική στο U) έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(e^{i\theta})$ σε κάθε σημείο Lebesque $e^{i\theta}$ της f.

Θεώρημα 7: Αν $d\mu = f d\sigma + d\mu_s$ είναι η Lebesque αναπαράσταση ενός μέτρου Borel μ στον $\mathbb{T}$, όπου $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$, $\mu_s \perp \sigma$, τότε το $P[d\mu]$ έχει μη-εφαπτομενικό όριο $f(e^{i\theta})$ σε σχεδόν όλα τα σημεία του $\mathbb{T}$.

Θεώρημα 8: Έστω u αρμονική στο U , $1 \leq p \leq \infty$, και $\sup_{0<r<1} \|u_r\|_p < \infty$.
(i) Αν $p = 1$, τότε υπάρχει μοναδικό μιγαδικό μέτρο Borel μ στον $\mathbb{T}$ τέτοιο ώστε $u = P[d\mu]$.
(ii) Αν $p > 1$, τότε υπάρχει μοναδική $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $u = P[f]$.

(iii) Κάθε θετική αρμονική συνάρτηση στο U είναι το ολοκλήρωμα Poisson ενός μοναδικού θετικού μέτρου Borel στον $\mathbb{T}$.

(Και αφού κάθε ολόμορφη είναι αρμονική , τα (i),(ii) του θεωρήματος 8 ισχύουν και για ολόμορφες συναρτήσεις)

Όποτε έχουμε αρμονική συνάρτηση u στο U που ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 8 (για $p > 1$) τώρα ξέρουμε ότι επεκτείνεται σχεδόν παντού στον $\mathbb{T}$, όπως περιγράφτηκε παραπάνω (στο (ii)).

Τώρα,αν μας δίνουν μια αρμονική συνάρτηση $U(z)$ για $|z| < 1$ λέμε ότι η συνάρτηση $V(z)$ είναι **αρμονική συζυγής** της $U(z)$,αν η $U(z)+iV(z)$ είναι ολόμορφη για $|z| < 1$. Όπως ειπώθηκε και παραπάνω, η αρμονική συζυγής ορίζεται με διαφορά μια σταθεράς, και όταν εργαζόμαστε στον μοναδιαίο δίσκο την σταθερά την επιλέγουμε παίρνοντας $V(0) = 0$. Θα συμβολίζουμε την αρμονική συζυγή $V(z)$ της $U(z)$ με $\widetilde{U}(z)$.

Αν υποθέσουμε ότι $U(re^{i\theta}) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n r^{|n|} e^{in\theta}$, $0 \le r < 1$, τότε

$\widetilde{U}(re^{i\theta}) = -\sum_{-\infty}^{\infty} isgn(n) A_n r^{|n|} e^{in\theta}$, με $sgn(0) = 0$, είναι η αρμονική συζυγής της $U(z)$.

Πράγματι, η $\widetilde{U}(z)$ είναι αρμονική για $|z| < 1$ (οι σειρές συγκλίνουν απόλυτα εκεί) και $\widetilde{U}(0) = 0$.

Επίσης, $U(re^{i\theta}) + i\widetilde{U}(re^{i\theta}) = A_0 + \sum_{1}^{\infty} 2A_n r^n e^{in\theta}$ είναι αναλυτική για $|z| < 1$.

Τώρα, αν $U(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) d\mu(t)$, με μ να είναι ένα μιγαδικό μέτρο στον $\mathbb{T}$,

τότε πάλι η $U(z)$ γράφεται όπως παραπάνω με $A_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t)$.

Και αν πούμε $Q_r(\theta) = -\sum_{-\infty}^{\infty} isgn(n) r^{|n|} e^{in\theta}$ να είναι η **συζυγής του πυρήνα Poisson**,

βρίσκουμε ότι $Q_r(\theta) = \frac{2r\sin\theta}{1+r^2-2r\cos\theta}$ και έχουμε ότι $\widetilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t) d\mu(t)$.

4. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Το Θεώρημα των αδερφών Riesz, οι χώροι $\mathbb{H}_p$ και ο μετασχηματισμός Hilbert των $\mathbb{L}_2$ συναρτήσεων .

Στο Παράρτημα αυτό θα αναφερθεί αρχικά το Θεώρημα των αδερφών Riesz (χωρίς απόδειξη),που δημοσιεύθηκε το 1917, το οποίο σχετίζεται με μέτρα Borel μ στον $\mathbb{T}$ με συντελεστές Fourier $\widehat{\mu}(n) = 0$ για όλα τα $n < 0$. Στη συνέχεια θα διατυπωθούν ορισμοί και κάποια (όσα χρειάζονται) αποτελέσματα των χώρων $\mathbb{H}_p$ (το όνομα τους το πήραν από τον G.H. Hardy) οι οποίοι είναι υποσύνολα του $\mathbb{H}(U)$ και έχουν έναν μεγάλο αριθμό από ενδιαφέρουσες ιδιότητες. Στο τέλος θα ορισθεί ο μετασχηματισμός Hilbert και η ανισότητα Hilbert για $\mathbb{L}_2$ συναρτήσεις.

Θεώρημα 1: *(Το Θεώρημα των αδερφών Riesz)*

Έστω ένα μιγαδικό μέτρο Borel μ στον $\mathbb{T}$. Αν $\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} d\mu(\theta) = 0$ για $n = 1, 2, 3, ...$, τότε το μέτρο μ είναι *απολύτως συνεχές (absolutely continuous)* ως προς το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός: Για $f \in \mathbb{H}(U)$ και $1 \leq p \leq \infty$ λέμε ότι η $f \in \mathbb{H}_p$, αν $\|f\|_p = \sup\limits_{0 \leq r < 1} \|f_r\|_p < \infty$,

όπου $\|f_r\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_r(e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$ και $\|f_r\|_\infty = \sup\limits_{\theta} |f_r(e^{i\theta})|$.

Και για $0 < p < 1$, γράφουμε $\|f\|_p = \sup\limits_{r<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f_r(e^{i\theta})|^p d\theta$ (χωρίς την p-οστή ρίζα δηλαδή).

Είναι προφανές ότι, $\mathbb{H}_\infty \subset \mathbb{H}_p \subset \mathbb{H}_s$ αν $0 < s < p < \infty$.

Παρατήρηση: (i) Η $\|f_r\|_p$ με $0 < p \leq \infty$ είναι αύξουσα συνάρτηση του r , για κάθε $f \in \mathbb{H}(U)$, και άρα $\|f\|_p = \lim\limits_{r \to 1} \|f_r\|_p$.
(ii) Οι χώροι $\mathbb{H}_p$ είναι χώροι Banach για $p \geq 1$.

Θεώρημα 2: Έστω $0 < p < \infty$ και $f \in \mathbb{H}_p$. Τότε:

(i) Τα μη-εφαπτομενικά όρια της f υπάρχουν σχεδόν παντού στον $\mathbb{T}$. Αν συμβολίσουμε:

$f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{z \to_{\angle} e^{i\theta}} f(z)$, τότε τα $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ και $\|f(e^{i\theta})\|_p = \|f\|_p$,

(ii) Για $0 < p < \infty$: $\lim\limits_{r \to 1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0$.

Αν $f \in \mathbb{H}_p$, με $p \geq 1$, τότε η f είναι το ολοκλήρωμα Cauchy όσο και το ολοκλήρωμα Poisson των συνοριακών τιμών της $f(e^{i\theta})$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{f(e^{i\theta})}{1 - e^{-i\theta} z} d\theta \ , \quad f(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} P(z, e^{i\theta}) f(e^{i\theta}) d\theta \ .$$

Αν ταυτίσουμε τις συναρτήσεις $f \in \mathbb{H}_p$ που είναι ορισμένες στον U με τις αντίστοιχες συνοριακές συναρτήσεις $f(e^{i\theta}) \in \mathbb{L}_p$ που είναι ορισμένες στον $\mathbb{T}$, τότε ο χώρος $\mathbb{H}_p$ είναι ισομετρικός με τον αντίστοιχο κλειστό υπόχωρο του $\mathbb{L}_p$, τον οποίο συμβολίζουμε επίσης $\mathbb{H}_p$.

Αν $p \geq 1$, τότε ο $\mathbb{H}_p$ ως υπόχωρος του $\mathbb{L}_p$ περιγράφεται ως εξής:

$$\mathbb{H}_p = \{ f \in \mathbb{L}_p : \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0, \ n = -1, -2, -3, ..\}.$$

Θεώρημα 3: Αν $f(z) \in \mathbb{H}_1$ και αν για σύνολο E θετικού μέτρου ισχύει ότι $f(e^{i\theta}) = 0$ για $\theta \in E$, τότε $f(z) = 0$.

Θεώρημα 4: Έστω $f(\theta) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{T})$ και έχουμε ότι, για $0 \leq r < 1$,
$U(re^{i\theta}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)f(t)dt$, $\widetilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} Q_r(\theta - t)f(t)dt$, η U είναι αρμονική και $\widetilde{U}$ η αρμονική συζυγής της, με $\widetilde{U}(0) = 0$.
Τότε, το

$$\widetilde{f}(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} \frac{f(\theta - t)}{2\tan(\frac{t}{2})}dt = \frac{1}{\pi} \fint_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta - t)}{2\tan(\frac{t}{2})}dt = \frac{1}{\pi} \fint_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2\tan(\frac{\theta - t}{2})}dt$$

υπάρχει σ.π. και είναι πεπερασμένο,

$\|\widetilde{f}\|_2 \leq \|f\|_2$ **(η ανισότητα Hilbert)** και $\widetilde{U}(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t)\widetilde{f}(t)dt$, για αυτό έχουμε ότι $\widetilde{U}(z) \to \widetilde{f}(\theta)$ σ.π. για $z \to_{\angle} e^{i\theta}$.

Έτσι για δοσμένη $f(\theta) \in \mathbb{L}_2(\mathbb{T})$ από το Θεώρημα 4 παίρνουμε ότι η $F(z) = U(z) + i\widetilde{U}(z)$ ανήκει στον $\mathbb{H}_2$. Οι συνοριακές τιμές $F(e^{i\theta})$ ικανοποιούν την $F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\widetilde{f}(\theta)$ σ.π., άρα αν $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{T})$, πραγματική, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια $F \in \mathbb{H}_2$ με $\Re F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ σ.π.

Ορισμός: Η $\widetilde{f}(\theta)$ καλείται **μετασχηματισμός Hilbert** της $f(\theta)$ και τις περισσότερες φορές θα την αναφέρουμε ως η *αρμονική συζυγής* της $f(\theta)$ ή η *συζυγής συνάρτηση* της $f(\theta)$.

Θεώρημα 5: Αν $f(\theta) \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ για $1 < p < \infty$ τότε η *αρμονική συζυγής* της $\widetilde{f}(\theta) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} \frac{f(\theta - t)}{2\tan(\frac{t}{2})}dt$ υπάρχει σ.π. και $\widetilde{f} \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$.

Έτσι για δοσμένη $f(\theta) \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$ από το Θεώρημα 5 παίρνουμε ότι η $F(z) = U(z) + i\widetilde{U}(z)$ (με $U(z) = P[f]$ και με $\widetilde{U}(z)$ την αρμονική συζυγή της U) ανήκει στον $\mathbb{H}_p$, για κάθε $1 < p < \infty$. Οι συνοριακές τιμές $F(e^{i\theta})$ ικανοποιούν την $F(e^{i\theta}) = f(\theta) + i\widetilde{f}(\theta)$ σ.π., άρα αν $f \in \mathbb{L}_p(\mathbb{T})$, πραγματική, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια $F \in \mathbb{H}_p$, για κάθε $1 < p < \infty$, με $\Re F(e^{i\theta}) = f(\theta)$ σ.π.

Σχόλιο: (i) Αν $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{T})$ τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε παραδείγματα με $\widetilde{f}(\theta)$ που να μην ανήκει στον $\mathbb{L}_1(\mathbb{T})$.
(ii) Αν $f \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$ τότε δεν συνεπάγεται ότι το $\widetilde{f}(\theta)$ ανήκει στον $\mathbb{L}_\infty(\mathbb{T})$ (θέλει πιο ισχυρές συνθήκες για να ισχύει).

5. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Γινόμενα Blaschke, μέτρα Carleson και η συνάρτηση κατανομής.

Ορισμός 1: Αν $0 < |z_n| < 1,\ n = 1, 2, 3, ..,$ και αν το άπειρο γινόμενο $\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$ *συγκλίνει απολύτως* για $|z| < 1$, τότε το γινόμενο αυτό είναι μια συνάρτηση ολόμορφη στον μοναδιαίο δίσκο και καλείται **γινόμενο Blaschke**. Μπορούμε ακόμη να επιτρέψουμε ένα πεπερασμένο αριθμό των z_n να είναι μηδέν και σε αυτήν την περίπτωση ο παράγοντας $\frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$ απλά θα αντικατασταθεί με z.

Θεώρημα 1: Το γινόμενο $\prod_1^\infty \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z}$ συγκλίνει απολύτως και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\{|z| < 1\}$ αν και μόνο αν $\sum_n (1 - |z_n|) < \infty$.

Θεώρημα 2: Αν B είναι γινόμενο Blaschke, τότε $|B(e^{i\theta})| = 1$ σ.π. , με το $B(e^{i\theta})$ να είναι το μη-εφαπτομενικό όριο της B.

Θεώρημα 3: Αν $F(z)$ όχι ταυτοτικά μηδέν και $F \in \mathbb{H}_p$, τότε υπάρχει ένα γινόμενο Blaschke $B(z)$ και μια $G(z) \in \mathbb{H}_p$ με $F(z) = B(z)G(z)$, με $G(z)$ να μην έχει ρίζες στο $\{|z| < 1\}$.

Σχόλιο: Από την απόδειξη του Θεωρήματος 3 μπορούμε να δούμε ότι, $\sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |G(re^{i\theta})|^p d\theta \leq \sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |F(re^{i\theta})|^p d\theta$ και αφού $F = BG$ και $|B(z)| \leq 1$ στο $\{|z| < 1\}$ έχουμε ότι ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα, όποτε έχουμε την ισότητα.

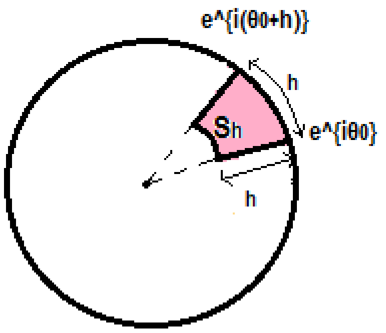
Πόρισμα: Αν f όχι ταυτοτικά μηδέν και $f \in \mathbb{H}_1$, μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις $g, h \in \mathbb{H}_1$, με $g(z)$ και $h(z)$ να μην έχουν ρίζες στο $\{|z|<1\}$, με

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{i\theta})| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta, \quad \int_{-\pi}^{\pi} |h(e^{i\theta})| d\theta \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})| d\theta$$ και τέτοιες ώστε $f = g + h$.

(Η απόδειξη βασίζεται στο Θεώρημα 3 και στο σχόλιο και το αποτέλεσμα το έχουμε για τις συναρτήσεις, $g(z) = \frac{1}{2}(1+B(z))F(z)$, $h(z) = -\frac{1}{2}(1-B(z))F(z)$ όπου $f = BF$ με $F \in \mathbb{H}_1$ η οποία δεν έχει ρίζες στον μοναδιαίο δίσκο και με B να είναι γινόμενο Blaschke).

Ορισμός 2: Ένα θετικό μέτρο Borel (όχι απαραίτητα πεπερασμένο) το οποίο ορίζεται στο $\{|z|<1\}$ καλείται **μέτρο Carleson** αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά K τέτοια ώστε, για κάθε $F \in \mathbb{H}_1$, έχουμε, $\iint\limits_{|z|<1} |F(z)| d\mu(z) \leq K \|F\|_1$.

Θεώρημα 5: Έστω ένα θετικό μέτρο Borel στον μοναδιαίο δίσκο. Τότε: $\iint\limits_{|z|<1} |F(z)| d\mu(z) \leq K \|F\|_1$, για κάθε $F \in \mathbb{H}_1$ και με K κάποια σταθερά, αν και μόνο αν $\mu(B_h) \leq Ch$ για κάθε καμπυλόγραμμο κουτί B_h της παρακάτω μορφής,



Ορισμός 3: Αν $f(x)$ είναι μια μιγαδική συνάρτηση και πεπερασμένη σ.π., τότε γράφυμε, για λ>0, $m_f(\lambda) = |\{x : |f(x)| > \lambda\}|$ και η $m_f(\lambda)$ ονομάζεται **η συνάρτηση κατανομής (distribution function)** της f.

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesque, έχουμε $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx = \int_{0+}^{\infty} \lambda^p (-dm_f(\lambda))$, για $p > 0$.

Λήμμα: Για $0 < p < \infty$ έχουμε, $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx = p \int\limits_{0+}^{\infty} \lambda^{p-1} m_f(\lambda) d\lambda.$

6. Συμβολισμοί και Βιβλιογραφία.

Συμβολισμοί:

$\mathbb{T} = \{z : |z| = 1\}$
$U = \{z : |z| < 1\}$
$\overline{U} = \{z : |z| \leq 1\}$
$C(\mathbb{T}) =$ τις 2π-περιοδικές, συνεχείς μιγαδικές συναρτήσεις του $\mathbb{R}$ με νόρμα
$\|f\|_\infty = \sup_t |f(t)|$
$\mathbb{L}_p(\mathbb{T}) =$ τις 2π-περιοδικές, μιγαδικές ,Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις του $\mathbb{R}$ με την $\|\cdot\|_p$- νόρμα.
$D(a, R) =$ ο δίσκος με κέντρο το α και ακτίνα R
$\partial D(a, R) =$ το σύνορο του δίσκου με κέντρο το α και ακτίνα R
$\mathbb{H}(U) =$ οι ολόμορφες συναρτήσεις του μοναδιαίου δίσκου
$\{\Omega_\alpha,$ για $0 < \alpha < 1\} =$ το μικρότερο κυρτό ανοιχτό σύνολο που περιέχει το $D(0, \alpha)$ και το 1 στο σύνορο, καλείται *μη-εφαπτομενικό προσεγγιστικό χωρίο με κορυφή το 1.*

Βιβλιογραφία:

1. Paul Koosis - Introduction to $\mathbb{H}_p$ spaces (second edition)
2. Walter Rudin - Real and Complex Analysis (third edition)