Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών,
Πανεπιστήμιο Κρήτης

Μεταπτυχιακή Εργασία

Ο Νόμος του Λογάριθμου για συναρτήσεις **Bloch**

Χρυσαφίνα Ροδίτου

Επιβλέπων Καθηγητής: Μιχάλης Παπαδημητράκης

Εαρινό εξάμηνο 2022

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα: «Μαθηματικά και Εφαρμογές τους»
Κατεύθυνση: Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιτροπή κρίσης:

Θ. Μήτσης, Μ. Κολουντζάκης, Μ. Παπαδημητράκης.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Μιχάλη Παπαδημητράκη, για την άψογη συνεργασία, την πολύτιμη και ουσιαστική βοήθεια, τη στήριξη και την καθοδήγησή του, τόσο στα πλαίσια της εκπόνησης αυτής της εργασίας όσο και καθ΄ όλη τη διάρκεια των σπουδών μου. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους κυρίους Θεμιστοκλή Μήτση και Μιχάλη Κολουντζάκη, που αποτελούν την επιτροπή κρίσης, για τον χρόνο που αφιέρωσαν για αυτή την εργασία αλλά και γιατί ως καθηγητές αποτέλεσαν για εμένα, αμφότεροι, πηγή μαθηματικής έμπνευσης και θαυμασμού.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία, σκοπός μας είναι να μελετήσουμε μερικές από τις ιδιότητες μίας κλάσης μιγαδικών συναρτήσεων, των λεγόμενων συναρτήσεων *Bloch*, καταλήγοντας τελικά στο κεντρικό θεώρημα που θα μας απασχολήσει, τον «Νόμο Επαναλαμβανόμενου Λογάριθμου για συναρτήσεις *Bloch*», το οποίο θα μας δώσει πληροφορίες σχετικά με το ρυθμό ανάπτυξης αυτών των συναρτήσεων. Η αρχική ιδέα, προήλθε από τον *Andre Bloch* με την εισαγωγή μίας κλάσης συναρτήσεων οι οποίες σχηματίζουν τον λεγόμενο χώρο *Bloch*. Κατά την περίοδο 1925 με 1968 τα αποτελέσματα της μελέτης του *Bloch*, αποτέλεσαν κίνητρο για πολλούς μαθηματικούς και η έρευνα πήρε νέες προεκτάσεις. Από το 1969 μέχρι και σήμερα, έχει επικρατήσει μία πιο σύγχρονη προσέγγιση στη μελέτη αυτών των συναρτήσεων, την οποία θα ακολουθήσουμε κι εμείς, με χρήση μεθόδων τόσο Συναρτησιακής Ανάλυσης όσο και Θεωρίας Μέτρου. Σημαντικό ρόλο στη μελέτη μας, θα διαδραματίσουν, επίσης, οι σύμμορφες απεικονίσεις από τον μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$. Το κεντρικό θεώρημα της εργασίας, δηλαδή ο «Νόμος Επαναλαμβανόμενου Λογάριθμου», διατυπώθηκε και αποδείχθηκε αρχικά από τον *Nikolai G. Makarov* (1990) ενώ στη μορφή που θα το παρουσιάσουμε εμείς έχει αποδειχθεί από τον *Christian Pommerenke*.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο κύριες ενότητες. Στην πρώτη ενότητα θα ορίσουμε τις συναρτήσεις *Bloch*, που είναι συναρτήσεις g αναλυτικές στον μοναδιαίο δίσκο με $||g||_B = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| < \infty$ και θα αποδείξουμε μερικές ιδιότητές τους, κάποιες από τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε και στην απόδειξη του Νόμου Επαναλαμβανόμενου Λογάριθμου. Πιο συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων *Bloch* $\mathscr{B}$, εφοδιασμένο με κατάλληλη νόρμα είναι μιγαδικός χώρος *Banach*, ότι η συνηθισμένη *Bloch*-ημινόρμα $||g||_B = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)|$, $g \in \mathscr{B}$ είναι σύμμορφα αναλλοίωτη, το γνήσιο περιέχεσθαι $\mathbb{H}^\infty \subsetneqq \mathscr{B}$ καθώς και ότι αν μία συνάρτηση f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ τότε $||\log(f-a)||_B \leq 4$, $a \notin f(\mathbb{D})$ και $||\log f'||_B \leq 6$.
Στη δεύτερη ενότητα, θα διατυπώσουμε και θα αποδείξουμε το Νόμο Επαναλαμβανόμενου Λογάριθμου και ένα Πόρισμα αυτού.

Introduction

The purpose of this thesis is to study some properties regarding a class of functions named Bloch. The main result is the "Law of Iterated Logarithm for Bloch functions" that gives us information about the growth of these functions. The basic idea goes back to Andre Bloch, who introduced a class of functions, which form the so-called Bloch space. During the period from 1925 through 1968 Bloch's results motivated many mathematicians and the research was extended. From 1969 to the present, a modern approach to the study of these functions has prevailed, using methods of Functional Analysis and Measure Theory. The conformal maps from $\mathbb{D}$ onto $\mathbb{D}$ will also play an important role in our study. The main theorem, the "Law of Iterated Logarithm", was initially proved by Nikolai G. Makarov (1990), but we will present it in the form that has been proven by Christian Pommerenke.

The thesis is divided into two main sections. In the first section, we will define the Bloch functions, which are functions g analytic in the unit disc such that $||g||_B = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)| < \infty$ and we will prove some properties, some of which will be used in the proof of the main theorem. In particular, we will prove that the set of Bloch functions $\mathscr{B}$ form a complex Banach space with a suitable norm, that the usual Bloch-seminorm $||g||_B = \sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)|g'(z)|$, $g \in \mathscr{B}$ is conformally invariant, that $\mathbb{H}^\infty \subsetneqq \mathscr{B}$ and also that if f maps $\mathbb{D}$ conformally into $\mathbb{C}$ then $||\log(f-a)||_B \leq 4$, $a \notin f(\mathbb{D})$ and $||\log f'||_B \leq 6$.
In the second section, we will formulate and prove the Law of Iterated Logarithm and a corollary of it.

2 Συμβολισμοί

$\mathbb{D}$: Ο μοναδιαίος δίσκος στο $\mathbb{C}$.

$\mathbb{T}$: Η μοναδιαία περιφέρεια στο $\mathbb{C}$, δηλαδή το $\partial\mathbb{D}$.

σ: Το μέτρο *Lebesgue* στο $\mathbb{T}$ κανονικοποιημένο ώστε: $\sigma(\mathbb{T}) = 1$.

Λ: Το μέτρο *Lebesgue* στο $\mathbb{T}$ (αποδίδει μέτρο 2π στο $\mathbb{T}$).

O (big O): Λέμε ότι $f(x) = O(g(x))$ καθώς $x \to a$, αν υπάρχουν $\delta > 0$ και $M > 0$ τ.ώ: $\forall x$ με $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x)| \leq M\, g(x)$.

λ: Η μη-ευκλείδεια (υπερβολική) μετρική, όπως έχει οριστεί στον Ορισμό 5.5. του Παραρτήματος.

$\mathbb{H}^p$: Χώροι $\mathbb{H}^p$ (Χώροι *Hardy*) όπως έχουν οριστεί στον Ορισμό 5.3.
του Παραρτήματος.

$H(\mathbb{D})$: Το σύνολο των ολομόρφων συναρτήσεων στον μοναδιαίο δίσκο.

Möb: Η ομάδα των Μετασχηματισμών Möbius (Όπως έχει οριστεί στον
Ορισμό 5.4. και στην Πρόταση 5.1. του Παραρτήματος).

Möb($\mathbb{D}$): Η υποομάδα της Möb της οποίας τα στοιχεία ορίζονται από το $\mathbb{D}$ και είναι επί του $\mathbb{D}$ (όπως στην Πρόταση 5.2. του Παραρτήματος).

$\mathscr{B}$: Το σύνολο των συναρτήσεων *Bloch* (Όπως έχει οριστεί στον Ορισμό 3.1.).

$||\cdot||_B$: Ημινόρμα στο σύνολο $\mathscr{B}$, που δίνεται από: $||g||_B = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1 - |z|^2)|g'(z)|$, $g \in \mathscr{B}$.

$||\cdot||_{Bloch}$: Νόρμα στο σύνολο $\mathscr{B}$, που ορίζεται ως: $||g||_{Bloch} = |g(0)| + ||g||_B$, $g \in \mathscr{B}$.

3 Συναρτήσεις Bloch

Ορισμός 3.1. *Μία συνάρτηση $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται Bloch αν είναι αναλυτική στο $\mathbb{D}$ και επιπλέον:*

$$||g||_B = \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| < \infty.$$

Η $||\cdot||_B$ όπως παραπάνω, ορίζει μία ημινόρμα. Το σύνολο των συναρτήσεων Bloch συμβολίζεται με $\mathscr{B}$ και αποτελεί γραμμικό χώρο πάνω από το $\mathbb{C}$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathscr{B}$ το σύνολο των συναρτήσεων Bloch. Τότε:*

(i) Η απεικόνιση $||\cdot||_{Bloch}\colon \mathscr{B} \to [0,+\infty)$ με τύπο: $||g||_{Bloch} = |g(0)| + ||g||_B$, $g \in \mathscr{B}$ είναι νόρμα στον $\mathscr{B}$.

(ii) Ο $(\mathscr{B}, ||\cdot||_{Bloch})$ είναι χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$.

Απόδειξη.
Για το (i): Η $||\cdot||_{Bloch}$ είναι νόρμα. Πράγματι:

- $||g||_{Bloch} = 0 \Leftrightarrow g = 0$.

  ($\Leftarrow$) Προφανές.
  ($\Rightarrow$) Έστω $g \in \mathscr{B}$. Τότε: $||g||_{Bloch} = 0 \Rightarrow |g(0)| + ||g||_B = 0 \Rightarrow$
  $\Rightarrow |g(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)|g'(z)| = 0$.
  Άρα, $g(0) = 0$ και $(1-|z|^2)|g'(z)| = 0$. Επομένως, $g(0) = 0$ και $g'(z) = 0, z \in \mathbb{D}$. Όμως, το $\mathbb{D}$ ανοιχτό και συνεκτικό, η g αναλυτική στο $\mathbb{D}$ και $g'(z) = 0, \forall z \in \mathbb{D}$, άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{D}$. Συνεπώς, $g(z) = 0, \forall z \in \mathbb{D}$.

- $||cg||_{Bloch} = |c|\,||g||_{Bloch}, \forall c \in \mathbb{C}, \forall g \in \mathscr{B}$.

  Πράγματι, αν $c \in \mathbb{C}$ και $g \in \mathscr{B}$:
  $||cg||_{Bloch} = |cg(0)| + ||cg||_B = |c|\,||g||_{Bloch}$, αφού η $||\cdot||_B$ ημινόρμα.

- $||f+g||_{Bloch} \leq ||f||_{Bloch} + ||g||_{Bloch}, \forall f, g \in \mathscr{B}$.

  Από τριγωνική ανισότητα και αφού η $||\cdot||_B$ ημινόρμα:
  $||f+g||_{Bloch} = |(f+g)(0)| + ||f+g||_B \leq ||f||_{Bloch} + ||g||_{Bloch}$.

Για το (ii): Δείχνουμε τώρα ότι ο $\mathscr{B}$ εφοδιασμένος με τη νόρμα $||\cdot||_{Bloch}$ είναι Banach:

Έστω $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{B}$, $||\cdot||_{Bloch} - Cauchy$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathscr{B}$ τ.ώ: $f_n \xrightarrow{||\cdot||_{Bloch}} f$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι $||\cdot||_{Bloch} - Cauchy \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ώ: $\forall n, m \geq n_0$, $||f_m - f_n||_{Bloch} \leq \varepsilon \Rightarrow |f_m(0) - f_n(0)| + ||f_m - f_n||_B \leq \varepsilon$,
$\forall n, m \geq n_0 \Rightarrow |f_m(0) - f_n(0)| \leq \varepsilon$ και $|f'_m(z) - f'_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1-|z|^2}, \forall m, n \geq n_0$, για $z \in \mathbb{D}$ σταθεροποιημένο.

Επομένως, οι $(f_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ και $(f'_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$, $z \in \mathbb{D}$ και ο $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ πλήρης χώρος, άρα υπάρχουν $a_0 \in \mathbb{C}$ και $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ τ.ώ: $f_n(0) \to a_0$ και $f'_n(z) \to g(z), \forall z \in \mathbb{D}$.

Αφού $|f'_m(z) - f'_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{1-|z|^2}$, $z \in \mathbb{D}$, έπεται ότι: $f'_n \to g$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{D} \xRightarrow{f'_n \in H(\mathbb{D})} g \in H(\mathbb{D})$. Επιπλέον, το $\mathbb{D}$ είναι απλά συνεκτικό χωρίο και $g \in H(\mathbb{D})$, άρα, η g έχει παράγουσα στο $\mathbb{D}$. Θέτουμε $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με: $f'(z) = g(z), \forall\, |z| < 1$ και $f(0) = a_0$.

Τότε, αφού $\forall m, n \geq n_0$:

$(1 - |z|^2)\, |f'_n(z) - f'_m(z)| \leq \varepsilon,\ |z| < 1 \xRightarrow{(m\to\infty)}$
$(1 - |z|^2)\, |f'_n(z) - f'(z)| \leq \varepsilon,\ \forall n \geq n_0,\ |z| < 1 \Rightarrow ||f_n - f||_B \to 0.$

Εφαρμόζοντας τώρα την παραπάνω σχέση για $n = n_0$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε ότι η f είναι Bloch. Επιπλέον, αφού $f_n(0) \to f(0)$ έπεται ότι: $f_n \xrightarrow{||\cdot||_{Bloch}} f$.

Πρόταση 3.2. *Έστω $g \in \mathscr{B}$ και $\tau \in M\ddot{o}b(\mathbb{D})$. Τότε:*

(a) $\left|(1 - |z|^2)\, \frac{d}{dz} g(\tau(z))\right| = (1 - |\tau(z)|^2)\, |g'(\tau(z))|,\ z \in \mathbb{D}.$

(b) Η $||g||_B$ είναι σύμμορφα αναλλοίωτη, δηλαδή: $||g \circ \tau||_B = ||g||_B$.

(c) $|g(z) - g(0)| \leq \frac{1}{2}\, ||g||_B\, \log \frac{1+|z|}{1-|z|} = ||g||_B\, \lambda(z, 0)$, $\forall z \in \mathbb{D}$, *όπου λ η μη-ευκλείδεια απόσταση.*

(d) $|g(z_1) - g(z_2)| \leq ||g||_B\, \lambda(z_1, z_2),\ z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$

Απόδειξη.

(a) Εφαρμόζοντας το (ii) της Πρότασης 5.4. του παραρτήματος για $h = g \circ \tau$, έχουμε:

$(1-|z|^2)\,|h'(z)| = (1-|\tau(z)|^2)\,|g'(\tau(z))|,\ z \in \mathbb{D} \Rightarrow$

$\Rightarrow |(1-|z|^2)\,\frac{d}{dz}g(\tau(z))| = (1-|\tau(z)|^2)\,|g'(\tau(z))|,\ z \in \mathbb{D}.$

(b) $||g\circ\tau||_B = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)\,|\frac{d}{dz}g(\tau(z))| \overset{(a)}{=} \sup\limits_{z\in\mathbb{D}}(1-|\tau(z)|^2)\,|g'(\tau(z))| \overset{\tau(\mathbb{D})=\mathbb{D}}{=}$ $\sup\limits_{w\in\mathbb{D}}(1-|w|^2)\,|g'(w)| = ||g||_B.$

(c) $|g(z)-g(0)| = \Big|\int_0^z g'(\zeta)\,d\zeta\Big| = \Big|\int_0^1 g'(rz)\,z\,dr\Big| \le \int_0^1 |g'(rz)|\,|z|\,dr =$

$= \int_0^1 \underbrace{(1-r^2|z|^2)\,|g'(rz)|}_{\le ||g||_B}\ \frac{|z|}{1-r^2|z|^2}\,dr \le ||g||_B \int_0^1 \frac{|z|}{1-r^2|z|^2}\,dr,\ z\in\mathbb{D}.$

Υπολογίζουμε το $\int_0^1 \frac{|z|}{1-r^2|z|^2}\,dr$:

$\int_0^1 \frac{|z|}{1-r^2|z|^2}\,dr \overset{r|z|=x}{=} \int_0^{|z|} \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int_0^{|z|} \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx + \int_0^{|z|} \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\,\log(\frac{1+|z|}{1-|z|}),\ z\in\mathbb{D}.$

Άρα, $|g(z)-g(0)| \le \frac{1}{2}\,||g||_B\,\log(\frac{1+|z|}{1-|z|}) \overset{\text{Σημείωση 5.1,(8)}}{=} ||g||_B\,\lambda(z,0).$

(d) Εφαρμόζουμε τη (c) για τη $g\circ\tau$ με $\tau(z) = \frac{z+z_1}{1+\overline{z_1}z}$ και έχουμε:

$|g\circ\tau(z) - g\circ\tau(0)| \le \frac{1}{2}\,||g\circ\tau||_B\,\log(\frac{1+|z|}{1-|z|}) \overset{(b)}{=} \frac{1}{2}\,||g||_B\,\log(\frac{1+|z|}{1-|z|}),\ \forall z\in\mathbb{D}.\ (*)$

Παρατηρούμε ότι: $\tau(0) = z_1$ και $\tau(z) = z_2 \Leftrightarrow \frac{z+z_1}{1+\overline{z_1}z} = z_2 \Leftrightarrow z = \frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}$.

Άρα, η $(*)$ για $z = \frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}$ γίνεται:

$|g(z_2)-g(z_1)| \le \frac{1}{2}\,||g||_B\,\log\left(\frac{1+|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}|}{1-|\frac{z_2-z_1}{1-\overline{z_1}z_2}|}\right) \overset{\text{Σημείωση 5.1,(8)}}{=} ||g||_B\,\lambda(z_1,z_2),$

$z_1, z_2 \in \mathbb{D}.$

Πρόταση 3.3. *Κάθε φραγμένη αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ είναι Bloch. Μάλιστα, $\mathbb{H}^\infty \subsetneqq \mathscr{B}$.*

Απόδειξη. Αρκεί να το αποδείξουμε για f φραγμένη, αναλυτική, με $|f(z)| < 1,\ z \in \mathbb{D}$ (για γενική f εργαζόμαστε με την $h = \frac{f}{2||f||_\infty}$, πάντα υπονοώντας ότι η f δεν είναι ταυτοτικά 0).
Έστω λοιπόν, f φραγμένη, αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$ με $|f(z)| < 1,\ z \in \mathbb{D}$ και $w \in \mathbb{D}$. Θεωρούμε τους μετασχηματισμούς $\tau,\ s\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ με τύπο:

$$\tau(z) = \frac{z+w}{1+\overline{w}z} \text{ και } s(z) = \frac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z},\ z \in \mathbb{D}.$$

Τότε, η $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με τύπο: $g(z) = s(f(\tau(z)))$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{D}$ και:

(i) $|g(z)| \leq 1,\ z \in \mathbb{D}$

(ii) $g(0) = s(f(\tau(0))) = s(f(w)) = 0$

Άρα, από το Λήμμα Schwarz (Θεώρημα 5.3. του παραρτήματος, (*ii*)) προκύπτει ότι: $|g'(0)| \leq 1$. Επιπλέον, από τον κανόνα της αλυσίδας:
$g'(0) = s'(f(w))\, f'(w)\, \tau'(0)$, άρα, $|g'(0)| = \frac{|f'(w)|\,(1-|w|^2)}{1-|f(w)|^2} \leq 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |f'(w)|\,(1-|w|^2) \leq 1 - |f(w)|^2 \leq 1$. Επομένως, $f \in \mathscr{B}$.

Τέλος, $\mathbb{H}^\infty \neq \mathscr{B}$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση: $g\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με τύπο: $g(z) = \log(\frac{1+z}{1-z}),\ z \in \mathbb{D}$, τότε η g δεν είναι φραγμένη, όμως είναι αναλυτική και: $||g||_B = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)\,|g'(z)| = \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2) \left|\frac{2}{1-z^2}\right| \leq 2$.

Πρόταση 3.4. *Αν η f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ (Ορισμός 5.1. του παραρτήματος) τότε:*

(i) $||\log(f-a)||_B \leq 4$, *για* $a \notin f(\mathbb{D})$.

(ii) $||\log(f')||_B \leq 6$

Απόδειξη. Αρχικά, οι ποσότητες $\log(f-a)$ και $\log(f')$ ορίζονται καλά. Για να το δούμε αυτό, υπενθυμίζουμε δύο αποτελέσματα της Μιγαδικής Ανάλυσης που θα μας φανούν χρήσιμα:

(α′) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ απλά συνεκτικό χωρίο και $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτική τ.ώ: $f \neq 0$, στο Ω. Τότε, υπάρχει $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$, αναλυτική στο Ω, τ.ώ: $e^g = f$. Ονομάζουμε τη g κλάδο του λογαρίθμου και συμβολίζουμε $g = \log(f)$.

(β′) Έστω $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ μία αναλυτική και $1-1$ συνάρτηση στο Ω. Τότε, $f'(z) \neq 0,\ \forall z \in \Omega$.

Αφού λοιπόν, η f απεικονίζει σύμμορφα το $\mathbb{D}$ στο $\mathbb{C}$, από τον ορισμό που δώσαμε στο παράρτημα, έπεται ότι η f είναι αναλυτική στο $\mathbb{D}$. Επιπλέον, $a \notin f(\mathbb{D})$ άρα, $f - a \neq 0$, στο $\mathbb{D}$ και το $\mathbb{D}$ απλά συνεκτικό χωρίο, επομένως, από το (a') προκύπτει ότι το $\log(f-a)$ είναι καλά ορισμένο.

Επίσης, πάλι από τον ορισμό της σύμμορφης απεικόνισης, η f είναι αναλυτική και $1-1$, άρα από το (β′), $f'(z) \neq 0$ στο απλά συνεκτικό $\mathbb{D}$, συνεπώς από το (a') το $\log(f')$ είναι καλά ορισμένο.

Αποδεικνύουμε τώρα τις ανισοτικές σχέσεις της Πρότασης:
Για την (i): Έστω $d_f(z) = dist(f(z), \partial f(\mathbb{D}))$, $z \in \mathbb{D}$. Αφού $a \notin f(\mathbb{D})$, $|f(z) - a| \geq d_f(z)$. Άρα, από την Πρόταση 5.6. του παραρτήματος προκύπτει ότι: $(1-|z|^2)\,|\frac{d}{dz}\log(f(z)-a)| = \frac{(1-|z|^2)\,|f'(z)|}{|f(z)-a|} \leq \frac{(1-|z|^2)\,|f'(z)|}{d_f(z)} \leq 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow ||\log(f-a)||_B \leq 4.$
(Σημείωση: Η ποσότητα $d_f(z) > 0$ από την Πρόταση 5.6, καθώς $f' \neq 0$).

Για τη (ii): Από την Πρόταση 5.5. του παραρτήματος σε συνδυασμό με την ανάποδη τριγωνική ανισότητα παίρνουμε ότι:
$(1-|z|^2)\,|\frac{d}{dz}\log(f'(z))| = (1-|z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leq 4 + 2\,|z| < 6 \Rightarrow ||\log(f')||_B \leq 6.$

4 Η αυξητικότητα των συναρτήσεων Bloch

Αν $g \in \mathscr{B}$, υπάρχουν μη τετριμμένα φράγματα των ολοκληρωτικών μέσων της g^{2n}, $n = 0, 1, 2, ...$

Θεώρημα 4.1. *Αν $g \in \mathscr{B}$ και $g(0) = 0$ τότε:*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n}\,|d\zeta| \leq n!\,||g||_B^{2n}\left(\log\frac{1}{1-r^2}\right)^n, \text{ για } 0 < r < 1 \text{ και } n = 0, 1, 2... .$$

Απόδειξη. Με επαγωγή:
Η περίπτωση $n = 0$ είναι τετριμμένη.

Έστω ότι η ζητούμενη ανισότητα ισχύει για $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n}\,|d\zeta| \leq n!\,||g||_B^{2n}\left(\log\frac{1}{1-r^2}\right)^n,\ 0 < r < 1.$$

Δείχνουμε ότι ισχύει για $n+1$:
Πράγματι, από την ταυτότητα Hardy (Πρόταση 5.7. του παραρτήματος) για

$p = 2(n+1)$ προκύπτει ότι:

$$\frac{d}{dr}\big(r\frac{d}{dr}\big)\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n+2}\,|d\zeta|\big) = \frac{4(n+1)^2\,r}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n}\,|g'(r\zeta)|^2\,|d\zeta| \underset{\substack{\downarrow \\ \lambda(r)=\log\frac{1}{1-r^2} \text{ και επαγωγική υπόθεση}}}{\leq}$$

$$\leq 4(n+1)^2\,r\,n!\,||g||_B^{2n}\,\lambda(r)^n\,(1-r^2)^{-2}\,||g||_B^2 =$$

$$= (n+1)!\,4r\,(n+1)\,||g||_B^{2n+2}\,\lambda(r)^n\,\frac{1}{(1-r^2)^2} \leq$$

$$\leq (n+1)!\,||g||_B^{2n+2}\,\frac{d}{dr}[r\frac{d}{dr}\lambda(r)^{n+1}].$$

<u>Άρα:</u>

$$\frac{d}{dr}\big(r\frac{d}{dr}\big)\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n+2}\,|d\zeta|\big) \leq (n+1)!\,||g||_B^{2n+2}\,\frac{d}{dr}[r\frac{d}{dr}\lambda(r)^{n+1}].$$

Ολοκληρώνουμε από 0 έως r:

$$\int_0^r \frac{d}{dt}\big(t\frac{d}{dt}\big)\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(t\zeta)|^{2n+2}\,|d\zeta|\big)\,dt \leq \int_0^r (n+1)!\,||g||_B^{2n+2}\,\frac{d}{dt}[t\,\frac{d}{dt}\lambda(t)^{n+1}]\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r\,\frac{d}{dr}\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2n+2}\,|d\zeta|\big) \leq (n+1)!\,||g||_B^{2n+2}\,r\,\frac{d}{dr}\lambda(r)^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dr}\big(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2(n+1)}\,|d\zeta|\big) \leq (n+1)!\,||g||_B^{2(n+1)}\,\frac{d}{dr}\lambda(r)^{n+1}.$$

Ολοκληρώνουμε και πάλι από 0 έως r:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g(r\zeta)|^{2(n+1)}\,|d\zeta| \leq (n+1)!\,||g||_B^{2(n+1)}\,\lambda(r)^{n+1}.$$

Άρα, δείξαμε τη σχέση για $n+1$.

Διατυπώνουμε τώρα το κεντρικό θεώρημα της εργασίας:

Θεώρημα 4.2. ***(Νόμος Επαναλαμβανόμενου Λογάριθμου)***
Αν $g \in \mathscr{B}$ τότε, για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$:

$$\limsup_{r\to 1} \frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\,\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \leq ||g||_B.$$

Πριν παραθέσουμε αναλυτικά την απόδειξη του Θεωρήματος, θα δώσουμε ένα σύντομο σχεδιάγραμμα αυτής με σκοπό την παρουσίαση των κύριων ιδεών σε μορφή βημάτων. Όλες οι λεπτομέρειες σχετικά με τα βήματα παρουσιάζονται αναλυτικά στην εκτενή απόδειξη παρακάτω.

Σχεδιάγραμμα απόδειξης:

- Αρκεί να δείξουμε το Θεώρημα για $g \in \mathscr{B}$ τ.ώ: $||g||_B = 1$ και $g(0) = 0$.
- Θεωρούμε τη μεγιστική συνάρτηση:

$$g^*(s,\zeta) = \max_{0 \le r \le 1-e^{-s}} |g(r\zeta)|, \; e \le s < +\infty, \; \zeta \in \mathbb{T}.$$

- Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2. για τη φραγμένη, αναλυτική συνάρτηση $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = g^{2n}((1-e^{-s})\,z)$, $z \in \mathbb{D}$ και σε συνδυασμό με το Θεώρημα 4.1., παίρνουμε ότι:

$$\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n} \, |d\zeta| \le K\, n!\, s^n, \text{ για } e \le s < +\infty, \; K \text{ απόλυτη σταθερά.}$$

- Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $s^{-n}\,\psi_n(s)$, όπου $\psi_n(s) = -n\, \frac{d}{ds}\big((\log s)^{-\frac{1}{n}}\big) = s^{-1}\,(\log s)^{-1-\frac{1}{n}}$ ($\psi_n(s) > 0$ αφού $s \ge e$) και παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, |d\zeta| \le K\, n!\, \psi_n(s), \;\; e \le s < +\infty.$$

- Ολοκληρώνουμε ως προς s και από Θ.Tonelli :

$$\int_{\mathbb{T}} \Big(\int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, ds \Big) |d\zeta| \le K\, n!\, n.$$

- Υπάρχει ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ με $\Lambda(A_n) > 2\pi - \frac{K}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ τ.ώ:

$$\int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, ds \le n!\, n^3, \text{ για } \zeta \in A_n.$$

- Αφού για $e \le s < +\infty$ ισχύει: $-\frac{d}{ds}\big(s^{-n}\,(\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big) \le 3n\, s^{-n}\, \psi_n(s)$ και η g^* είναι αύξουσα ως προς s άρα για $e \le \sigma \le s < +\infty$ και $\zeta \in A_n$, συμπεραίνουμε:
$$\big(g^*(\sigma,\zeta)\big)^{2n} \sigma^{-n} (\log\sigma)^{-1-\frac{1}{n}} \le 3n \int_\sigma^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n} s^{-n} \psi_n(s)\, ds \le 3n! n^4.$$

- Το σύνολο $A=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n$ ικανοποιεί $\Lambda(A)=2\pi$ καθώς $\Lambda(A_n)>2\pi-\frac{K}{n^2}$.

- Έστω, λοιπόν, ένα $\zeta\in A$. Τότε, $\exists k=k(\zeta)\in\mathbb{N}$ τ.ώ: $\forall n\geq k$, $\zeta\in A_n$. Αν $r<1$ με r αρκούντως κοντά στο 1, τότε $n=[\log\log\sigma]\geq k$, όπου $\sigma=\log\frac{1}{1-r}$ και από ιδιότητα του ακέραιου μέρους: $\log\log\sigma\geq n$ και $\log\sigma<e^{n+1}$. Επομένως, έχουμε:

$$\frac{|g(r\zeta)|^2}{\sigma\log\log\sigma}\leq\frac{g^*(\sigma,\zeta)^2}{\sigma\log\log\sigma}\leq\left(\frac{3n!\,n^4}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}e^{\frac{(n+1)^2}{n^2}}.$$

- Τέλος, από τον τύπο του *Stirling* ($n!\sim\frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ καθώς $n\to+\infty$) έχουμε:

$$\limsup_{r\to1}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}}\leq1\ (=||g||_B),\ \zeta\in A.$$

Απόδειξη. Αρχικά, αν $||g||_B=0$ τότε $g'(z)=0$, $\forall z\in\mathbb{D}$, $g\in H(\mathbb{D})$ και το $\mathbb{D}$ ανοιχτό, συνεκτικό, άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{D}$.

Επιπλέον, $\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\ \log\log\log\frac{1}{1-r}}\xrightarrow{r\to1}+\infty$.

Άρα, $\limsup\limits_{r\to1}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\ \log\log\log\frac{1}{1-r}}}=0$ και η ζητούμενη ανισότητα ισχύει ισοτικά.

Έστω τώρα ότι $||g||_B\neq0$. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $g\in\mathscr{B}$ με $||g||_B=1$. Πράγματι, έστω ότι το έχουμε για $g\in\mathscr{B}$ τ.ώ: $||g||_B=1$. Τότε αν $g\in\mathscr{B}$, με $||g||_B\neq0$, η $h=\frac{g}{||g||_B}\in\mathscr{B}$ και $||h||_B=1$ άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα για τη συνάρτηση h:

$$\limsup_{r\to1}\frac{1}{||g||_B}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\ \log\log\log\frac{1}{1-r}}}\leq||h||_B\xrightarrow{||h||_B=1}$$

$$\limsup_{r\to1}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\ \log\log\log\frac{1}{1-r}}}\leq||g||_B.$$

Επιπλέον, μπορούμε να κάνουμε άλλη μία αναγωγή και να δείξουμε το θεώρημα για $g\in\mathscr{B}$ τ.ώ: $||g||_B=1$ και $g(0)=0$.

Πράγματι, αν το έχουμε για τις παραπάνω και πάρουμε $g\in\mathscr{B}$ με $||g||_B=1$ τότε η $h=g-g(0)$ είναι *Bloch*, $||h||_B=1$ και $h(0)=0$. Άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα για την h έχουμε: $\limsup\limits_{r\to1}\frac{|h(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\ \log\log\log\frac{1}{1-r}}}\leq1$.

Συνεπώς, από ανάποδη τριγωνική ανισότητα: $\limsup_{r\to 1} \frac{|g(r\zeta)|-|g(0)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\,\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \limsup_{r\to 1} \frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\,\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \leq 1.$

Εργαζόμαστε λοιπόν για $g \in \mathscr{B}$ με $||g||_B = 1$ και $g(0) = 0$. Θεωρούμε τη μεγιστική συνάρτηση:

$$g^*(s,\zeta) = \max_{0\leq r\leq 1-e^{-s}} |g(r\zeta)|,\ e \leq s < +\infty,\ \zeta \in \mathbb{T}.$$

Εφαρμόζουμε τώρα το μεγιστικό θεώρημα των Hardy-Littlewood (Θεώρημα 5.2. του παραρτήματος) για την φραγμένη, αναλυτική συνάρτηση $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = g^{2n}((1-e^{-s})\,z),\ z \in \mathbb{D}$ και παίρνουμε ότι:

Αν $F(\theta) = \sup_{r<1} |f(re^{i\theta})|,\ \theta \in [0,2\pi)$, τότε $F \in L^1$ και $||F||_1 \leq B_1\,||f||_1$, όπου B_1 μία απόλυτη σταθερά. Δηλαδή:

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{r<1} |f(re^{i\theta})|\,d\theta \leq B_1 \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}} |f(re^{i\theta})|\,d\sigma \Rightarrow$

$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{r<1} |g^{2n}((1-e^{-s})\,re^{i\theta})|\,d\theta \leq B_1 \sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}} |g^{2n}((1-e^{-s})\,re^{i\theta})|\,d\sigma.$ (1)

<u>Για το αριστερό μέλος της (1)</u>: Θέτουμε $(1-e^{-s})\,r = r'$ και παίρνουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sup_{r'<1-e^{-s}} |g^{2n}(r'e^{i\theta})|\,d\theta \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Αρχή Μεγίστου}}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0\leq r\leq 1-e^{-s}} |g^{2n}(re^{i\theta})|\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\,|d\zeta|.$$

<u>Για το δεξί μέλος της (1)</u>: Αν $M_1(r,f)$ όπως στο Θεώρημα 5.2. του

παραρτήματος, τότε: $||f||_1 = \lim_{r\to 1} M_1(r,f)$, δηλαδή:

$\sup_{0\leq r<1} \int_{\mathbb{T}} |g^{2n}((1-e^{-s})\,re^{i\theta})|\,d\sigma = \lim_{r\to 1} M_1(r,f) = M_1(1,f) = M_1(1-e^{-s}, g^{2n}) =$

$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g^{2n}((1-e^{-s})\,\zeta)|\,|d\zeta|.$

Επομένως, από τα παραπάνω, η σχέση (1) γίνεται:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\,|d\zeta| \leq \frac{B_1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |g^{2n}((1-e^{-s})\zeta)|\,|d\zeta| \underset{\text{Θεώρημα 4.1.}}{\underset{\downarrow}{\leq}} B_1\, n!\, ||g||_B^{2n} \Big(\log\frac{1}{1-(1-e^{-s})^2}\Big)^n \underset{||g||_B=1}{\underset{\downarrow}{=}}$$

$$= B_1\, n! \Big(\log\frac{1}{1-(1-e^{-s})^2}\Big)^n = B_1\, n! \Big(-\log(e^{-s}(2-e^{-s}))\Big)^n.$$

Όμως, για $e \leq s < +\infty$ ισχύει ότι $e^{-s}(2-e^{-s}) \geq e^{-s}$ συνεπώς,
$-\log(e^{-s}(2-e^{-s})) \leq s$.

Άρα συνολικά:

$$\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\,|d\zeta| \leq (2\pi\, B_1)\, n!\, s^n, \text{ για } e \leq s < +\infty.$$

Ορίζουμε $K := 2\pi\, B_1$.

Πολλαπλασιάζουμε τώρα την παραπάνω σχέση με $s^{-n}\,\psi_n(s)$, όπου
$\psi_n(s) = -n\,\frac{d}{ds}\big((\log s)^{-\frac{1}{n}}\big) = s^{-1}\,(\log s)^{-1-\frac{1}{n}}$ ($\psi_n(s) > 0$ αφού $s \geq e$) και παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\,\psi_n(s)\,|d\zeta| \leq K\, n!\,\psi_n(s),\ \ e \leq s < +\infty.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς s:

$$\int_e^{+\infty}\Big(\int_{\mathbb{T}} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\,\psi_n(s)\,|d\zeta|\Big)\,ds \leq K\, n! \int_e^{+\infty}\psi_n(s)\,ds.$$

Παρατηρούμε ότι $\big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\,\psi_n(s) \geq 0$ και μετρήσιμη, άρα από το Θεώρημα $Tonelli$:

$$\int_{\mathbb{T}}\Big(\int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\,\psi_n(s)\,ds\Big)\,|d\zeta| \leq K\, n! \int_e^{+\infty}\psi_n(s)\,ds \underset{\int_e^{+\infty}\psi_n(s)\,ds = n}{\underset{\downarrow}{=}}$$

$= K\, n!\, n.$ (2)

Ισχυρισμός: Υπάρχει ακολουθία συνόλων $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T}$ με $\Lambda(A_n) > 2\pi - \frac{K}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$ τ.ώ:

$$\int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\,\psi_n(s)\,ds \leq n!\, n^3, \text{ για } \zeta \in A_n.$$

Απόδειξη Ισχυρισμού: Θα συμβολίζουμε:

$$T_n(\zeta) = \int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, ds.$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και δείχνουμε ισοδύναμα ότι: $\Lambda(\{\, T_n(\zeta) > n!\, n^3 \}\,) \leq \frac{K}{n^2}$.

Πράγματι, από την ανισότητα $Chebyshev$ προκύπτει ότι:

$$\int\limits_{\{\, T_n(\zeta) > n!\, n^3 \}} T_n(\zeta)\, |d\zeta| \geq n!\, n^3\, \Lambda(\{\, T_n(\zeta) > n!\, n^3 \}\,).$$

Άρα, $\Lambda(\{\, T_n(\zeta) > n!\, n^3 \}\,) \leq \frac{1}{n!\, n^3} \int_{\mathbb{T}} T_n(\zeta)\, |d\zeta| \underset{\substack{\downarrow \\ (2)}}{\leq} \frac{K\, n!\, n}{n!\, n^3} = \frac{K}{n^2}$

και αποδείξαμε τον ισχυρισμό.

Επιπλέον, θα χρησιμοποιήσουμε ότι για $e \leq s < +\infty$ ισχύει:
$-\frac{d}{ds}\big(s^{-n}\, (\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big) \leq 3n\, s^{-n}\, \psi_n(s)$. (3)

Παρατηρούμε ακόμη ότι η g^* είναι αύξουσα ως προς s άρα για $\sigma \leq s < +\infty$, $\big(-\frac{d}{ds}\big(s^{-n}\, (\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big) \geq 0\big)$ ισχύει:

$$\big(g^*(\sigma,\zeta)\big)^{2n} \Big(-\frac{d}{ds}\big(s^{-n}\, (\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big)\Big) \leq \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n} \Big(-\frac{d}{ds}\big(s^{-n}\, (\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big)\Big) \underset{\substack{\downarrow \\ (3)}}{\leq}$$

$$\leq \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, 3n\, s^{-n}\, \psi_n(s).$$

Άρα, για $\zeta \in A_n$ ολοκληρώνοντας ως προς s στο $[\sigma, +\infty)$:

$$\big(g^*(\sigma,\zeta)\big)^{2n} \int_\sigma^{+\infty} -\frac{d}{ds}\big(s^{-n} (\log s)^{-1-\frac{1}{n}}\big)\, ds \leq \int_\sigma^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n} 3n s^{-n} \psi_n(s)\, ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \big(g^*(\sigma,\zeta)\big)^{2n}\, \sigma^{-n}\, (\log \sigma)^{-1-\frac{1}{n}} \leq 3n \int_\sigma^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, ds \leq$$

$$\leq 3n \int_e^{+\infty} \big(g^*(s,\zeta)\big)^{2n}\, s^{-n}\, \psi_n(s)\, ds \underset{\substack{\downarrow \\ \zeta \in A_n \text{ και Ισχυρισμός}}}{\leq} 3n!\, n^4. \quad (4)$$

Θεωρούμε τώρα το σύνολο $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=k}^{\infty} A_n$. Τότε:

$\Lambda(A^c) = \Lambda\Big(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n^c\Big) \le \Lambda\Big(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty} A_n^c\Big) \le \sum\limits_{n=k}^{\infty}\Lambda(A_n^c) \le \sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{K}{n^2}, \forall k \in \mathbb{N} \xRightarrow{(k\to+\infty)}$
$\Lambda(A^c) = 0$. Άρα, $\Lambda(A) = 2\pi$.

Έστω, λοιπόν, ένα $\zeta \in A$. Τότε, $\exists k = k(\zeta) \in \mathbb{N}$ τ.ώ: $\forall n \ge k$, $\zeta \in A_n$. Αν $r < 1$ με r αρκούντως κοντά στο 1, τότε:

Για $n = [\log\log\sigma] \ge k$, όπου $\sigma = \log\frac{1}{1-r}$, από ιδιότητα του ακέραιου μέρους: $\log\log\sigma - 1 < n \le \log\log\sigma$ και άρα $\log\log\sigma \ge n$ και $\log\sigma < e^{n+1}$.

Επομένως, έχουμε:

$$\frac{|g(r\zeta)|^2}{\sigma\log\log\sigma} \le \frac{g^*(\sigma,\zeta)^2}{\sigma\log\log\sigma} \underset{\substack{\downarrow\\(4)}}{\le} \left(\frac{3n!\,n^4\,\sigma^n\,(\log\sigma)^{1+\frac{1}{n}}}{\sigma^n\,(\log\log\sigma)^n}\right)^{\frac{1}{n}} \underset{\substack{\downarrow\\\log\log\sigma\ge n}}{\le} \left(\frac{3n!\,n^4}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}(\log\sigma)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \underset{\substack{\downarrow\\\log\sigma<e^{n+1}}}{<}$$

$$< \left(\frac{3n!\,n^4}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(n+1)^2}{n^2}}.$$

Τέλος, από τον τύπο του *Stirling* ($n! \sim \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ καθώς $n \to +\infty$) έχουμε:

$$\limsup_{r\to1}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \le 1\ (= ||g||_B),\ \zeta \in A\ (\text{δηλαδή για σ.κ. } \zeta \in \mathbb{T}).$$

Σημείωση 4.1. *Ο Ch. Pommerenke απέδειξε ακόμη ότι υπάρχει $g \in \mathscr{B}$ τ.ώ* $\limsup\limits_{r\to1}\frac{|g(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}} > 0.685||g||_B$, *για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$.*

Πόρισμα 4.1. *Αν μία συνάρτηση f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ τότε:*

$$\limsup_{r\to1}\frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{\log\frac{1}{1-r}\log\log\log\frac{1}{1-r}}} \le 6,\ \textit{για σχεδόν κάθε}\ \zeta \in \mathbb{T}.$$

Συγκεκριμένα, $f'(r\zeta) = O((1-r)^{-\varepsilon})$ καθώς $r \to 1$ για $\varepsilon > 0$ και για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$, από την Πρόταση 3.4. προκύπτει ότι: $||\log f'||_B \le 6$.

Άρα, από το Θεώρημα 4.2. εφαρμοσμένο για τη συνάρτηση $g = \log f'$:

$\limsup_{r\to 1} \frac{|\log f'(r\zeta)|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}} \leq ||\log f'||_B \leq 6$, για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$.

Επίσης, αναδιατυπώνοντας αυτό που μόλις δείξαμε με χρήση του συμβόλου O παίρνουμε ότι:

$\log f'(r\zeta) = O\Big(\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}\Big)$, καθώς $r \to 1$, για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$.

Όμως, $\sqrt{\log\log\log \frac{1}{1-r}} \leq \sqrt{\log \frac{1}{1-r}}$, $r < 1$. Άρα, υπάρχει σταθερά $K = \frac{1}{\varepsilon}$

τ.ώ: $\sqrt{\log\log\log \frac{1}{1-r}} \leq K\,\varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{1-r}}$, $r < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}} \leq K\,\varepsilon\ \log \frac{1}{1-r}$, $r < 1$. (1)

Άρα συνολικά:

$\log f'(r\zeta) = O\Big(\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}\Big)$ καθώς $r \to 1$, για σχεδόν κάθε

$\zeta \in \mathbb{T}$, δηλαδή, $\exists M > 0 : |\log f'(r\zeta)| \leq M \sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log\log\log \frac{1}{1-r}}$, $r < 1 \overset{(1)}{\Longrightarrow}$

$\log|f'(r\zeta)| \leq (M\,K)\,\varepsilon\ \log \frac{1}{1-r}$, $r < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f'(r\zeta)| \leq K'\,(1-r)^{-\varepsilon}$, $r < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(r\zeta) = O((1-r)^{-\varepsilon})$, καθώς $r \to 1$ για $\varepsilon > 0$ και για σχεδόν κάθε $\zeta \in \mathbb{T}$.

5 Παράρτημα

(Χωρίς αρίθμηση αναφέρονται ορισμοί και αποτελέσματα τα οποία δεν χρησιμοποιούνται αυτούσια, ωστόσο χρησιμεύουν στην απόδειξη προτάσεων του Παραρτήματος οι οποίες διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην εργασία).

Ορισμός 5.1. *Λέμε ότι η f απεικονίζει τον τόπο $H \subset \mathbb{C}$ σύμμορφα επί του $G \subset \mathbb{C}$ αν:*

(i) Η f είναι αναλυτική στο H.

(ii) Η f είναι $1-1$, δηλαδή, $z, z' \in H, z \neq z' \Rightarrow f(z) \neq f(z')$.

(iii) $f(H) = G$.

Λέμε ότι η f απεικονίζει σύμμορφα το H (μέσα) στο G αν η (iii) αντικατασταθεί από: $f(H) \subset G$. Σημειώνουμε ότι ορίζουμε σύμμορφες απεικονίσεις μόνο για (συνεκτικά) ανοικτά σύνολα.

Ορισμός 5.2. *Έστω $f \colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ συνεχής. Θα συμβολίζουμε:*
$f_r(e^{i\theta}) = f(re^{i\theta}),\ 0 \leq r < 1$. *Ορίζουμε :*

$||f_r||_p = \Big(\int_{\mathbb{T}} |f(re^{i\theta})|^p \, d\sigma \Big)^{\frac{1}{p}}$, *για* $0 < p < \infty$ *και*

$||f_r||_\infty = \sup\limits_\theta |f(re^{i\theta})|$, *για* $p = \infty$.

Ορισμός 5.3. *(Χώροι $\mathbb{H}^p$) Αν $f \in H(\mathbb{D})$ και $0 < p \leq \infty$ θέτουμε:*
$||f||_p = \sup\limits_{0 \leq r < 1} ||f_r||_p$. *Ορίζουμε:*

$$\mathbb{H}^p = \{\, f \in H(\mathbb{D}) : ||f||_p < \infty \}\ ,\ 0 < p \leq \infty.$$

Ισχύει ότι: $\mathbb{H}^\infty \subset \mathbb{H}^p$, *για* $p > 0$.

Ορισμός 5.4. *(Μετασχηματισμός Möbius) Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι μία απεικόνιση $\tau \colon \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ της μορφής:*

$$\tau(z) = \tfrac{az+b}{cz+d},\ \text{όπου } a, b, c, d \in \mathbb{C},\ \text{με } ad - bc \neq 0. \ (1)$$

Πρόταση 5.1. *Οι μετασχηματισμοί Möbius είναι οι μόνες σύμμορφες απεικονίσεις του $\overline{\mathbb{C}}$ και αποτελούν ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων, την οποία συμβολίζουμε με Möb.*

Πρόταση 5.2. *Οι σύμμορφες απεικονίσεις από το $\mathbb{D}$ επί του $\mathbb{D}$ είναι της μορφής:*

$$\tau(z) = \tfrac{cz+z_0}{1+\overline{z_0}cz},\ |z_0| < 1,\ |c| = 1. \ (2)$$

και αποτελούν υποομάδα της Möb την Möb$(\mathbb{D})$, όπου:

$$\text{Möb}(\mathbb{D}) = \{\, \tau \in \text{Möb} : \tau(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \}\ .$$

Πρόταση 5.3. *Για κάθε $\tau \in$Möb$(\mathbb{D})$ και για κάθε $z \in \mathbb{D}$ ισχύει:*

$$(1 - |z|^2)\, |\tau'(z)| = 1 - |\tau(z)|^2. \ (3)$$

Πρόταση 5.4. *Έστω f μία αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{D}$, τ μία σύμμορφη απεικόνιση όπως στη (2) και $h = f \circ \tau$. Τότε:*

(i) $h(0) = f(z_0)$.

(ii) $(1-|z|^2)\,|h'(z)| = (1-|\tau(z)|^2)\,|f'(\tau(z))|,\ z \in \mathbb{D}$. *(4)*

Ορισμός 5.5. *(Μη-ευκλείδεια μετρική) Η μη-ευκλείδεια μετρική (υπερβολική μετρική) ορίζεται ως:*

$$\lambda(z_1, z_2) = \lambda_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \min_{c} \int_c \tfrac{|dz|}{1-|z|^2}. \quad (5)$$

για $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$, όπου το minimum λαμβάνεται πάνω σε όλες τις καμπύλες c στο $\mathbb{D}$ από το z_1 στο z_2. Το minimum υλοποιείται για το μη-ευκλείδειο τμήμα S από το z_1 στο z_2 το οποίο είναι το τόξο του κύκλου που περνάει από τα z_1 και z_2 ορθογώνια στο $\mathbb{T}$.

Σημείωση 5.1. *Ένα πόρισμα του (5) είναι η τριγωνική ανισότητα για τη μη-ευκλείδεια μετρική, δηλαδή:*

$$\lambda(z_1, z_2) \leq \lambda(z_1, z_3) + \lambda(z_3, z_2),\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{D}, \quad (6)$$

και πόρισμα των (3),(5) είναι το αναλλοίωτο της λ ως προς $\tau \in Möb(\mathbb{D})$:

$$\lambda(\tau(z_1), \tau(z_2)) = \lambda(z_1, z_2), \quad (7)$$

Μετασχηματίζοντας ένα σημείο στο 0 βλέπουμε ότι:

$$\lambda(z_1, z_2) = \tfrac{1}{2}\, \log \frac{1+\frac{|z_1 - z_2|}{|1-\bar{z_1}\, z_2|}}{1-\frac{|z_1 - z_2|}{|1-\bar{z_1}\, z_2|}},\ z_1, z_2 \in \mathbb{D}, \quad (8)$$

Ορισμός: Η κλάση S αποτελείται από όλες τις συναρτήσεις:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots\ (|z| < 1)$$

αναλυτικές και $1-1$ στο $\mathbb{D}$. Αν η f είναι αναλυτική και $1-1$ στο $\mathbb{D}$ και $z_0 \in \mathbb{D}$ τότε ο μετασχηματισμός $Koebe$:

$$h(z) = \frac{f(\frac{z+z_0}{1+\bar{z_0} z}) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2) f'(z_0)} = z + \big(\tfrac{1}{2}\,(1-|z_0|^2)\,\tfrac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \bar{z_0}\big) z^2 + \ldots$$

ανήκει στην S.

Πρόταση 5.5. *Αν η f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ τότε:*

$$\left|(1-|z|^2)\,\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\overline{z}\right|\leq 4,\; z\in\mathbb{D}.$$

Ολοκληρώνοντας δύο φορές την ανισότητα της Πρότασης 5.5. παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα: (*Koebe distortion theorem*)
Αν η f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ και $z\in\mathbb{D}$, τότε:

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2}\leq|f(z)-f(0)|\leq|f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2},\;(1)$$

και:

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3}\leq|f'(z)|\leq|f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\;(2)$$

Πόρισμα του παραπάνω είναι η εξής πρόταση:

Πρόταση 5.6. *Αν η f απεικονίζει το $\mathbb{D}$ σύμμορφα στο $\mathbb{C}$ τότε:*

$$\tfrac{1}{4}(1-|z|^2)\,|f'(z)|\leq d_f(z)\leq(1-|z|^2)\,|f'(z)|,\; z\in\mathbb{D}$$

όπου $d_f(z)=dist(f(z),\partial f(\mathbb{D}))$, $z\in\mathbb{D}$.

Απόδειξη. Έστω h ο μετασχηματισμός *Koebe* της f. Αφού $h\in S$, από τη σχέση (1) του προηγούμενου Θεωρήματος σε συνδυασμό με την Αρχή Ελαχίστου (για την αναλυτική συνάρτηση $\frac{h(z)}{z}$) έχουμε ότι:

$$\tfrac{1}{4}\leq\liminf_{|z|\to1}\left|\tfrac{h(z)}{z}\right|\leq|h'(0)|=1.$$

και η ζητούμενη ανισότητα,(για z_0) προκύπτει καθώς:

$$d_f(z_0)=dist(f(z_0),\partial f(\mathbb{D}))=\liminf_{|z|\to1}|f(z)-f(z_0)|.$$

Ορισμός 5.6. *Μία f ολόμορφη σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ είναι τοπικά $1-1$ εαν $f'(z)\neq 0$.*

Θεώρημα 5.1. *Έστω f αναλυτική και τοπικά $1-1$ στο $\mathbb{D}$.*
Αν $(1-|z|^2)\left|z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leq 1$, $\forall z\in\mathbb{D}$ τότε η f είναι $1-1$ άρα και σύμμορφη στο $\mathbb{D}$. Η σταθερά 1 είναι η βέλτιστη.

Πρόταση 5.7. *(Ταυτότητα Hardy) Έστω g αναλυτική στο $\mathbb{D}$ και $p\in\mathbb{R}$. Τότε:*

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^p\,dt\right)=p^2\,r\,\int_0^{2\pi}|g(re^{it})|^{p-2}\,|g'(re^{it})|^2\,dt,\;0\leq r<1.$$

Θεώρημα 5.2. *(Hardy – Littlewood) Έστω* $f \in \mathbb{H}^p$, $0 < p \leq +\infty$ *και* $F(\theta) = \sup\limits_{r<1} |f(re^{i\theta})|$. *Τότε,* $F \in L^p$ *και* $||F||_p \leq B_p \, ||f||_p$, *όπου η* B_p *εξαρτάται μόνο από το p και* $||f||_p = \lim\limits_{r \to 1} M_p(r, f)$, *με:*

$$M_p(r,f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta\right)^{\frac{1}{p}}, \; 0 < p < +\infty, \;\; M_\infty(r,f) = \max_{0 \leq \theta < 2\pi} |f(re^{i\theta})|.$$

Θεώρημα 5.3. *(Λήμμα Schwarz) Έστω* $f \in \mathbb{H}^\infty$, $||f||_\infty \leq 1$ *και* $f(0) = 0$. *Τότε:*

(i) $|f(z)| \leq |z|$, $z \in \mathbb{D}$.

(ii) $|f'(0)| \leq 1$.

Αν ισχύει ισότητα στην (i) για κάποιο $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *ή ισότητα στη (ii), τότε:* $f(z) = \lambda z$ *όπου* λ *σταθερά με* $|\lambda| = 1$.

6 Βιβλιογραφία

1. Christian Pommerenke, *Boundary Behaviour of Conformal Maps* (1992).
2. Walter Rudin, *Real and Complex Analysis*, Third Edition (1987).
3. Peter L. Duren, *Theory of H^p Spaces* (1970).