ΙΣΤΟΡΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ STIELTJES

ΦΩΤΕΙΝΗ ΤΣΙΦΟΥΝΤΙΔΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2006

.

Στην Αφροδίτη, στην Ειρήνη, στη Χρυσούλα,
στην κ. Στέλλα Κουτράκη και στη μητέρα μου.

Η εργασία αυτή κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Ιούνιο του 2006. Την κριτική επιτροπή αποτέλεσαν οι:

Κατσοπρινάκης Εμμανουήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής

Μήτσης Θεμιστοκλής, Επίκουρος Καθηγητής

Παπαδημητράκης Μιχαήλ, Αναπληρωτής Καθηγητής.

Την επίβλεψή της ανέλαβε ο κ. Παπαδημητράκης, τον οποίο και ευχαριστώ πολύ για την υπομονή και τον πολύτιμο χρόνο που διέθεσε για τη διόρθωσή της.

Περιεχόμενα

Historical Roots of Stieltjes Integral.

This master thesis is consisted of two parts. In the first part we study T.-J. Stieltjes' last paper on continued fractions. In this beautiful work, he studied the analytical behaviour of the continued fraction of the form

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{2k-1} z + \cfrac{1}{\alpha_{2k} + \ddots}}}} \,,$$

where $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ are all positive numbers and z is a complex number. Among the other mathematical notions, which he defines, is the famous type of integral which nowadays has his name.

In the second part we study some important papers which are related to the history of Stieltjes integral and were published by F. Riesz, H. Lebesgue and J. Radon at the beginning of the 20th century.

Εισαγωγικό σημείωμα.

Η εργασία αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος μελετάται το τελευταίο άρθρο «Recherches sur les fractions continues» του T.-J. Stieltjes. Στη δημοσίευσή του αυτή, που εμφανίστηκε σε δύο μέρη τις χρονιές 1894 και 1895, ορίζει το ολοκλήρωμα που σήμερα έχει το όνομά του. Στο δεύτερο μέρος μελετώνται εργασίες των F. Riesz, H. Lebesgue και J. Radon που έγιναν στις αρχές του 20ου αιώνα και ανέδειξαν το ολοκλήρωμα αυτό.

Κύριος σκοπός της δημοσίευσης του Stieltjes είναι η μελέτη της αναλυτικής συμπεριφοράς του συνεχούς κλάσματος

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{2k-1} z + \cfrac{1}{\alpha_{2k} + \ddots}}}} \; ,$$

όπου τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ είναι θετικοί αριθμοί και z τυχαίος μιγαδικός αριθμός. Κάθε συνεχές κλάσμα της παραπάνω μορφής ονομάζεται, προς τιμήν του, **συνεχές κλάσμα Stieltjes**.

Τα συνεχή κλάσματα, δηλαδή οι αριθμητικές παραστάσεις της μορφής

$$\alpha_0 + \cfrac{\beta_0}{\alpha_1 + \cfrac{\beta_1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{\beta_{n-1}}{\alpha_n + \cfrac{\beta_n}{\alpha_n + \ddots}}}} \; ,$$

όπου τα $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \ldots, \beta_0, \ldots, \beta_n, \ldots \in \mathbb{K}$ με $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, ήταν ένας από τους πιο σημαντικούς κλάδους των Μαθηματικών του 18ου και 19ου αιώνα. Αν και παραδείγματα συνεχών κλασμάτων μπορεί κανείς να βρει στα Μαθηματικά των Αρχαίων Ελλήνων, των Ινδών και της Αναγέννησης, ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά τις ιδιότητές τους και τα καθιέρωσε ως κλάδο ήταν ο Άγγλος J. Wallis (1616-1703).

Τον 18ο αιώνα άρχισε ν' αναπτύσσεται η μοντέρνα θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Βασική ιδέα των εργασιών που δημοσιεύονται εκείνη την εποχή είναι ότι κάθε συνεχές κλάσμα μπορεί να μετατραπεί σε μία σειρά και αντιστρόφως. Ο L. Euler (1707-1783) δείχνει ότι κάθε ρητός αριθμός γράφεται σαν πεπερασμένο συνεχές κλάσμα[1] και αντιστρόφως, κάθε πεπερασμένο συνεχές κλάσμα είναι ρητός. Χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποδεικνύει την αρρητότητα της σταθεράς που φέρει το όνομά του. Η θεωρία αυτή αρχίζει ν' αποκτά ενδιαφέρον γιατί δίνει ένα τρόπο προσέγγισης των άρρητων αριθμών.

Οι μαθηματικοί του 19ου αιώνα ασχολούνται με το πότε ένα συνεχές κλάσμα συγκλίνει ή όχι σε έναν πραγματικό αριθμό. Επίσης, ενώ μέχρι τότε οι αριθμοθεωρίστες θεωρούσαν τους συντελεστές ενός συνεχούς κλάσματος πάντα ακέραιους αριθμούς, το διάστημα αυτό αρχίζουν να μελετώνται συνεχή κλάσματα με μιγαδικούς. Πολλοί διάσημοι μαθηματικοί ασχολούνται μ' αυτά, μεταξύ των οποίων και οι Jacobi, Hermite, Gauss, Cauchy, Stieltjes. Η εργασία του Stieltjes, στην οποία για πρώτη φορά μία οικογένεια συνεχών κλασμάτων μελετάται από την πλευρά της μιγαδικής ανάλυσης, είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί γεννιέται μ' αυτήν μία νέα θεωρία, η αναλυτική θεωρία των συνεχών κλασμάτων.

Σήμερα, αν και η παραπάνω θεωρία δεν παρουσιάζει πια αρκετό ερευνητικό ενδιαφέρον, τα συνεχή κλάσματα βρίσκουν εφαρμογές σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, κυρίως σε αλγορίθμους υπολογιστών και στην επίλυση εξισώσεων με απροσδιόριστη ανάλυση.

Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας του ο Stieltjes αποδεικνύει χρήσιμες αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ των διαδοχικών όρων της ακολουθίας των κλασμάτων που προσεγγίζει ένα συνεχές κλάσμα Stieltjes. Στο δεύτερο κεφάλαιο προσδιορίζει τη δυναμοσειρά που αντιστοιχεί στο κλάσμα αυτό, ενώ στο επόμενο κεφάλαιο αρχίζει να το μελετά ως προς τη σύγκλιση. Στο τέταρτο κεφάλαιο ασχολείται με την ειδική περίπτωση στην οποία η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k$ των συντελεστών του συνεχούς κλάσματος Stieltjes συγκλίνει και στο τέλος ορίζει το πρόβλημα των ροπών. Έπειτα αποδεικνύει κάποια θεωρήματα μιγαδικής ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσει για να ολοκληρώσει τη μελέτη του ως προς τη σύγκλιση. Στα επόμενα κεφάλαια ασχολείται με την επίλυση του προβλήματος των ροπών.

Υπάρχει και δεύτερο μέρος της εργασίας του Stieltjes, το οποίο δημοσιεύτηκε μετά το θάνατό του. Σ' αυτό το τελευταίο κομμάτι, που είναι κυρίως αλγεβρικό, μελετά κάποιες ειδικές περιπτώσεις του προβλήματος των ροπών, δίνει πολλά αριθμητικά παραδείγματα συνεχών κλασμάτων και ασχολείται με κάποιους χρήσιμους μετασχηματισμούς του κλάσματος αυτού.

[1] Δηλαδή, το συνεχές κλάσμα με το οποίο ισούται κάθε ρητός θα σταματάει σε κάποιο παρονομαστή του.

Μέρος I

Η τελευταία εργασία του Stieltjes στα συνεχή κλάσματα.

Κεφάλαιο 1

Το συνεχές κλάσμα Stieltjes.

Στην αρχή του πρώτου κεφαλαίου της εργασίας του, ο T. J. Stieltjes ορίζει το σύμβολο $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ και μελετά βασικές ιδιότητές του. Το σύμβολο αυτό, με τη βοήθεια του οποίου ορίζει τα πολυώνυμα των αριθμητών και των παρονομαστών των κλασμάτων που προσεγγίζουν το συνεχές κλάσμα Stieltjes, καθώς και οι σχέσεις που αποδεικνύει στην πρώτη παράγραφο, είναι ήδη γνωστές στη θεωρία των συνεχών κλασμάτων. Συνδυάζοντάς τες ο Stieltjes καταφέρνει να πάρει σημαντικά αποτελέσματα για τους συντελεστές και τις ρίζες των παραπάνω πολυωνύμων.

1.1 Το σύμβολο $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ και οι ιδιότητές του.

Θεωρούμε μία ακολουθία αριθμών $N, N_1, N_2, \ldots$ που ικανοποιεί τις ισότητες:

$$N = \alpha_1 N_1 + N_2$$

$$N_1 = \alpha_2 N_2 + N_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_{k-1} = \alpha_k N_k + N_{k+1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ .$$

Τότε μπορούμε να εκφράσουμε το N ως γραμμικό συνδυασμό των N_1 και N_2, των N_2 και N_3, των N_3 και N_4, κτλ ως εξής:

$$N = (\alpha_1\alpha_2 + 1)N_2 + \alpha_1 N_3 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_3)N_3 + (\alpha_1\alpha_2 + 1)N_4 = \ldots\ .$$

Ορισμός 1.1 *Εισάγουμε το σύμβολο $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ το οποίο ορίζεται επαγωγικά από τις παρακάτω σχέσεις:*

$$[\ ] = 1, \quad [\alpha_1] = \alpha_1, \quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}]\alpha_k + [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2}]\ . \tag{1.1}$$

Λήμμα 1.1 *Με τη βοήθεια του συμβόλου* $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]$ *το* N *γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των* N_k *και* N_{k+1} *ως εξής:*

$$N = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]N_k + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+1} \ . \tag{1.2}$$

Απόδειξη: Γίνεται με μαθηματική επαγωγή. Για $k = 1$ έχουμε

$$[\alpha_1]N_1 + N_2 = \alpha_1 N_1 + N_2 = N \ ,$$

άρα η (1.2) ισχύει. Έστω ότι η (1.2) ισχύει για κάποιο k. Τότε, η (1.2) ισχύει και για $k+1$ διότι:

$$\begin{aligned} &[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}]N_{k+1} + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]N_{k+2} \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]\alpha_{k+1}N_{k+1} + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+1} + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]N_{k+2} \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k](\alpha_{k+1}N_{k+1} + N_{k+2}) + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+1} \\ &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]N_k + [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+1} = N \ . \end{aligned}$$

Όπως σχολιάζει και ο Stieltjes στην εργασία του, η σχέση που συνδέει τον πρώτο όρο N της παραπάνω ακολουθίας με δύο διαδοχικούς όρους της είναι γραμμική και «ομογενής». Λέγοντας ομογενής, εννοεί ότι, σε κάθε έκφραση του N ως άθροισμα κάποιων όρων της ακολουθίας (N_k), για κάθε προσθετέο $[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k]N_l$ το άθροισμα των δεικτών $k + l$ είναι σταθερό.

Μία πιο γενική σχέση που συνδέει τον N με δύο τυχαίους και διαφορετικούς όρους της ακολουθίας είναι αυτή που αποδεικνύεται στο παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 1.2 *Ισχύει ότι*

$$[\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{k+l-1}]N = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+l-1}]N_k + (-1)^{l+1}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+l} \ . \tag{1.3}$$

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε μαθηματική επαγωγή ως προς l. Για $l = 1$ η (1.3) προφανώς, ισχύει. Έστω ότι η (1.3) ισχύει για κάποιο l. Θα πρέπει να δείξουμε ότι για $l + 1$ ισχύει:

$$[\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l}]N = [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}]N_k + (-1)^{l+2}[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+l+1}$$

ή

$$\begin{aligned} &[\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l-1}]\alpha_{k+l}N + [\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l-2}]N \\ &= [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l}]N_k + (-1)^{l+2}[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+l+1} \end{aligned}$$

ή

$$\begin{aligned} &\alpha_{k+l}\left([\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l-1}]N - [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l-1}]N_k\right) \\ &+ \left([\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_{k+l-2}]N - [\alpha_1, \dots, \alpha_{k+l-2}]N_k\right) \\ &= (-1)^{l+2}[\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}]N_{k+l+1} \end{aligned}$$

ή

$$\alpha_{k+l}(-1)^{l+1}N_{k+l}+(-1)^{l}N_{k+l-1}=(-1)^{l+2}N_{k+l+1}$$

(λόγω υπόθεσης της μαθηματικής επαγωγής) ή ισοδύναμα

$$N_{k+l-1}=\alpha_{k+l}N_{k+l}+N_{k+l+1}\ ,$$

που ισχύει.

Από την (1.3) προκύπτουν πολλές χρήσιμες σχέσεις:
Αντικαθιστώντας το k με α και το l με $\beta+\gamma+1$, παίρνουμε τη σχέση

$$[\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]N=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]N_\alpha+(-1)^{\beta+\gamma}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1}\ . \quad (1.4)$$

Από την (1.4) για $\gamma=0$ παίρνουμε την

$$[\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]N=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]N_\alpha+(-1)^{\beta}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+1}\ . \quad (1.5)$$

Επίσης, αν στην (1.3) θέσουμε όπου k το $\alpha+\beta+1$ και όπου l το γ, έχουμε ότι:

$$[\alpha_{\alpha+\beta+2},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]N=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]N_{\alpha+\beta+1}+(-1)^{\gamma+1}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1}\ . \quad (1.6)$$

Από τις (1.5) και (1.6), απαλείφοντας το $N_{\alpha+\beta+1}$, προκύπτει μία σχέση μεταξύ των N, N_α, $N_{\alpha+\beta+\gamma+1}$ της μορφής

$$\Delta N=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]\Big\{[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]N_\alpha+(-1)^{\beta+\gamma}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}]N_{\alpha+\beta+\gamma+1}\Big\}\ , \quad (1.7)$$

όπου το Δ ισούται με

$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}][\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]+(-1)^{\beta+1}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}][\alpha_{\alpha+\beta+2},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]\ .$$

Συγκρίνοντας τις (1.4) και (1.7), παίρνουμε ότι: Δ=$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}][\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]$. Δηλαδή ισχύει ότι

$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}][\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}]$$
$$=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\beta}][\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]+(-1)^{\beta}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}][\alpha_{\alpha+\beta+2},\ldots,\alpha_{\alpha+\beta+\gamma}]\ . \quad (1.8)$$

Από την (1.8) για $\beta=0$ παίρνουμε την

$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha+\gamma}]=[\alpha_1,\ldots,\alpha_\alpha][\alpha_{\alpha+1},\ldots,\alpha_{\alpha+\gamma}]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\alpha-1}][\alpha_{\alpha+2},\ldots,\alpha_{\alpha+\gamma}]\ . \quad (1.9)$$

Επίσης, από την (1.8) για $\alpha=\gamma=1$ έχουμε ότι

$$[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\beta+2}][\alpha_2,\ldots,\alpha_{\beta+1}]=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{\beta+1}][\alpha_2,\ldots,\alpha_{\beta+2}]+(-1)^{\beta}\ . \quad (1.10)$$

Παρατηρούμε ότι από τη σχέση (1.9) για $\gamma=1$ καταλήγουμε στη σχέση ορισμού του $[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k]$.

Ακόμη, από την (1.9) για $\alpha = 1$ προκύπτει ότι

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_{\gamma+1}] = \alpha_1[\alpha_2, \ldots, \alpha_{\gamma+1}] + [\alpha_3, \ldots, \alpha_{\gamma+1}] \; . \tag{1.11}$$

Εφαρμόζοντας $k-1$ φορές την (1.11), παίρνουμε ότι

$$\frac{[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]}{[\alpha_2, \ldots, \alpha_k]} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_k}}} \; .$$

Εφαρμόζοντας $k-1$ φορές την (1.1), παίρνουμε ότι

$$\frac{[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]}{[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}]} = \alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k-2} + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_1}}} \; .$$

Όμως, από την προηγούμενη ισότητα έχουμε ότι το δεύτερο μέλος της παραπάνω σχέσης ισούται με $\frac{[\alpha_k, \ldots, \alpha_1]}{[\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1]}$, δηλαδή είναι

$$\frac{[\alpha_1, \ldots, \alpha_k]}{[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}]} = \frac{[\alpha_k, \ldots, \alpha_1]}{[\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1]} \; ,$$

απ' όπου επαγωγικά παίρνουμε ότι

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_k] = [\alpha_k, \ldots, \alpha_1] \; . \tag{1.12}$$

Άρα, από τις (1.1) και (1.12) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} [\alpha_k, \ldots, \alpha_1] &= [\alpha_1, \ldots, \alpha_k] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}]\alpha_k + [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}] \\ &= [\alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_1]\alpha_k + [\alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_1] \; . \end{aligned}$$

Επίσης, το $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ συνδέεται με το α_k με μία σχέση της μορφής

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}][\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n]\alpha_k + R \; , \tag{1.13}$$

όπου το R είναι ανεξάρτητο του α_k.

Η προηγούμενη σχέση προκύπτει από την (1.9) για $\alpha = k$, $\gamma = n-k$ και από την (1.1) ως εξής:

$$[\alpha_1, \ldots, \alpha_n] = [\alpha_1, \ldots, \alpha_k][\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n] + [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}][\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n]$$

$$= \alpha_k[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}][\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n] + [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}][\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n] + [\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}][\alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_n] \; .$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την (1.1), την (1.11) και την (1.9) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
R &= [\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\\
&= \alpha_{k-1}[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-3}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\\
&\quad +[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n]\\
&= (\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1})[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-3}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\\
&\quad +[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+3},\ldots,\alpha_n]\\
&= [\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+3},\ldots,\alpha_n]\\
&= [\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\ .
\end{aligned}$$

Οπότε $R=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1}+\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]$.

Επίσης, ισχύει

$$R=[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2},\alpha_{k-1},0,\alpha_{k+1},\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\ ,$$

γιατί

$$\begin{aligned}
[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},0,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n] &= 0[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}][\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n]\\
&+ [\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\\
&= [\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-2}][\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n]+[\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}][\alpha_{k+2},\ldots,\alpha_n]\\
&= R\ .
\end{aligned}$$

Τέλος, από τον ορισμό του $[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]$ προκύπτει εύκολα (με μαθηματική επαγωγή ως προς n) ότι για κάθε $m\neq 0$ ισχύουν και τα εξής:

$$\begin{aligned}
[m\alpha_1,\frac{\alpha_2}{m},\ldots,m\alpha_{2n-1},\frac{\alpha_{2n}}{m}] &= [\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n}]\ ,\\
[m\alpha_1,\frac{\alpha_2}{m},\ldots,\frac{\alpha_{2n}}{m},m\alpha_{2n+1}] &= m[\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2n+1}]\ . \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

1.2 Ορισμός των πολυωνύμων $P_n(z)$ και $Q_n(z)$ και ιδιότητες των συντελεστών τους.

Θεωρούμε το συνεχές κλάσμα

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\cfrac{1}{\alpha_2+\ddots+\cfrac{1}{\alpha_{2k-1}z+\cfrac{1}{\alpha_{2k}+\ddots}}}}\ ,$$

όπου τα α_1, α_2, $\ldots$, α_n, $\ldots$ είναι θετικοί αριθμοί.

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής κάθε όρου της ακολουθίας των προσεγγίσεων του συνεχούς κλάσματος Stieltjes είναι πολυώνυμα του z, τα οποία, με τη βοήθεια του συμβόλου $[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ που έχουμε ορίσει, γράφονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= [\alpha_2, \alpha_3 z, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-1} z, \alpha_{2n}] \\
Q_{2n}(z) &= [\alpha_1 z, \alpha_2, \alpha_3 z, \ldots, \alpha_{2n}] \\
P_{2n+1}(z) &= [\alpha_2, \alpha_3 z, \alpha_4, \ldots, \alpha_{2n-1} z, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} z] \\
Q_{2n+1}(z) &= [\alpha_1 z, \alpha_2, \alpha_3 z, \ldots, \alpha_{2n}, \alpha_{2n+1} z] \ .
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι τα αρχικά πολυώνυμα είναι:

$$P_1(z) = 1, \quad P_2(z) = \alpha_2, \quad Q_1(z) = \alpha_1 z, \quad Q_2(z) = 1 + \alpha_1 \alpha_2 z \ .$$

Μπορούμε επίσης να ορίσουμε τα πολυώνυμα: $P_0(z) = 0$ και $Q_0(z) = 1$.

Συμβολίζουμε με $P_n^{(k)}(z)$ και $Q_n^{(k)}(z)$ εκείνα τα πολυώνυμα που προκύπτουν από τα $P_n(z)$ και $Q_n(z)$, αντίστοιχα, όταν αντικαταστήσουμε τον κάθε συντελεστή α_i με τον α_{i+k}. Από τη σχέση (1.1) προκύπτει ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned}
Q_{2n}(z) &= \alpha_{2n} Q_{2n-1}(z) + Q_{2n-2}(z) && (1.15) \\
Q_{2n+1}(z) &= \alpha_{2n+1} z Q_{2n}(z) + Q_{2n-1}(z) && (1.16) \\
P_{2n}(z) &= \alpha_{2n} P_{2n-1}(z) + P_{2n-2}(z) && (1.17) \\
P_{2n+1}(z) &= \alpha_{2n+1} z P_{2n}(z) + P_{2n-1}(z) \ . && (1.18)
\end{aligned}$$

Θεώρημα 1.1 *Ισχύει*

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= A_0 + A_1 z + \ldots + A_{n-1} z^{n-1} \\
Q_{2n}(z) &= B_0 + B_1 z + \ldots + B_n z^n \\
P_{2n+1}(z) &= C_0 + C_1 z + \ldots + C_n z^n \\
Q_{2n+1}(z) &= D_0 + D_1 z + \ldots + D_{n+1} z^{n+1}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
A_0 &= \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} && (1.19) \\
A_{n-2} &= A_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{1}{\alpha_3 \alpha_4} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{2n-1} \alpha_{2n}} \right) && (1.20) \\
A_{n-1} &= \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_{2n} && (1.21) \\
B_0 &= 1 && (1.22) \\
B_1 &= \sum_{k=1}^{n} (\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2k-1}) \alpha_{2k} && (1.23) \\
B_{n-1} &= B_n \left(\frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{2n-1} \alpha_{2n}} \right) && (1.24) \\
B_n &= \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_{2n} && (1.25)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_0 &= 1 && (1.26)\\
C_1 &= \sum_{k=1}^{n}(\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2k})\alpha_{2k+1} && (1.27)\\
C_{n-1} &= C_n\left(\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\frac{1}{\alpha_3\alpha_4}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}\right) && (1.28)\\
C_n &= \alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_{2n+1} && (1.29)\\
D_0 &= 0 && (1.30)\\
D_1 &= \alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n+1} && (1.31)\\
D_n &= D_{n+1}\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}\right) && (1.32)\\
D_{n+1} &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1}. && (1.33)
\end{aligned}
$$

Απόδειξη: Οι αναπαραστάσεις των $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ αποδεικνύονται με επαγωγή από τις (1.15), (1.16), (1.17) και (1.18). Στις ίδιες σχέσεις βασιζόμαστε για να αποδείξουμε και τις (1.19), (1.20), …, (1.33).

Για παράδειγμα, αν εφαρμόσουμε n φορές την (1.16) αντικαθιστώντας κάθε φορά τα πολυώνυμα με περιττό δείκτη, παίρνουμε ότι $Q_{2n+1}(z) = Q(z) + Q_1(z)$, όπου το $Q(z)$ είναι πολυώνυμο με σταθερό όρο μηδέν και $Q_1(z) = [\alpha_1 z] = \alpha_1 z$, άρα και το $Q_{2n+1}(z)$ έχει το σταθερό του όρο, D_0, μηδέν. Λόγω του τελευταίου, ο σταθερός όρος του $Q_{2n}(z)$ ισούται με το σταθερό όρο του $Q_{2n-2}(z)$ και, τελικά, ισούται με το σταθερό όρο του $Q_2(z) = [\alpha_1 z, \alpha_2] = \alpha_1\alpha_2 z + 1$. Δηλαδή όλοι οι σταθεροί όροι των πολυωνύμων $Q_{2n}(z)$ είναι ίσοι με τη μονάδα. Όμοια προκύπτουν και οι τιμές των άλλων δύο σταθερών όρων A_0 και C_0.

Επίσης, από την (1.15) έχουμε ότι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $Q_{2n}(z)$ ισούται με το γινόμενο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του $Q_{2n-1}(z)$ επί το α_{2n}. Επειδή, όμως, ισχύει ότι $Q_{2n-1}(z) = \alpha_{2n-1} z Q_{2n-2}(z) + Q_{2n-3}(z)$, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $Q_{2n-1}(z)$ ισούται με το γινόμενο του συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου του $Q_{2n-2}(z)$ επί το α_{2n-1} κοκ. Τελικά, καταλήγουμε στο ότι ο συντελεστής B_nτου μεγιστοβάθμιου όρου του $Q_{2n}(z)$ ισούται με το γινόμενο $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n}$ και, φυσικά, με το ίδιο σκεπτικό αποδεικνύονται και οι τύποι των A_{n-1}, C_n και D_{n+1}.

Εφαρμόζοντας n φορές την (1.16) παίρνουμε ότι

$$
\begin{aligned}
Q_{2n+1}(z) &= \alpha_{2n+1} z Q_{2n}(z) + \alpha_{2n-1} z Q_{2n-2}(z) + \ldots + \alpha_3 z Q_2(z) + Q_1(z)\\
&= \alpha_{2n+1} z Q_{2n}(z) + \alpha_{2n-1} z Q_{2n-2}(z) + \ldots + \alpha_3 z Q_2(z) + \alpha_1 z\ .
\end{aligned}
$$

Κάθε πολυώνυμο $Q_{2k}(z)$ έχει σταθερό όρο μονάδα, άρα τελικά ο συντελεστής D_1 του z στο $Q_{2n+1}(z)$ θα ισούται με το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}$.

Εφαρμόζοντας $n-1$ φορές την (1.15) προκύπτει ότι

$$
Q_{2n}(z) = \alpha_{2n} Q_{2n-1}(z) + \alpha_{2n-2} Q_{2n-3}(z) + \ldots + \alpha_2 Q_1(z)\ ,
$$

οπότε ο συντελεστής του z στο $Q_{2n}(z)$ ισούται με το άθροισμα των αντίστοιχων συντελεστών των πολυωνύμων $\alpha_{2k}Q_{2k-1}(z)$ για $k=1,2,\ldots,n$, δηλαδή είναι

$$B_1=\sum_{k=1}^{n}(\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2k-1})\alpha_{2k}\ .$$

Όμοια αποδεικνύεται και η (1.27).

Θα αποδείξουμε τη σχέση (1.32) χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n=1$ έχουμε το πολυώνυμο $Q_3(z)$, για το οποίο ισχύει ότι

$$Q_3(z)=[\alpha_1 z,\alpha_2,\alpha_3 z]=\alpha_3 z[\alpha_1 z,\alpha_2]+\alpha_1 z=\alpha_1\alpha_2\alpha_3 z^3+\alpha_1 z+\alpha_3 z$$

και, πράγματι, ο συντελεστής του z ισούται με $\alpha_1+\alpha_3$, δηλαδή με $\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3})$.

Έστω ότι για κάθε $k<n$ ισχύει η υπόθεση. Τότε, ο συντελεστής του z^{n-1} στο πολυώνυμο $Q_{2n}(z)$, λόγω της (1.15) ισούται με

$$\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n-1}\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}}\right)+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n-2}$$

και λόγω της (1.16) έχουμε ότι ο συντελεστής του z^n στο $Q_{2n+1}(z)$ θα είναι:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{2n+1}\alpha_{2n}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n-1}\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{2n-2}\alpha_{2n-1}}\right)+\\
& +\alpha_1\cdots\alpha_{2n-2}\alpha_{2n+1}+\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n-1}\\
= \ & \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1}\left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{1}{\alpha_2\alpha_3}+\ldots+\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}\right)\\
= \ & D_n\ .
\end{aligned}$$

Άρα το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. Ο τύπος (1.24) προκύπτει πολύ εύκολα με τη βοήθεια του (1.32) και οι (1.20) και (1.28) αποδεικνύονται με όμοιο τρόπο.

Παρατήρηση 1.1 *Στο πολυώνυμο P_{2n} συμβολίσαμε το συντελεστή του z^k με A_k. Όμως, είναι προφανές ότι ο A_k εξαρτάται από το n, άρα το σωστότερο θα ήταν να τον συμβολίσουμε $A_k^{(n)}$. Το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τα άλλα πολυώνυμα. Δηλαδή έχουμε:*

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= A_0^{(n)}+A_1^{(n)}z+\ldots+A_{n-1}^{(n)}z^{n-1}\\
Q_{2n}(z) &= B_0^{(n)}+B_1^{(n)}z+\ldots+B_n^{(n)}z^{n}\\
P_{2n+1}(z) &= C_0^{(n)}+C_1^{(n)}z+\ldots+C_n^{(n)}z^{n}\\
Q_{2n+1}(z) &= D_0^{(n)}+D_1^{(n)}z+\ldots+D_{n+1}^{(n)}z^{n+1}\ .
\end{aligned}$$

Άρα, οι ακολουθίες των πολυωνύμων $P_{2n}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ και $Q_{2n+1}(z)$ ορίζουν για κάθε $k=0,1,2,\ldots$ τις ακολουθίες $\left(A_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$, $\left(B_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$, $\left(C_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ και $\left(D_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$, όπου για $k>n-1$ είναι $A_k^{(n)}=0$, για $k>n$ είναι $B_k^{(n)}=C_k^{(n)}=0$ και για $k>n+1$ έχουμε ότι $D_k^{(n)}=0$.

Τελειώνουμε την παράγραφο με δύο σχέσεις που θα φανούν χρήσιμες αργότερα.
Από τη (1.10) για $\beta = 2n-1$ παίρνουμε ότι

$$Q_{2n}(z)P_{2n+1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n+1}(z) = 1 \ , \tag{1.34}$$

ενώ για $\beta = 2n-2$ έχουμε ότι

$$Q_{2n}(z)P_{2n-1}(z) - P_{2n}(z)Q_{2n-1}(z) = 1 \ . \tag{1.35}$$

1.3 Σχέσεις μεταξύ των ριζών των $P_n(z)$ και $Q_n(z)$.

Καταρχάς, αρκεί να ασχοληθούμε με τη μελέτη των $Q_n(z)$, επειδή τα πολυώνυμα $P_n(z)$ δεν έχουν ουσιαστικές διαφορές από τα πολυώνυμα $Q_n(z)$: από τον τρόπο ορισμού τους στην αρχή της προηγούμενης παραγράφου και από τις (1.14) προκύπτει ότι τα $P_n(z)$ και $Q_n(z)$ συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις

$$P_{2n}(z) = \frac{1}{z}Q^{(1)}_{2n-1}(z) \ \text{ και } \ P_{2n+1}(z) = Q^{(1)}_{2n}(z) \ .$$

Από την (1.8), αν θέσουμε $\alpha = 2n-3$, $\beta = 1$ και $\gamma = 2$ και αντικαταστήσουμε το α_i με $\alpha_i z$ για κάθε περιττό i, παίρνουμε μία βασική σχέση που συνδέει τρεις διαδοχικούς όρους της ακολουθίας των πολυωνύμων $Q_0(z) = 1$, $Q_2(z)$, $Q_4(z)$, …, $Q_{2n}(z)$:

$$\alpha_{2n-2}Q_{2n}(z) = [\alpha_{2n-2}, \alpha_{2n-1}z, \alpha_{2n}]Q_{2n-2}(z) - \alpha_{2n}Q_{2n-4}(z) \ . \tag{1.36}$$

Όταν τρεις διαδοχικοί όροι μιας πεπερασμένης ακολουθίας πολυωνύμων ικανοποιούν μια σχέση αυτής της μορφής, λέμε ότι η ακολουθία αυτή είναι **μια ακολουθία του Sturm**. Κάθε τέτοια ακολουθία έχει τις ιδιότητες που θα δείξουμε για την $(Q_{2k}(z))$ σ' αυτήν την παράγραφο.

Θεώρημα 1.2 *Το πολυώνυμο $Q_{2n}(z)$ έχει n πραγματικές ρίζες, διαφορετικές ανά δύο, αρνητικές και διαφορετικές από τις ρίζες του $Q_{2n-2}(z)$. Μάλιστα, οι ρίζες του $Q_{2n-2}(z)$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του $Q_{2n}(z)$. Άρα, καθώς το z «περνά» (έτσι ώστε η τιμή του να αυξάνεται) από μία ρίζα του $Q_{2n}(z)$, η τιμή του $\frac{Q_{2n-2}(z)}{Q_{2n}(z)}$ «πηδάει» από το $-\infty$ στο $+\infty$.*

Απόδειξη: Είδαμε ότι τρεις διαδοχικοί όροι της ακολουθίας $(Q_{2k}(z))$ συνδέονται μεταξύ τους με τη σχέση (1.36), η οποία γράφεται

$$\alpha_{2k-2}Q_{2k}(z) = (\alpha_{2k-2}\alpha_{2k-1}\alpha_{2k}z + \alpha_{2k} + \alpha_{2k-2})Q_{2k-2}(z) - \alpha_{2k}Q_{2k-4}(z) \ . \tag{1.37}$$

Από την παραπάνω σχέση και επειδή τα α_i είναι θετικά προκύπτουν εύκολα τα εξής:

- Δύο διαδοχικοί όροι της $(Q_{2k}(z))$ δεν μπορούν να έχουν κοινή ρίζα. Αν συνέβαινε κάτι τέτοιο, από την (1.37) θα παίρναμε ότι υπάρχει αριθμός που μηδενίζει το $Q_0(z)$, πράγμα άτοπο, αφού το πολυώνυμο αυτό είναι σταθερό και μη μηδενικό.

- Εάν ένας όρος μηδενίζεται σε κάποιο σημείο, τότε ο προηγούμενος και ο επόμενος όρος της ακολουθίας έχουν στο σημείο αυτό αντίθετο πρόσημο.

- Υπάρχει μια περιοχή γύρω από κάθε ρίζα του $Q_{2k}(z)$ όπου ο προηγούμενος και ο επόμενος όρος της ακολουθίας διατηρούν σταθερό πρόσημο.

Θ' αποδείξουμε τώρα με μαθηματική επαγωγή ως προς k ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών του $Q_{2k}(z)$ βρίσκεται ακριβώς μια ρίζα του $Q_{2k-2}(z)$.

Για $k = 1$, το πολυώνυμο $Q_2(z) = \alpha_1\alpha_2 z + 1$ είναι πρώτου βαθμού και έχει μία ρίζα πραγματική και μάλιστα αρνητική, τη $\rho = -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2}$.

Για $k = 2$, το πολυώνυμο $Q_4(z)$ είναι δευτέρου βαθμού. Επειδή όλοι οι συντελεστές του είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, στο $(0, +\infty)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο. Γύρω από το ρ υπάρχει μια περιοχή όπου είναι ετερόσημο του $Q_0(z)$, άρα παίρνει αρνητικές τιμές. Επομένως, στο $(\rho, 0)$ έχει μία ρίζα. Επίσης, επειδή είναι δευτέρου βαθμού και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι θετικός, στο $(-\infty, \rho)$ υπάρχει μία ακόμα ρίζα του πολυωνύμου. Άρα, το $Q_4(z)$ έχει δύο ρίζες που είναι πραγματικοί και μάλιστα αρνητικοί αριθμοί και βρίσκονται εκατέρωθεν της ρίζας του $Q_2(z)$.

Υποθέτουμε ότι κάθε πολυώνυμο $Q_{2k}(z)$ με $k < n$ ικανοποιεί την υπόθεση της μαθηματικής επαγωγής. Τότε για το $Q_{2n}(z)$ έχουμε ισχύουν τα παρακάτω:

Εάν r_{i+1}, r_i είναι δυο διαδοχικές ρίζες του $Q_{2n-2}(z)$ με $r_{i+1} < r_i$ και $i \leq n-2$, τότε, λόγω της υπόθεσης της μαθηματικής επαγωγής, το $Q_{2n-4}(z)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{i-1}$ στο r_i και ομόσημο του $(-1)^i$ στο r_{i+1}. Λόγω της (1.37), το $Q_{2n}(z)$ είναι ομόσημο του $(-1)^i$ στο r_i και ομόσημο του $(-1)^{i+1}$ στο r_{i+1}, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (r_{i+1}, r_i). Δηλαδή, σε καθένα από τα $n-2$ διαστήματα (r_{n-1}, r_{n-2}), ..., (r_2, r_1) υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα του $Q_{2n}(z)$. Στο r_{n-1} το $Q_{2n}(z)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{n-1}$ και στο $-\infty$ έχει το ίδιο πρόσημο με τον αριθμό $(-1)^n$, άρα στο διάστημα $(-\infty, r_{n-1})$ υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα του. Το ίδιο ισχύει και για το διάστημα $(r_1, 0)$. Επειδή ο βαθμός του πολυωνύμου είναι n, θα έχει τελικά n πραγματικές ρίζες, που θα είναι όλες αρνητικές και διαφορετικές μεταξύ τους. Άρα, ανάμεσα σε δυο διαδοχικές ρίζες του $Q_{2n}(z)$ θα βρίσκεται μία ακριβώς ρίζα του $Q_{2n-2}(z)$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Εάν στην (1.8) θέσουμε $\alpha = 2n-2$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ και στη θέση κάθε α_{2i-1} βάλουμε το $\alpha_{2i-1}z$, τότε έχουμε ότι

$$\alpha_{2n-1}\frac{Q_{2n+1}(z)}{z} = [\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}z, \alpha_{2n+1}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \alpha_{2n+1}\frac{Q_{2n-3}(z)}{z} \ ,$$

δηλαδή έχουμε ότι τα πολυώνυμα

$$\frac{Q_1(z)}{z} = \alpha_1, \ \ldots, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, \frac{Q_{2n+1}(z)}{z}$$

ικανοποιούν μία σχέση της ίδιας μορφής με την (1.36) και άρα σχηματίζουν μία ακολουθία του *Sturm*. Επομένως, θα έχουν και τις αντίστοιχες ιδιότητες, δηλαδή για κάθε n το πολυώνυμο $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z}$ θα έχει $n-1$ ρίζες που θα είναι πραγματικές και μάλιστα αρνητικές, διαφορετικές ανά δύο και η καθεμιά τους θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του πολυωνύμου $\frac{Q_{2n+1}(z)}{z}$.

Επίσης, από την (1.8) με κατάλληλες επιλογές των α, β και γ παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha_{2n-1}Q_{2n}(z) &= [\alpha_{2n-1}z, \alpha_{2n}]\frac{Q_{2n-1}(z)}{z} - \frac{Q_{2n-3}(z)}{z} \\ \alpha_{2n}Q_{2n+1}(z) &= [\alpha_{2n}, \alpha_{2n+1}z]Q_{2n}(z) - Q_{2n-2}(z) \end{aligned}$$

από τις οποίες προκύπτει ότι οι παρακάτω ακολουθίες πολυωνύμων

$$\frac{Q_1(z)}{z} = \alpha_1, \ldots, \frac{Q_{2n-3}(z)}{z}, \frac{Q_{2n-1}(z)}{z}, Q_{2n}(z)$$

και

$$Q_0(z) = 1, \ldots, Q_{2n-2}(z), Q_{2n}(z), Q_{2n+1}(z)$$

αποτελούν επίσης ακολουθίες του *Sturm*, άρα οι ρίζες του πολυωνύμου $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z}$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του πολυωνύμου $Q_{2n}(z)$ και οι ρίζες του $Q_{2n}(z)$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του πολυωνύμου $Q_{2n+1}(z)$.

Με όμοιο τρόπο έχουμε ότι οι ρίζες του $P_{2n}(z)$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του $Q_{2n}(z)$, οι ρίζες του $P_{2n+1}(z)$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του $Q_{2n+1}(z)$ και, τέλος, ότι οι ρίζες του $P_{2n}(z)$ βρίσκονται μεταξύ των ριζών του $P_{2n+1}(z)$.

Παρατήρηση 1.2 *Εάν υποθέσουμε ότι $-x_1$, $-x_2$, $\ldots$, $-x_n$ είναι οι ρίζες του $Q_{2n}(z)$, τότε, λόγω των παραπάνω, θα ισχύει ότι*

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n} \tag{1.38}$$

όπου τα M_1, M_2, $\ldots$, M_n είναι θετικοί αριθμοί. Επίσης, αν συμβολίσουμε με $-t_0 = 0$, $-t_1$, $-t_2$, $\ldots$, $-t_n$ τις $n+1$ ρίζες του $Q_{2n+1}(z)$, τότε έχουμε

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+t_1} + \frac{N_2}{z+t_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+t_n} \tag{1.39}$$

όπου τα N_0, N_1, N_2, $\ldots$, N_n είναι επίσης θετικοί αριθμοί.

Παρατήρηση 1.3 *Κάθε x_k ή t_k, όπως επίσης και ο αντίστοιχος συντελεστής, M_k ή N_k, εξαρτώνται από το n, άρα το πιο σωστό θα ήταν να χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό $x_k^{(n)}$, $t_k^{(n)}$, $M_k^{(n)}$ και $N_k^{(n)}$. Δηλαδή, $\left(-x_1^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ είναι η ακολουθία που ορίζεται από τις πρώτες ρίζες των πολυωνύμων $Q_0(z)$, $Q_2(z)$, $\ldots$, $Q_{2n}(z)$, $\ldots$ και γενικότερα, $\left(-x_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ είναι η ακολουθία που ορίζεται από τις k-οστές ρίζες της ίδιας ακολουθίας πολυωνύμων. Επίσης, $\left(M_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ είναι η αντίστοιχη ακολουθία των αριθμητών στο κλάσμα που είναι ο k-οστός όρος του αθροίσματος στη σχέση (1.38).*

Η σταθερή ακολουθία $\left(t_0^{(n)} = 0\right)_{n=0}^{+\infty}$ είναι η ακολουθία των πρώτων ριζών των πολυωνύμων $Q_1(z)$, $Q_3(z)$, $\ldots$, $Q_{2n+1}(z)$, $\ldots$. Η $\left(t_1^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ είναι η ακολουθία των πρώτων *θετικών ριζών και, γενικότερα,* $\left(t_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ *είναι η ακολουθία των k-οστών θετικών ριζών των ίδιων πολυωνύμων. Επίσης,* $\left(N_k^{(n)}\right)_{n=0}^{+\infty}$ *είναι η ακολουθία των αριθμητών στο κλάσμα που είναι ο $(k+1)$-οστός όρος του αθροίσματος στη σχέση* (1.39).

Για να είναι καλά ορισμένες οι ακολουθίες αυτές θέτουμε $x_k^{(n)} = t_k^{(n)} = +\infty$ *και* $M_k^{(n)} = N_k^{(n)} = 0$ *για* $k > n$. *Αυτό, φυσικά δε μεταβάλλει τις σχέσεις (1.38) και (1.39).*

1.4 Ρίζες των πολυωνύμων $P_n(z)$ και $Q_n(z)$ που δεν εξαρτώνται από κάποιο συντελεστή.

Οι ρίζες των εξισώσεων $Q_n(z) = 0$ και $P_n(z) = 0$ γενικά εξαρτώνται από τους αριθμούς α_i (αφού οι ρίζες ενός πολυωνύμου εξαρτώνται από τους συντελεστές του και οι συντελεστές των παραπάνω πολυωνύμων είναι, όπως είδαμε στην §1.2, ρητές συναρτήσεις των α_i). Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε αν είναι δυνατό κάποια ρίζα να μην εξαρτάται από ένα συγκεκριμένο α_i.

Από την εξίσωση (1.9) για $\alpha = 2n$ και $\gamma = 2n'$ παίρνουμε ότι

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)Q_{2n'}^{(2n)}(z) + Q_{2n-1}(z)P_{2n'}^{(2n)}(z)\ , \tag{1.40}$$

ενώ από την ίδια εξίσωση για $\alpha = 2n$ και $\gamma = 2n' + 1$ έχουμε ότι

$$Q_{2n+2n'+1}(z) = Q_{2n}(z)Q_{2n'+1}^{(2n)}(z) + Q_{2n-1}(z)P_{2n'+1}^{(2n)}(z)\ . \tag{1.41}$$

Από την §1.3 γνωρίζουμε ότι δεν είναι δυνατόν τα πολυώνυμα $P_n(z)$ και $Q_n(z)$ να έχουν κοινή ρίζα. Το ίδιο ισχύει και για τα $Q_{n-1}(z)$ και $Q_n(z)$. Άρα, ισχύουν τα παρακάτω:

- Εάν το α είναι κοινή ρίζα δύο εκ των πολυωνύμων $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, τότε θα μηδενίζει και το τρίτο, λόγω της (1.40).
- Όμοια, αν το α είναι κοινή ρίζα δύο εκ των πολυωνύμων $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n-1}(z)$ και $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$, τότε θα μηδενίζει και το τρίτο, λόγω της ίδιας σχέσης.

Στο δεύτερο μέλος της (1.40) το μοναδικό πολυώνυμο που εξαρτάται από το α_{2n+1} είναι το $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$ και, μάλιστα, από την (1.11) και την (1.40) παίρνουμε ότι

$$Q_{2n+2n'}(z) = \alpha_{2n+1}zQ_{2n}(z)P_{2n'}^{(2n)}(z) + R(z)\ , \tag{1.42}$$

όπου το $R(z)$ είναι πολυώνυμο ανεξάρτητο του α_{2n+1}.

Είναι προφανές ότι οι ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ που δεν εξαρτώνται από το α_{2n+1} είναι ακριβώς εκείνοι οι αριθμοί που μηδενίζουν ταυτόχρονα τα πολυώνυμα $Q_{2n}(z)P_{2n'}^{(2n)}(z)$ και $R(z)$. Όμως, είδαμε ότι αν ένας αριθμός είναι ρίζα του $Q_{2n+2n'}(z)$ και ενός εκ των

$Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, τότε πρέπει να μηδενίζει και το άλλο. Και, αν ένας αριθμός μηδενίζει τα $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, τότε θα μηδενίζει και το $Q_{2n+2n'}(z)$ και, τέλος, από την (1.42) έπεται ότι θα είναι ρίζα και του $R(z)$. Δηλαδή, θα είναι μία ρίζα του $Q_{2n+2n'}(z)$ ανεξάρτητη του α_{2n+1}. Άρα, οι ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ που δεν εξαρτώνται από το α_{2n+1} είναι ακριβώς οι κοινές ρίζες των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Τέτοιοι αριθμοί είναι δυνατόν να υπάρχουν, αφού οι ρίζες του $Q_{2n}(z)$ εξαρτώνται από τα $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n}$, ενώ οι ρίζες του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ εξαρτώνται από τα $\alpha_{2n+2}, \alpha_{2n+3}, \ldots, \alpha_{2n+2n'}$. Όμως, για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει τα α_i να ικανοποιούν κατάλληλες συνθήκες.

Μελετώντας την (1.40) με τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε ότι οι ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ που δεν εξαρτώνται από το α_{2n} είναι οι κοινές ρίζες των πολυωνύμων $Q_{2n-1}(z)$, $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$.

Επίσης, από την (1.41) παίρνουμε ότι: οι ρίζες του $Q_{2n+2n'+1}(z)$ που είναι ανεξάρτητες του α_{2n} είναι ακριβώς οι κοινές ρίζες των $Q_{2n-1}(z)$, $Q_{2n'+1}^{(2n)}(z)$ και οι ρίζες του $Q_{2n+2n'+1}(z)$ που είναι ανεξάρτητες του α_{2n+1} είναι ακριβώς οι κοινές ρίζες των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'+1}^{(2n)}(z)$.

1.5 Σχέση των ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ με τις ρίζες των $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη θέση των ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ ως προς τις ρίζες των $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι:

Θεώρημα 1.3 *Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ βρίσκεται το πολύ μία απ' όλες μαζί τις ρίζες των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Ειδικότερα, αν όλες οι ρίζες των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ είναι διαφορετικές ανά δύο, τότε σε κάθε διάστημα ανάμεσα σε δύο διαδοχικές ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ βρίσκεται ακριβώς μία από τις ρίζες των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$.*

Απόδειξη: Έστω a, b δύο διαδοχικές ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαδοχικές ρίζες x_k, x_{k+1} των $Q_{2n}(z)$, $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ ανάμεσα στις a, b. Δηλαδή, είναι $a < x_k < x_{k+1} < b$. Παρατηρούμε ότι ούτε η x_k, ούτε η x_{k+1} είναι ταυτόχρονα ρίζα του $Q_{2n}(z)$ και του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, διότι από τη σχέση (1.40)

$$Q_{2n+2n'}(z) = Q_{2n}(z)Q_{2n'}^{(2n)}(z) + Q_{2n-1}(z)P_{2n'}^{(2n)}(z)$$

θα είχαμε ότι είναι και ρίζα του $Q_{2n+2n'}(z)$. Διακρίνουμε, τώρα, τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Έστω ότι τα x_k, x_{k+1} είναι ρίζες του $Q_{2n}(z)$. Τότε έχουμε:

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = Q_{2n-1}(x_k)P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$$

και

$$Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) = Q_{2n-1}(x_{k+1})P_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1}) \ .$$

Επειδή έχουμε διαδοχικές ρίζες του $Q_{2n}(z)$, τα $Q_{2n-1}(x_k)$ και $Q_{2n-1}(x_{k+1})$ θα έχουν αντίθετο πρόσημο. Αντίθετα, τα $P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1})$ θα είναι ομόσημα, αφού στο $[x_k, x_{k+1}]$ δεν υπάρχει ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Άρα, τα $Q_{2n+2n'}(x_k)$ και $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ είναι ετερόσημα και καταλήγουμε σε άτοπο.

- Έστω ότι τα x_k, x_{k+1} είναι ρίζες του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Τότε, ισχύει

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = Q_{2n}(x_k)Q_{2n'}^{(2n)}(x_k)$$

και

$$Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) = Q_{2n}(x_{k+1})Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1}) \ .$$

Τα $Q_{2n}(x_k)$ και $Q_{2n}(x_{k+1})$ είναι ομόσημα, ενώ τα $Q_{2n'}^{(2n)}(x_k)$ και $Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1})$ είναι ετερόσημα, αφού μεταξύ των δυο διαδοχικών ριζών του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ βρίσκεται ακριβώς μία ρίζα του $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$. Άρα, και πάλι τα $Q_{2n+2n'}(x_k)$ και $Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ είναι ετερόσημα, πράγμα το οποίο είναι άτοπο.

- Έστω ότι το x_k είναι ρίζα του $Q_{2n}(z)$ και το x_{k+1} είναι ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Τότε:

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = Q_{2n-1}(x_k)P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$$

και

$$Q_{2n+2n'}(x_{k+1}) = Q_{2n}(x_{k+1})Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1}) \ .$$

Εάν υποθέσουμε ότι το x_k είναι η m-οστή ρίζα του $Q_{2n}(z)$, ξεκινώντας την αρίθμηση των ριζών του από δεξιά, τότε το $Q_{2n}(x_{k+1})$ είναι ομόσημο του $Q_{2n}(x_k+\varepsilon)$, όπου ε είναι αρκετά μικρό και θετικό, γιατί το x_{k+1} είναι μικρότερο της $(m-1)$-οστής ρίζας του $Q_{2n}(z)$. Όμως, σε μια μικρή περιοχή δεξιά της m-οστής ρίζας του $Q_{2n}(z)$, το πρόσημο του $Q_{2n}(z)$ είναι το ίδιο με του $(-1)^{m-1}$, άρα το $Q_{2n}(x_k+\varepsilon)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{m-1}$. Επίσης, είδαμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n}(z)$ βρίσκεται μία ρίζα του $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z}$, οπότε μεταξύ της m-οστής και της $(m-1)$-οστής ρίζας του $Q_{2n}(z)$ θα βρίσκεται η m-οστή ρίζα του $Q_{2n-1}(z)$. Επομένως, σε μια μικρή περιοχή δεξιά του x_k το $Q_{2n-1}(z)$ θα έχει το πρόσημο που έχει αριστερά της m-οστής ρίζας του, δηλαδή το $Q_{2n-1}(x_k+\varepsilon)$, άρα και το $Q_{2n-1}(x_k)$, είναι ομόσημο του $(-1)^m$. Οπότε το γινόμενο $Q_{2n}(x_{k+1})Q_{2n-1}(x_k)$ είναι αρνητικό.

Όμοια, το $P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$ έχει το ίδιο πρόσημο με το $P_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1}-\varepsilon)$, όπου ε οσοδήποτε μικρό και θετικό. Αν υποθέσουμε ότι το x_{k+1} είναι η ℓ-οστή ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, ξεκινώντας την αρίθμηση των ριζών του από δεξιά, τότε το πρόσημό του αριστερά της είναι ομόσημο του $(-1)^\ell$. Όμως, οι ρίζες του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες του $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι, επειδή το x_{k+1} βρίσκεται μεταξύ της ℓ-οστής και της $(\ell+1)$-οστής ρίζας του $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$, το πρόσημο του $Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1}-\varepsilon)$, οπότε και του $Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1})$, είναι το ίδιο με του $(-1)^\ell$. Άρα το γινόμενο $P_{2n'}^{(2n)}(x_k)Q_{2n'}^{(2n)}(x_{k+1})$ είναι θετικό. Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των δύο τελευταίων παραγράφων, βλέπουμε ότι στην περίπτωση που το x_k είναι ρίζα του $Q_{2n}(z)$ και το x_{k+1} είναι ρίζα του $P_{2n}^{(2n')}(z)$ το $Q_{2n+2n'}(x_k)Q_{2n+2n'}(x_{k+1})$ είναι αρνητικό και βρίσκουμε άτοπο.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δουλεύουμε για να αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα και στην περίπτωση που το x_k είναι ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ και το x_{k+1} είναι ρίζα του $Q_{2n}(z)$.

Εδώ τελειώνει η απόδειξη του πρώτου μέρους του θεωρήματος.

Έστω τώρα ότι $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ είναι οι ρίζες του $Q_{2n}(z)$ διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά, ενώ $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n'-1}$ είναι οι ρίζες του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, τις οποίες έχουμε επίσης διατάξει κατά αύξουσα σειρά. Υποθέτουμε ότι τα $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ δεν έχουν κοινές ρίζες και ότι οι ρίζες και των δυο μαζί, διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά είναι οι $x_1, x_2, \ldots, x_{n+n'-1}$. Παρατηρούμε ότι όλες αυτές οι ρίζες είναι αρνητικές.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο μέρος του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι δύο διαδοχικοί όροι της πεπερασμένης ακολουθίας $Q_{2n+2n'}(x_i)$ με $i = 0, 1, \ldots, n+n'$, όπου $x_0 = -\infty$, $x_{n+n'} = 0$ έχουν διαφορετικό πρόσημο. Αυτό το έχουμε ήδη αποδείξει για $i = 1, 2, \ldots, n+n'-1$.

Το πρόσημο του αριθμού $Q_{2n+2n'}(x_0)$ είναι προφανώς $(-1)^{n+n'}$. Για το πρόσημο του $Q_{2n+2n'}(x_1)$ διακρίνουμε δυο περιπτώσεις, ανάλογα με το αν το x_1 είναι ρίζα του $Q_{2n}(z)$ ή του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$.

Στην πρώτη περίπτωση, δηλαδή αν $x_1 = \rho_1$, είναι $Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n-1}(\rho_1)P_{2n'}^{(2n)}(\rho_1)$. Επειδή οι ρίζες του $Q_{2n-1}(z)$ βρίσκονται ανάμεσα στις ρίζες του $Q_{2n}(z)$ και επειδή το $Q_{2n-1}(z)$ είναι βαθμού n, το $Q_{2n-1}(\rho_1)$ είναι ομόσημο του $(-1)^n$, ενώ το $P_{2n'}^{(2n)}(\rho_1)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{n'-1}$, γιατί το $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ είναι βαθμού $n'-1$ και η πρώτη ρίζα του είναι μεγαλύτερη του ρ_1. Άρα, το $Q_{2n+2n'}(x_1)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{n+n'-1}$.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν εξετάσουμε την περίπτωση στην οποία το x_1 είναι ρίζα του $P_{2n'}^{2n}(z)$, δηλαδή αν $x_1 = \xi_1$, οπότε $Q_{2n+2n'}(x_1) = Q_{2n}(\xi_1)Q_{2n'}^{2n}(\xi_1)$ και τελικά προκύπτει πάλι ότι το $Q_{2n+2n'}(x_1)$ είναι ομόσημο του $(-1)^{n+n'-1}$. Άρα, σε κάθε περίπτωση τα $Q_{2n+2n'}(x_0)$ και $Q_{2n+2n'}(x_1)$ είναι ετερόσημα.

Δείξαμε επομένως ότι δύο διαδοχικοί όροι της πεπερασμένης ακολουθίας $Q_{2n+2n'}(x_i)$, με $i = 0, 1, \ldots, n+n'-1$ και $x_0 = -\infty$, $x_{n+n'} = 0$, έχουν διαφορετικό πρόσημο.

- Αν ο αριθμός $n + n'$ είναι περιττός, τότε ο $Q_{2n+2n'}(x_0)$ είναι αρνητικός και ο $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'-1})$, επειδή έχουμε αρτίου πλήθους εναλλαγές προσήμου, θα είναι επίσης αρνητικός, ενώ ο $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'})$ είναι θετικός.

- Αν ο $n+n'$ είναι άρτιος, τότε ο $Q_{2n+2n'}(x_0)$ είναι θετικός και ο $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'-1})$, επειδή έχουμε περιττού πλήθους εναλλαγές προσήμου, θα είναι τώρα αρνητικός, ενώ ο $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'})$ είναι θετικός.

Σε κάθε περίπτωση προκύπτει ότι οι $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'-1})$ και $Q_{2n+2n'}(x_{n+n'})$ είναι ετερόσημοι και η απόδειξη του θεωρήματος έχει τελειώσει.

Παρατήρηση 1.4 *Στο θεώρημα που αποδείξαμε προηγουμένως, μία από τις υποθέσεις που κάναμε ήταν ότι καμία ρίζα του $Q_{2n}(z)$ δεν αποτελεί ταυτόχρονα και ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Και δείξαμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση καθένα από τα $n+n'-1$ διαστήματα που ορίζουν οι ρίζες του $Q_{2n+2n'}(z)$ περιέχει είτε μία μόνο ρίζα του $Q_{2n}(z)$, είτε μία μόνο ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Όμως, δεν ξέρουμε ποια είναι τα διαστήματα που περιέχουν ρίζες του πρώτου πολυωνύμου και ποια περιέχουν του δευτέρου. Φυσικά, ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτή η κατανομή των ριζών εξαρτάται από τις τιμές των α_i. Αν επιτρέψουμε στα α_i να μεταβάλλονται κατά ένα «συνεχή» τρόπο (αρκεί να παραμένουν θετικά), τότε και η κατανομή των εν λόγω ριζών στα διαστήματα μεταβάλλεται. Μάλιστα, αν αρχικά είχαμε δύο διαδοχικά διαστήματα, από τα οποία το πρώτο περιείχε ρίζα του $Q_{2n}(z)$ και το δεύτερο ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$, τότε με κατάλληλη μεταβολή των α_i μπορούμε να πετύχουμε η ρίζα του $Q_{2n}(z)$ να «περάσει» στο δεύτερο διάστημα, ενώ ταυτόχρονα, η ρίζα του $P_{2n'}^{(2n)}(z)$ να «μπει» στο πρώτο διάστημα. Τότε, οι δυο ρίζες ταυτίζονται και μηδενίζουν επιπλέον και το $Q_{2n+2n'}(z)$. Αυτή είναι η περίπτωση που εξετάσαμε στην §1.4.*

Σε όλη την παράγραφο ασχοληθήκαμε με την «τριάδα» των πολυωνύμων $Q_{2n+2n'}(z)$, $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Όμως, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο καταλήγουμε σε αντίστοιχα αποτελέσματα και για άλλες τέτοιες «τριάδες». Έτσι έχουμε ότι:

- Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ βρίσκεται το πολύ μία απ' όλες μαζί τις ρίζες των $Q_{2n'}^{(2n)}(z)$ και $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z}$.
- Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών ριζών του $\frac{Q_{2n+2n'+1}(z)}{z}$ βρίσκεται το πολύ μία απ' όλες μαζί τις ρίζες των $\frac{Q_{2n-1}(z)}{z}$ και $\frac{Q_{2n'+1}^{(2n)}(z)}{z}$.
- Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'+1}(z)$ βρίσκεται το πολύ μία απ' όλες μαζί τις ρίζες των $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'+1}^{(2n)}(z)$.

1.6 Το πρόσημο της $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε ότι:

Θεώρημα 1.4 *Εάν x_k είναι μία ρίζα του $Q_m(z)$, τότε η $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$ είναι πάντα μη αρνητική.*

Απόδειξη: Λόγω των σχέσεων του Vieta το x_k είναι συνάρτηση των α_j, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τη μερική παράγωγο της συνάρτησης x_k ως προς το τυχαίο α_i. Για την απόδειξη της πρότασης θα πρέπει να διακρίνουμε τέσσερις περιπτώσεις για το αν ο βαθμός m του πολυωνύμου και το i είναι άρτιοι ή περιττοί. Θα κάνουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση που το m είναι άρτιος και το i περιττός. Τότε, από την (1.42) έχουμε ότι

$$Q_{2n+2n'}(x_k) = \alpha_{2n+1} x_k Q_{2n}(x_k) P_{2n'}^{(2n)}(x_k) + R(x_k)$$

οπότε με πεπλεγμένη παραγώγιση παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_{2n+1}} = -\frac{x_k Q_{2n}(x_k) P_{2n'}^{(2n)}(x_k)}{Q'_{2n+2n'}(x_k)} \ . \tag{1.43}$$

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι το πολυώνυμο $Q_{2n}(z)P_{2n'}^{(2n)}(z)$ έχει $n+n'-1$ ρίζες, καθεμιά από τις οποίες βρίσκεται μεταξύ των ριζών του πολυωνύμου $Q_{2n+2n'}(z)$. Άρα, αν υποθέσουμε ότι η x_k είναι η k-οστή ρίζα του $Q_{2n+2n'}(z)$ (αν τις αριθμήσουμε από τα δεξιά προς τ΄ αριστερά), τότε το πρόσημο του $Q_{2n}(x_k)P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$ είναι το ίδιο με του αριθμού $(-1)^{k-1}$. Επίσης, η παράγωγος $Q'_{2n+2n'}(z)$ είναι ένα πολυώνυμο $n+n'-1$ βαθμού και έχει ακριβώς μία ρίζα μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ (διότι το τελευταίο πολυώνυμο έχει n διακεκριμένες ρίζες). Άρα, το πρόσημο του αριθμού $Q'_{2n+2n'}(x_k)$ είναι το ίδιο με του αριθμού $(-1)^{k-1}$ και τελικά, τα $Q_{2n}(x_k)P_{2n'}^{(2n)}(x_k)$ και $Q'_{2n+2n'}(x_k)$ είναι ομόσημοι αριθμοί. Άρα, το δεξί μέλος της (1.43) είναι μη αρνητικό. Η απόδειξη είναι όμοια και στις άλλες τρεις περιπτώσεις, αρκεί να βρούμε σχέσεις αντίστοιχες με την (1.42).

Παρατήρηση 1.5 *Είδαμε στην §1.4 ότι μία ρίζα x_k του $Q_{2n+2n'}(z)$ είναι ανεξάρτητη του α_{2n+1} ακριβώς τότε, όταν είναι κοινή ρίζα των $Q_{2n}(z)$ και $P_{2n'}^{(2n)}(z)$. Αν λάβουμε υπόψη τον τύπο (1.43), τότε παίρνουμε ένα δεύτερο τρόπο απόδειξης του αποτελέσματος αυτού.*

Κεφάλαιο 2

Μελέτη των αναπτυγμάτων Laurent των προσεγγίσεων $\dfrac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ του συνεχούς κλάσματος Stieltjes.

Στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο από κάθε συνεχές κλάσμα Stieltjes μπορούμε να πάρουμε μία δυναμοσειρά με κέντρο το $+\infty$. Στο υπόλοιπο κεφάλαιο ασχολούμαστε με το αντίστροφο πρόβλημα, δηλαδή πώς από μία σειρά δυνάμεων του $\frac{1}{z}$, της οποίας οι συντελεστές ικανοποιούν ορισμένες προϋποθέσεις, προκύπτει ένα συνεχές κλάσμα Stieltjes.[1]

2.1 Το ανάπτυγμα Laurent του $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

Από τις σχέσεις (1.34) και (1.35) του προηγούμενου κεφαλαίου έχουμε ότι

$$\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)} - \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{(-1)^n}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)} \ ,$$

όπου για κάθε n το $Q_n(z)Q_{n+1}(z)$ είναι πολυώνυμο βαθμού $n+1$.

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι, αν αναπτύξουμε τα $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ και $\frac{P_{n+1}(z)}{Q_{n+1}(z)}$ σε δυναμοσειρές με κέντρο το ∞, τότε οι n πρώτοι όροι των αναπτυγμάτων θα είναι κοινοί. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν k, μικρότερα ή ίσα του n, τέτοια ώστε οι συντελεστές των όρων $\frac{1}{z^k}$ να διαφέρουν, τότε, παίρνοντας το ελάχιστο τέτοιο k, η παραπάνω σχέση δίνει:

$$\frac{d}{z^k} + \frac{d'}{z^{k+1}} + \ldots = \frac{(-1)^n}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)}$$

[1] Η σύνδεση ενός συνεχούς κλάσματος με μία δυναμοσειρά είναι κάτι που πρώτος έκανε ο L. Euler(1736-1813) στο έργο του «De Fractionlous Continious», που κυκλοφόρησε το 1737. Στο έργο του αυτό μελετά συστηματικά τα συνεχή κλάσματα και τα χρησιμοποιεί για να αποδείξει την αρρητότητα του αριθμού e.

ή ισοδύναμα

$$d + \frac{d'}{z} + \ldots = \frac{(-1)^n z^k}{Q_n(z)Q_{n+1}(z)}$$

για κάποιο $d \neq 0$ και για όλα τα αρκετά μεγάλα z. Το όριο του δεξιού μέλους της τελευταίας ισότητας για $z \to \infty$ είναι μηδέν, ενώ του αριστερού ισούται με d, πράγμα άτοπο. Άρα, είναι

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{a_n^{(n)}}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}^{(n)}}{z^{n+2}} + \ldots \quad (2.1)$$

όπου οι n πρώτοι όροι εμφανίζονται στα αναπτύγματα όλων των $\frac{P_k(z)}{Q_k(z)}$ με $k \geq n$. Οι υπόλοιποι αριθμητές $a_n^{(n)}$, $a_{n+1}^{(n)}$, $\ldots$ είναι όλοι μικρότεροι των c_n, c_{n+1}, $\ldots$ αντίστοιχα. Μάλιστα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.1 *Για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ η ακολουθία $(a_k^{(n)})$ είναι αύξουσα και τελικά σταθεροποιείται στον αριθμό c_k. Επίσης, όλα τα c_k είναι θετικά.*

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} &= \frac{P_{n-1}(z)}{Q_{n-1}(z)} + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z)Q_n(z)} \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{Q_0(z)Q_1(z)} - \frac{1}{Q_1(z)Q_2(z)} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}(z)Q_n(z)} \ . \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Κάθε όρος του δευτέρου μέλους γράφεται ως σειρά αρνητικών δυνάμεων του z ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q_0(z)Q_1(z)} &= \frac{\varepsilon_1^{(1)}}{z} \\
-\frac{1}{Q_1(z)Q_2(z)} &= -\frac{\varepsilon_2^{(2)}}{z^2} + \frac{\varepsilon_3^{(2)}}{z^3} - \frac{\varepsilon_4^{(2)}}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^{(2)}}{z^5} + \ldots \\
+\frac{1}{Q_2(z)Q_3(z)} &= +\frac{\varepsilon_3^{(3)}}{z^3} - \frac{\varepsilon_4^{(3)}}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^{(3)}}{z^5} - \ldots \\
-\frac{1}{Q_3(z)Q_4(z)} &= -\frac{\varepsilon_4^{(4)}}{z^4} + \frac{\varepsilon_5^{(4)}}{z^5} - \ldots \\
+\frac{1}{Q_4(z)Q_5(z)} &= +\frac{\varepsilon_5^{(5)}}{z^5} - \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλα z.

Καθένα από τα $\varepsilon_i^{(j)}$ είναι θετικός αριθμός και ένας τρόπος για να το δούμε αυτό είναι ο εξής: εάν

$$Q_{m-1}(z)Q_m(z) = cz(z + x_1)(z + x_2)\cdots(z + x_{m-1}) \ ,$$

τότε γνωρίζουμε ότι τα $c, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ είναι θετικοί αριθμοί. Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1}$.

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m-1$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{z+x_i} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x_i^n}{z^{n+1}} \ , \quad |z| > x_i \ .$$

Οπότε είναι

$$\frac{1}{Q_{m-1}(z)Q_m(z)} = \frac{1}{cz} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x_1^n}{z^{n+1}} \cdots \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x_{m-1}^n}{z^{n+1}} \ , \quad |z| > x_{m-1} \ .$$

Λαμβάνοντας υπόψη τον τύπο του Cauchy για το γινόμενο σειρών, προκύπτει ότι για $k < m$ δεν υπάρχει όρος της μορφής $\frac{1}{z^k}$ στο ανάπτυγμα του $\frac{1}{Q_{m-1}(z)Q_m(z)}$, άρα είναι $\varepsilon_k^{(m)} = 0$. Όταν $k \geq m$, τότε το $\varepsilon_k^{(m)}$ είναι πολυωνυμική παράσταση των x_i με θετικούς συντελεστές, άρα είναι θετικό. Επίσης, για $n \leq k$ ισχύει

$$a_k^{(n)} = \sum_{m=2}^{n} \varepsilon_{k+1}^{(m)} \ ,$$

ενώ για $1 \leq k < n$ ισχύει

$$a_k^{(n)} = \sum_{m=2}^{k+1} \varepsilon_{k+1}^{(m)} \ .$$

Επομένως, για $n \leq k$ ισχύει $a_k^{(n+1)} - a_k^{(n)} = \varepsilon_{k+1}^{(n+1)} > 0$ και για $n > k$ ισχύει $a_k^{(n+1)} = a_k^{(n)}$. Επειδή $a_k^{(k+1)} = c_k$, βλέπουμε ότι

$$c_k - a_k^{(k)} = a_k^{(k+1)} - a_k^{(k)} = \varepsilon_{k+1}^{(k+1)} > 0 \ ,$$

οπότε

$$0 = a_k^{(0)} < a_k^{(1)} < a_k^{(2)} < \ldots < a_k^{(k)} < c_k = a_k^{(k+1)} = a_k^{(k+2)} = \ldots \ .$$

Δηλαδή για κάθε φυσικό k η ακολουθία $(a_k^{(n)})$ είναι αύξουσα και τελικά σταθεροποιείται στον αριθμό c_k.

Αν $k = 0$, η ακολουθία $(a_0^{(n)})$ είναι σταθερή με τιμή $c_0 = \varepsilon_1^{(1)}$.

Εάν έχουμε το συνεχές κλάσμα Stieltjes

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{2k-1} z + \cfrac{1}{\alpha_{2k} + \ddots}}}} \ ,$$

τότε είναι προφανές ότι μία ισοδύναμη μορφή του είναι η

$$\cfrac{b_0}{z + \cfrac{b_1}{1 + \ddots + \cfrac{b_{2k-1}}{1 + \cfrac{b_{2k}}{z + \ddots}}}},$$

όπου τα b_i μπορούν εύκολα να υπολογιστούν από τα a_i, διότι ισχύουν οι σχέσεις $b_0 = \frac{1}{\alpha_1}$ και $b_n = \frac{1}{\alpha_n \alpha_{n+1}}$. Σύμφωνα με τα παραπάνω, το προηγούμενο συνεχές κλάσμα Stieltjes ορίζει μια ακολουθία αριθμών, την (c_n). Αποδεικνύεται ότι καθένα από τα c_n είναι ρητή συνάρτηση των συντελεστών α_i του συνεχούς κλάσματος και πολυωνυμική συνάρτηση των b_i με ακέραιους συντελεστές.[2]

Θεωρούμε, τώρα, την άπειρη σειρά

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \dots$$

και συμφωνούμε να την ονομάζουμε **ανάπτυγμα του συνεχούς κλάσματος Stieltjes** κατά τις δυνάμεις του $\frac{1}{z}$. Αυτός ο ορισμός είναι καθαρά τυπικός, αφού η σειρά αυτή είναι αποκλίνουσα τις περισσότερες φορές.

Από τον αλγόριθμο που αναφέρθηκε στην υποσημείωση, έχουμε ότι καθένα από τα c_n είναι ρητή συνάρτηση των α_i. Θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή μπορούμε να εκφράσουμε καθένα από τα α_n ως συνάρτηση μόνο των c_i. Πρώτα όμως θα χρειαστεί να αποδείξουμε κάποιες προτάσεις που θα τις χρησιμοποιήσουμε ως εργαλεία για να πάρουμε τους επιθυμητούς τύπους.

---

[2] Υπάρχει ένας πολύ κομψός τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τα c_n από τα b_i, τον οποίο ο Stieltjes έχει αποδείξει σε προηγούμενη εργασία του με τίτλο «Sur la réduction en fraction continue d' une série procédant suivant les puissances descedantes d' une variable». Η εργασία του αυτή δημοσιεύτηκε στο ίδιο περιοδικό το 1889 και περιέχει τον παρακάτω αλγόριθμο υπολογισμού των c_n.

Υπολογίζουμε τα $\alpha_{i,k}$ και $\beta_{i,k}$ με τη βοήθεια των τύπων

$$\begin{array}{ccc}
\alpha_{0,0}=1 & \text{και} & \alpha_{i,0} = 0 \text{ για } i > 0. \\
\beta_{0,k} = \alpha_{0,k} + b_2\alpha_{1,k} & & \alpha_{0,k+1} = b_1\beta_{0,k} \\
\beta_{1,k} = \alpha_{1,k} + b_4\alpha_{2,k} & & \alpha_{1,k+1} = b_3\beta_{1,k} + \beta_{0,k} \\
\beta_{2,k} = \alpha_{2,k} + b_6\alpha_{3,k} & & \alpha_{2,k+1} = b_5\beta_{2,k} + \beta_{1,k} \\
\dots & & \dots \\
\beta_{i,k} = \alpha_{i,k} + b_{2i+2}\alpha_{i+1,k} & & \alpha_{i,k+1} = b_{2i+1,k}\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k} \\
\dots & & \dots\ .
\end{array}$$

Με μαθηματική επαγωγή ως προς k εύκολα αποδεικνύεται ότι $\alpha_{i,k} = \beta_{i,k} = 0$ για $i > k$. Επίσης, είναι $\beta_{k,k} = \alpha_{k,k} + b_{2k+2}\alpha_{k+1,k} = \alpha_{k,k}$ και $\alpha_{k+1,k+1} = b_{2k+3}\beta_{k+1,k} + \beta_{k,k} = \alpha_{k,k}$. Άρα, θα έχουμε ότι $\beta_{k,k} = \alpha_{k,k} = \alpha_{0,0} = 1$.

Τα c_n υπολογίζονται από τα $\alpha_{i,k}$ και $\beta_{i,k}$ με τη βοήθεια των τύπων

$$\begin{aligned}
c_{i+k} &= b_0\alpha_{0,i}\alpha_{0,k} + b_0b_1b_2\alpha_{1,i}\alpha_{1,k} + b_0b_1b_2b_3b_4\alpha_{2,i}\alpha_{2,k} + \dots \\
c_{i+k+1} &= b_0b_1\beta_{0,i}\beta_{0,k} + b_0b_1b_2b_3\beta_{1,i}\beta_{1,k} + b_0b_1b_2b_3b_4b_5\beta_{2,i}\beta_{2,k} + \dots\ .
\end{aligned}$$

2.2 Τα c_n ως συνάρτηση των ριζών του $Q_m(z)$.

Στην §1.3 είδαμε ότι ισχύει

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n} \ ,$$

όπου τα M_1, M_2, $\ldots$, M_n είναι θετικοί αριθμοί.

Επειδή είναι $\frac{M_i}{z+x_i} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{M_i x_i^m}{z^{m+1}}$, έχουμε από τον τύπο (2.1) τελικά ότι, όταν το k παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, $\ldots$, $2n-1$, τότε ισχύει:

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} M_i x_i^k \ . \tag{2.3}$$

Όμοια, επειδή είναι

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z+t_1} + \frac{N_2}{z+t_2} + \ldots + \frac{N_n}{z+t_n} \ ,$$

όπου τα N_0, N_1, N_2, $\ldots$, N_n είναι επίσης θετικοί αριθμοί, θα ισχύει ότι

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} N_i t_i^k \ , \tag{2.4}$$

όπου το k παίρνει τις τιμές 0, 1, 2, $\ldots$, $2n$ και είναι $t_0 = 0$.

Παρατήρηση 2.1 *Είδαμε ότι τα M_i, N_i, x_i και t_i εξαρτώνται από το βαθμό των πολυωνύμων. Άρα, αν θέλουμε να ακριβολογούμε, ισχύει*

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} (x_i^{(n)})^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$$

και

$$c_k = \sum_{i=0}^{n} N_i^{(n)} (t_i^{(n)})^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n \ .$$

2.3 Μελέτη του ορίου $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

Θεωρούμε για κάθε $p \geq 0$ την τετραγωνική μορφή

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} c_{p+l+k} X_l X_k \ .$$

Αν πάρουμε τον αριθμό n έτσι ώστε $p + 2m - 2 \leq 2n - 1$, τότε από την ταυτότητα του διωνύμου του Νεύτωνα και την (2.3) έχουμε ότι η παραπάνω τετραγωνική μορφή ισούται με

$$\sum_{i=1}^{n} M_i x_i^p (X_0 + X_1 x_i + X_2 x_i^2 + \ldots + X_{m-1} x_i^{m-1})^2 ,$$

δηλαδή είναι μη αρνητικά ορισμένη.

Είναι εύκολο να δούμε ότι η τετραγωνική μορφή είναι θετικά ορισμένη. Πράγματι, αν υπήρχαν $X_0, X_1, \ldots, X_{m-1}$, όχι όλα μηδέν, ώστε η τετραγωνική μορφή να παίρνει την τιμή μηδέν, τότε το πολυώνυμο $X_0 + X_1 u + \ldots + X_{m-1} u^{m-1}$ θα είχε τις n διαφορετικές ρίζες $x_1, \ldots, x_n$. Άρα, θα είχαμε $n \leq m-1$ και επομένως, $2n \leq p+2n \leq p+2m-2 \leq 2n-1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & \cdots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{p+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p+m-1} & c_{p+m} & \cdots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

είναι θετική. Για $m = 2$ παίρνουμε ότι η 2×2 ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} \end{vmatrix}$$

είναι θετική, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι η ακολουθία $\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- Να είναι $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty$ και άρα η σειρά $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots$ να αποκλίνει για κάθε z.
- Να είναι $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda$, όπου λ θετικός πραγματικός αριθμός, οπότε η παραπάνω σειρά θα συγκλίνει απόλυτα για όλα τα z με $|z| > \lambda$ και θα αποκλίνει για όλα τα z με $|z| < \lambda$.

Γνωρίζουμε όμως ότι και η μεγαλύτερη ρίζα του πολυωνύμου $Q_n(-z)$ αυξάνεται καθώς το n μεγαλώνει. Θα δείξουμε ότι:

Θεώρημα 2.2 *Το όριο της ακολουθίας που σχηματίζεται από τις μεγαλύτερες ρίζες των πολυωνύμων $Q_n(-z)$ ταυτίζεται με το $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$.*

Απόδειξη: Από την §1.3 έχουμε ότι η ακολουθία των μεγαλύτερων ριζών των $Q_m(-z)$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα θα έχει όριο, το οποίο θα είναι κάποιος θετικός αριθμός ή το $+\infty$.

Επίσης, ισχύει ότι

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{i=1}^{n'} \frac{m_i}{z + s_i} , \tag{2.5}$$

όπου $n' = \frac{n}{2}$, αν n άρτιος και $n' = \frac{n+1}{2}$, αν n είναι περιττός. Ακόμη, τα m_i είναι όλα θετικά και για τις ρίζες s_i του $Q_n(-z)$ ισχύει

$$0 \leq s_1 < s_2 < \ldots < s_{n'} \ .$$

Επειδή $s_{n'}$ είναι η μεγαλύτερη ρίζα, έχουμε ότι

$$\frac{c_{n-1}}{c_{n-2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n'} m_i s_i^{n-1}}{\sum_{i=1}^{n'} m_i s_i^{n-2}} < s_{n'} \ .$$

Λόγω των παραπάνω, εάν $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty$, τότε $\lim s_{n'} = +\infty$. Αν το $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lambda$ είναι πραγματικός αριθμός, το όριο $\lim s_{n'}$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από λ. Εάν υποθέσουμε ότι ξεπερνά το λ, τότε υπάρχει n' και ε θετικό τέτοια ώστε $s_{n'} = \lambda + \varepsilon$. Θεωρούμε $n \geq 2n'$ και τις δυο σειρές:

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \frac{c_3}{z^4} + \ldots$$

και

$$\frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = \frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{c_{n-1}}{z^n} + (-1)^n \frac{a_n^{(n)}}{z^{n+1}} + (-1)^{n+1}\frac{a_{n+1}^{(n)}}{z^{n+2}} + \ldots \ .$$

Η πρώτη συγκλίνει απόλυτα για $|z| > \lambda$, ενώ η δεύτερη αποκλίνει για $|z| < s_{n'} = \lambda + \varepsilon$. Άρα, όταν $\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon$, τότε η δεύτερη σειρά αποκλίνει, ενώ η πρώτη συγκλίνει απόλυτα. Όμως, λόγω του θεωρήματος 2.1, είναι $a_n^{(n)} < c_n$, $a_{n+1}^{(n+1)} < c_{n+1}$, $\ldots$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει απόλυτα όταν $\lambda < |z| < \lambda + \varepsilon$ (λόγω κριτηρίου σύγκρισης). Άτοπο. Οπότε, $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim s_{n'} = \lambda$.

2.4 Ένα ακόμη κριτήριο σύγκλισης της σειράς $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$

Έστω ότι έχουμε ένα συνεχές κλάσμα Stieltjes και θέλουμε να μελετήσουμε την αντίστοιχη σειρά που προκύπτει από αυτό, την $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$, ως προς τη σύγκλιση. Το μόνο που μπορούμε να κάνουμε, με βάση αυτά που έχουμε ως τώρα αποδείξει, είναι να υπολογίσουμε τα c_n με τη βοήθεια του αλγόριθμου που αναφέραμε στην υποσημείωση της §2.1. Όμως, κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά επίπονο και μόνο αν είμαστε πολύ τυχεροί θα καταφέρουμε να μαντέψουμε τον τύπο των c_n για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης της παραπάνω σειράς. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, που μας βοηθά να αποφύγουμε όλη την ταλαιπωρία που αναφέραμε προηγουμένως. Δυστυχώς, όμως, στην περίπτωση της σύγκλισης της αντίστοιχης δυναμοσειράς, δε μας δίνει αρκετές πληροφορίες για την ακτίνα σύγκλισης.

Θεώρημα 2.3 *Εάν $\sup b_n = +\infty$, τότε είναι και $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty$, οπότε η σειρά*

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$$

αποκλίνει για κάθε μιγαδικό αριθμό. Αν $\sup b_n = l$, τότε και το όριο $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$ είναι πεπερασμένο και μάλιστα, η ακτίνα σύγκλισης της σειράς δεν μπορεί να ξεπεράσει το $4l$.

Απόδειξη: Εάν η ακολουθία (b_n) δεν είναι άνω φραγμένη, τότε για κάθε θετικό αριθμό M οσοδήποτε μεγάλο μπορούμε να βρούμε φυσικό m τέτοιο ώστε

$$b_m = \frac{1}{\alpha_m \alpha_{m+1}} > M \ .$$

Τότε, θα υπάρχει ένας φυσικός n, τέτοιος ώστε $m = 2n$ ή $m = 2n+1$, αν m άρτιος ή περιττός αντίστοιχα. Θεωρούμε στη συνέχεια τα πολυώνυμα $Q_{2n}(-z)$ και $Q_{2n+2}(-z)$ και διατάσσουμε τις ρίζες τους από τη μικρότερη στη μεγαλύτερη: έστω $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ οι ρίζες του $Q_{2n}(-z)$ και $x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}, \ldots, x_{n+1}^{(n+1)}$ οι ρίζες του $Q_{2n+2}(-z)$. Τότε, από τους τύπους του Vieta και τις σχέσεις μεταξύ των συντελεστών των πολυωνύμων που έχουμε δείξει στην §1.2, προκύπτουν τα εξής:

$$\begin{aligned} x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + \ldots + x_n^{(n)} &= \frac{B_{n-1}}{B_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} + \ldots + \frac{1}{\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}} \\ &= b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n-1} \end{aligned}$$

και ομοίως

$$x_1^{(n+1)} + x_2^{(n+1)} + \ldots + x_{n+1}^{(n+1)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2n+1} \ .$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$x_{n+1}^{(n+1)} - (x_n^{(n)} - x_n^{(n+1)}) - (x_{n-1}^{(n)} - x_{n-1}^{(n+1)}) - \ldots - (x_1^{(n)} - x_1^{(n+1)}) = b_{2n} + b_{2n+1} \ .$$

Επειδή οι διαφορές $x_i^{(n)} - x_i^{(n+1)}$ είναι θετικές, είναι φανερό ότι $x_{n+1}^{(n+1)} > b_{2n} + b_{2n+1} > M$. Άρα, η ακολουθία των μεγαλύτερων ριζών των πολυωνύμων $Q_m(-z)$ δεν είναι άνω φραγμένη. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό στην απόδειξη του θεωρήματος 2.2 βρίσκουμε ότι $\lim s_{n'} = \lim \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty$.

Μένει να δείξουμε ότι αν $\sup b_n = l$, τότε και το όριο $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$ είναι πεπερασμένο. Πράγματι, μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό C τέτοιο ώστε $Cl > b_0$. Θεωρούμε τώρα το συνεχές κλάσμα

$$\cfrac{Cl}{z + \cfrac{l}{1 + \ddots + \cfrac{l}{1 + \cfrac{l}{z + \ddots}}}} \ .$$

Φυσικά, υπάρχει μια σειρά της μορφής $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$ που αντιστοιχεί σ' αυτό. Οι συντελεστές c_n του τελευταίου συνεχούς κλάσματος είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές του πρώτου κι αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Οι συντελεστές b_i του δεύτερου συνεχούς κλάσματος επιλέχθησαν έτσι ώστε να είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους συντελεστές του πρώτου συνεχούς κλάσματος. Επομένως, οι συντελεστές α_i του δεύτερου συνεχούς κλάσματος θα είναι μικρότεροι από αυτούς του πρώτου. Επειδή η μερική παράγωγος $\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$, όπου x_k είναι ρίζα του $Q_m(z)$, είναι μη αρνητική, καθώς τα α_i μειώνονται, οι ρίζες x_k του $Q_m(-z)$ θα αυξάνονται. Τότε, θα αυξάνονται και οι ποσότητες ε_i^j που ορίστηκαν στο θεώρημα 2.1, άρα και τα c_n.

Το δεύτερο συνεχές κλάσμα είναι περιοδικό, οπότε αν συμβολίσουμε με A την τιμή του για τον τυχαίο μιγαδικό z, τότε θα ισχύει ότι

$$A = \frac{Cl}{z + \frac{l}{1+\frac{A}{C}}}$$

ή

$$A = \frac{C}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4l}{z}} - 1\right\} .$$

Δηλαδή, το συνεχές κλάσμα που ορίσαμε προηγουμένως παίρνει τις ίδιες τιμές με τη συνάρτηση

$$A = \frac{C}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4l}{z}} - 1\right\} ,$$

της οποίας η δυναμοσειρά με κέντρο το ∞ συγκλίνει για $|z| > 4l$. Άρα, η αντίστοιχη σειρά του πρώτου συνεχούς κλάσματος θα συγκλίνει επίσης για $|z| > 4l$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι το όριο $\lim \frac{c_{n+1}}{c_n}$ δεν μπορεί να ξεπεράσει το $4l$.

2.5 Τα α_n, $P_n(z)$ και $Q_n(z)$ ως συναρτήσεις των c_i.

Η σειρά $\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots$ και το αντίστοιχο ανάπτυγμα του $\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$ διαφέρουν μόνο ως προς τους όρους $\frac{1}{z^{n+1}}, \frac{1}{z^{n+2}}, \ldots$. Επομένως, το ανάπτυγμα του $Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right)$ θα διαφέρει από αυτό του $P_n(z)$ μόνο ως προς τους όρους $\frac{1}{z^{n-n'+1}}, \frac{1}{z^{n-n'+2}}, \ldots$, όπου n' είναι ο βαθμός του $Q_n(z)$. Έτσι, στο γινόμενο $Q_n(z)\left(\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots\right)$ δεν υπάρχει κανένας όρος της μορφής $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$, $\ldots$, $\frac{1}{z^{n-n'}}$. Για λόγους ευκολίας, υποθέτουμε ότι το n είναι άρτιος αριθμός και θέτουμε

$$Q_{2n}(-z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n .$$

Τότε, με βάση τα παραπάνω, στο γινόμενο $Q_{2n}(-z)\left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots\right)$ δεν υπάρχουν όροι της μορφής $\frac{1}{z}, \ldots, \frac{1}{z^n}$, οπότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned}
a_0c_0 + a_1c_1 + \ldots + a_nc_n &= 0 \\
a_0c_1 + a_1c_2 + \ldots + a_nc_{n+1} &= 0 \\
&\cdots\cdots \\
a_0c_{n-1} + a_1c_n + \ldots + a_nc_{2n-1} &= 0 .
\end{aligned}$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $Q_{2n}(0) = 1$, τότε η τελευταία σχέση μαζί με τις προηγούμενες ισότητες αποτελούν ένα σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τους $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Η ορίζουσα του παραπάνω συστήματος είναι ίση με

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}$$

και η ορίζουσα που αντιστοιχεί στον άγνωστο a_i, για $1 \leq i \leq n$, ισούται με

$$\begin{aligned} D_{a_i} &= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ c_0 & \dots & c_{i-1} & 0 & c_{i+1} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & c_{n+i-2} & 0 & c_{n+i} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{i-1} & c_{i+1} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & c_{n+i-2} & c_{n+i} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} . \end{aligned}$$

Άρα είναι

$$a_i = (-1)^{i+1} \frac{\begin{vmatrix} c_0 & \dots & c_{i-1} & c_{i+1} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & \dots & c_{n+i-2} & c_{n+i} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ c_2 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix}}$$

και τελικά

$$Q_{2n}(-z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots & z^n \\ c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} . \tag{2.6}$$

Για να απλοποιήσουμε τους τύπους με τους οποίους θα δουλέψουμε παρακάτω, ορίζουμε τον αριθμό $S\{p(u)\}$ ενός πολυωνύμου $p(u)$ ως εξής:

Ορισμός 2.1 *Έστω το πολυώνυμο $p(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n$. Τότε ορίζουμε $S\{p(u)\}$ να είναι η τιμή που παίρνουμε όταν αντικαταστήσουμε στην παράσταση*

$$a_0 + a_1u + a_2u^2 + \ldots + a_nu^n$$

τις δυνάμεις $u^0, u^1, \ldots, u^n$ με τα $c_0, c_1, \ldots, c_n$ αντίστοιχα. Δηλαδή,

$$S\{p(u)\} = a_0c_0 + a_1c_1 + \ldots + a_nc_n .$$

Όπως είπαμε και προηγουμένως, ο αριθμός που ορίσαμε μας επιτρέπει να γράφουμε διάφορες σχέσεις πολύ πιο σύντομα. Για παράδειγμα, οι ισότητες

$$a_0c_k + a_1c_{k+1} + \ldots + a_nc_{k+n} = 0 \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ .$$

γράφονται

$$S\{u^kQ_{2n}(-u)\} = 0 \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ .$$

Στην περίπτωση που το n είναι περιττός, γράφουμε

$$Q_{2n+1}(-z) = \beta_1z + \beta_2z^2 + \ldots + \beta_{n+1}z^{n+1} \ ,$$

οπότε προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως και προηγουμένως ότι

$$S\{u^kQ_{2n+1}(-u)\} = 0 \ , \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \ . \tag{2.7}$$

Επίσης, επειδή ο σταθερός όρος του $Q_{2n+1}(-z)\left(\frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \ldots\right)$ ισούται με το σταθερό όρο του $-P_{2n+1}(-z)$, δηλαδή είναι -1, θα έχουμε ότι

$$S\left\{\frac{Q_{2n+1}(-u)}{u}\right\} = -1 \ . \tag{2.8}$$

Το σύστημα εξισώσεων της (2.7) και η (2.8) αποτελούν ένα σύστημα $n+1$ εξισώσεων με $n+1$ αγνώστους, τους $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$. Η ορίζουσα του συστήματος είναι

$$D = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} \ ,$$

ενώ η ορίζουσα που αντιστοιχεί σε κάθε άγνωστο β_i ισούται με

$$\begin{aligned} D_{\beta_i} &= \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{i-2} & -1 & c_i & \cdots & c_n \\ c_1 & \cdots & c_{i-1} & 0 & c_{i+1} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n+i-2} & 0 & c_{n+i} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^i \begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_{i-1} & c_{i+1} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n+i-2} & c_{n+i} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix} \ . \end{aligned}$$

Άρα

$$\beta_i = (-1)^i \frac{\begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_{i-1} & c_{i+1} & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & \cdots & c_{n+i-2} & c_{n+i} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_n & c_{n+1} & \cdots & c_{2n} \end{vmatrix}}$$

και επομένως είναι

$$Q_{2n+1}(-z) = -\begin{vmatrix} z & z^2 & \ldots & z^{n+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} . \tag{2.9}$$

Θέτουμε

$$U_n = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-2} \end{vmatrix}, \quad W_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix}, \quad U_0 = W_0 = 1 \ .$$

Από την (1.25) έχουμε ότι ο συντελεστής του z^n στο $Q_{2n}(z)$ ισούται με $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n}$. Από την (2.6) έχουμε ότι ο ίδιος συντελεστής ισούται με $\frac{U_n}{W_n}$. Όμοια, από τις (1.33) και (2.9) έχουμε ότι $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{2n+1} = \frac{W_n}{U_{n+1}}$, άρα

$$\begin{aligned} \alpha_{2n} &= \frac{U_n^2}{W_n W_{n-1}} \ , \\ \alpha_{2n+1} &= \frac{W_n^2}{U_n U_{n+1}} \end{aligned} \tag{2.10}$$

και αυτοί είναι οι τύποι που δίνουν τους συντελεστές α_n του συνεχούς κλάσματος που μελετάμε συναρτήσει των συντελεστών c_i της δυναμοσειράς του.

Τέλος, από τη σχέση (1.31) έχουμε ότι ο συντελεστής του z στο $Q_{2n+1}(z)$ είναι $\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}$. Από τη σχέση (2.9) προκύπτει ότι το παραπάνω άθροισμα ισούται τελικά με

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1} = \frac{V_n}{U_{n+1}} \ , \tag{2.11}$$

$$\text{όπου} \qquad V_n = \begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ c_3 & c_4 & \ldots & c_{n+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & c_{n+2} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix}, \qquad V_0 = 1 \ .$$

Παρατήρηση 2.2 *Από τα παραπάνω προκύπτει ότι, αν $p_1(u)$, $p_2(u)$ είναι δύο πολυώνυμα βαθμού n και ισχύει ότι*

$$S\{u^k p_1(u)\} = S\{u^k p_2(u)\} = 0 \ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \ ,$$

τότε, επειδή το αντίστοιχο γραμμικό σύστημα με αγνώστους τους συντελεστές του κάθε πολυωνύμου έχει μονοδιάστατο χώρο λύσεων, θα ισχύει ότι

$$p_1(u) = \frac{p_1(u_0)}{p_2(u_0)} p_2(u) \ ,$$

όπου u_0 είναι οποιοσδήποτε αριθμός που δε μηδενίζει το πολυώνυμο $p_2(u)$.

Μέχρι τώρα καταφέραμε όχι μόνο να εκφράσουμε τα α_n συναρτήσει των c_i, αλλά να κάνουμε το ίδιο και για τα $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$ και την παράσταση $\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n+1}$. Μένει να κάνουμε το ίδιο για τα $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$ και $\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}$.

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε το γινόμενο

$$p(z)\left(\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}+\ldots\right) \ ,$$

όπου $p(z)$ είναι ένα πολυώνυμο, τότε το ακέραιο μέρος της σειράς (δηλαδή το μέρος της σειράς που περιέχει τις μη αρνητικές δυνάμεις του z) με την οποία ισούται το παραπάνω γινόμενο είναι ίσο με $S\left\{\frac{p(z)-p(u)}{z-u}\right\}$. Αυτή την τελευταία παρατήρηση αρκεί να την αποδείξουμε μόνο για την περίπτωση που $p(z)=z^k$ (όπου k φυσικός), λόγω της γραμμικότητας του τελεστή S. Πράγματι, είναι:

$$z^k\left(\frac{c_0}{z}+\frac{c_1}{z^2}+\frac{c_2}{z^3}+\ldots\right)=c_0z^{k-1}+c_1z^{k-2}+\ldots+c_{k-1}+\frac{c_k}{z}+\ldots$$

και

$$\frac{z^k-u^k}{z-u}=z^{k-1}+z^{k-2}u+\ldots+zu^{k-2}+u^{k-1} \ .$$

Άρα, το $S\left\{\frac{z^k-u^k}{z-u}\right\}$ ισούται με το ακέραιο μέρος του παραπάνω γινομένου. Επομένως, έχουμε ότι

$$P_n(-z)=-S\left\{\frac{Q_n(-z)-Q_n(-u)}{z-u}\right\} \ .$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.6) και (2.9) και κάνοντας πράξεις μεταξύ των οριζουσών, υπολογίζουμε τις παραστάσεις $S\left\{\frac{Q_{2n}(-z)-Q_{2n}(-u)}{z-u}\right\}$ και $S\left\{\frac{Q_{2n+1}(-z)-Q_{2n+1}(-u)}{z-u}\right\}$, οπότε τελικά καταλήγουμε στις ισότητες

$$P_{2n}(-z) = -\begin{vmatrix} 0 & R_0 & R_1 & \ldots & R_{n-1} \\ c_0 & c_1 & c_2 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : W_n \ , \qquad (2.12)$$

$$P_{2n+1}(-z) = -\begin{vmatrix} R_0 & R_1 & \ldots & R_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} : U_{n+1} \ , \qquad (2.13)$$

όπου

$$\begin{aligned} R_0 &= c_0 \\ R_1 &= c_0z+c_1 \\ R_2 &= c_0z^2+c_1z+c_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdots\cdots\cdots \\
R_k \quad & = c_0 z^k + c_1 z^{k-1} + \ldots + c_k \\
& \cdots\cdots\cdots\ .
\end{aligned}
$$

Από την (1.19) παίρνουμε ότι $P_{2n}(0) = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n}$ και λόγω της (2.12) είναι

$$
\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} = - \begin{vmatrix} 0 & c_0 & \ldots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : W_n\ . \tag{2.14}
$$

2.6 Μερικές ιδιότητες του S σχετικές με τα $P_n(u)$, $Q_n(u)$.

Λήμμα 2.1 *Εάν $V_k(u)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού k, τότε η τιμή του $S\{V_k(u)\}$ ισούται με το ολοκληρωτικό υπόλοιπο στο ∞ της συνάρτησης $V_k(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)}$, όπου $m \geq k+1$.*

Απόδειξη: Λόγω γραμμικότητας του τελεστή S, αρκεί να αποδείξουμε το λήμμα για το πολυώνυμο $V_k(u) = u^k$. Θεωρούμε λοιπόν m τέτοιο ώστε $m \geq k+1$. Τότε:

$$
\begin{aligned}
\frac{P_m(u)}{Q_m(u)} &= \frac{c_0}{u} - \frac{c_1}{u^2} + \frac{c_2}{u^3} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{c_{m-1}}{u^m} + (-1)^m \frac{a_m^{(m)}}{u^{m+1}} + \ldots \\
V_k(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)} &= (-1)^k c_0 u^{k-1} + (-1)^{k-1} c_1 u^{k-2} + (-1)^{k-2} c_2 u^{k-3} + \ldots - c_{k-1} \\
& \quad + c_k \frac{1}{u} + \ldots\ .
\end{aligned}
$$

Άρα, $S\{V_k(u)\} = Res_\infty \left(V_k(-u)\frac{P_m(u)}{Q_m(u)} \right)$.

Επίσης, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις που θα χρησιμοποιηθούν στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας του Stieltjes.

Λήμμα 2.2

1. $S\left\{Q_{2n}^2(-u)\right\} = \frac{1}{\alpha_{2n+1}}$.
2. $S\left\{uQ_{2n}^2(-u)\right\} = \frac{1}{\alpha_{2n+1}}\left(\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}} + \frac{1}{\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}}\right)$.
3. $S\left\{\frac{1}{u}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = \frac{1}{\alpha_{2n+2}}$.
4. $S\left\{\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} = \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}$.
5. $S\left\{\frac{(Q_{2n}(-u)-1)^2}{u}\right\} = -S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\} = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n}$.

Απόδειξη του λήμματος: Σχετικά με την ισότητα 1 ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} S\left\{Q_{2n}^2(-u)\right\} &= Res_\infty\left(Q_{2n}^2(u)\frac{P_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right) = Res_\infty\left(Q_{2n}(u)\frac{1+P_{2n}(u)Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right) \\ &= Res_\infty\left(\frac{Q_{2n}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right) = \frac{1}{\alpha_{2n+1}} \ . \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της σχέσης (1.34).

Για την ισότητα 2: Από την (1.8) για $\alpha = 1$, $\beta = 2k+1$ και $\gamma = 2$ παίρνουμε

$$Q_{2k+2}(z)P_{2k}(z) - P_{2k+2}(z)Q_{2k}(z) = -\alpha_{2k+2} \ . \tag{2.15}$$

Τη σχέση αυτή θα τη χρησιμοποιήσουμε στην τρίτη από τις ισότητες που ακολουθούν.

$$\begin{aligned} S\left\{uQ_{2n}^2(-u)\right\} &= Res_\infty\left(-uQ_{2n}^2(u)\frac{P_{2n+2}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right) \\ &= -Res_\infty\left(uQ_{2n}(u)\frac{P_{2n+2}(u)Q_{2n}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right) \\ &= -Res_\infty\left(uQ_{2n}(u)\frac{Q_{2n+2}(u)P_{2n}(u)+\alpha_{2n+2}}{Q_{2n+2}(u)}\right) \\ &= -\alpha_{2n+2}Res_\infty\left(\frac{uQ_{2n}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right) \ . \end{aligned}$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{uQ_{2n}(u)}{Q_{2n+2}(u)} &= \frac{e_0u+e_1u^2+\ldots+e_nu^{n+1}}{E_0+E_1u+\ldots+E_{n+1}u^{n+1}} = \frac{e_0\frac{1}{u^n}+e_1\frac{1}{u^{n-1}}+\ldots+e_n}{E_0\frac{1}{u^{n+1}}+E_1\frac{1}{u^n}+\ldots+E_{n+1}} \\ &= \frac{e_n}{E_{n+1}}\frac{\frac{e_0}{e_n}\frac{1}{u^n}+\ldots+\frac{e_{n-1}}{e_n}\frac{1}{u}+1}{\frac{E_0}{E_{n+1}}\frac{1}{u^{n+1}}+\ldots+\frac{E_n}{E_{n+1}}\frac{1}{u}+1} \\ &= \frac{e_n}{E_{n+1}}\left(\frac{e_0}{e_n}\frac{1}{u^n}+\ldots+\frac{e_{n-1}}{e_n}\frac{1}{u}+1\right)\left(1-\frac{E_n}{E_{n+1}}\frac{1}{u}-\ldots\right) \end{aligned}$$

για αρκετά μεγάλα n. Οπότε, είναι

$$Res_\infty\left(\frac{uQ_{2n}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right) = \frac{e_n}{E_{n+1}}\left(\frac{e_{n-1}}{e_n}-\frac{E_n}{E_{n+1}}\right)$$

και, αν λάβουμε υπόψη τους τύπους (1.24) και (1.25), καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} S\left\{uQ_{2n}^2(-u)\right\} &= -\alpha_{2n+2}Res_\infty\left(\frac{uQ_{2n}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right) \\ &= \frac{-\alpha_{2n+2}}{\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}}\left(-\frac{1}{\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}}-\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\alpha_{2n+1}}\left(\frac{1}{\alpha_{2n}\alpha_{2n+1}}+\frac{1}{\alpha_{2n+1}\alpha_{2n+2}}\right) \ . \end{aligned}$$

Για την 3 είναι:

$$
\begin{aligned}
S\left\{\frac{1}{u}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} &= Res_\infty\left(\frac{-1}{u}Q_{2n+1}^2(u)\frac{P_{2n+2}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right)\\
&= -Res_\infty\left(\frac{1}{u}Q_{2n+1}(u)\frac{Q_{2n+2}(u)P_{2n+1}(u)-1}{Q_{2n+2}(u)}\right)\\
&= Res_\infty\left(\frac{1}{u}\frac{Q_{2n+1}(u)}{Q_{2n+2}(u)}\right)=\frac{1}{\alpha_{2n+2}}\ .
\end{aligned}
$$

Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την (1.34), αν κάνουμε κατάλληλη αλλαγή δεικτών. Όσον αφορά την τελευταία ισότητα, ισχύει ότι $deg\,(Q_{2n+1}(u)) = deg\,(uQ_{2n+2}(u)) - 1$, άρα το ολοκληρωτικό υπόλοιπο που ζητάμε ισούται με το πηλίκο των συντελεστών των μεγιστοβάθμιων όρων των δύο πολυωνύμων. Λαμβάνοντας υπόψη τους τύπους (1.25) και (1.33) παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την 4:

$$
\begin{aligned}
S\left\{\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}^2(-u)\right\} &= Res_\infty\left(\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}^2(u)\frac{P_{2n+1}(u)}{Q_{2n+1}(u)}\right)\\
&= Res_\infty\left(\frac{1}{u^2}Q_{2n+1}(u)P_{2n+1}(u)\right)\\
&= \alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n+1}\ .
\end{aligned}
$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει εύκολα, αν λάβουμε υπόψη την (1.31).

Τέλος, για την 5 έχουμε:

$$
\begin{aligned}
S\left\{\frac{(Q_{2n}(-u)-1)^2}{u}\right\}+S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\} &= S\left\{\frac{Q_{2n}^2(-u)-Q_{2n}(-u)}{u}\right\}\\
&= -Res_\infty\left(\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\frac{P_{2n}(u)}{Q_{2n}(u)}\right)\\
&= -Res_\infty\left(\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}P_{2n}(u)\right)=0\ .
\end{aligned}
$$

Οπότε,

$$
\begin{aligned}
S\left\{\frac{(Q_{2n}(-u)-1)^2}{u}\right\} &= -S\left\{\frac{Q_{2n}(-u)-1}{u}\right\}\\
&= Res_\infty\left(\frac{Q_{2n}(u)-1}{u}\frac{P_{2n}(u)}{Q_{2n}(u)}\right)\\
&= Res_\infty\left(\frac{P_{2n}(u)}{u}\right)-Res_\infty\left(\frac{P_{2n}(u)}{uQ_{2n}(u)}\right)\\
&= (\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n})+0=\alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}\ .
\end{aligned}
$$

Είναι $Res_\infty\left(\frac{P_{2n}(u)}{uQ_{2n}(u)}\right)=0$, διότι $deg(P_{2n}(u) = deg(uQ_{2n}(u)) - 2$. Επίσης, η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της (1.19).

Τελειώνουμε την παράγραφο με την παρακάτω παρατήρηση:

Παρατήρηση 2.3 *Εάν* $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n}$ *και αν* $V_k(u)$ *είναι πολυώνυμο βαθμού* $k \leq 2n-1$, *τότε ισχύει*

$$S\{V_k(u)\} = \sum_{i=1}^{n} M_i V_k(x_i) \ .$$

Πράγματι, έστω ότι $V_k(u) = a_0 + a_1 u + \ldots + a_k u^k$. *Τότε έχουμε ότι*

$$\frac{M_i}{u+x_i} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m M_i x_i^m}{u^{m+1}} \ ,$$

οπότε

$$Res_{\infty}\left(V_k(-u)\frac{M_i}{u+x_i}\right) = a_0 M_i + a_1 x_i M_i + \ldots + a_k x_i^k M_i = M_i V_k(x_i) \ .$$

Επομένως, λόγω γραμμικότητας του ολοκληρωτικού υπολοίπου θα ισχύει και η ζητούμενη σχέση. Από αυτήν παρατηρούμε ότι, αν το $V_k(u)$ *είναι ένα πολυώνυμο που παίρνει μη αρνητικές τιμές για τα θετικά* u, *τότε και η ποσότητα* $S\{V_k(u)\}$ *δε γίνεται ποτέ αρνητική.*

Κεφάλαιο 3

Μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes ως προς τη σύγκλιση στην περίπτωση που $Re(z) > 0$.

Όπως αναφέρθηκε και στο εισαγωγικό σημείωμα, ένα από τα ερωτήματα που απασχολούσαν τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα, όταν μελετούσαν ένα συνεχές κλάσμα, ήταν το αν αυτό συγκλίνει ή όχι. Στο κεφάλαιο αυτό, ο Stieltjes βρίσκει μία ικανή και αναγκαία συνθήκη που απαντά στο ερώτημα αυτό όταν περιορίσουμε το μιγαδικό z του συνεχούς κλάσματος που μελετάμε στο δεξιό ημιεπίπεδο. Για να φθάσει στο αποτέλεσμα αυτό, μελετά πρώτα το συνεχές κλάσμα που προκύπτει για $z = 1$, στη συνέχεια περνά στην περίπτωση που το z είναι θετικός αριθμός και τέλος, χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα, γενικεύει τη συνθήκη για κάθε μιγαδικό z με $Re(z) > 0$. Το ερώτημα τι ακριβώς συμβαίνει όταν το z δεν ανήκει στο δεξιό ημιεπίπεδο μελετάται στο πέμπτο καφάλαιο.

3.1 Μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes στην περίπτωση που $z = 1$.

Για λόγους συντομίας θέτουμε $P_n = P_n(1)$ και $Q_n = Q_n(1)$.

Λήμμα 3.1 *Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει ακριβώς τότε όταν το συνεχές κλάσμα Stieltjes συγκλίνει για $z = 1$.*

Απόδειξη: Από τις σχέσεις

$$P_n = \alpha_n P_{n-1} + P_{n-2} \tag{3.1}$$

$$Q_n = \alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \tag{3.2}$$

προκύπτει ότι οι ακολουθίες (P_{2n}), (P_{2n+1}), (Q_{2n}), (Q_{2n+1}) είναι αύξουσες. Επίσης, από τη σχέση

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{1}{Q_0Q_1} - \frac{1}{Q_1Q_2} + \frac{1}{Q_2Q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{Q_{n-1}Q_n} \tag{3.3}$$

παίρνουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}\right)$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, η $\left(\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}\right)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και κάθε όρος της πρώτης είναι μεγαλύτερος από κάθε όρο της δεύτερης. Άρα και οι δυο ακολουθίες έχουν όριο και έστω ότι

$$\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1, \quad \lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L \ .$$

Τότε είναι $L_1 \geq L$. Μάλιστα, εάν η ακολουθία $(Q_{n-1}Q_n)$, η οποία έχει πάντα όριο γιατί είναι αύξουσα, τείνει στο άπειρο, τότε έχουμε $L_1 = L$, ενώ αν έχει όριο πεπερασμένο αριθμό $\lambda > 0$, τότε είναι $L_1 = L + \frac{1}{\lambda}$. Από τη σχέση (3.2) φαίνεται εύκολα ότι $Q_{2n} > 1$ επομένως,

$$Q_{2n+1} = \alpha_{2n+1}Q_{2n} + Q_{2n-1} > Q_{2n-1} + \alpha_{2n+1} \ ,$$

από την οποία προκύπτει ότι

$$Q_{2n+1} > \alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1} \ . \tag{3.4}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$Q_{2n} = \alpha_{2n}Q_{2n-1} + Q_{2n-2} > Q_{2n-2} + \alpha_1\alpha_{2n} \ ,$$

οπότε

$$Q_{2n} > \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n}) \ . \tag{3.5}$$

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ είναι αποκλίνουσα, τότε μία τουλάχιστον από τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ θα αποκλίνει επίσης, άρα από τις (3.4) και (3.5) έχουμε ότι η (Q_{2n}) ή η (Q_{2n+1}) θα απειρίζεται, οπότε $L_1 = L$ και το συνεχές κλάσμα συγκλίνει.

Στην περίπτωση που η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, έχουμε ότι

$$Q_n = \alpha_n Q_{n-1} + Q_{n-2} \ ,$$

άρα

$$Q_{n-1} + Q_n = (1 + \alpha_n)Q_{n-1} + Q_{n-2} < (1 + \alpha_n)(Q_{n-2} + Q_{n-1})$$

και τελικά

$$Q_{n-1} + Q_n < (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)\cdots(1 + \alpha_n) \ . \tag{3.6}$$

Όμως, όταν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, ισχύει ότι

$$\prod_{n=1}^{+\infty}(1 + \alpha_n) \leq \prod_{n=1}^{+\infty} e^{\alpha_n} = e^{\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n} < +\infty$$

οπότε λόγω της παραπάνω ισότητας, η $(Q_{n-1} + Q_n)$ και επομένως και η (Q_n) είναι άνω φραγμένες. Αυτό σημαίνει ότι οι (Q_{2n}) και (Q_{2n+1}) συγκλίνουν σε πραγματικούς αριθμούς, άρα $L_1 > L$. Σ' αυτήν την περίπτωση το συνεχές κλάσμα θ' αποκλίνει.

Παρατήρηση 3.1 *Αν θέσουμε* $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$, *τότε από την (3.6) έχουμε ότι*

$$Q_{n-1} + Q_n < e^s$$

και

$$Q_{n-1}Q_n < \frac{1}{4}(Q_{n-1}+Q_n)^2 < \frac{1}{4}e^{2s} \ ,$$

οπότε είναι

$$L_1 - L \geq 4e^{-2s} \ .$$

Έτσι παίρνουμε μία εκτίμηση της διαφοράς των ορίων των ακολουθιών $(\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}})$ *και* $(\frac{P_{2n}}{Q_{2n}})$ *στην περίπτωση που το συνεχές κλάσμα Stieltjes αποκλίνει για* $z = 1$.

Παρατήρηση 3.2 *Υποθέτουμε, όπως και προηγουμένως, ότι το συνεχές κλάσμα Stieltjes αποκλίνει για* $z = 1$. *Τότε, τα όρια των* (Q_{2n}) *και* (Q_{2n+1}) *είναι πραγματικοί αριθμοί. Επειδή* $\lim \frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}} = L_1$, $\lim \frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = L$, *οι αριθμητικές ακολουθίες* (P_{2n}), (P_{2n+1}) *θα έχουν επίσης πεπερασμένα όρια.*

3.2 Μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes όταν x είναι θετικός αριθμός.

Δουλεύοντας με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και στην §3.1 (αρκεί να αντικαταστήσουμε σε όλες τις σχέσεις της προηγούμενης παραγράφου το α_{2n-1} με το $\alpha_{2n-1}x$, που είναι επίσης θετικός αριθμός) και παρατηρώντας ότι οι σειρές

$$\alpha_1 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \dots$$

και

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots$$

αποκλίνουν ταυτόχρονα, καταλήγουμε στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 3.2 *Η σειρά*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots$$

αποκλίνει αν και μόνον αν η σειρά

$$\alpha_1 x + \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 + \dots$$

αποκλίνει και αυτό συμβαίνει ακριβώς τότε όταν το συνεχές κλάσμα

$$\cfrac{1}{\alpha_1 x + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{2k-1}x + \cfrac{1}{\alpha_{2k} + \ddots}}}}$$

συγκλίνει. Συγκεκριμένα, αν είναι $F_1(x)$ και $F(x)$ τα πεπερασμένα όρια των ακολουθιών $(\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)})$ και $(\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)})$, αντίστοιχα, τότε, όταν η σειρά $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \ldots$ αποκλίνει, είναι

$$F_1(x) = F(x) = \lim \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} \ ,$$

ενώ, όταν η προηγούμενη σειρά συγκλίνει, τότε θα είναι $F_1(x) > F(x)$.

3.3 Μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes όταν ο μιγαδικός αριθμός z έχει θετικό πραγματικό μέρος.

Λήμμα 3.3 *Ισχύουν οι ισότητες*

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{\alpha_2}{Q_0(z)Q_2(z)} + \frac{\alpha_4}{Q_2(z)Q_4(z)} + \ldots + \frac{\alpha_{2n}}{Q_{2n-2}(z)Q_{2n}(z)} \ , \tag{3.7}$$

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z} - \frac{\alpha_3 z}{Q_1(z)Q_3(z)} - \frac{\alpha_5 z}{Q_3(z)Q_5(z)} - \ldots - \frac{\alpha_{2n+1} z}{Q_{2n-1}(z)Q_{2n+1}(z)} . \tag{3.8}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε τη σχέση (3.7) χρησιμοποιώντας μαθηματική επαγωγή. Για $n = 1$ έχουμε $\frac{P_2(z)}{Q_2(z)} = \frac{\alpha_2}{Q_0(z)Q_2(z)}$, που ισχύει. Έστω ότι η (3.7) ισχύει για $n = k$. Τότε, αν λάβουμε υπόψη μας την ισότητα (2.15), παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} \frac{P_{2k+2}(z)}{Q_{2k+2}(z)} &= \frac{P_{2k}(z)}{Q_{2k}(z)} + \frac{\alpha_{2k+2}}{Q_{2k}(z)Q_{2k+2}(z)} \\ &= \frac{\alpha_2}{Q_0(z)Q_2(z)} + \frac{\alpha_4}{Q_2(z)Q_4(z)} + \ldots + \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)} + \frac{\alpha_{2k+2}}{Q_{2k}(z)Q_{2k+2}(z)} \ . \end{aligned}$$

Δηλαδή, η πρόταση μας ισχύει και για $n = k + 1$. Ομοίως αποδεικνύεται και η (3.8).

Θεώρημα 3.1 *Οι ακολουθίες $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$ και $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δεξιού ημιεπιπέδου H σε συναρτήσεις $F(z)$ και $F_1(z)$, αντίστοιχα, οι οποίες είναι ολόμορφες στο H.*

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει ακριβώς τότε όταν οι συναρτήσεις F και F_1 ταυτίζονται στο H.

Απόδειξη: Λόγω του παραπάνω λήμματος, η μελέτη της σύγκλισης του συνεχούς κλάσματος που μας ενδιαφέρει ανάγεται στη μελέτη της σύγκλισης των σειρών

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}$$

και

$$\frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)Q_{2k+1}(z)} \ .$$

Θέτουμε κάθε μιγαδικό αριθμό z ίσο με $z = x + yi$ και θεωρούμε το δεξιό ημιεπίπεδο $H = \{z \in \mathbb{C} |\ Re(z) = x > 0\}$ του $\mathbb{C}$. Έστω S ένα συμπαγές υποσύνολο του H. Τότε, υπάρχει $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \epsilon S$ να είναι $Re(z) > \lambda$ και ισχύει

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}\right| \leq \sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{|Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)|} \ ,$$

για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς n και n'. Όμως, είναι

$$Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z) = C(z+x_1)(z+x_2)\cdots(z+x_{2k-1}) \ ,$$

όπου τα C, x_1, $\ldots$, x_{2k-1} είναι όλοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Επίσης, επειδή το πραγματικό μέρος x είναι θετικός αριθμός, θα ισχύει ότι $|z + x_i| > x + x_i$. Επομένως,

$$|Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)| \geq Q_{2k-2}(x)Q_{2k}(x) \geq Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)$$

και τελικά

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}\right| \leq \sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)} \ .$$

Ο λ είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα από την §3.2 έχουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)} = F(\lambda) = \lim \frac{P_{2n}(\lambda)}{Q_{2n}(\lambda)} \ .$$

Δηλαδή, η $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)}$ συγκλίνει, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ν τέτοιο ώστε για κάθε $n > \nu$ και για κάθε φυσικό αριθμό n' να ισχύει ότι

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}\right| \leq \sum_{k=n}^{n+n'} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(\lambda)Q_{2k}(\lambda)} < \varepsilon \ ,$$

πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο S του H και, επειδή πρόκειται για σειρά συναρτήσεων που είναι ολόμορφες στο H, έχουμε ότι και η συνάρτηση

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)} = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

είναι ολόμορφη στο ημιεπίπεδο αυτό. Με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε ότι και η συνάρτηση

$$F_1(z) = \frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z)Q_{2k+1}(z)} = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}$$

είναι ολόμορφη στο ίδιο σύνολο.

Επομένως, στο H έχουμε ότι

$$F(z) = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \ , \qquad F_1(z) = \lim \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} \ .$$

Στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, οι F και F_1 είναι διαφορετικές, αφού διαφέρουν τουλάχιστον στα σημεία του ημιάξονα των θετικών πραγματικών αριθμών.

Στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, οι F και F_1 ταυτίζονται στον ημιάξονα των θετικών πραγματικών αριθμών. Άρα, από την αρχή ταυτισμού, θα είναι ίσες στο συνεκτικό σύνολο H.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάποιες ιδιότητες των F και F_1.

Πρόταση 3.1 *Εάν x είναι θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ισχύουν*

$$\lim_{x\to 0+} F(x) = \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} + \ldots \ , \tag{3.9}$$

$$\lim_{x\to 0+} xF_1(x) = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1} + \ldots} \ . \tag{3.10}$$

Ειδικότερα, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε είναι

$$\lim_{x\to 0^+} F(x) < +\infty \ , \qquad \lim_{x\to 0^+} xF_1(x) > 0 \ .$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα. Η απόδειξη της άλλης γίνεται με το ίδιο σκεπτικό. Για τυχαίο φυσικό n και τυχαίο θετικό πραγματικό αριθμό x ισχύουν

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(x)Q_{2k}(x)} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(0)Q_{2k}(0)} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} \ .$$

Παίρνοντας το όριο των δύο ακριανών ποσοτήτων καθώς το $n \to +\infty$, έχουμε ότι

$$F(x) \le \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} + \ldots$$

άρα και

$$\limsup_{x\to 0^+} F(x) \le \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} + \ldots \ .$$

Επίσης, για κάθε φυσικό n και για κάθε θετικό πραγματικό x θα είναι

$$F(x) \ge \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(x)Q_{2k}(x)} \ .$$

Παίρνοντας το κατώτερο όριο των δύο ακριανών ποσοτήτων για $x \to 0^+$ προκύπτει

$$\liminf_{x\to 0^+} F(x) \ge \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n}$$

οπότε για $n \to +\infty$ έχουμε ότι

$$\liminf_{x\to 0^+} F(x) \ge \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} + \ldots$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Πρόταση 3.2 *Ισχύει ότι*

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}},\ 0 < \xi < 1$$

και

$$F_1(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi' c_p}{x^{p+1}},\ 0 < \xi' < 1\ .$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε μονάχα την πρώτη ισότητα. Είναι:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k}{x + x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{M_k}{x} - \frac{M_k x_k}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1} \frac{M_k x_k^{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{M_k x_k^p}{x^p(x + x_k)} \right) \\
&= \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi_{2n} c_p}{x^{p+1}}, \quad 0 < \xi_{2n} < 1\ .
\end{aligned}$$

Επειδή $F(x) = \lim \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}$ κι αφού τα c_i είναι ανεξάρτητα του n, συνεπάγεται ότι τα ξ_{2n} έχουν κάποιο όριο ξ, με $0 \leq \xi \leq 1$. Είναι προφανές όμως ότι $\xi \neq 0$ και $\xi \neq 1$. Άρα, ισχύει

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p \frac{\xi c_p}{x^{p+1}}, \quad 0 < \xi < 1\ .$$

Κεφάλαιο 4

Μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes στην περίπτωση που η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

Σ' όλο το κεφάλαιο, εκτός από την τελευταία παράγραφο, υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει.

4.1 Συναρτήσεις-όρια των $P_{2n}(z)$, $P_{2n+1}(z)$, $Q_{2n}(z)$, $Q_{2n+1}(z)$.

Από τις σχέσεις (1.15), (1.16), (1.17) και (1.18) προκύπτουν πολύ εύκολα οι παρακάτω ισότητες:

$$\begin{aligned}
P_{2n}(z) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z) \ , \\
Q_{2n}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} Q_{2k-1}(z) \ , \\
P_{2n+1}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k+1} z P_{2k}(z) \ , \\
Q_{2n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k+1} z Q_{2k}(z) \ .
\end{aligned}$$

Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ και θεωρήσουμε τον τυχαίο θετικό αριθμό x, τότε από την §3.1 και συγκεκριμένα από τον τύπο (3.6), αντικαθιστώντας κάθε α_{2n-1} με το $\alpha_{2n-1}x$, παίρνουμε ότι οι ακολουθίες $(Q_{2n+1}(x))$ και $(Q_{2n}(x))$ είναι άνω φραγμένες, άρα και συγκλίνουσες. Όμως, $\lim \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} = F(x) < +\infty$ και $\lim \frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} = F_1(x) < +\infty$, άρα οι $(P_{2n}(x))$,

$(P_{2n+1}(x))$ θα είναι επίσης συγκλίνουσες, οπότε και φραγμένες. Επομένως, οι σειρές

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} P_{2k-1}(x) \ ,$$
$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} Q_{2k-1}(x) \ ,$$
$$1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k+1} x P_{2k}(x) \ ,$$
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1} x Q_{2k}(x)$$

συγκλίνουν για κάθε θετικό πραγματικό x.

Ισχύει κάτι ακόμη πιο ισχυρό:

Θεώρημα 4.1 *Όταν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, οι ακολουθίες*

$$\begin{aligned} P_{2n}(z) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z) \ , \\ Q_{2n}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k} Q_{2k-1}(z) \ , \\ P_{2n+1}(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{2k+1} z P_{2k}(z) \ , \\ Q_{2n+1}(z) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_{2k+1} z Q_{2k}(z) \end{aligned}$$

συγκλίνουν ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και επειδή οι όροι τους είναι ακέραιες συναρτήσεις και τα όρια τους θα είναι, επίσης, συναρτήσεις ολόμορφες στο $\mathbb{C}$.

Απόδειξη: Θα κάνουμε την απόδειξη μόνο για την πρώτη σειρά, όλες οι άλλες γίνονται με παρόμοιο τρόπο.

Θεωρούμε τυχαίο συμπαγές υποσύνολο S του $\mathbb{C}$ και υποθέτουμε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο z ενός μιγαδικού στο S είναι λ.

Έστω n, n' τυχαίοι φυσικοί αριθμοί. Τότε, έχουμε ότι

$$\left| \sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} |P_{2k-1}(z)| \ .$$

Όμως, το $P_{2k-1}(z)$ είναι ένα πολυώνυμο με θετικούς συντελεστές και η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το μέτρο του z στο S είναι λ, οπότε:

$$|P_{2k-1}(z)| \leq P_{2k-1}(|z|) \leq P_{2k-1}(\lambda)$$

και τελικά

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z)\right| \leq \sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} P_{2k-1}(\lambda) \ .$$

Έχουμε αποδείξει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} P_{2k-1}(\lambda)$ είναι συγκλίνουσα, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός ν τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \nu$ να ισχύει ότι

$$\sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} P_{2k-1}(\lambda) < \varepsilon$$

για κάθε φυσικό n'. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός ν τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq \nu$ να ισχύει ότι

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z)\right| < \varepsilon$$

για κάθε φυσικό n', οπότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο S.

Επειδή το σύνολο S που θεωρήσαμε ήταν τυχαίο, από τα προηγούμενα έχουμε τελικά ότι οι τέσσερις συναρτήσεις

$$\begin{aligned}
p(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z) \ = \ \lim P_{2n}(z) \ , \\
q(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} Q_{2k-1}(z) \ = \ \lim Q_{2n}(z) \ , \\
p_1(z) &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k+1} z P_{2k}(z) \ = \ \lim P_{2n+1}(z) \ , \\
q_1(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1} z Q_{2k}(z) \ = \ \lim Q_{2n+1}(z)
\end{aligned}$$

είναι ολόμορφες σ' όλο το $\mathbb{C}$.

Από την (1.34), αν πάρουμε τα όρια των δύο μελών της ισότητας, προκύπτει μία σχέση που συνδέει τις παραπάνω συναρτήσεις και θα φανεί χρήσιμη παρακάτω:

$$p_1(z) q(z) - p(z) q_1(z) = 1 \ . \tag{4.1}$$

4.2 Συνέπειες της ομοιόμορφης σύγκλισης των $P_{2n}(z)$ στην $p(z)$.

Η συνάρτηση $p(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$, άρα υπάρχουν αριθμοί $A_0, A_1, \ldots, A_k, \ldots$ τέτοιοι ώστε

$$p(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k z^k \ .$$

Μάλιστα, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1 *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ *και αν* $A_0,\ A_1,\ \ldots,\ A_k,\ \ldots$ *είναι οι συντελεστές της δυναμοσειράς της* $p(z)$, *τότε καθένας τους ισούται με το όριο της ακολουθίας των αντίστοιχων συντελεστών των* $P_{2n}(z)$. *Δηλαδή, αν*

$$P_{2n}(z) = A_0^{(n)} + A_1^{(n)} z + \ldots + A_{n-1}^{(n)} z^{n-1} ,$$

τότε ισχύει

$$A_k = \lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} .$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{k!} P_{2n}^{(k)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{P_{2n}(z)}{z^{k+1}} dz$$

και επειδή τα πολυώνυμα $P_{2n}(z)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στην $p(z)$ στο μοναδιαίο κύκλο, θα έχουμε ότι

$$\oint_{|z|=1} \frac{P_{2n}(z)}{z^{k+1}} \longrightarrow \oint_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^{k+1}} ,$$

άρα

$$\lim_{n\to\infty} A_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{p(z)}{z^{k+1}} = \frac{p^{(k)}(0)}{k!} = A_k .$$

Πρόταση 4.2 *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$ *και αν* (z_n) *είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών με* $\lim z_n = Z$, *τότε* $\lim P_{2n}(z_n) = p(Z)$.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε έναν κυκλικό δίσκο D γύρω από το Z. Τότε, υπάρχει φυσικός ν, τέτοιος ώστε για κάθε $n > \nu$ όλα τα z_n να βρίσκονται μέσα στο D.

Επίσης, λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης, υπάρχει φυσικός ν' τέτοιος ώστε για κάθε n με $n > \nu'$ να ισχύει $|P_{2n}(z) - p(z)| < \varepsilon$ για κάθε z στο D.

Τέλος, από τη συνέχεια της p στο Z υπάρχει φυσικός ν'' τέτοιος ώστε για κάθε $n > \nu''$ να είναι $|p(z_n) - p(Z)| < \varepsilon$. Όμως,

$$|P_{2n}(z_n) - p(Z)| \le |P_{2n}(z_n) - p(z_n)| + |p(z_n) - p(Z)| < 2\varepsilon$$

για κάθε $n > N$, όπου N ο μεγαλύτερος από τους φυσικούς ν, ν' και ν''. Το ε που θεωρήσαμε ήταν τυχαίο, άρα $\lim P_{2n}(z_n) = p(Z)$.

Παρατήρηση 4.1 *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, *τότε η ακολουθία των παραγώγων* (P_{2n}') *συγκλίνει, επίσης, ομοιόμορφα στην* p' *σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{C}$. *Επομένως, μπορούμε να παραγωγίσουμε όσες φορές θέλουμε την ισότητα* $p(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{2k} P_{2k-1}(z)$.

Επίσης, όταν έχουμε μία ακολουθία (z_n) *με* $\lim_{n\to+\infty} z_n = Z$, *λόγω των παραπάνω θα ισχύει ότι* $\lim P_{2n}'(z_n) = p'(Z)$.

Φυσικά, ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για τις $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$.

4.3 Μελέτη των ριζών της συνάρτησης $q(z)$.

Στην πρώτη παράγραφο του κεφαλαίου γράψαμε τις συναρτήσεις $p(z)$, $p_1(z)$, $q(z)$, $q_1(z)$ με τη μορφή άπειρων σειρών. Σ' αυτή την παράγραφο και στις επόμενες θα αποδείξουμε διάφορες προτάσεις που θα μας βοηθήσουν να γράψουμε τις συναρτήσεις αυτές με τη μορφή απειρογινόμενων. Θα μελετήσουμε μονάχα την περίπτωση της $q(z) = \lim Q_{2n}(z)$. Οι άλλες περιπτώσεις μελετώνται με ανάλογο τρόπο.

Εάν $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, ..., $x_n^{(n)}$ είναι οι ρίζες του $Q_{2n}(-z)$ (διατεταγμένες από τη μικρότερη προς τη μεγαλύτερη), τότε θα ισχύει ότι

$$Q_{2n}(z) = \left(1 + \frac{z}{x_1^{(n)}}\right)\left(1 + \frac{z}{x_2^{(n)}}\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{x_n^{(n)}}\right) .$$

Επομένως, ο συντελεστής του z στο πολυώνυμο αυτό είναι ο $\frac{1}{x_1^{(n)}} + \frac{1}{x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_n^{(n)}}$ που ισούται με $B_1^{(n)}$ (αν θυμηθούμε τους συμβολισμούς της §1.2). Όμως, από τη σχέση (1.23) προκύπτει ότι η ακολουθία $(B_1^{(n)})$ είναι γνησίως αύξουσα. Αν είναι $q(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k z^k$, τότε, από την πρόταση 4.1 της προηγούμενης παραγράφου, έπεται ότι το B_1 είναι το όριο της ακολουθίας $(B_1^{(n)})$, άρα θα είναι το supremum της ακολουθίας αυτής. Επομένως, έχουμε τελικά ότι

$$\frac{1}{x_1^{(n)}} + \frac{1}{x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_n^{(n)}} = B_1^{(n)} < B_1 . \tag{4.2}$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες των ριζών

$$(x_1^{(n)}),\ (x_2^{(n)}),\ \ldots,\ (x_k^{(n)}),\ \ldots$$

των πολυωνύμων $Q_{2n}(-z)$. Εάν είναι $k > n$, τότε έχουμε συμφωνήσει ότι $x_k^{(n)} = +\infty$. Από το θεώρημα 1.2 προκύπτει ότι η ακολουθία $(x_k^{(n)})$ είναι φθίνουσα, όμως από την (4.2) προκύπτει ότι είναι κάτω φραγμένη από τον αριθμό $\frac{1}{B_1}$. Συνεπώς, θα έχει όριο πραγματικό αριθμό, έστω τον λ_k και, μάλιστα, λόγω της διάταξης των ριζών, θα ισχύει ότι

$$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_k \le \ldots . \tag{4.3}$$

Παρατήρηση 4.2 *Υποθέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει. Επειδή στην απόδειξη ύπαρξης των ορίων λ_k και της σχέσης (4.3) δε χρησιμοποιήθηκε πουθενά η υπόθεση αυτή, έπεται ότι η ακολουθία (λ_k) ορίζεται και είναι αύξουσα είτε η σειρά των συντελεστών του συνεχούς κλάσματος Stieltjes συγκλίνει, είτε όχι.*

Πρόταση 4.3 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Θεωρούμε δύο φυσικούς k και n με $n > k$. Επειδή $\lambda_k = \inf_{m\in\mathbb{N}} x_k^{(m)}$, θα έχουμε ότι

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_k} > \frac{1}{x_1^{(n)}} + \frac{1}{x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{1}{x_k^{(n)}} .$$

Όμως, από τον ορισμό του inf έχουμε ότι δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε για $n > N$ να ισχύει

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}-\frac{1}{x_1^{(n)}}-\frac{1}{x_2^{(n)}}-\ldots-\frac{1}{x_k^{(n)}}<\varepsilon\ .$$

Επομένως, για $n > max(N, k)$ θα ισχύει ότι

$$\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<\frac{1}{x_1^{(n)}}+\frac{1}{x_2^{(n)}}+\ldots+\frac{1}{x_k^{(n)}}+\varepsilon<\frac{1}{x_1^{(n)}}+\frac{1}{x_2^{(n)}}+\ldots+\frac{1}{x_n^{(n)}}+\varepsilon=B_1+\varepsilon\ ,$$

οπότε, $\quad \frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_k}<B_1+\varepsilon \quad$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Δηλαδή, η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}$ είναι άνω φραγμένη, άρα θα είναι συγκλίνουσα και, μάλιστα, το άθροισμά της δεν μπορεί να ξεπεράσει το B_1.

Πρόταση 4.4 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n < +\infty$, τότε η συνάρτηση $q(z)$ μηδενίζεται σε κάθε όρο της ακολουθίας $(-\lambda_k)$.*

Απόδειξη: Η ακολουθία των πολυωνύμων $(Q_{2n}(z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $q(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης, $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = \lambda_k$, άρα από την πρόταση 4.2 παίρνουμε ότι

$$q(-\lambda_k)=\lim_{n\to\infty}Q_{2n}(-x_k^{(n)})=0$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Παρατήρηση 4.3 *Από τη σχέση (4.3) έχουμε ότι η ακολουθία (λ_k) είναι αύξουσα και από την πρόταση 4.3 ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}$ συγκλίνει. Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι η $q(z)$ έχει ρίζες τα $-\lambda_k$ και θ' αποδείξουμε παρακάτω ότι αυτές είναι και οι μοναδικές ρίζες της $q(z)$. Ακόμη, επειδή η $q(z)$ δεν είναι μπορεί να είναι η μηδενική συνάρτηση, αφού $q(0) = \lim Q_{2n}(0) = 1$, από την αρχή του ταυτισμού προκύπτει ότι δεν μπορεί η ακολουθία (λ_k) να έχει ως σημείο συσσώρευσης πραγματικό αριθμό. Όμως, επειδή πρόκειται για μια αύξουσα ακολουθία, συνεπάγεται ότι*

$$\lim \lambda_n = +\infty\ .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε και πιο εύκολα: από την πρόταση 4.3 έχουμε ότι, επειδή η σειρά μας συγκλίνει, θα είναι $\lim \frac{1}{\lambda_n} = 0$, άρα $\lim \lambda_n = +\infty$.

4.4 Η ακολουθία (λ_k) είναι γνησίως αύξουσα.

Φυσικά, η παραπάνω ακολουθία δεν μπορεί να είναι τελικά σταθερή, γιατί, αν αυτό συνέβαινε, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k}$ θα είχε άθροισμα $+\infty$.

Έστω ότι υπάρχουν κάποιοι όροι της ακολουθίας (λ_n) που είναι ίσοι, δηλαδή υπάρχουν θετικοί ακέραιοι k και i τέτοιοι ώστε $i \geq 2$ και

$$\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \ldots = \lambda_{k+i} \ ,$$

ενώ $\lambda_{k+i} < \lambda_{k+i+1}$. Θεωρούμε αρκετά μεγάλο n έτσι ώστε οι πεπερασμένου πλήθους όροι $x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}, \ldots, x_{k+i}^{(n)}, x_{k+i+1}^{(n)}$ να διαφέρουν πολύ λίγο από τα αντίστοιχα όριά τους $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+i}, \lambda_{k+i+1}$, έτσι ώστε όλοι οι αριθμοί $x_{k+1}^{(n)}, x_{k+2}^{(n)}, \ldots, x_{k+i}^{(n)}$ να βρίσκονται στο διάστημα $[\lambda_{k+1}, \lambda_{k+i+1}]$.

Γνωρίζουμε ακόμα ότι

$$x_{k+1}^{(n)} > \lambda_{k+1} = \lambda_{k+i}$$

και, επειδή $\lambda_{k+i} = \inf_{m\in\mathbb{N}} x_{k+i}^{(m)}$, θα υπάρχει φυσικός n' τέτοιος ώστε $x_{k+i}^{(n+n')} < x_{k+1}^{(n)}$. Άρα, οι ρίζες

$$x_{k+1}^{(n+n')}, x_{k+2}^{(n+n')}, \ldots, x_{k+i}^{(n+n')}$$

του $Q_{2n+2n'}(-z)$ θα βρίσκονται όλες στο διάστημα $[\lambda_{k+1}, x_{k+1}^{(n)}]$. Επίσης, ισχύει προφανώς ότι $x_{k+i+1}^{(n+n')} > \lambda_{k+i+1} > \lambda_{k+i}$.

Έτσι, καταλήξαμε στο ότι το διάστημα $[x_{k+i}^{(n+n')}, x_{k+i+1}^{(n+n')}]$ δυο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(-z)$ περιέχει τις ρίζες

$$x_{k+1}^{(n)}, x_{k+2}^{(n)}, \ldots, x_{k+i}^{(n)}$$

του $Q_{2n}(-z)$. Όμως, από το θεώρημα 1.3 της §1.5 έχουμε ότι μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(-z)$ βρίσκεται πάντα το πολύ μια ρίζα του $Q_{2n}(-z)$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

4.5 Η συνάρτηση $q(z)$ με τη μορφή απειρογινόμενου.

Έστω $\varepsilon > 0$ θετικό και οσοδήποτε μικρό. Επειδή για το απειρογινόμενο

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right)$$

ισχύει ότι

$$\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) \leq e^{\sum \frac{|z|}{\lambda_k}} = e^{|z| \sum \frac{1}{\lambda_k}} < +\infty \ ,$$

δηλαδή συγκλίνει, θα υπάρχει φυσικός m τέτοιος ώστε

$$\left| \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon \ . \quad (1)$$

Σταθεροποιούμε το z. Έστω τότε $M = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right)$. Προφανώς, ισχύει ότι

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{|z|}{\lambda_k}\right) < M \qquad (2)$$

και, λόγω της προηγούμενης σχέσης,

$$\left| \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) - 1 \right| < \varepsilon \ . \quad (3)$$

Επειδή

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \ ,$$

από τις (2) και (3) έχουμε ότι

$$Q(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) + M\omega' \ , \quad (4)$$

όπου το ω' είναι μιγαδικός αριθμός με μέτρο μικρότερο του ε.

Για κάθε φυσικό n με $n > m$ το πολυώνυμο $Q_{2n}(z)$ γράφεται

$$Q_{2n}(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{x_k^{(n)}}\right) \prod_{k=m+1}^{n} \left(1 + \frac{z}{x_k^{(n)}}\right) \ .$$

Επειδή $\frac{1}{x_k^{(n)}} < \frac{1}{\lambda_k}$ και λόγω των (1) και (2) έχουμε ότι

$$\prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{|z|}{x_k^{(n)}}\right) < M$$

και

$$\left| \prod_{k=m+1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{x_k^{(n)}}\right) - 1 \right| < \varepsilon \ ,$$

οπότε από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$Q_{2n}(z) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{x_k^{(n)}}\right) + M\omega'' \ , \quad (5)$$

όπου το μέτρο του ω'' είναι μικρότερο του ε.
Όμως, είναι

$$\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{x_k^{(n)}}\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{z}{\lambda_k}\right) \ . \quad (6)$$

Από τις (4), (5) και (6) παίρνουμε ότι

$$\limsup_{n\to+\infty} |Q_{2n}(z) - Q(z)| \le 2M\varepsilon \ .$$

Αποδείξαμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.2 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε η συνάρτηση q παίρνει τη μορφή*

$$q(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{z}{\lambda_k}\Big) , \quad z \in \mathbb{C} . \tag{4.4}$$

Παρατήρηση 4.4 *Όπως δείξαμε για την $q(z)$, έτσι προκύπτει και για τις υπόλοιπες τρεις συναρτήσεις ότι μπορούν να πάρουν τη μορφή απειρογινόμενου. Επίσης, από τον τύπο (4.4) προκύπτει ότι η q είναι συνάρτηση γένους μηδέν και ότι έχει ως ρίζες τους όρους της ακολουθίας $(-\lambda_k)$ και μόνο αυτές. Δηλαδή, έχει άπειρες ρίζες και, μάλιστα, όλες είναι απλές.*

4.6 Οι συναρτήσεις $\frac{p(z)}{q(z)}$ και $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$ με τη μορφή σειρών.

Από όλα όσα είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους προκύπτει ότι για κάθε μιγαδικό αριθμό z, που δε μηδενίζει την $q(z)$ στην πρώτη περίπτωση ή την $q_1(z)$ στη δεύτερη περίπτωση, ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

και

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} .$$

Θα γράψουμε τη συνάρτηση $\frac{p(z)}{q(z)}$ ως άπειρο άθροισμα απλών κλασμάτων και, φυσικά, με τον ίδιο τρόπο και η $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$ μπορεί να πάρει την ίδια μορφή.

Στην (1.38) της §1.3 δείξαμε ότι

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1^{(n)}}{z + x_1^{(n)}} + \frac{M_2^{(n)}}{z + x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{M_n^{(n)}}{z + x_n^{(n)}} ,$$

όπου τα $M_1^{(n)}$, $M_2^{(n)}$, ..., $M_n^{(n)}$ είναι θετικοί αριθμοί.

Παρακάτω αποδεικνύουμε κάποια λήμματα που θα μας βοηθήσουν.

Λήμμα 4.1 *Για το συντελεστή $M_k^{(n)}$, όπου k=1, 2, ..., n, ισχύει ότι*

$$M_k^{(n)} = \frac{P_{2n}(-x_k^{(n)})}{Q'_{2n}(-x_k^{(n)})} .$$

Απόδειξη: Η (1.38) γράφεται

$$P_{2n}(z) = \sum_{l=1}^{n} M_l^{(n)} \frac{Q_{2n}(z) - Q_{2n}(-x_l^{(n)})}{z - (-x_l^{(n)})} ,$$

οπότε υπολογίζοντας τα όρια και των δύο μελών της παραπάνω ισότητας όταν $z \to -x_k^{(n)}$ (προφανώς τα όρια αυτά υπάρχουν), έχουμε ότι $P_{2n}(-x_k^{(n)}) = M_k^{(n)} Q'_{2n}(-x_k^{(n)})$.

Λήμμα 4.2 *Για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει ότι*

$$M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)} = \frac{1}{\alpha_1} \ .$$

Απόδειξη: Από την (1.38), αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της ισότητας με το $Q_{2n}(z)$, προκύπτει ότι ο συντελεστής του z^{n-1} στο $P_{2n}(z)$ ισούται με το άθροισμα $M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)}$ επί το συντελεστή του z^n στο $Q_{2n}(z)$. Αν λάβουμε υπόψη τους τύπους (1.21) και (1.25) της §1.2 προκύπτει ότι

$$M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)} = \frac{1}{\alpha_1} \ .$$

Παρατήρηση 4.5 *Από την παρατήρηση 2.1 έχουμε ότι $c_0 = \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)}$ για κάθε n. Άρα, από το παραπάνω λήμμα προκύπτει ότι $c_0 = \frac{1}{\alpha_1}$.*

Λήμμα 4.3 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε για κάθε φυσικό αριθμό k η ακολουθία $(M_k^{(n)})$ συγκλίνει σε θετικό πραγματικό αριθμό, έστω τον μ_k, και μάλιστα ισχύει ότι:*

$$\mu_k = \frac{p(-\lambda_k)}{q'(-\lambda_k)} \ .$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι $\lim x_k^{(n)} = \lambda_k$, ότι η $(P_{2n}(z))$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $p(z)$ και το ίδιο και η $(Q_{2n}(z))$ στην $q(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Άρα, από την πρόταση 4.2, την παρατήρηση 4.1 και το λήμμα 4.1 έχουμε ότι

$$\frac{p(-\lambda_k)}{q'(-\lambda_k)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(-x_k^{(n)})}{Q'_{2n}(-x_k^{(n)})} = \lim M_k^{(n)} \ .$$

Αν θέσουμε $\mu_k = \lim M_k^{(n)}$, τότε, επειδή $M_k^{(n)} \geq 0$, έχουμε ότι το μ_k είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός ή $+\infty$. Όμως, από την παρατήρηση 4.3 έχουμε ότι τα $-\lambda_k$ είναι απλές ρίζες της $q(z)$, άρα $q'(-\lambda_k) \neq 0$ και το μ_k δεν είναι $+\infty$. Τέλος, από την (4.1) έχουμε ότι

$$p_1(-\lambda_k)q(-\lambda_k) - p(-\lambda_k)q_1(-\lambda_k) = 1 \ .$$

Επειδή $q(-\lambda_k) = 0$, συνεπάγεται ότι είναι $p(-\lambda_k) \neq 0$ και επομένως $\mu_k > 0$.

Λήμμα 4.4 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$ είναι συγκλίνουσα.*

Απόδειξη: Έστω n, k δυο φυσικοί αριθμοί με $n > k$. Επειδή $\mu_i = \lim_{n\to+\infty} M_i^{(n)}$, αν θεωρήσουμε ένα $\varepsilon > 0$, τότε μπορούμε να πάρουμε το n αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k < M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_k^{(n)} + \varepsilon < M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)} + \varepsilon$. Λόγω του λήμματος 4.2 θα είναι

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k < \frac{1}{\alpha_1} + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η σειρά θετικών όρων $\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k$ είναι άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει και, μάλιστα, το άθροισμά της δεν ξεπερνά το $\frac{1}{\alpha_1}$.

Πρόταση 4.5 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε η συνάρτηση $S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k}$ είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε έναν ανοικτό κυκλικό δίσκο $D(0, R)$. Επειδή η (λ_k) είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $+\infty$, υπάρχει k_0 έτσι ώστε το πολύ οι k_0 πρώτοι όροι της ακολουθίας να βρίσκονται μέσα στον $D(0, R)$. Τότε για κάθε $z \in D(0, R)$ και για κάθε $k > k_0$ ισχύει

$$\frac{\mu_k}{|z + \lambda_k|} \leq \frac{\mu_k}{\lambda_k - |z|} \leq \frac{\mu_k}{\lambda_k - R} \ .$$

Η υπακολουθία $(\lambda_k - R)_{k \geq k_0+1}$ είναι κάτω φραγμένη από κάποιον θετικό αριθμό c, οπότε

$$\sum_{k_0+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{\lambda_k - R} \leq \frac{1}{c} \sum_{k_0+1}^{+\infty} \mu_k < +\infty \ .$$

Επομένως, η $\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k}$ συγκλίνει ομοιόμορφα και ορίζει ολόμορφη συνάρτηση στον $D(0, R)$. Άρα η συνάρτηση

$$S(z) = \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\mu_k}{z + \lambda_k} + \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z + \lambda_k}$$

είναι μερόμορφη στον $D(0, R)$ και, επειδή το R είναι τυχαίο, συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $S(z)$ είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$.

Αφού δείξαμε όλα τα προηγούμενα, περνάμε στην απόδειξη του βασικότερου αποτελέσματος αυτής της παραγράφου. Θα γράψουμε δηλαδή την $\frac{p(z)}{q(z)}$ ως σειρά.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $z \in \mathbb{C}$. Επειδή $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, για κάθε φυσικό αριθμό i, υπάρχει m τέτοιος ώστε $\lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Τότε, προκύπτει ότι

$$|\lambda_{m+i} + z| \geq \lambda_{m+i} - |z| > \frac{1}{\varepsilon} \ ,$$

οπότε, για κάθε i ισχύει

$$\frac{1}{|\lambda_{m+i} + z|} < \varepsilon \ .$$

Για τη συνάρτηση S έχουμε

$$S(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} \ .$$

Αλλά

$$\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{|z+\lambda_k|} < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mu_k < \frac{\varepsilon}{\alpha_1}$$

και, επομένως,

$$S(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} + \frac{\omega'}{\alpha_1} \ , \quad (A)$$

όπου το μέτρο του ω' είναι μικρότερο του ε.

Από την άλλη πλευρά, έχουμε ότι, αν $m < n$, τότε

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k^{(n)}}{z+x_k^{(n)}} + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{M_k^{(n)}}{z+x_k^{(n)}} \ .$$

Όμως, για κάθε $k \geq m+1$ ισχύει $x_k^{(n)} > \lambda_k > \frac{1}{\varepsilon} + |z|$, οπότε είναι και $|x_k^{(n)} + z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Με τη βοήθεια του τελευταίου έχουμε ότι

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} \frac{M_k^{(n)}}{z+x_k^{(n)}} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{M_k^{(n)}}{|z+x_k^{(n)}|} < \varepsilon \sum_{k=m+1}^{n} M_k^{(n)} < \frac{\varepsilon}{\alpha_1}$$

και, συνεπώς,

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k^{(n)}}{z+x_k^{(n)}} + \frac{\omega''}{\alpha_1} \ , \quad (B)$$

όπου το μέτρο του ω'' είναι μικρότερο του ε.

Όταν $n \to +\infty$ ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k^{(n)}}{z+x_k^{(n)}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k}$, οπότε από τις (A) και (B) έχουμε ότι

$$\limsup_{n\to+\infty} \left| \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - S(z) \right| \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha_1} \ .$$

Άρα,

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} \ .$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι

Θεώρημα 4.3 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε για κάθε $z \in \mathbb{C} - \{-\lambda_k |\ k = 1, 2, \dots\}$ ισχύει*

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu_k}{z+\lambda_k} \ .$$

4.7 Οι συντελεστές c_i ως άπειρα αθροίσματα.

Είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k$ συγκλίνει. Σ' αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη γενίκευση του προηγούμενου λήμματος. Θα δείξουμε δηλαδή ότι:

Θεώρημα 4.4 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n < +\infty$, τότε για κάθε $i = 0, 1, 2, \dots$, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^i$ συγκλίνει και, μάλιστα, ισχύει ότι*

$$c_i = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^i \ . \tag{4.5}$$

Απόδειξη: Έστω k φυσικός αριθμός και το άθροισμα $\mu_1\lambda_1^i + \mu_2\lambda_2^i + \ldots + \mu_k\lambda_k^i$.

Επειδή $\mu_m = \lim_{n\to+\infty} M_m^{(n)}$ και $\lambda_m = \lim_{n\to+\infty} x_m^{(n)}$, αν θεωρήσουμε $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει n αρκετά μεγάλο, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\mu_1\lambda_1^i + \mu_2\lambda_2^i + \ldots + \mu_k\lambda_k^i < M_1^{(n)}(x_1^{(n)})^i + M_2^{(n)}(x_2^{(n)})^i + \ldots + M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^i + \varepsilon \ .$$

Όμως, από την ισότητα (2.3) της §2.2 έχουμε ότι $c_i = \sum_{k=1}^{n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^i$, οπότε θα είναι

$$\mu_1\lambda_1^i + \mu_2\lambda_2^i + \ldots + \mu_k\lambda_k^i < c_i + \varepsilon \ .$$

Καταλήγουμε στο ότι η σειρά των θετικών όρων $\sigma = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^i$ είναι άνω φραγμένη, άρα συγκλίνει και μάλιστα θα είναι $\sigma \le c_i$.

Επειδή οι όροι της γνησίως αύξουσας ακολουθίας (λ_n) μπορούν να γίνουν οσοδήποτε μεγάλοι, υπάρχει m τέτοιος ώστε $\frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon$, όπου ε είναι τυχαίος θετικός αριθμός. Τότε, θα έχουμε ότι

$$\sum_{k=m+1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^i < \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{k=m+1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^{i+1} < \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu_k\lambda_k^{i+1} \le \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon$$

και συνεπώς είναι

$$\sigma = \sum_{k=1}^{m}\mu_k\lambda_k^i + \varepsilon' \ , \quad (a)$$

όπου $0 \le \varepsilon' < \varepsilon$.

Από την άλλη μεριά, έχουμε ότι για κάθε $n \ge m+1$ ισχύει

$$c_i = \sum_{k=1}^{m} M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^i + \sum_{k=m+1}^{n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^i \ .$$

Όμως,

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^i < \frac{1}{\lambda_{m+1}}\sum_{k=m+1}^{n} M_k^{(n)}(x_k^{(n)})^{i+1} < \frac{c_{i+1}}{\lambda_{m+1}} < \varepsilon \ ,$$

οπότε

$$c_i = \sum_{k=1}^{m} M_k^{(n)} (x_k^{(n)})^i + \varepsilon'' \ , \quad (b)$$

όπου $0 \leq \varepsilon'' < \varepsilon$.

Κρατώντας το m σταθερό, έχουμε ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} M_k^{(n)} (x_k^{(n)})^i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \lambda_k^i \ .$$

Από τις (a), (b) και την τελευταία ισότητα έχουμε ότι $|\sigma - c_i| < 2\varepsilon$ και, επομένως, $\sigma = c_i$.

Από τις παρατηρήσεις 1.2 και 1.3 έχουμε ότι για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ ισχύει

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{N_0^{(n)}}{z} + \frac{N_1^{(n)}}{z + t_1^{(n)}} + \ldots + \frac{N_n^{(n)}}{z + t_n^{(n)}} \ ,$$

όπου, για $k = 0, 1, \ldots, n$, τα $N_k^{(n)}$ είναι θετικοί αριθμοί και τα $-t_k^{(n)}$ είναι οι ρίζες του $Q_{2n+1}(z)$. Θεωρούμε ότι $N_k^{(n)} = 0$ και $x_k^{(n)} = +\infty$ για $n < k$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, όπως και στην περίπτωση της ακολουθίας $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$, αποδεικνύεται ότι για την ακολουθία $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right)$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.5 *Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ υπάρχουν τα όρια $\nu_k = \lim_{n\to+\infty} N_k^{(n)}$ και $\theta_k = \lim_{n\to+\infty} t_k^{(n)}$. Όλοι οι αριθμοί ν_k είναι θετικοί και ισχύει:*

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots \qquad \textit{και} \qquad \lim_{k\to\infty} \theta_k = +\infty \ .$$

Επίσης,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\theta_k} < +\infty$$

και η $q_1(z)$ γράφεται ως απειρογινόμενο

$$q_1(z) = z \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{\theta_k}\right) \ , \quad z \ \in \mathbb{C} \ .$$

Έτσι, οι αριθμοί $-\theta_0$, $-\theta_1$, $-\theta_2$, $\ldots$ είναι ακριβώς οι απλές ρίζες της συνάρτησης $q_1(z)$. Ακόμη, ισχύει ότι η συνάρτηση

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \frac{\nu_0}{z} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\nu_k}{z + \theta_k} \ , \quad z \ \in \mathbb{C} - \{-\theta_k | \ k = 0, 1, 2, \ldots \}$$

είναι μερόμορφη στο $\mathbb{C}$, ενώ, για κάθε $i = 0, 1, 2, \ldots$ η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k \theta_k^i$ συγκλίνει. Μάλιστα, είναι

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k \ , \\ c_i &= \sum_{k=1}^{+\infty} \nu_k \theta_k^i \ , \quad i = 1, 2, \ldots \ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, στην περίπτωση που $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε υπάρχει και δεύτερος τρόπος να γραφούν τα c_i ως αθροίσματα σειρών.

Παρατήρηση 4.6 *Επειδή, λόγω της σχέσης (4.1), οι συναρτήσεις $q(z)$, $q_1(z)$ δεν έχουν κοινές ρίζες, οι αριθμοί λ_1, λ_2, $\ldots$, θ_0, θ_1, θ_2, $\ldots$ είναι όλοι διαφορετικοί ανά δύο. Επίσης, από τα συμπεράσματα της §1.3 έχουμε ότι για κάθε n ισχύει*

$$0 = t_0^{(n)} < x_1^{(n)} < t_1^{(n)} < x_2^{(n)} < t_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < t_n^{(n)} \ .$$

Παίρνοντας τα όρια των ακολουθιών $(x_k^{(n)})$, $(t_k^{(n)})$ για κάθε k βρίσκουμε ότι

$$0 = \theta_0 < \lambda_1 < \theta_1 < \lambda_2 < \theta_2 < \ldots \ .$$

4.8 Το πρόβλημα των ροπών.

Ορισμός 4.1 *Θεωρούμε τον θετικό ημιάξονα Ox και μία κατανομή μαζών (m_i, ξ_i) με i= 1, 2, $\ldots$, όπου η θετική μάζα m_i βρίσκεται σε απόσταση ξ_i από την αρχή O και οι αποστάσεις ξ_i είναι διαφορετικές ανά δύο. Το άθροισμα*

$$\sum_{i=1}^{+\infty} m_i \xi_i^k$$

ονομάζεται ροπή k-τάξης του συστήματος των μαζών (m_i, ξ_i) ως προς την αρχή O.

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, αν υποθέσουμε ότι έχουμε το σύστημα των μαζών (μ_i, λ_i), με $i = 1, 2, \ldots$, τότε για κάθε k η ροπή k-τάξης έχει, σύμφωνα με το θεώρημα 4.2, την τιμή c_k. Επίσης, από το θεώρημα 4.3 προκύπτει ότι αν θεωρήσουμε το σύστημα των μαζών (ν_i, θ_i), με i= 0, 1, 2, $\ldots$, τότε για κάθε k η ροπή k-τάξης έχει επίσης την τιμή c_k.

Ο Stieltjes ορίζει το πρόβλημα των ροπών ως εξής:

Ορισμός 4.2 *Έστω ότι έχουμε μια ακολουθία θετικών αριθμών. Πρόβλημα των ροπών ονομάζουμε το πρόβλημα της εύρεσης ενός συστήματος μαζών και των θέσεων όπου θα τις τοποθετήσουμε στο θετικό ημιάξονα, ώστε η k-τάξης ροπή αυτής της κατανομής να είναι ο k-οστός όρος της δοθείσης ακολουθίας.*

Ας συμβολίσουμε τον k-οστό όρο αυτής της ακολουθίας με c_k. Καταρχάς, για να υπάρχει λύση στο πρόβλημα οι όροι της (c_k) οφείλουν να ικανοποιούν κάποιες ανισότητες, δηλαδή υπάρχουν κάποιες αναγκαίες συνθήκες.

Πράγματι, έστω ότι βρίσκουμε ένα σύστημα μαζών m_i και ότι γνωρίζουμε σε ποιες θέσεις ξ_i πρέπει να τις τοποθετήσουμε ώστε να ισχύει $c_k = \sum_{i=1}^{+\infty} m_i \xi_i^k$ για κάθε k. Στο τέλος της §2.3 είδαμε ότι στην περίπτωση αυτή, για κάθε φυσικό p, η τετραγωνική μορφή

$$\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} c_{p+l+k} X_l X_k$$

οφείλει να είναι θετικά ορισμένη. Επομένως η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} c_p & c_{p+1} & c_{p+2} & \cdots & c_{p+m-1} \\ c_{p+1} & c_{p+2} & c_{p+3} & \cdots & c_{p+m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p+m-1} & c_{p+m} & \cdots & \cdots & c_{p+2m-2} \end{vmatrix}$$

πρέπει να είναι θετική για κάθε p. Ειδικότερα, πρέπει και οι ποσότητες U_n, W_n που ορίστηκαν στην §2.5 να είναι θετικές για κάθε n.

Υποθέτοντας ότι οι παραπάνω αναγκαίες συνθήκες ικανοποιούνται, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις στο πρόβλημα των ροπών:

- την *αόριστη* περίπτωση, όπου η ακολουθία (c_k) των ροπών που δίνεται είναι τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ να συγκλίνει. Από όλα όσα δείξαμε στις προηγούμενες παραγράφους προκύπτει ότι σ' αυτή την περίπτωση υπάρχουν τουλάχιστον δύο λύσεις στο πρόβλημά μας, είναι οι (μ_i, λ_i) και (ν_i, θ_i). Από αυτές τις δύο λύσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες άλλες λύσεις παίρνοντας κατάλληλους κυρτούς γραμμικούς συνδυασμούς.

  Για παράδειγμα, γνωρίζουμε ότι είναι

  $$0 = \theta_0 < \lambda_1 < \theta_1 < \lambda_2 < \dots \ .$$

  Έστω (ξ_k) η γνησίως αύξουσα ακολουθία ακολουθία που ορίζεται από τους προηγούμενους αριθμούς. Τότε, κάθε σύστημα μαζών (m_k, ξ_k), όπου $k = 0, 1, 2, \dots$, με

  $$m_k = \begin{cases} t\mu_i, & \text{υπάρχει } i \text{ με } \xi_k = \lambda_i, \text{ δεν υπάρχει } j \text{ με } \xi_k = \theta_j \\ (1-t)\nu_i, & \text{υπάρχει } i \text{ με } \xi_k = \theta_i, \text{ δεν υπάρχει } j \text{ με } \xi_k = \lambda_j \ , \end{cases}$$

  όπου t τυχαίος αριθμός του [0,1], είναι επίσης μία λύση του προβλήματος.

- την *ορισμένη* περίπτωση, στην οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει. Σ' αυτήν την περίπτωση, θα δείξουμε στην §8.3 ότι το πρόβλημα των ροπών έχει μία και μοναδική λύση.

Το πρόβλημα των ροπών είναι ένα σημαντικό πρόβλημα, που πρώτος έθεσε ο Stieltjes σ' αυτήν την εργασία του. Βέβαια, γι' αυτόν το πρόβλημα αυτό έχει ενδιαφέρον επειδή χρησιμοποιώντας το καταφέρνει ν' απαντήσει στο ερώτημα της σύγκλισης ή απόκλισης του συνεχούς κλάσματός του. Αργότερα, το 1919, ο H. L. Hamburger (1889-1956) μελέτησε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας στη θέση της ημιευθείας Ox ολόκληρο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αν και ο Hamburger συνδέει, όπως ο Stieltjes, το πρόβλημα με την αναλυτική θεωρία των συνεχών κλασμάτων, δεν συμβαίνει το ίδιο και με την εργασία που δημοσιεύει την επόμενη χρονιά ο F. Hausdorff (1868-1942), που μελετά το ίδιο πρόβλημα ορισμένο σε πεπερασμένο διάστημα. Το 1922 δημοσιεύονται δύο νέες εργασίες, όπου το πρόβλημα των ροπών δεν έχει πια καμία σχέση με τα συνεχή κλάσματα. Η μία είναι του R. Nevanlinna (1895-1980), ο οποίος μελετά το πρόβλημα των ροπών έτσι όπως το όρισε ο Hamburger χρησιμοποιώντας μόνο μιγαδική ανάλυση. Η άλλη είναι του M. Riesz (1886-1969), ο οποίος συνδέει το πρόβλημα με τα φραγμένα συναρτησοειδή του χώρου των συνεχών συναρτήσεων ενός κλειστού και φραγμένου διαστήματος, δηλαδή μελετά το πρόβλημα από την πλευρά της συναρτησιακής ανάλυσης.

Για μία αναλυτική ιστορική αναδρομή του προβλήματος αυτού παραπέμπουμε στο [8].

Κεφάλαιο 5

Θεωρήματα της Μιγαδικής Ανάλυσης που βοηθούν στη μελέτη του συνεχούς κλάσματος Stieltjes.

Στο πέμπτο κεφάλαιο της δημοσίευσής του ο Stieltjes αποδεικνύει προτάσεις από τη Μιγαδική Ανάλυση, τις οποίες στο τέλος του κεφαλαίου εφαρμόζει για να πάρει καινούρια αποτελέσματα στη θεωρία του. Αρχίζει με ένα θεώρημα το οποίο αργότερα θα γενικεύσει. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό στη μιγαδική ανάλυση με το όνομα Stieltjes-Vitali, διότι αποδείχθηκε την ίδια περίοδο και από τον G. Vitali (1875-1932).

Θεώρημα 5.1 *Έστω μία ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής* (f_n) *που είναι ολόμορφες στο εσωτερικό κυκλικού δίσκου* C *με κέντρο την αρχή των αξόνων 0 και ακτίνα* R. *Άρα, καθεμιά τους θα παίρνει τη μορφή*

$$f_k(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} A_i^{(k)} z^i$$

για κάθε z *με* $|z| < R$.

Υποθέτουμε ακόμη ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στον κυκλικό δίσκο*[1] C_1 *με κέντρο 0 και ακτίνα* $R_1 < R$.

Τέλος, θεωρούμε ότι σε κάθε κυκλικό δίσκο C' *με κέντρο 0 και ακτίνα* $R' < R$, *τέτοια ώστε η διαφορά* $R - R'$ *είναι οσοδήποτε μικρή, το μέτρο του αθροίσματος*

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

είναι άνω φραγμένο, ανεξάρτητα από το φυσικό n, *από τον αριθμό* L'. *Είναι προφανές ότι όσο η* R' *πλησιάζει την* R *τόσο το άνω φράγμα* L' *μεγαλώνει.*

Όταν ισχύουν οι τρεις παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κυκλικό δίσκο* C'.

[1] Στο κεφάλαιο αυτό όταν γράφουμε «κυκλικός δίσκος» θα εννοούμε «κλειστός κυκλικός δίσκος».

Πόρισμα 5.1 *Στο προηγούμενο θεώρημα η ακτίνα R' του κυκλικού δίσκου C' είναι μικρότερη της R. Όμως, μπορούμε να την πάρουμε έτσι ώστε η διαφορά της από την R να είναι οσοδήποτε μικρή και, επομένως, η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο που περιέχεται στο δίσκο C. Σύμφωνα με το θεώρημα του Weierstrass, η παραπάνω σειρά θα παριστάνει συνάρτηση ολόμορφη στο εσωτερικό του C.*

Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής λήμματα.

Λήμμα 5.1 *Εάν η σειρά $f(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i z^i$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| = r$, τότε ισχύει ότι*

$$|\alpha_i| \leq \frac{M}{r^i} \ ,$$

όπου $M = \max_{|z|=r} |f(z)|$.

Απόδειξη: Όταν ισχύουν οι προϋποθέσεις του λήμματος, τότε για τα α_i έχουμε ότι:

$$\alpha_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{i+1}} \, dz \ .$$

Άρα,

$$|\alpha_i| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{|z|^{i+1}} \, |dz| \leq \frac{1}{2\pi} M \frac{1}{r^{i+1}} \, 2\pi r = \frac{M}{r^i} \ .$$

Παρατήρηση 5.1 *Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο προκύπτει ότι, αν η σειρά $f(z) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i z^i$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| = r$, τότε ισχύει ακόμα και για τους αρνητικούς ακεραίους i ότι $|\alpha_i| \leq \frac{M}{r^i}$.*

Για τους αριθμούς $A_i^{(k)}$, όπου $i = 0, 1, 2 \ldots$ και $k = 1, 2, \ldots$ ισχύει το παρακάτω:

Λήμμα 5.2 *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.1, για κάθε i η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} A_i^{(k)}$ συγκλίνει.*

Απόδειξη: Η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \leq R_1$, άρα, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\left| \sum_{k=n}^{n+n'} f_k(z) \right| < \varepsilon$$

για οποιοδήποτε φυσικό n' και για κάθε μιγαδικό z με $|z| \leq R_1$.

Όμως, το άθροισμα $\sum_{k=n}^{n+n'} f_k(z)$ είναι ένα πεπερασμένο άθροισμα σειρών της μορφής

$$\sum_{i=0}^{+\infty} A_i^{(k)} z^i \ ,$$

που είναι όλες συγκλίνουσες στο εσωτερικό του δίσκου C. Επομένως, το παραπάνω πεπερασμένο άθροισμα μπορεί να γραφεί:

$$\sum_{k=n}^{n+n'} f_k(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{n+n'} A_i^{(k)} \right) z^i \ .$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| = R_1$, οπότε, εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα, έχουμε ότι

$$\left| \sum_{k=n}^{n+n'} A_i^{(k)} \right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i} \ ,$$

απ' όπου προκύπτει ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} A_i^{(k)}$ συγκλίνει.

Λήμμα 5.3 *Για κάθε $i = 0, 1, \ldots$ θέτουμε $c_i = \sum_{k=1}^{+\infty} A_i^{(k)}$. Τότε, με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.1, κάθε c_i θα ικανοποιεί την ανισότητα $|c_i| \leq \frac{L'}{R'^i}$.*

Απόδειξη: Όπως και στο προηγούμενο λήμμα, το άθροισμα $f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$ μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} A_i^{(k)} \right) z^i \ .$$

Επειδή η τελευταία σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| = R'$, από το λήμμα 5.1 παίρνουμε ότι

$$\left| \sum_{k=1}^{n} A_i^{(k)} \right| \leq \frac{L'}{R'^i}$$

και η παραπάνω ανισότητα ισχύει για το τυχαίο n. Επειδή $c_i = \sum_{k=1}^{+\infty} A_i^{(k)}$, θα έχουμε ότι $|c_i| \leq \frac{L'}{R'^i}$.

Πόρισμα 5.2 *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.1, η συνάρτηση $F(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} c_i z^i$ ορίζεται στο εσωτερικό του δίσκου C.*

Λήμμα 5.4 *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.1 και δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$\left| \sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)} \right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i}$$

και

$$\left| \sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)} \right| \leq \frac{2L'}{R'^i}$$

για κάθε i και n'.

Απόδειξη: Από την απόδειξη του λήμματος 5.2 έχουμε ότι για κάθε i η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} A_i^{(k)}$ συγκλίνει και ότι, δοθέντος $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός n, ο οποίος δεν εξαρτάται από το i, τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} A_i^{(k)}\right| < \frac{\varepsilon}{R_1^i}$$

για οποιοδήποτε φυσικό n'. Αυτό το τελευταίο συνεπάγεται ότι

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \leq \frac{\varepsilon}{R_1^i} \ .$$

Αν λάβουμε υπόψη τις δύο παραπάνω σχέσεις και την ισότητα

$$\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)} = \sum_{k=n}^{+\infty} A_i^{(k)} - \sum_{k=n}^{n+n'} A_i^{(k)} \ ,$$

καταλήγουμε στο ότι

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i} \ .$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z)\right| < 2L'$$

για $|z| \leq R'$ και για κάθε φυσικό n''. Όμως, η σειρά

$$\sum_{k=n+n'+1}^{n+n'+n''} f_k(z) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+n'+1}^{n+n'+n''} A_i^{(k)}\right) z^i$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| = R'$, άρα από το λήμμα 5.1 έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{n+n'+n''} A_i^{(k)}\right| < \frac{2L'}{R'^i} \ .$$

Αν $n'' \to +\infty$, τότε από την παραπάνω ανισότητα έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \leq \frac{2L'}{R'^i} \ .$$

Παρατήρηση 5.2 *Συνδυάζοντας τις αποδείξεις των λημμάτων 5.2 και 5.4 βγάζουμε το εξής συμπέρασμα. Με τις υποθέσεις του θεωρήματος 5.1, αν δοθεί* $\varepsilon > 0$*, τότε υπάρχει* n *έτσι ώστε*

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon$$

για οποιονδήποτε φυσικό n' *και για κάθε μιγαδικό* z *στον κυκλικό δίσκο ακτίνας* R_1*, στον οποίο η* $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα. Για τον ίδιο φυσικό* n *και για κάθε* n' *ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις*

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| < \frac{2\varepsilon}{R_1^i}$$

και

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \leq \frac{2L'}{R'^i}$$

για κάθε i*.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.1

Θα δείξουμε όχι μόνο ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κυκλικό δίσκο C', αλλά και ότι το άθροισμά της ισούται με $F(z)$, όπου F η συνάρτηση που ορίστηκε στο πόρισμα 5.2.

Θεωρούμε έναν κυκλικό δίσκο C'' κέντρου 0 και ακτίνας R'' με $R' < R'' < R$. Τότε, θα υπάρχει ένας θετικός αριθμός L'' έτσι ώστε για κάθε n και για κάθε $|z| \leq R''$ να ισχύει $|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)| < L''$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για να δείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε

$$\left|F(z) - \sum_{k=1}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon \quad (*)$$

για κάθε φυσικό αριθμό n' και για κάθε μιγαδικό z με $|z| \leq R'$.

Για να προσδιορίσουμε τον n εργαζόμαστε ως εξής. Η ακολουθία θετικών αριθμών

$$\left(2L'' \cdot \frac{(\frac{R'}{R''})^m}{1 - \frac{R'}{R''}}\right)$$

τείνει στο μηδέν, άρα υπάρχει φυσικός p τέτοιος ώστε

$$2L'' \cdot \frac{(\frac{R'}{R''})^{p+1}}{1 - \frac{R'}{R''}} < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

Έστω, επίσης,

$$M = 1 + \frac{R'}{R_1} + \left(\frac{R'}{R_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{R'}{R_1}\right)^p$$

και $\varepsilon' > 0$ τέτοιο ώστε

$$2M\varepsilon' < \frac{1}{2}\varepsilon \ .$$

Επειδή η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ συγκλίνει ομοιόμορφα για $|z| \le R_1$, υπάρχει φυσικός n έτσι ώστε

$$\left|\sum_{k=n}^{n+n'} f_k(z)\right| < \varepsilon'$$

για κάθε φυσικό n' και $|z| \le R_1$.

Από την τελευταία παρατήρηση, για $\varepsilon = \varepsilon'$ και για την ακτίνα R'' με το αντίστοιχο L'' έχουμε ότι

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| < \frac{2\varepsilon'}{R_1^i}$$

και

$$\left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \le \frac{2L''}{R''^i} \ .$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} F(z) - \sum_{k=1}^{n+n'} f_k(z) &= \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \left(c_i - \sum_{k=1}^{n+n'} A_i^{(k)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} z^i \left(\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right) \ . \end{aligned}$$

Οπότε για $|z| \le R'$ παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\left|F(z) - \sum_{k=1}^{n+n'} f_k(z)\right| \le \sum_{i=0}^{+\infty} R'^i \left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \\ = \ & \sum_{i=0}^{p} R'^i \left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| + \sum_{i=p+1}^{+\infty} R'^i \left|\sum_{k=n+n'+1}^{+\infty} A_i^{(k)}\right| \\ < \ & \sum_{i=0}^{p} R'^i \frac{2\varepsilon'}{R_1^i} + \sum_{i=p+1}^{+\infty} R'^i \frac{2L''}{R''^i} \\ = \ & 2M\varepsilon' + 2L'' \cdot \frac{(\frac{R'}{R''})^{p+1}}{1 - \frac{R'}{R''}} < \varepsilon \ . \end{aligned}$$

Άρα, η (*) έχει αποδειχθεί.

Στη συνέχεια γενικεύουμε το θεώρημα 5.1 ως εξής.

Θεώρημα 5.2 *Έστω* (f_n) *ακολουθία συναρτήσεων ολόμορφων σ' ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο* S, *το σύνορο του οποίου το συμβολίζουμε με* s.[2]

Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$ *συγκλίνει ομοιόμορφα σε κυκλικό δίσκο* C_1, *που περιέχεται στο* S.

Τέλος, υποθέτουμε ότι το μέτρο του αθροίσματος

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)$$

είναι άνω φραγμένο από το L' *στο τυχαίο συμπαγές υποσύνολο* S' *του* S *και ότι το* L' *εξαρτάται μόνο από το* S'.

Τότε, ***η σειρά***

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(z)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο S' *του* S ***και παριστάνει συνάρτηση ολόμορφη στο*** S.

Απόδειξη[3] : Χωρίζουμε το S σε δύο σύνολα A και B ξένα μεταξύ τους: το A περιέχει όλα τα σημεία z του S για τα οποία υπάρχει δίσκος κέντρου z στον οποίο η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα, ενώ $B = S - A$.

Το A είναι μη κενό, αφού περιέχει όλα τα εσωτερικά σημεία του C_1. Επίσης, φαίνεται εύκολα ότι είναι ανοικτό σύνολο (αφού γράφεται ως ένωση ανοικτών περιοχών).

Θα δείξουμε ότι και το B είναι ανοικτό σύνολο. Έστω z_0 τυχαίο σημείο του B. Τότε, δεν υπάρχει καμία περιοχή του z_0 στην οποία η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ να συγκλίνει ομοιόμορφα. Θεωρούμε δίσκο C_0 κέντρου z_0 και ακτίνας R_0, τέτοιας ώστε κάθε εσωτερικό σημείο του C_0 να απέχει από το σύνορο του S περισσότερο από R_0. Έπειτα, παίρνουμε τυχαίο σημείο z στο εσωτερικό του C_0 και τρεις κυκλικούς δίσκους με κέντρο το z: ο πρώτος δίσκος C_2 έχει οσοδήποτε μικρή ακτίνα και περιέχεται στον C_0, ο δεύτερος δίσκος C' θα έχει ακτίνα R_0 και ο τρίτος, έστω C, περιέχει τους άλλους δύο και περιέχεται στο S. Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στον C_2, τότε, επειδή το C είναι συμπαγές υποσύνολο του S, από την υπόθεση του θεωρήματος και από το θεώρημα 5.1 έπεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα και στον C'. Επειδή το z_0 είναι εσωτερικό σημείο του C', έχουμε ότι η παραπάνω σειρά θα συγκλίνει ομοιόμορφα και σε δίσκο κέντρου z_0, πράγμα άτοπο.

Καταλήξαμε σε άτοπο επειδή υποθέσαμε ότι υπάρχει δίσκος με κέντρο το τυχαίο εσωτερικό σημείο z του C_0, στον οποίο η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ να συγκλίνει ομοιόμορφα. Άρα, $z \in B$ και το B είναι ανοικτό σύνολο.

Τελικά, το συνεκτικό σύνολο S γράφεται ως ένωση δύο ανοικτών και ξένων μεταξύ τους συνόλων A και B κι, επειδή το A είναι μη κενό, έχουμε αναγκαστικά ότι $B = \emptyset$ και

[2] Ο Stieltjes στη δημοσίευσή του θεωρεί μια «περιοχή» S, χωρίς να διευκρινίζει τι ακριβώς εννοεί. Από την απόδειξη που δίνει φαίνεται ότι θέλει το S να είναι ανοικτό και συνεκτικό σύνολο.

[3] Η απόδειξη που δίνει ο Stieltjes στην εργασία του διαφέρει λίγο από αυτή που κάνουμε. Ξεκινά με ένα σημείο που περιέχεται στο εσωτερικό του C_1 και θεωρεί αρκετά μεγάλο κυκλικό δίσκο που έχει κέντρο το σημείο αυτό και περιέχεται ολόκληρος στο S. Εφαρμόζοντας το θεώρημα 5.1 επεκτείνει την ακτίνα ομοιόμορφης σύγκλισης γύρω από το σημείο αυτό και, χρησιμοποιώντας τη συνεκτικότητα του S, δείχνει τελικά ότι έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση σε κάθε συμπαγές υποσύνολό του.

$S = A$. Δηλαδή, κάθε σημείο του S είναι κέντρο δίσκου στον οποίο η $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα και, επομένως, η εν λόγω σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του S.

Παρατήρηση 5.3 *Από το παρακάτω θεώρημα και εφαρμόζοντας την Αρχή του Μεγίστου προκύπτει ότι το μέγιστο της συνάρτησης $|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)|$ λαμβάνεται πάντα στο σύνορο του S'. Άρα θα μπορούσαμε στις υποθέσεις του θεωρήματος να πούμε απλώς ότι η συνάρτηση $|f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z)|$ είναι φραγμένη στο σύνορο του S', ανεξάρτητα από το n. Τέλος, ο Stieltjes παρατηρεί ότι αντίστοιχο θεώρημα ισχύει για μιγαδικές συναρτήσεις δύο μιγαδικών μεταβλητών.*

Το παρακάτω θεώρημα είναι από τα σημαντικότερα αυτής της δημοσίευσης. Για την απόδειξή του ο Stieltjes χρησιμοποιεί το προηγούμενο θεώρημα.

Θεώρημα 5.3 *Η ακολουθία συναρτήσεων $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $F(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - A$, όπου A είναι το σύνολο των μη θετικών πραγματικών αριθμών. Η συνάρτηση F είναι ολόμορφη σ' όλο το $\mathbb{C} - A$.*

Απόδειξη: Στην παράγραφο §3.3 είδαμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$ ισχύει

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{\alpha_2}{Q_0(z)Q_2(z)} + \frac{\alpha_4}{Q_2(z)Q_4(z)} + \ldots + \frac{\alpha_{2n}}{Q_{2n-2}(z)Q_{2n}(z)}$$

και, επίσης, ότι η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο S του συνόλου H των μιγαδικών αριθμών με θετικό πραγματικό μέρος. Επειδή πρόκειται για σειρά συναρτήσεων που είναι ολόμορφες στο H, έπεται ότι και η συνάρτηση

$$F(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)} = \lim \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$$

είναι ολόμορφη στο H. Επίσης, έχουμε ότι

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{\alpha_2}{Q_0(z)Q_2(z)} + \frac{\alpha_4}{Q_2(z)Q_4(z)} + \ldots + \frac{\alpha_{2n}}{Q_{2n-2}(z)Q_{2n}(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{z + x_i^{(n)}} \ ,$$

ενώ για κάθε z στο $\mathbb{C} - A$ ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z)Q_{2k}(z)} \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{|z + x_i^{(n)}|} \ .$$

Συμβολίζουμε με $< z >$ το ελάχιστο της παράστασης $|z + u|$ καθώς το u διατρέχει τον άξονα των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Τότε, αν $z = a + bi$, θα ισχύει ότι

$$< z >= \begin{cases} |z|, & \text{εάν } a \geq 0 \\ |b|, & \text{εάν } a < 0 \,. \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση το $< z >$ είναι θετικό και από τον ορισμό του έχουμε ότι ισχύει $|z + u| \geq < z >$, οπότε

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z) Q_{2k}(z)} \right| \leq \frac{1}{< z >} \sum_{i=1}^{n} M_i^{(n)} = \frac{1}{< z > \alpha_1} \,.$$

Θεωρούμε στη συνέχεια συμπαγές υποσύνολο S, που δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το A. Η συνάρτηση $< z >$ θα λαμβάνει στο S μία ελάχιστη θετική τιμή λ. Επομένως, ισχύει

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k}}{Q_{2k-2}(z) Q_{2k}(z)} \right| \leq \frac{1}{\alpha_1 \lambda} \,,$$

όποιος κι αν είναι ο φυσικός n.

Επειδή ικανοποιούνται όλες οι προϋποθέσεις του θεωρήματος 5.2, η παραπάνω σειρά, επομένως και η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} \right)$, θα συγκλίνει ομοιόμορφα στην $F(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - A$.

Αντίστοιχα πράγματα ισχύουν και για την ακολουθία $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} \right)$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει

$$\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \frac{1}{\alpha_1 z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_{2k+1} z}{Q_{2k-1}(z) Q_{2k+1}(z)}$$

και ότι η παραπάνω ακολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $F_1(z)$ (την οποία επίσης ορίσαμε και μελετήσαμε στην §3.3) σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του H. Επίσης, η $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} \right)$ είναι άνω φραγμένη σε κάθε τέτοιο συμπαγές υποσύνολο. Άρα, εφαρμόζοντας και πάλι το θεώρημα 5.2, έχουμε ότι η $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} \right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $F_1(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - A$. Τέλος, η $F_1(z)$ θα είναι ολόμορφη σε όλο το $\mathbb{C} - A$.

Στην περίπτωση που η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, οι $F(z)$ και $F_1(z)$ είναι διαφορετικές, ενώ όταν η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, οι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται. Δηλαδή, στη δεύτερη περίπτωση ισχύει ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z) \,, \quad z \in \mathbb{C} - A$$

και, μάλιστα, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - A$.

Οι παραπάνω σχέσεις φανερώνουν το πώς συμπεριφέρονται οι συναρτήσεις $F(z)$ και $F_1(z)$ στο $\mathbb{C} - A$. Θα προσπαθήσουμε να τις επεκτείνουμε και σε σημεία του A, χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα 5.2. Όπως και προηγουμένως, θα μελετήσουμε το πρόβλημα αυτό μόνο για τη συνάρτηση $F(z)$. Αντίστοιχα αποτελέσματα ισχύουν και για την $F_1(z)$.

Θεώρημα 5.4 *Η συνάρτηση $F(z)$, που ορίστηκε παραπάνω, επεκτείνεται παντού στο $\mathbb{C} - \{-\lambda_k |\ k \in \mathbb{N}\}$. Μάλιστα, η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$, από κάποιο δείκτη n και έπειτα, συγκλίνει ομοιόμορφα στην $F(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - \{-\lambda_k |\ k \in \mathbb{N}\}$.*

Απόδειξη: Γνωρίζουμε από το κεφάλαιο 4 ότι η ακολουθία $(-\lambda_k)$ είναι μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία αρνητικών αριθμών που αποκλίνει στο $-\infty$. Θεωρούμε δύο τυχαίους και διαδοχικούς όρους $-\lambda_{k+1} < -\lambda_k$ και τους θετικούς a και b για τους οποίους ισχύει ότι $-\lambda_{k+1} < -b < -a < -\lambda_k$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(k)$, που είναι τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq n_0$ το πολυώνυμο $Q_{2n}(z)$ να μην έχει ρίζα στο $(-b, -a)$. Παίρνουμε τυχαία a', b' με $-b < -b' < -a' < -a$. Για κάθε z με $a' \leq |z| \leq b'$ ισχύει

$$\left|\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{z + x_i^{(n)}}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{|z + x_i^{(n)}|} \leq \frac{1}{\alpha_1 min(a' - a, b - b')} \ .$$

Η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)_{n \geq n_0}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη σε κάθε δακτύλιο $a' \leq |z| \leq b'$ και, σύμφωνα με το θεώρημα 5.3, συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε δίσκο που περιέχεται στον $a < |z| < b$ και δεν τέμνει το A. Από το θεώρημα 5.2 συνεπάγεται ότι η ακολουθία αυτή θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δακτυλίου $a < |z| < b$. Επομένως, η $F(z)$ επεκτείνεται στο δακτύλιο αυτόν και, γενικότερα, η F ορίζεται στο $\mathbb{C} - \{-\lambda_k |\ k \in \mathbb{N}\}$ και σε κάθε συμπαγές υποσύνολό του θα είναι το ομοιόμορφο όριο της ακολουθίας $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$.

Άμεση συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος είναι ότι η συνάρτηση $F(z)$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} - \{-\lambda_k |\ k \in \mathbb{N}\}$. Σε κάθε δακτύλιο $\lambda_k < |z| < \lambda_{k+1}$ θα έχει ανάπτυγμα Laurent της μορφής

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i^{(k)} z^i \ ,$$

όπου κάθε $c_i^{(k)}$ είναι το όριο των αντίστοιχων συντελεστών των αναπτυγμάτων Laurent των $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$ στο δακτύλιο $x_k^{(n)} < |z| < x_{k+1}^{(n)}$. Συνεπώς, ο $c_{-1}^{(k)}$ είναι το όριο των συντελεστών του z^{-1} στο ανάπτυγμα του

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \frac{M_1^{(n)}}{z + x_1^{(n)}} + \frac{M_2^{(n)}}{z + x_2^{(n)}} + \ldots + \frac{M_n^{(n)}}{z + x_n^{(n)}} \ .$$

Ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 5.1 *Ο συντελεστής $c_{-1}^{(k)}$ του αναπτύγματος Laurent της $F(z)$ στο δακτύλιο $\lambda_k < |z| < \lambda_{k+1}$ ισούται με*

$$c_{-1}^{(k)} = \lim_{n \to +\infty} \left(M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_k^{(n)}\right) \ . \tag{5.1}$$

Απόδειξη: Στο δακτύλιο $x_k^{(n)} < |z| < x_{k+1}^{(n)}$ ισχύουν τα παρακάτω:

- εάν $i \leq k$, τότε
$$\frac{1}{z + x_i^{(n)}} = \frac{1}{z} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \Big(\frac{x_i^{(n)}}{z}\Big)^m ,$$
διότι $\left|\frac{x_i^{(n)}}{z}\right| < 1$.

- εάν $i > k$, τότε
$$\frac{1}{z + x_i^{(n)}} = \frac{1}{x_i^{(n)}} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \Big(\frac{z}{x_i^{(n)}}\Big)^m ,$$
διότι $\left|\frac{z}{x_i^{(n)}}\right| < 1$.

Επομένως, το ανάπτυγμα Laurent του $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}$ στο δακτύλιο $x_k^{(n)} < |z| < x_{k+1}^{(n)}$ είναι:

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{i=1}^{k} M_i \left(\frac{1}{z} - \frac{x_i^{(n)}}{z^2} + \frac{(x_i^{(n)})^2}{z^3} - \dots\right) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i \left(\frac{1}{x_i^{(n)}} - \frac{z}{(x_i^{(n)})^2} + \frac{z^2}{(x_i^{(n)})^3} + \dots\right).$$

Άρα, ο συντελεστής του z^{-1} είναι ο $M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_k^{(n)}$ και η πρόταση έχει αποδειχθεί, αν λάβουμε υπόψη την παρατήρηση που προηγήθηκε της πρότασης.

Τέλος, ορίζουμε μια ακολουθία κλιμακωτών συναρτήσεων που θα παίξει σημαντικό ρόλο στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας του Stieltjes.

Με βάση την αναπαράσταση
$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k^{(n)}}{z + x_k^{(n)}} ,$$
ορίζουμε την κλιμακωτή συνάρτηση $\phi_n(u)$ ως εξής:
$$\phi_n(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < x_1^{(n)} \\ M_1^{(n)}, & x_1^{(n)} \leq u < x_2^{(n)} \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)}, & x_2^{(n)} \leq u < x_3^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_{n-1}^{(n)}, & x_{n-1}^{(n)} \leq u < x_n^{(n)} \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)}, & x_n^{(n)} \leq u < +\infty. \end{cases}$$

Παρατήρηση 5.4 *Εάν c είναι ένας θετικός μεταξύ των λ_k και λ_{k+1}, τότε για αρκετά μεγάλα n, τέτοια ώστε να ισχύει $x_k^{(n)} < c < x_{k+1}^{(n)}$, έχουμε ότι*
$$\phi_n(c) = M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_k^{(n)} .$$

Άρα, με βάση την προηγούμενη πρόταση, θα είναι

$$c_{-1}^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(c) \ . \tag{5.2}$$

Κεφάλαιο 6

Κατανομή μάζας και το ολοκλήρωμα Stieltjes.

Στο τέλος του τέταρτου κεφαλαίου της δημοσίευσής του, ο Stieltjes, μιλώντας για το πρόβλημα των ροπών, θεώρησε μία τυχαία κατανομή μάζας κατά μήκος του ημιάξονα $0x$. Η κατανομή μάζας στην οποία αναφέρθηκε ήταν «διακριτή», δηλαδή θεώρησε ένα σύστημα το πολύ αριθμησίμου πλήθους μαζών $(M_i, \xi_i) \quad i = 1, 2, 3, \ldots$, που κατανέμονταν κατά μήκος του $0x$ ως εξής: για κάθε i είναι τοποθετημένη μια μάζα M_i στο σημείο ξ_i. Αυτή η κατανομή περιγράφεται πλήρως από μία αύξουσα και κλιμακωτή συνάρτηση της ίδιας μορφής με αυτήν που ορίστηκε στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου.

Σ' αυτό το κεφάλαιο, που είναι από τα βασικότερα της δημοσίευσής του γιατί εδώ ορίζει και το περίφημο ολοκλήρωμά του, θεωρεί ότι έχει μια ποσότητα μάζας που κατανέμεται με συνεχή τρόπο κατά μήκος του $0x$. Μία τέτοια κατανομή θεωρείται πλήρως ορισμένη αν για κάθε σημείο x του ημιάξονα μπορούμε να υπολογίσουμε την ποσότητα της μάζας που είναι κατανεμημένη στο ευθύγραμμο τμήμα $0x$. Προφανώς, η ποσότητα της μάζας που έχουμε στο ευθύγραμμο τμήμα $0x$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x και ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή αν έχουμε μία αύξουσα συνάρτηση του x, τότε μπορούμε με αυτήν να ορίσουμε μία κατανομή μάζας κατά μήκος του ημιάξονα. Αυτός είναι και ο λόγος που κάνει τον Stieltjes να ασχοληθεί στο κεφάλαιο αυτό πρώτα με τις αύξουσες συναρτήσεις και να επισημάνει κάποιες βασικές ιδιότητές τους που θα χρησιμοποιήσει αργότερα.

6.1 Μελέτη των αυξουσών συναρτήσεων ως προς τη συνέχεια. Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης.

Η πρώτη ιδιότητα αφορά τα όρια αυξουσών συναρτήσεων και είναι η εξής.

Πρόταση 6.1 *Έστω $\phi(x)$ αύξουσα συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Εάν $x \in [a, b)$, τότε υπάρχει το δεξιό όριο $\phi(x+)$ στο x και ισχύει $\phi(x) \leq \phi(x+)$. Εάν $x \in (a, b]$, τότε υπάρχει το αριστερό όριο $\phi(x-)$ και ισχύει $\phi(x-) \leq \phi(x)$.*

Απόδειξη: Θα δείξουμε ότι υπάρχει το δεξιό όριο σε κάθε $x \in [a, b)$ και ότι ισχύει $\phi(x) \leq \phi(x+)$. Το δεύτερο μέρος της πρότασης αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

Θεωρούμε μία τυχαία φθίνουσα και μηδενική ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών. Τότε, και η $(\phi(x+\varepsilon_n))$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία κάτω φραγμένη από τον αριθμό $\phi(x)$. Άρα, έχει όριο κάποιον αριθμό A και, μάλιστα, λόγω της μονοτονίας είναι

$$A = \inf_{n\epsilon\mathbb{N}} \phi(x+\varepsilon_n) \ . \quad (1)$$

Εάν (ε_n') είναι μία άλλη τυχαία φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών, τότε και η $(\phi(x+\varepsilon_n'))$ θα έχει κάποιο όριο B και, επίσης, θα ισχύει:

$$B = \inf_{n\epsilon\mathbb{N}} \phi(x+\varepsilon_n') \ . \quad (2)$$

Έστω ότι είναι $A \neq B$. Εάν $A > B$, τότε λόγω της (2) υπάρχει k τέτοιο ώστε

$$A > \phi(x+\varepsilon_k') \geq B \ . \ (3)$$

Όμως, η φθίνουσα ακολουθία $(x+\varepsilon_n)$ τείνει στο x. Επομένως, υπάρχει φυσικός m τέτοιος ώστε $x+\varepsilon_k' > x+\varepsilon_m > x$. Από το τελευταίο έχουμε $\phi(x+\varepsilon_k') \geq \phi(x+\varepsilon_m) \geq \phi(x)$, οπότε, λόγω της (1), είναι $\phi(x+\varepsilon_k') \geq A$, το οποίο είναι άτοπο λόγω της (3). Όμοια, καταλήγουμε σε άτοπο, αν υποθέσουμε ότι $B > A$. Άρα είναι $A = B$.

Τέλος, επειδή για κάθε n είναι $x+\varepsilon_n > x$, θα έχουμε ότι $\phi(x+\varepsilon_n) \geq \phi(x)$. Άρα, λόγω της (1), θα είναι και $A \geq \phi(x)$.

Επειδή οι ακολουθίες (ε_n), (ε_n') που θεωρήσαμε ήταν τυχαίες, έπεται ότι υπάρχει το όριο $\phi(x+) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \phi(x+\varepsilon)$ και είναι ίσο με το A. Συνεπώς, ισχύει $\phi(x+) \geq \phi(x)$.

Παρατήρηση 6.1 *Όπως παρατηρεί και ο Stieltjes σε σχέση με την πρόταση 6.1, αν $x \in (a,b)$ και $\phi(x+) > \phi(x-)$, τότε η ϕ είναι ασυνεχής στο x, ενώ, αν $\phi(x+) = \phi(x-)$, τότε η ϕ είναι συνεχής στο x. Σε κάθε περίπτωση η διαφορά $\phi(x+) - \phi(x-)$ είναι το* ***άλμα*** *της ϕ στο x. Αν $\phi(a+) > \phi(a)$, η ϕ είναι ασυνεχής στο a, ενώ, αν $\phi(a+) = \phi(a)$, τότε η ϕ είναι συνεχής στο a. Η διαφορά $\phi(a+) - \phi(a)$ είναι το* ***άλμα*** *της ϕ στο a. Αν $\phi(b-) < \phi(b)$, η ϕ είναι ασυνεχής στο b και, αν $\phi(b-) = \phi(b)$, η ϕ είναι συνεχής στο b. Τότε, η $\phi(b) - \phi(b-)$ είναι το* ***άλμα*** *της ϕ στο b.*

Σχετικά με τα σημεία συνέχειας της αύξουσας συνάρτησης ϕ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.2 *Σε κάθε ανοικτό διάστημα του πεδίου ορισμού της, οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση ϕ έχει σημεία συνέχειας.*

Απόδειξη: Θεωρούμε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα (c,d) του πεδίου ορισμού της ϕ και παίρνουμε a, b ώστε $c < a < b < d$. Θέτουμε $\lambda = \phi(b) - \phi(a)$ και θεωρούμε τέσσερις αριθμούς p, q, r, s τέτοιους ώστε $a < p < q < r < s < b$. Είναι φανερό ότι μία τουλάχιστον από τις διαφορές $\phi(q) - \phi(p)$, $\phi(s) - \phi(r)$ είναι μικρότερη από $\frac{\lambda}{2}$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ας υποθέσουμε ότι $\phi(q) - \phi(p) < \frac{\lambda}{2}$.

Θέτουμε $a^{(1)} = p$, $b^{(1)} = q$, οπότε $\phi(b^{(1)}) - \phi(a^{(1)}) < \frac{\lambda}{2}$ και $a < a^{(1)} < b^{(1)} < b$.

Ομοίως, υπάρχουν $a^{(2)}$, $b^{(2)}$ ώστε $\phi(b^{(2)}) - \phi(a^{(2)}) < \frac{\lambda}{4}$ και $a^{(1)} < a^{(2)} < b^{(2)} < b^{(1)}$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μία γνησίως αύξουσα ακολουθία $\left(a^{(n)}\right)$ και μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία $\left(b^{(n)}\right)$ ώστε

$$a < a^{(1)} < \ldots < a^{(n)} < \ldots < b^{(n)} < \ldots < b^{(1)} < b$$

και

$$\phi(b^{(n)}) - \phi(a^{(n)}) < \frac{\lambda}{2^n}\ , \quad n = 1, 2, \ldots\ .$$

Η $(a^{(n)})$ συγκλίνει σε έναν αριθμό A και η $(b^{(n)})$ συγκλίνει σε έναν αριθμό $B \geq A$. Έστω γ μεταξύ των A και B. Τότε, για κάθε n ισχύει $a^{(n)} < \gamma < b^{(n)}$, οπότε από τον ορισμό των $\phi(\gamma-)$ και $\phi(\gamma+)$ έχουμε ότι $\phi(a^{(n)}) \leq \phi(\gamma-)$ και $\phi(\gamma+) \leq \phi(b^{(n)})$. Άρα,

$$0 \leq \phi(\gamma+) - \phi(\gamma-) \leq \phi(b^{(n)}) - \phi(a^{(n)}) < \frac{\lambda}{2^n}\ .$$

Παίρνοντας όρια στην παραπάνω ανίσωση όταν $n \to +\infty$, έχουμε ότι $\phi(\gamma+) = \phi(\gamma-)$. Άρα το γ είναι σημείο συνέχειας της ϕ μέσα στο διάστημα (c, d) και η απόδειξη έχει τελειώσει.

Παρατήρηση 6.2 *Το πλήθος των σημείων ασυνέχειας κάθε αύξουσας συνάρτησης ϕ, που είναι ορισμένη στο $[a, b]$, είναι το πολύ αριθμήσιμο κι αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Είναι προφανές ότι το άθροισμα των αλμάτων της ϕ στα σημεία ασυνέχειας δεν μπορεί να ξεπεράσει το $\phi(b) - \phi(a)$. Έστω A το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της ϕ και A_k το σύνολο των σημείων ασυνέχειας όπου το άλμα είναι μεγαλύτερο από το $\frac{1}{k}$, όπου k τυχαίος φυσικός. Τότε, ισχύει ότι*

$$\frac{1}{k}\ card(A_k) \leq \sum_{x \in A_k} \left(\phi^+(x) - \phi^-(x)\right) \leq \sum_{x \in A} \left(\phi^+(x) - \phi^-(x)\right) \leq \phi(b) - \phi(a)\ ,$$

οπότε

$$card(A_k) \leq k(\phi(b) - \phi(a))\ .$$

Δηλαδή, για κάθε k το πλήθος των σημείων ασυνέχειας όπου το άλμα είναι μεγαλύτερο από $\frac{1}{k}$ είναι πεπερασμένο. Άρα, το $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ είναι ένωση αριθμησίμου πλήθους πεπερασμένων συνόλων και, επομένως, είναι το πολύ αριθμήσιμο.

Αυτό το τελευταίο συμπέρασμα («είναι το πολύ αριθμήσιμο») ο Stieltjes το διατυπώνει ως εξής[1]: «...Επειδή ο αριθμός των αλμάτων που υπερβαίνουν οποιονδήποτε δοσμένο (θετικό) αριθμό είναι πεπερασμένος, είναι φανερό ότι μπορούμε να διατάξουμε τα άλματα κατά φθίνουσα σειρά. Επομένως, τα σημεία ασυνέχειας στο διάστημα (a, b) μπορούν να διαταχθούν ως μία άπειρη ακολουθία με δείκτες φυσικούς αριθμούς...». Με άλλα λόγια μπορούμε να τα αριθμήσουμε, όπως λέμε εμείς σήμερα. Ο λόγος για τον οποίο δε χρησιμοποιεί την έκφραση «είναι το πολύ αριθμήσιμο» είναι ότι εκείνη την εποχή μόλις που είχε αρχίσει να γίνεται αποδεκτή η θεωρία του G. Cantor για την ύπαρξη διαφορετικών απείρων και τα πράγματα γύρω από την αριθμησιμότητα και την υπεραριθμησιμότητα δεν

[1] Βλ. [2], σελ. 70, δεύτερη παράγραφος.

ήταν και τόσο ξεκάθαρα. Μάλιστα, ο Stieltjes χρησιμοποιεί γνωστό θεώρημα της θεωρίας συνόλων του G. Cantor για να δείξει ότι και τα μη φραγμένα διαστήματα στο πεδίο ορισμού της αύξουσας συνάρτησης ϕ, περιέχουν το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας: εάν έχουμε ένα μη φραγμένο διάστημα, τότε αυτό γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση φραγμένων διαστημάτων, καθένα από τα οποία περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας. Επειδή, όπως έχει αποδείξει ο Cantor, αριθμήσιμη ένωση το πολύ αριθμήσιμων συνόλων είναι το πολύ αριθμήσιμο σύνολο, και το μη φραγμένο διάστημα θα περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος ασυνεχειών.[2]

Στο τέλος αυτής της παραγράφου θα ασχοληθούμε με τις συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης, που παίζουν σημαντικό ρόλο στην Πραγματική Ανάλυση. Αυτός που πρώτος τις χρησιμοποίησε και μελέτησε τις ιδιότητές τους ήταν ο C. Jordan (1838-1922) σε μία δημοσίευσή του το 1881, όπου ασχολούνταν με τις ευθυγραμμίσιμες καμπύλες. Μία εκτενέστερη μελέτη τους από τον ίδιο περιέχεται στον τρίτο τόμο του « Cours d' Analyse», που κυκλοφόρησε το 1887.

Ο Stieltjes δεν κάνει καμία αναφορά στις συναρτήσεις αυτές, όχι μόνο γιατί ήταν μία πρόσφατη και όχι ευρέως γνωστή έννοια της εποχής εκείνης, αλλά κι επειδή δεν έχουν σχέση με την εργασία του. Παρόλ' αυτά, αναφέρουμε τον ορισμό τους και τις σημαντικότερες ιδιότητές τους, επειδή θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμες στη γενίκευση του ολοκληρώματος Stieltjes.

Ορισμός 6.1 *Έστω ϕ μία συνάρτηση ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και μία τυχαία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του διαστήματος αυτού. Τότε, σχηματίζουμε το άθροισμα $V_a^b(\phi, D) = \sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})|$. Το ελάχιστο άνω φράγμα των παραπάνω αθροισμάτων ονομάζεται **κύμανση** της ϕ στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με $V_a^b\phi$. Δηλαδή, είναι*

$$V_a^b\phi = \sup\{V_a^b(\phi, D) |\ D \text{ διαμέριση του } [a,b]\} \ .$$

*Στην περίπτωση που $V_a^b\phi < +\infty$, θα λέμε ότι η συνάρτηση ϕ είναι **φραγμένης κύμανσης** στο $[a,b]$.*

Παράδειγμα 6.1 *Αν η ϕ είναι αύξουσα συνάρτηση στο $[a,b]$, τότε η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$. Πράγματι, για κάθε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ έχουμε ότι*

$$V_a^b(\phi, D) = \sum_{k=1}^{n} |\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) = \phi(b) - \phi(a) \ .$$

και, επομένως, $V_a^b\phi = \phi(b) - \phi(a) < +\infty$.

[2] [2], σελ. 70, στο τέλος της §37: "...Cela est vrai même lorsque l' intervalle considéré s' éntend à l' infini; on le divisera en intervalles

$$(a,b), (b,c), (c,d), (d,e), \ldots$$

On trouvera une suite infinie de discontinuités pour chaque intervalle; l' ensemble des discontinuités constituera une suite à double entrée, qu' on sait ranger comme une suite simple. De là on peut conclure de nouveau, d' aprés un théorème de M. Cantor, qu' il y a des points de continuité dans tout intervalle."

Πρόταση 6.3 *Αν οι ϕ_1, ϕ_2 είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ και λ, μ, είναι τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, τότε και η συνάρτηση $\lambda\phi_1+\mu\phi_2$ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχούσα διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ και έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V_a^b(\lambda\phi_1 + \mu\phi_2, D) &\leq |\lambda|V_a^b(\phi_1, D) + |\mu|V_a^b(\phi_2, D) \\ &\leq |\lambda|V_a^b\phi_1 + |\mu|V_a^b\phi_2 \ . \end{aligned}$$

Άρα,

$$V_a^b(\lambda\phi_1 + \mu\phi_2) \leq |\lambda|V_a^b\phi_1 + |\mu|V_a^b\phi_2 < +\infty \ .$$

Παρατήρηση 6.3 *Είναι προφανές ότι μία συνάρτηση ϕ ορισμένη στο $[a,b]$ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ αν και μόνο αν το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος είναι συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ και ότι ισχύουν*

$$V_a^b(Re\phi),\ V_a^b(Im\phi) \leq V_a^b\phi$$

και

$$V_a^b\phi \leq V_a^b(Re\phi) + V_a^b(Im\phi) \ .$$

Πρόταση 6.4 *Έστω ότι η συνάρτηση ϕ είναι ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $a < c < b$. Τότε, η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,c]$ και στο $[c,b]$. Επίσης, ισχύει ότι $V_a^b\phi = V_a^c\phi + V_c^b\phi$. Ειδικότερα, αν η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τότε είναι φραγμένης κύμανσης σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$.*

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχαίες διαμερίσεις $D_1 = \{a = x'_0 < x_1 < \ldots < x'_m = c\}$ και $D_2 = \{c = x''_0 < x''_1 < \ldots < x''_n = b\}$. Ορίζεται έτσι η διαμέριση

$$D = \{a = x'_0 < \ldots < x'_m = c = x''_0 < \ldots < x''_n = b\}$$

του $[a,b]$ και επομένως, ισχύει

$$V_a^c(\phi, D_1) + V_c^b(\phi, D_2) = V_a^b(\phi, D) \leq V_a^b\phi \ .$$

Μεταβάλλοντας τις D_1, D_2 ανεξάρτητα τη μία από την άλλη, βλέπουμε ότι

$$V_a^c\phi + V_c^b\phi \leq V_a^b\phi \ . \quad (1)$$

Άρα, αν $V_a^b\phi < +\infty$, τότε ισχύει $V_a^c\phi < +\infty$ και $V_c^b\phi < +\infty$.

Αντιστρόφως, παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a,b]$. Αν ισχύει ότι $x_n < c < x_{n+1}$ για κάποιο n, τότε θεωρούμε τις διαμερίσεις $D_1 = \{a = x_0 < \ldots < x_n < c\}$ και $D_2 = \{c < x_{n+1} < \ldots < x_m = b\}$ των $[a,c]$ και $[c,b]$, αντιστοίχως. Επειδή

$$|\phi(x_{n+1}) - \phi(x_n)| \leq |\phi(c) - \phi(x_n)| + |\phi(x_{n+1}) - \phi(c)| \ ,$$

συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned} V_a^b(\phi, D) &\leq V_a^c(\phi, D_1) + V_a^b(\phi, D_2) \\ &\leq V_a^c\phi + V_c^b\phi \ . \ (2) \end{aligned}$$

Αν $x_n = c$ για κάποιο n, θεωρούμε τις διαμερίσεις $D_1 = \{a = x_0 < \ldots < x_{n-1} < x_n = c\}$ και $D_2 = \{c = x_n < \ldots < x_m = b\}$. Αυτομάτως, έχουμε

$$V_a^b(\phi, D) = V_a^c(\phi, D_1) + V_c^b(\phi, D_2)$$

και παίρνουμε την ανισότητα (2) όπως προηγουμένως. Από τη (2) παίρνουμε ότι

$$V_a^b\phi \leq V_a^c\phi + V_c^b\phi \ . \ (3)$$

Επομένως, αν $V_a^b\phi < +\infty$ και $V_c^b\phi < +\infty$, τότε ισχύει $V_a^b\phi < +\infty$. Συνδυάζοντας τις (1) και (3) καταλήγουμε στην ισότητα

$$V_a^b\phi = V_a^c\phi + V_c^b\phi \ .$$

Ορισμός 6.2 *Αν η ϕ είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$, ορίζουμε τη συνάρτηση $V_a^x\phi$ για κάθε $x \in [a, b]$, όπου δεχόμαστε ότι $V_a^a\phi = 0$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση κύμανσης** της ϕ.*

Παρατήρηση 6.4 *Η συνάρτηση κύμανσης είναι, σύμφωνα με την πρόταση 6.4, αύξουσα συνάρτηση στο $[a, b]$, διότι, αν $a \leq x \leq y \leq b$, τότε $V_a^x\phi \leq V_a^x\phi + V_x^y\phi = V_a^y\phi$.*

Η σημαντικότερη ιδιότητα των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης, που αποδείχθηκε από τον Jordan το 1881, είναι ότι κάθε πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης γράφεται ως διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων. Στη συνέχεια θα δούμε την απόδειξη αυτής της ιδιότητας.

Για κάθε πραγματικό αριθμό t ορίζουμε τις ποσότητες $t^+ = \max(t, 0)$ και $t^- = \max(-t, 0)$ και παρατηρούμε ότι $t^+ - t^- = t$ και $t^+ + t^- = |t|$.

Ορισμός 6.3 *Έστω ϕ πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$ και τυχαία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$. Σχηματίζουμε τα αθροίσματα*

$$P_a^b(\phi, D) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^+ \quad \textit{και} \quad N_a^b(\phi, D) = \sum_{k=1}^{n} (\phi(x_k) - \phi(x_{k-1}))^- \ .$$

*Τα ελάχιστα άνω φράγματα των αθροισμάτων αυτών ονομάζονται **θετική κύμανση** και **αρνητική κύμανση**, αντίστοιχα, της ϕ στο $[a, b]$ και συμβολίζονται $P_a^b\phi$ και $N_a^b\phi$.*

Πρόταση 6.5 *Έστω πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης ϕ στο $[a, b]$. Τότε έχουμε ότι*

$$P_a^b\phi - N_a^b\phi = \phi(b) - \phi(a) \quad \textit{και} \quad P_a^b\phi + N_a^b\phi = V_a^b\phi \ .$$

Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε διαμέριση D του $[a,b]$ ισχύει ότι

$$P_a^b(\phi, D) + N_a^b(\phi, D) = V_a^b(\phi, D)$$

και

$$P_a^b(\phi, D) - N_a^b(\phi, D) = \phi(b) - \phi(a) \ .$$

Από τις ισότητες αυτές βρίσκουμε ότι

$$P_a^b(\phi, D) = \frac{1}{2}V_a^b(\phi, D) + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ ,$$

$$N_a^b(\phi, D) = \frac{1}{2}V_a^b(\phi, D) - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ .$$

Από την πρώτη ισότητα έχουμε ότι

$$P_a^b(\phi, D) \leq \frac{1}{2}V_a^b\phi + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2}$$

και, επομένως, ότι

$$P_a^b\phi \leq \frac{1}{2}V_a^b\phi + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ .$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}V_a^b(\phi, D) = P_a^b(\phi, D) - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \leq P_a^b\phi - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ ,$$

οπότε

$$\frac{1}{2}V_a^b\phi \leq P_a^b\phi - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ .$$

Έτσι αποδεικνύεται η ισότητα

$$P_a^b\phi = \frac{1}{2}V_a^b\phi + \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2}$$

και με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται και η

$$N_a^b\phi = \frac{1}{2}V_a^b\phi - \frac{\phi(b) - \phi(a)}{2} \ .$$

Ορισμός 6.4 *Αν η ϕ είναι πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τότε ορίζονται οι συναρτήσεις $P_a^x\phi$ και $N_a^x\phi$ για κάθε x στο $[a,b]$ (όπου $P_a^a\phi = N_a^a\phi = 0$). Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται* ***συνάρτηση θετικής κύμανσης*** *και* ***συνάρτηση αρνητικής κύμανσης της*** *ϕ, αντίστοιχα.*

Πρόταση 6.6 *Αν η ϕ είναι πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τότε η ϕ γράφεται ως διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

Απόδειξη: Επειδή για κάθε x στο $[a,b]$ ισχύει

$$P_a^x\phi = \frac{1}{2}V_a^x\phi + \frac{\phi(x)-\phi(a)}{2} \quad \text{και} \quad N_a^x\phi = \frac{1}{2}V_a^x\phi - \frac{\phi(x)-\phi(a)}{2} \ ,$$

συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $P_a^x\phi$ και $N_a^x\phi$ είναι αύξουσες στο $[a,b]$. Τέλος, επειδή

$$\phi(x)-\phi(a) = P_a^x\phi - N_a^x\phi \ ,$$

συμπεραίνουμε ότι η ϕ γράφεται ως διαφορά των αυξουσών συναρτήσεων $P_a^x\phi + \phi(a)$ και $N_a^x\phi$.

6.2 Το ορισμένο ολοκλήρωμα Stieltjes.

Στην αρχή αυτής της παραγράφου, όπου ορίζεται το ολοκλήρωμα που φέρει το όνομά του, ο Stieltjes εξηγεί πώς μία αύξουσα συνάρτηση μας δίνει πληροφορίες για τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται μια ποσότητα μάζας κατά μήκος του άξονα $0x$.

Έστω ότι έχουμε μία αύξουσα συνάρτηση ϕ που ορίζεται στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Εάν το x είναι σημείο ασυνέχειας της ϕ, τότε θεωρούμε ότι στο σημείο αυτό υπάρχει ένα συμπύκνωμα μάζας ίσο με $\phi(x+)-\phi(x-)$, αν $x>0$ και ίσο με $\phi(0+)-\phi(0)$, αν $x=0$. Η μάζα που υπάρχει σε κάθε σημείο συνέχειας θεωρείται αμελητέα, δηλαδή είναι ίση με μηδέν. Από το σημείο αυτό και πέρα υπάρχει κάποια ασάφεια, την οποία ο Stieltjes προσπαθεί να διορθώσει παρακάτω. Αναφέρεται, για παράδειγμα, ότι η μάζα που υπάρχει στο τυχαίο διάστημα $[a,b]$ είναι ίση με $\phi(b)-\phi(a)$. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο όταν η ϕ είναι συνεχής από τα αριστερά στο a και από τα δεξιά στο b. Επίσης, αναφέρεται ότι η ποσότητα της μάζας σε ένα διάστημα δεν εξαρτάται από τις τιμές της ϕ στα άκρα του διαστήματος, αλλά από τις τιμές της πολύ κοντά στα άκρα. Άρα, το διάστημα $0x$ περιέχει μάζα ίση με $\phi(x+)-\phi(0)$ ή ίση με $\phi(x+)$, αν υποθέσουμε ότι $\phi(0)=0$. Η ποσότητα της μάζας που είναι συγκεντρωμένη στο σημείο x και προέρχεται από την «αριστερή πλευρά» (δηλαδή η ποσότητα της μάζας που περιέχεται οσοδήποτε κοντά στο x και είναι ταυτόχρονα στο διάστημα $0x$) είναι ίση με $\phi(x)-\phi(x-)$, ενώ η ποσότητα της μάζας στο ίδιο σημείο που είναι συγκεντρωμένη από την «δεξιά πλευρά» είναι $\phi(x+)-\phi(x)$.

Για να αποφύγουμε τις ανακρίβειες, υπολογίζουμε την ποσότητα μάζας που περιέχεται σ' ένα διάστημα ως εξής:

- Αν έχουμε το $[a,b]$, τότε η μάζα στο διάστημα αυτό είναι $\phi(b+)-\phi(a-)$, αν $a>0$, και $\phi(b+)-\phi(a)$, όταν $a=0$.
- Για το $[a,b)$ είναι $\phi(b-)-\phi(a-)$, αν $a>0$, και $\phi(b-)-\phi(a)$, όταν $a=0$.
- Για το $(a,b]$ είναι $\phi(b+)-\phi(a+)$.
- Το (a,b) περιέχει μάζα ίση με $\phi(b-)-\phi(a+)$.

Έχοντας διευκρινίσει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται μία ποσότητα μάζας κατά συνεχή τρόπο στον άξονα $0x$, ο Stieltjes γενικεύει και την έννοια της ροπής k-τάξης, ώστε να μπορέσει να ασχοληθεί με το πρόβλημα των ροπών και σ' αυτήν την περίπτωση. Σ' αυτό το σημείο ορίζει το ολοκλήρωμα του.

Ορισμός 6.5 *Έστω πραγματική και φραγμένη συνάρτηση f στο $[a, b]$, καθώς και μία αύξουσα συνάρτηση ϕ, που ορίζεται επίσης στο $[a, b]$. Θεωρούμε μία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του διαστήματος $[a, b]$ και στη συνέχεια παίρνουμε n αριθμούς $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ τέτοιους ώστε $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$. Ονομάζουμε* ***πλάτος*** *της διαμέρισης D τον αριθμό $|D| = \max_{1 \leq k \leq n}(x_k - x_{k-1})$.*

Το όριο του αθροίσματος

$$f(\xi_1)(\phi(x_1) - \phi(x_0)) + f(\xi_2)(\phi(x_2) - \phi(x_1)) + \ldots + f(\xi_n)(\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})) \quad (6.1)$$

καθώς το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, εφόσον υπάρχει στο $\mathbb{R}$, είναι το ***ορισμένο ολοκλήρωμα Stieltjes της*** *f* ***στο*** *$[a, b]$* ***ως προς την αύξουσα συνάρτηση*** *ϕ και το συμβολίζουμε με*

$$\int_a^b f(u)\, d\phi(u) .$$

Σ' αυτήν την περίπτωση η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, b]$.

Παρατήρηση 6.5 *Για να υπάρχει το παραπάνω όριο στο $\mathbb{R}$ είναι απαραίτητο οι f και ϕ να πληρούν κάποιες προϋποθέσεις. Αν υποθέσουμε την f συνεχή στο $[a, b]$, τότε, όπως παρατηρεί και ο Stieltjes χωρίς όμως να δίνει απόδειξη, το παραπάνω ολοκλήρωμα πάντοτε υπάρχει. Ο ίδιος πάντως δεν ασχολείται με τις προϋποθέσεις ύπαρξης του ολοκληρώματος του, γιατί, όπως αναφέρει, θα τον απασχολήσουν μόνο οι περιπτώσεις όπου $f(u) = u^k$ ή $f(u) = \frac{1}{z+u}$. Δε θεωρεί ότι έχει κάνει κάτι το διαφορετικό από το ολοκλήρωμα Riemann και αυτός είναι και ο λόγος που χρησιμοποιεί παρακάτω, χωρίς να κάνει αποδείξεις, απλές ιδιότητές του, όπως η γραμμικότητα ως προς την ολοκληρωτέα συνάρτηση.*

Παρατήρηση 6.6 *Η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος δεν αλλάζει αν μεταβάλλουμε τις τιμές της ϕ στα σημεία ασυνέχειάς της που βρίσκονται στο εσωτερικό του $[a, b]$, με την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής σ' όλο το διάστημα $[a, b]$ και ότι η ϕ παραμένει αύξουσα μετά από τις αλλαγές στις τιμές της. Πράγματι, αν παίρνουμε πάντα τα σημεία της διαμέρισης D που χρησιμοποιούμε στο άθροισμα της (6.1), έτσι ώστε να είναι σημεία συνέχειας της ϕ (πράγμα το οποίο γίνεται γιατί έχουμε δείξει ότι σε κάθε διάστημα μια αύξουσα συνάρτηση έχει το πολύ αριθμήσιμου πλήθους σημεία ασυνέχειας), τότε η τιμή του παραπάνω αθροίσματος δεν επηρεάζεται από τις αλλαγές στα σημεία ασυνέχειας, άρα ούτε και το όριο επηρεάζεται. Αντίθετα με τα παραπάνω, αν αλλάξουμε τις τιμές της ϕ στα άκρα a, b της ολοκλήρωσης, τότε αλλάζει εν γένει και η τιμή του ολοκληρώματος. Ο Stieltjes το αιτιολογεί αυτό λέγοντας ότι, αλλάζοντας τα $\phi(a)$ και $\phi(b)$, αλλάζει η τιμή του αθροίσματος της (6.1) και άρα αλλάζει το όριό του.*

Όπως είδαμε, ο Stieltjes θεώρησε κατά τον ορισμό του ολοκληρώματός του ότι η ϕ είναι αύξουσα. Ο ορισμός αυτός γενικεύεται ως εξής.

Ορισμός 6.6 *Έστω f, ϕ φραγμένες μιγαδικές συναρτήσεις που ορίζονται στο διάστημα $[a,b]$. Θεωρούμε μία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ του διαστήματος $[a,b]$ και τους n τυχαίους αριθμούς ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n, που είναι τέτοιοι ώστε $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$.*

Το όριο του αθροίσματος

$$f(\xi_1)\left(\phi(x_1) - \phi(x_0)\right) + f(\xi_2)\left(\phi(x_2) - \phi(x_1)\right) + \ldots + f(\xi_n)\left(\phi(x_n) - \phi(x_{n-1})\right)$$

καθώς το πλάτος της διαμέρισης τείνει στο μηδέν, εφόσον υπάρχει στο $\mathbb{C}$, είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα Stieltjes της f στο $[a,b]$ ως προς τη συνάρτηση ϕ και το συμβολίζουμε με

$$\int_a^b f(u)\ d\phi(u)\ .$$

Σ' αυτήν την περίπτωση η f θα λέγεται ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a,b]$.

Ακολουθούν κάποιες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματός του, που ο Stieltjes χρησιμοποιεί χωρίς να αποδεικνύει.

Πρόταση 6.7 *Έστω οι φραγμένες συναρτήσεις f, ϕ_1, ϕ_2 που ορίζονται στο διάστημα $[a,b]$. Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τις ϕ_1, ϕ_2 στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes και ως προς τη συνάρτηση $\lambda\phi_1 + \mu\phi_2$ στο $[a,b]$, για τυχαίους μιγαδικούς λ, μ. Μάλιστα, θα ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(u)\ d(\lambda\phi_1(u) + \mu\phi_2(u)) = \lambda \int_a^b f(u)\ d\phi_1(u) + \mu \int_a^b f(u)\ d\phi_2(u)\ .$$

Πρόταση 6.8 *Έστω οι φραγμένες συναρτήσεις f_1, f_2, ϕ που ορίζονται στο διάστημα $[a,b]$. Εάν οι f_1, f_2 είναι ολοκληρώσιμες κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a,b]$, τότε για τυχαίους μιγαδικούς λ, μ και η συνάρτηση $\lambda f_1 + \mu f_2$ είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη συνάρτηση ϕ στο $[a,b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b \left(\lambda f_1(u) + \mu f_2(u)\right)\ d\phi(u) = \lambda \int_a^b f_1(u)\ d\phi(u) + \mu \int_a^b f_2(u)\ d\phi(u)\ .$$

Οι αποδείξεις των δύο αυτών προτάσεων είναι εύκολες και ανάγονται στη γραμμικότητα των αθροισμάτων (6.1) ως προς την f και τη ϕ.

Πρόταση 6.9 *Έστω οι φραγμένες συναρτήσεις f και ϕ που ορίζονται στο $[a,b]$ και c εσωτερικό σημείο του προηγούμενου διαστήματος. Αν το $\int_a^b f(u)d\phi(u)$ υπάρχει, τότε υπάρχουν και τα $\int_a^c f(u)d\phi(u)$, $\int_c^b f(u)d\phi(u)$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(u)\ d\phi(u) = \int_a^c f(u)\ d\phi(u) + \int_c^b f(u)\ d\phi(u)\ .$$

Ειδικότερα, αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a,b]$, τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ σε κάθε υποδιάστημα του $[a,b]$.

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$, οπότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε όταν το πλάτος της οποιασδήποτε διαμέρισης $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ είναι μικρότερο του δ να συνεπάγεται ότι η διαφορά του αθροίσματος (6.1) από το $\int_a^b f(u)d\phi(u)$ είναι απολύτως μικρότερη από ε.

Θεωρούμε οποιεσδήποτε διαμερίσεις του $[a, c]$, τις $D_1' = \{a = x_0' < \ldots < x_{m'}' = c\}$ και $D_1'' = \{a = x_0'' < \ldots < x_{m''}'' = c\}$ με πλάτος μικρότερο του δ και αντίστοιχα ενδιάμεσα σημεία $\xi_1', \ldots, \xi_{m'}'$ και $\xi_1'', \ldots, \xi_{m''}''$.

Επίσης, θεωρούμε μια κοινή διαμέριση $D_2 = \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ του $[c, b]$ με πλάτος μικρότερο του δ και αντίστοιχα ενδιάμεσα σημεία. Από τις D_1' και D_2 σχηματίζεται μία διαμέριση D' του $[a, b]$ με πλάτος μικρότερο του δ και από τις D_1'', D_2 σχηματίζεται μια διαμέριση D'' του $[a, b]$ με πλάτος, επίσης, μικρότερο του δ. Συνεπάγεται ότι τα αθροίσματα (6.1) που αντιστοιχούν στις D', D'' έχουν διαφορά απολύτως μικρότερη του 2ε και, επειδή η D_2 είναι κοινή, και τα αθροίσματα (6.1) που αντιστοιχούν στις D_1', D_1'' έχουν διαφορά απολύτως μικρότερη του 2ε.

Παίρνουμε, τώρα, μία ακολουθία διαμερίσεων $(D_1^{(n)})$ του $[a, c]$, των οποίων τα πλάτη τείνουν στο μηδέν. Βάσει των όσων είπαμε μέχρι τώρα, η αντίστοιχη ακολουθία των αθροισμάτων (6.1) είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, έχει κάποιο όριο I στο $\mathbb{C}$. Παίρνοντας τυχαίο $\varepsilon > 0$ και θεωρώντας το αντίστοιχο δ των προηγούμενων παραγράφων της απόδειξης, βρίσκουμε αρκετά μεγάλο n ώστε η $D_1^{(n)}$ να έχει πλάτος μικρότερο του δ και ώστε το αντίστοιχο άθροισμα (6.1) να απέχει από το I λιγότερο του ε. Κατόπιν παίρνουμε τυχούσα διαμέριση D_1 του $[a, c]$ με πλάτος μικρότερο του δ, οπότε τα αθροίσματα (6.1) για τις D_1 και $D_1^{(n)}$ απέχουν λιγότερο από 2ε. Άρα, το άθροισμα (6.1) για την D_1 απέχει από το I λιγότερο από 3ε. Αυτό σημαίνει ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, c]$ και με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ και στο $[c, b]$.

Τώρα, παίρνουμε μία ακολουθία διαμερίσεων $(D_1^{(n)})$ του $[a, c]$ και μία ακολουθία διαμερίσεων $(D_2^{(n)})$ του $[c, b]$ των οποίων τα πλάτη τείνουν στο μηδέν. Σχηματίζουμε την ακολουθία διαμερίσεων $(D^{(n)})$ του $[a, b]$ από τις $(D_1^{(n)})$ και $(D_2^{(n)})$ και είναι προφανές ότι, παίρνοντας τα όρια των αθροισμάτων (6.1), καταλήγουμε στην

$$\int_a^b f(u)d\phi(u) = \int_a^c f(u)d\phi(u) + \int_c^b f(u)d\phi(u) \ .$$

Πρόταση 6.10 *Έστω f μία συνεχής συνάρτηση και ϕ μία συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, b]$ και ισχύει ότι*

$$\left| \int_a^b f(u)d\phi(u) \right| \leq \max_{x \in [a,b]} |f(x)| V_a^b \phi \ .$$

Η απόδειξη της πρότασης αυτής θα γίνει στο κεφάλαιο 9.

Πρόταση 6.11 *Αν η ϕ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[a, b]$ και η f είναι συνεχής στο ίδιο διάστημα, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, b]$ και ισχύει ότι*

$$\int_a^b f(u)d\phi(u) = \int_a^b f(u)\phi'(u)du \ .$$

Απόδειξη: Λόγω ομοιόμορφης συνέχειας της ϕ' στο $[a, b]$, για τυχόν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να ισχύει για κάθε t_1, t_2 στο $[a, b]$:

$$|t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow |\phi'(t_1) - \phi'(t_2)| < \varepsilon \ .$$

Παίρνουμε τυχαία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ πλάτους μικρότερου από δ και ενδιάμεσα σημεία ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n. Σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχει σημείο η_k ώστε $f(\xi_k)\left(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})\right) = f(\xi_k)\phi'(\eta_k)(x_k - x_{k-1})$ και, επομένως,

$$\begin{aligned}
& \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})) - \int_a^b f(u)\phi'(u)du\right| \\
\leq & \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(\phi'(\eta_k) - \phi'(\xi_k))(x_k - x_{k-1})\right| \\
& + \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(u)\phi'(u)du\right| \\
\leq & \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)||\phi'(\eta_k) - \phi'(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) \\
& + \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(u)\phi'(u)du\right| \\
< & M(b-a)\varepsilon + \left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\phi'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(u)\phi'(u)du\right| \ ,
\end{aligned}$$

όπου $M = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Επειδή η $f\phi'$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και, επομένως, ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$, συνεπάγεται ότι η τελευταία απόλυτη τιμή έχει όριο μηδέν όταν το δ τείνει στο μηδέν. Άρα, το $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\left(\phi(x_k) - \phi(x_{k-1})\right)$ έχει όριο $\int_a^b f(u)\phi'(u)du$ όταν το πλάτος της D τείνει στο μηδέν.

Πρόταση 6.12 *Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, b]$, τότε και η ϕ είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς την f στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(u)d\phi(u) + \int_a^b \phi(u)df(u) = f(b)\phi(b) - f(a)\phi(a) \ .$$

Η παραπάνω ισότητα είναι γνωστή ως **τύπος της ολοκλήρωσης κατά μέρη** του ολοκληρώματος Stieltjes και η απόδειξή της γίνεται στο κεφάλαιο 9.

Η μόνη από τις παραπάνω ιδιότητες την οποία αναφέρει ο Stieltjes, χωρίς βέβαια να κάνει απόδειξη, είναι η τελευταία, όπου χρησιμοποιεί το σύμβολο $\int_a^b \phi(x)\ df(x)$ χωρίς προηγουμένως να το ορίσει. Φυσικά, αυτό το κάνει γιατί δε θέλει να εντρυφήσει περισσότερο στη μελέτη του ολοκληρώματος, αφού τον ενδιαφέρουν μόνο οι περιπτώσεις όπου $f(u) = u^k$ ή $f(u) = \frac{1}{z+u}$.

Ορισμός 6.7 *Έστω ότι οι f, ϕ είναι φραγμένες συναρτήσεις στο $[a, b]$ για κάθε b που είναι μεγαλύτερο από το σταθερό σημείο a. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Stieltjes ως προς τη ϕ στο $[a, b]$ για κάθε $b > a$, ορίζουμε*

$$\int_a^{+\infty} f(u)d\phi(u) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(u)d\phi(u)$$

αν το όριο υπάρχει στο $\mathbb{C}$.

6.3 Μελέτη των συναρτήσεων της μορφής $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$.

Έστω ϕ μία αύξουσα συνάρτηση ορισμένη στο $[0, +\infty)$ και τέτοια ώστε $\phi(0) = 0$ και $\phi(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} \phi(x) \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση F που ορίζεται με τον τύπο

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}\ ,\quad z \in \mathbb{C} - A\ ,$$

όπου $A = (-\infty, 0]$.

Πρόταση 6.13 *Αν η ϕ είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και ισχύουν $\phi(0) = 0$, $\phi(+\infty) \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} - A$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχαίο μιγαδικό z του $\mathbb{C} - A$ και τους αριθμούς $|z| < R < R'$. Τότε,

$$\left| \int_0^{R'} \frac{d\phi(u)}{z+u} - \int_0^{R} \frac{d\phi(u)}{z+u} \right| = \left| \int_R^{R'} \frac{d\phi(u)}{z+u} \right| \leq \frac{1}{R-|z|} V_R^{R'} \phi \leq \frac{\phi(+\infty) - \phi(0)}{R-|z|} \longrightarrow 0\ ,$$

όταν τα R, R' τείνουν στο $+\infty$. Άρα, για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$ υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$ και η συνάρτηση F είναι καλά ορισμένη.

Μένει να δείξουμε ότι είναι ολόμορφη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ακολουθία ολομόρφων συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα στην F σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C} - A$.

Πράγματι, έστω για κάθε φυσικό n η F_n με $F_n(z) = \int_0^n \frac{d\phi(u)}{z+u}$ για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$. Η F_n είναι ολόμορφη συνάρτηση γιατί ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Πράγματι:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^n \frac{d\phi(u)}{x+iy+u} = \int_0^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x+iy+u} \right) d\phi(u) = -\int_0^n \frac{1}{(x+iy+u)^2} d\phi(u)$$

και

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^n \frac{d\phi(u)}{x+iy+u} \quad = \quad \int_0^n \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x+iy+u}\right)d\phi(u) = -\int_0^n \frac{i}{(x+iy+u)^2}d\phi(u) \ ,$$

όπου οι εναλλαγές παραγώγισης και ολοκληρώματος αποδεικνύονται πολύ εύκολα μέσω της μελέτης των αντίστοιχων πηλίκων διαφορών που ορίζουν τις παραγώγους.

Επομένως, $\frac{\partial}{\partial y}\int_0^n \frac{d\phi(u)}{x+iy+u} = i\frac{\partial}{\partial x}\int_0^n \frac{d\phi(u)}{x+iy+u}$ για κάθε $x+iy$ στο $\mathbb{C}-A$.

Έστω, τώρα, S τυχαίο συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}-A$. Θα δείξουμε ότι η (F_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην F στο S. Έστω $\lambda = \max_{z\epsilon S}|z|$. Τότε, για κάθε $n > \lambda$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u} - \int_0^n \frac{d\phi(u)}{z+u}\right| &= \left|\int_n^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u}\right| \\ &\leq \frac{\phi(+\infty)-\phi(n)}{n-|z|} \\ &\leq \frac{\phi(+\infty)-\phi(n)}{n-\lambda} \to 0\end{aligned}$$

καθώς το n τείνει στο $+\infty$. Άρα, η (F_n) συγκλίνει στην F ομοιόμορφα στο S και η απόδειξη της πρότασης έχει τελειώσει.

Θεωρούμε τώρα μια άλλη αύξουσα συνάρτηση ϕ_1 τέτοια ώστε να ισχύει $\phi_1(0) = 0$ και $\phi_1(+\infty) = \lim_{x\to+\infty}\phi_1(x) \ \in \ \mathbb{R}$ και την συνάρτηση F_1 με $F_1(z) = \int_0^{+\infty}\frac{d\phi_1(u)}{z+u}$ για κάθε $z \ \epsilon \ \mathbb{C}-A$. Ισχύει τότε το εξής:

Θεώρημα 6.1 *Έστω οι συναρτήσεις ϕ και ϕ_1, που είναι αύξουσες στο $[0,+\infty)$ και τέτοιες ώστε $\phi(0) = \phi_1(0) = 0$, $\phi(+\infty), \phi_1(+\infty) \ \in \ \mathbb{R}$. Εάν οι δυο συναρτήσεις F και F_1 με $F(z) = \int_0^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u}$ και $F_1(z) = \int_0^{+\infty}\frac{d\phi_1(u)}{z+u}$ παίρνουν τις ίδιες τιμές για κάθε $z \ \epsilon \ \mathbb{C}-A$, τότε οι ϕ και ϕ_1 έχουν τα ίδια σημεία ασυνέχειας και διαφέρουν το πολύ μόνο σ' αυτά τα σημεία, δηλαδή χαρακτηρίζουν την ίδια κατανομή μάζας.*

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 6.1 *Έστω ϕ αύξουσα συνάρτηση στο $[0,+\infty)$ και τέτοια ώστε $\phi(0) = 0$ και $\phi(+\infty) \ \in \mathbb{R}$. Ακόμη, θεωρούμε τη συνάρτηση G με*

$$G(z) = \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a+u} - \frac{1}{z+u}\right)\phi(u)du$$

για κάθε z που ανήκει στο $\mathbb{C}-A$, όπου a σταθερός μιγαδικός αριθμός του $\mathbb{C}-A$. Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, τότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[G(-x+\varepsilon i) - G(-x-\varepsilon i)\right] = \pi i\left(\phi(x-)+\phi(x+)\right) \ . \tag{6.2}$$

Απόδειξη: Καταρχάς, θα δείξουμε ότι η συνάρτηση G είναι καλά ορισμένη. Για τον τυχαίο μιγαδικό z του $\mathbb{C}-A$ και για τους αριθμούς R, R' με $|z|,|a|<R<R'$ ισχύει ότι

$$\left|\int_0^{R'}\Big(\frac{1}{a+u}-\frac{1}{z+u}\Big)\phi(u)du-\int_0^{R}\Big(\frac{1}{a+u}-\frac{1}{z+u}\Big)\phi(u)du\right|$$
$$\leq |z-a|\int_R^{R'}\frac{\phi(u)du}{|a+u||z+u|}\leq |z-a|\phi(+\infty)\int_R^{R'}\frac{du}{(u-|a|)(u-|z|)}\to 0\ ,$$

καθώς τα R και R' τείνουν στο $+\infty$.

Άρα, για κάθε z στο $\mathbb{C}-A$ ορίζεται το $\int_0^{+\infty}(\frac{1}{a+u}-\frac{1}{z+u})\phi(u)du$.

Κάνοντας πράξεις, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(-x+\varepsilon i)-G(-x-\varepsilon i) &= \int_0^{+\infty}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\\ &= \int_0^{x}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}+\int_x^{+\infty}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\ . \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{x}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}=\pi i\phi(x-)\ .$$

Ισχύει ότι, αν $\sqrt{\varepsilon}<x$, τότε

$$\int_0^{x}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}=\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}+\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\ .$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} &< \phi(+\infty)\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\\ &= \phi(+\infty)\left(\arctan\frac{x}{\varepsilon}-\arctan\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\ , \end{aligned}$$

οπότε

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{x-\sqrt{\varepsilon}}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}=0\ .$$

Όσον αφορά το ολοκλήρωμα $\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}$, επειδή για κάθε u με $x-\sqrt{\varepsilon}\leq u<x$ ισχύει $\phi(x-\sqrt{\varepsilon})\leq\phi(u)\leq\phi(x-)$, θα είναι

$$\phi(x-\sqrt{\varepsilon})\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\leq\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\leq\phi(x-)\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\ .$$

Επειδή $\lim_{\varepsilon\to 0^+}\phi(x-\sqrt{\varepsilon})=\phi(x-)$, συνεπάγεται

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{x-\sqrt{\varepsilon}}^{x}\frac{\varepsilon\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}=\frac{\pi}{2}\phi(x-)\ .$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_x^{+\infty}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2} &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_x^{x+\sqrt{\varepsilon}}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}+\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{x+\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty}\frac{2\varepsilon i\phi(u)du}{(u-x)^2+\varepsilon^2}\\ &= \pi i\phi(x+)+0=\pi i\phi(x+)\ .\end{aligned}$$

Απόδειξη του θεωρήματος 6.1: Από τις προτάσεις 6.12 και 6.11 έχουμε ότι

$$\int_0^b\frac{d\phi(u)}{z+u}+\int_0^b\phi(u)d\left(\frac{1}{z+u}\right)=\frac{\phi(b)}{z+b}$$

και

$$\int_0^b\frac{d\phi(u)}{z+u}=\int_0^b\frac{\phi(u)du}{(z+u)^2}+\frac{\phi(b)}{z+b}\ .$$

Παίρνοντας τα όρια των δύο μελών για $b\to+\infty$, βρίσκουμε ότι

$$F(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\phi(u)du}{(z+u)^2}\ .$$

Ακόμη, παραγωγίζοντας την

$$G(z)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a+u}-\frac{1}{z+u}\right)\phi(u)du\ ,$$

βρίσκουμε ότι

$$F(z)=G'(z)\ .$$

Η αιτιολόγηση είναι πολύ εύκολη και γίνεται με τη μελέτη του πηλίκου των διαφορών που ορίζει την $G'(z)$.

Όμοια, αν θεωρήσουμε την

$$G_1(z)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{a+u}-\frac{1}{z+u}\right)\phi_1(u)du\ ,$$

τότε είναι

$$F_1(z)=G_1'(z)\ .$$

Όμως, οι συναρτήσεις F και F_1 είναι ίσες, άρα οι G και G_1 θα διαφέρουν μόνο κατά μία σταθερά. Άρα, αν θεωρήσουμε, όπως και προηγουμένως, έναν τυχαίο θετικό αριθμό x και $\varepsilon>0$ οσοδήποτε μικρό, τότε έχουμε

$$G(-x+\varepsilon i)-G(-x-\varepsilon i)=G_1(-x+\varepsilon i)-G_1(-x-\varepsilon i)\ ,$$

ή, λόγω του λήμματος, αν πάρουμε $\varepsilon\to 0^+$, τότε βρίσκουμε ότι

$$\phi(x-)+\phi(x+)=\phi_1(x-)+\phi_1(x+)\ .\quad(*)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x, ενώ για το μηδέν ισχύει ότι $\phi(0) = \phi_1(0) = 0$. Από τη σχέση $(*)$ έχουμε ότι οι ϕ και ϕ_1 έχουν τα ίδια σημεία συνέχειας, άρα και κοινά σημεία ασυνέχειας. Πράγματι, έστω x τυχαίο σημείο στο $(0, +\infty)$. Οι ϕ, ϕ_1 είναι ασυνεχείς το πολύ σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων και στα κοινά σημεία συνέχειας παίρνουν, λόγω της παραπάνω ισότητας, τις ίδιες τιμές. Θεωρούμε λοιπόν δύο ακολουθίες $(x - \varepsilon_n)$, $(x + \varepsilon'_n)$ κοινών σημείων συνέχειας που συγκλίνουν στο x από αριστερά και δεξιά αντίστοιχα. Ισχύει ότι

$$\phi(x-) = \lim_{n\to+\infty} \phi(x - \varepsilon_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_1(x - \varepsilon_n) = \phi_1(x-)$$

και

$$\phi(x+) = \lim_{n\to+\infty} \phi(x + \varepsilon'_n) = \lim_{n\to+\infty} \phi_1(x + \varepsilon'_n) = \phi_1(x+) \ .$$

Άρα, το x θα είναι ταυτόχρονα σημείο συνέχειας ή ασυνέχειας για τις δύο συναρτήσεις. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι οι ϕ και ϕ_1 είναι ταυτόχρονα συνεχείς ή ασυνεχείς από δεξιά στο 0. Τέλος, από τα παραπάνω προκύπτει ότι τα άλματά τους στα κοινά σημεία ασυνέχειας είναι ίσα. Δηλαδή, οι δύο αύξουσες συναρτήσεις χαρακτηρίζουν την ίδια κατανομή μάζας και διαφέρουν το πολύ στα σημεία ασυνέχειάς τους.

Παρατήρηση 6.7 *Αν οι ϕ και ϕ_1 ικανοποιούν τις υποθέσεις και,επομένως, και το συμπέρασμα του θεωρήματος 6.1 και αλλάξουμε τις τιμές τους σε κάθε σημείο $x > 0$, το οποίο είναι κοινό σημείο ασυνέχειάς τους, ώστε να ισχύουν οι*

$$\phi(x) = \frac{\phi(x-) + \phi(x+)}{2} \quad \textit{και} \quad \phi_1(x) = \frac{\phi_1(x-) + \phi_1(x+)}{2} \ ,$$

τότε, επειδή $\phi(0) = \phi_1(0) = 0$, έπεται ότι οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες παντού.

Κεφάλαιο 7

Η αναπαράσταση των $F(z)$ και $F_1(z)$ ως ολοκληρωμάτων Stieltjes.

7.1 Ορισμός των $\limsup$ και $\liminf$ πραγματικής ακολουθίας και ιδιότητές τους.

Θεωρούμε μία ακολουθία πραγματικών αριθμών (u_k) που είναι φραγμένη. Τότε, για κάθε φυσικό n και η ακολουθία

$$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ \ldots$$

θα είναι φραγμένη, άρα τα $L_n = \sup_{k\geq n} u_k$ και $l_n = \inf_{k\geq n} u_k$ θα είναι πεπερασμένοι αριθμοί.

Μάλιστα, ο αριθμός L_n έχει εξ' ορισμού τις παρακάτω ιδιότητες:

- Κανείς από τους αριθμούς

  $$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ \ldots$$

  δεν ξεπερνά τον L_n.

- Για κάθε $\varepsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό μπορούμε να βρούμε κάποιον από τους παραπάνω όρους που να είναι μεγαλύτερος του $L_n - \varepsilon$.

Ακόμη, όσο ο n αυξάνει ο L_n μειώνεται, δηλαδή η ακολουθία (L_n) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από οποιοδήποτε κάτω φράγμα της (u_k). Άρα, έχει όριο πραγματικό αριθμό, έστω τον L. Θα ισχύει ότι

$$L = \lim_{n\to+\infty} L_n = \inf_{n\epsilon\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} u_k\ .$$

Ο αριθμός L ονομάζεται limsup της ακολουθίας[1] (u_k) και με βάση τα προηγούμενα έχει τις εξής ιδιότητες.

[1] Ο πρώτος που όρισε τα $\limsup$ και $\liminf$ ήταν ο Paul du Bois-Reymond (1831-1889) σε βιβλίο του, που εκδόθηκε δώδεκα χρόνια πριν από αυτή τη δημοσίευση, δηλαδή το 1882. Ο ίδιος τους ονόμασε ''les

- Οι όροι της ακολουθίας (u_k) από κάποιο δείκτη και πέρα είναι όλοι μικρότεροι του $L+\varepsilon$, όπου ε τυχαίος θετικός αριθμός που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός.

  Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή η ακολουθία (L_n) είναι φθίνουσα, υπάρχει n τέτοιος ώστε ο L_n να είναι μικρότερος από $L+\varepsilon$, οπότε κανείς από τους αριθμούς

  $$u_n,\ u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ \dots$$

  δεν ξεπερνά τον L_n, άρα όλοι τους είναι μικρότεροι από $L+\varepsilon$.

- Υπάρχουν άπειροι όροι της ακολουθίας (u_k) που είναι μεγαλύτεροι από $L-\varepsilon$, όπου ε τυχαίος θετικός αριθμός που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός.

  Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$. Μεταξύ των όρων

  $$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \dots$$

  υπάρχει πάντα κάποιος, έστω ο u_n, που είναι μεγαλύτερος από $L_1-\varepsilon$. Τότε θα είναι μεγαλύτερος και από $L-\varepsilon$, αφού $L_1 \geq L$.

  Στη συνέχεια θεωρούμε τους όρους

  $$u_{n+1},\ u_{n+2},\ u_{n+3},\ u_{n+4},\ \dots\ .$$

  Υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος μεγαλύτερος από $L_{n+1}-\varepsilon$, άρα και από τον $L-\varepsilon$. Εάν u_l είναι αυτός ο όρος, τότε συνεχίζουμε, θεωρώντας τους όρους

  $$u_{l+1},\ u_{l+2},\ u_{l+3},\ u_{l+4},\ \dots\ ,$$

  οπότε παίρνουμε έναν όρο u_m που είναι μεγαλύτερος από $L_{l+1}-\varepsilon$, άρα και από $L-\varepsilon$. Με τον τρόπο που παίρνουμε τους δείκτες ισχύει $n < l < m < \dots$, επομένως κατασκευάζουμε μία υπακολουθία της (u_k), της οποίας όλοι οι όροι είναι ανάμεσα στους $L-\varepsilon$ και $L+\varepsilon$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο παίρνουμε ότι η ακολουθία των $l_n = \inf_{k\geq n} u_k$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, αφού η (u_k) είναι άνω φραγμένη. Άρα, συγκλίνει σε έναν πραγματικό αριθμό

$$l = \lim_{n\to+\infty} l_n = \sup_{n\epsilon\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} u_k\ .$$

Ο αριθμός l ονομάζεται liminf της ακολουθίας (u_k). Όπως ο L, έτσι και ο l αποδεικνύεται ότι έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

limites d' indétermination des nombres u_k". Οι βασικότερες ιδιότητες που ήταν γνωστές σχετικά μ' αυτούς τους αριθμούς ήταν ότι όλοι σχεδόν οι όροι της ακολουθίας βρίσκονται σε κάθε φραγμένο και ανοικτό διάστημα που περιλαμβάνει τους l, L και ότι η ακολουθία έχει όριο ακριβώς τότε, όταν $L = l$. Πάντως, επειδή δεν ήταν και τόσο γνωστές έννοιες εκείνη την εποχή, ο Stieltjes θεωρεί σωστό να τις ορίσει ξανά για να τις χρησιμοποιήσει όταν θα αναφερθεί στην ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς και στον ορισμό της συνάρτησης Φ, που θα παίξει σημαντικό ρόλο στην υπόλοιπη εργασία.

Στην απόδειξη της πρότασης 3.1 και στο τέλος της §4.6 χρησιμοποιήσαμε ήδη τις έννοιες των $\limsup$ και $\liminf$ συναρτήσεων και ακολουθιών για λόγους ευκολίας και κομψότητας, ενώ ο Stieltjes δεν κάνει κάτι τέτοιο στις αντίστοιχες αποδείξεις.

- Οι όροι της ακολουθίας (u_k) από κάποιο δείκτη και πέρα είναι όλοι μεγαλύτεροι του $l-\varepsilon$, όπου ε τυχαίος θετικός αριθμός που μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός.
- Για κάθε $\varepsilon > 0$ και οσοδήποτε μικρό υπάρχουν άπειροι όροι της (u_k) μικρότεροι του $l+\varepsilon$.

Επίσης, ισχύουν οι εξής ιδιότητες.

- Είναι πάντα $L \geq l$.

  Απόδειξη: Προφανώς, για κάθε φυσικό n ισχύει $l_n \leq L_n$ και, επομένως, είναι $l \leq L$.

- Ισχύει $L = l$ αν και μόνο αν η (u_k) συγκλίνει και τότε το όριό της είναι η κοινή τιμή $L = l$.

  Απόδειξη: Έστω ότι $L = l$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$. Τότε, από τις προηγούμενες ιδιότητες έχουμε ότι οι όροι της (u_k) από κάποιο δείκτη και πέρα θα βρίσκονται μεταξύ των αριθμών $l-\varepsilon = L-\varepsilon$ και $L+\varepsilon = l+\varepsilon$. Το ε που θεωρήσαμε ήταν τυχαίο, άρα η ακολουθία (u_k) θα συγκλίνει και το όριό της θα ισούται με $L = l$.

  Αντίστροφα, έστω ότι η (u_k) συγκλίνει και το όριό της είναι ο αριθμός m. Τότε, όλοι οι όροι της (u_k) από κάποιο δείκτη και πέρα θα βρίσκονται σε μια περιοχή οσοδήποτε μικρή γύρω από το m. Επειδή για το L γνωρίζουμε ότι υπάρχουν άπειροι όροι της (u_k) που βρίσκονται σε μία οσοδήποτε μικρή περιοχή γύρω από τον αριθμό αυτό, έπεται ότι $m = L$. Όμοια, από τις ιδιότητες του l έχουμε ότι σε κάθε περιοχή του, όσο μικρή κι αν είναι, βρίσκονται άπειροι όροι της ακολουθίας. Άρα, θα είναι $m = l$ και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Πρόταση 7.1 *Αν η ακολουθία $(\sqrt[k]{|c_k|})$ είναι φραγμένη, τότε η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ ισούται με*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[k]{|c_k|}} \; .$$

Ενώ, αν η $(\sqrt[k]{|c_k|})$ δεν είναι φραγμένη, τότε η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει μόνο για $z = 0$.

Η απόδειξη, που έγινε από τον J. Hadamard (1865-1963), παραλείπεται.

7.2 Οι συναρτήσεις ψ και χ.

Θεωρούμε την κλιμακωτή και αύξουσα συνάρτηση $\phi_n(u)$, που ορίσαμε στο τέλος του πέμπτου κεφαλαίου ως εξής:

$$\phi_n(u) = \begin{cases} 0, & 0 \leq u < x_1^{(n)} \\ M_1^{(n)}, & x_1^{(n)} \leq u < x_2^{(n)} \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)}, & x_2^{(n)} \leq u < x_3^{(n)} \\ \quad \cdots\cdots\cdots & \quad \cdots\cdots \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_{n-1}^{(n)}, & x_{n-1}^{(n)} \leq u < x_n^{(n)} \\ M_1^{(n)} + M_2^{(n)} + \ldots + M_n^{(n)}, & x_n^{(n)} \leq u < +\infty. \end{cases}$$

Η παραπάνω συνάρτηση παίρνει τιμές από $\phi_n(0) = 0$ έως $\phi_n(+\infty) = \frac{1}{\alpha_1}$. Θεωρούμε τώρα ένα μη αρνητικό αριθμό u και την ακολουθία αριθμών

$$\phi_1(u),\ \phi_2(u),\ \phi_3(u),\ \ldots\ .$$

Η παραπάνω ακολουθία είναι φραγμένη, άρα τα $\liminf$, $\limsup$ είναι πεπερασμένοι αριθμοί. Έστω

$$\psi(u) := \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} \phi_k(u)$$

και

$$\chi(u) := \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} \phi_k(u)\ .$$

Πρόταση 7.2 *Οι χ και ψ έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.*

1. $\psi(u) \geq \chi(u)$.
2. $\psi(0) = \chi(0) = 0$.
3. *Εάν για κάποιο u ισχύει $\psi(u) = \chi(u)$, τότε υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(u)$ και μάλιστα ισούται με $\psi(u) = \chi(u)$ και, αντίστροφα, αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(u)$, τότε ισχύει $\psi(u) = \chi(u) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(u)$.*
4. *Οι χ και ψ είναι αύξουσες, ως όρια αυξουσών συναρτήσεων.*
5. *Αν $0 \leq a < b$, τότε $\psi(a) \leq \chi(b)$.*

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες είναι προφανείς, εκτός από την τελευταία, η οποία για να αποδειχθεί χρειάζεται να γίνουν πρώτα κάποιες άλλες παρατηρήσεις.

7.3 Ιδιότητες των συναρτήσεων ϕ_n.

Για κάθε k ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \phi_n(u)\right) u^k du &= \int_0^{x_1} \frac{1}{\alpha_1} u^k du + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{1}{\alpha_1} - M_1\right) u^k du + \ldots \\
&\quad + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left(\frac{1}{\alpha_1} - M_1 - M_2 - \ldots - M_{n-1}\right) du \\
&\quad + \int_{x_n}^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_1}\right) u^k du \\
&= \frac{1}{k+1}(M_1 + M_2 + M_3 + \ldots + M_n) x_1^{k+1} \\
&\quad + \frac{1}{k+1}(M_2 + M_3 + \ldots + M_n)(x_2^{k+1} - x_1^{k+1}) \\
&\quad + \ldots + \frac{1}{k+1} M_n (x_n^{k+1} - x_{n-1}^{k+1}) \\
&= \frac{1}{k+1}(M_1 x_1^{k+1} + M_2 x_2^{k+1} + M_3 x_3^{k+1} + \ldots + M_n x_n^{k+1})\ ,
\end{aligned}$$

όπου όταν γράφουμε M_i και x_j εννοούμε $M_i^{(n)}$ και $x_j^{(n)}$.
Με βάση τους τύπους της §2.2 έχουμε ότι

$$M_1 x_1^{k+1} + M_2 x_2^{k+1} + M_3 x_3^{k+1} + \ldots + M_n x_n^{k+1} = c_{k+1} \ ,$$

άρα είναι

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \phi_n(u) \right) u^k du = \frac{c_{k+1}}{k+1}$$

για $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n-2$.

Επίσης, για κάθε n' έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \phi_{n+n'}(u) \right) u^k du = \frac{c_{k+1}}{k+1} \ ,$$

όπου τώρα το k παίρνει τιμές $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, 2n+2n'-2$.

Επομένως, για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-2$ θα ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty} \left(\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u) \right) u^k du = 0 \ . \quad (*)$$

Η τελευταία ισότητα συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ αλλάζει πρόσημο τουλάχιστον $2n-1$ φορές.[2]

Ας υποθέσουμε ότι το τελευταίο δεν ισχύει. Τότε, η $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ θα αλλάζει πρόσημο m φορές, όπου $0 \leq m \leq 2n-2$. Έστω ότι σε καθένα από τα διαστήματα

$$(0, u_1), \ (u_1, u_2), \ \ldots, \ (u_m, +\infty)$$

είναι εναλλάξ μη αρνητική και μη θετική. Θεωρούμε το πολυώνυμο $p(u)$ βαθμού m με $p(u) = (u-u_1)(u-u_2)\cdots(u-u_m)$. Η μη μηδενική συνάρτηση $\left(\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)\right) p(u)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στα σημεία όπου δε μηδενίζεται. Επομένως, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \left(\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u) \right) p(u) du$$

έχει ή αρνητική ή θετική τιμή. Όμως, από την (*) προκύπτει ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα πρέπει να είναι μηδέν. Άτοπο. Άρα, η συνάρτηση $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ αλλάζει πρόσημο τουλάχιστον $2n-1$ φορές.

Από την άλλη, οι ϕ_n και $\phi_{n+n'}$ είναι αύξουσες και κλιμακωτές συναρτήσεις και η ϕ_n είναι σταθερή στα διαστήματα

$$(x_1, x_2), \ (x_2, x_3), \ \ldots, \ (x_{n-1}, x_n) \ .$$

[2] Η μέθοδος που χρησιμοποιούμε παρακάτω για να αποδείξουμε αυτήν την πρόταση αποδίδεται στον Legendre (1752-1833). Αυτό το αποτέλεσμα θα πρέπει να ήταν πολύ γνωστό την εποχή εκείνη, γιατί ο Stieltjes το χρησιμοποιεί χωρίς να το αποδεικνύει, αναφέροντας μόνο το όνομα του Legendre.

Οπότε η συνάρτηση $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ αλλάζει πρόσημο το πολύ μία φορά σε καθένα από τα παραπάνω διαστήματα. Επιπλέον, θα παρουσιάζει το πολύ μία αλλαγή προσήμου σε καθένα από τα σημεία ασυνέχειας $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Όμως, ισχύει ότι

$$\phi_n(0) = \phi_{n+n'}(0) = 0$$

και

$$\phi_n(+\infty) = \phi_{n+n'}(+\infty) = \frac{1}{\alpha_1} ,$$

οπότε η $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ δεν παρουσιάζει αλλαγή προσήμου στα διαστήματα $(0, x_1)$, $(x_n, +\infty)$. Επομένως, η $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ έχει το πολύ $2n-1$ σημεία αλλαγής προσήμου.

Δείξαμε τελικά ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.3 *Για κάθε n' η συνάρτηση $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ αλλάζει πρόσημο ακριβώς $2n-1$ φορές: στα διαστήματα*

$$(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}),\ (x_2^{(n)}, x_3^{(n)}),\ \ldots,\ (x_{n-1}^{(n)}, x_n^{(n)})$$

παρουσιάζει $n-1$ αλλαγές προσήμου, μία σε κάθε διάστημα, ενώ οι υπόλοιπες αλλαγές προσήμου συμβαίνουν στα σημεία ασυνέχειας $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ της ϕ_n.

Παρατήρηση 7.1 *Από την παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι, αν το $x_k (= x_k^{(n)})$ είναι σημείο συνέχειας της $\phi_{n+n'}(u)$, τότε ισχύει*

$$\phi_n(x_k-) < \phi_{n+n'}(x_k) < \phi_n(x_k+) ,$$

ενώ όταν το x_k είναι σημείο ασυνέχειας (άρα κοινή ρίζα των $Q_{2n}(-z)$, $Q_{2n+2n'}(-z)$) και για τις δύο συναρτήσεις, τότε ισχύει

$$\phi_n(x_k-) < \phi_{n+n'}(x_k-) < \phi_{n+n'}(x_k+) < \phi_n(x_k+) .$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει ότι

$$\phi_n(x_k-) < \phi_{n+n'}(x_k-) \leq \phi_{n+n'}(x_k+) < \phi_n(x_k+) .$$

Παρατήρηση 7.2 *Επειδή η συνάρτηση $\phi_n(u) - \phi_{n+n'}(u)$ αλλάζει πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$, στα οποία η κλιμακωτή συνάρτηση $\phi_n(u)$ είναι σταθερή, η $\phi_{n+n'}(u)$ θα αλλάζει αναγκαστικά τιμή στο εσωτερικό τους. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο ριζών του πολυωνύμου $Q_{2n}(-z)$ υπάρχει πάντα μία ρίζα του $Q_{2n+2n'}(-z)$. Αποδείξαμε, δηλαδή, με δεύτερο τρόπο ένα από τα συμπεράσματα της §1.5.*

7.4 Αν $0 \le a < b$, τότε $\psi(a) \le \chi(b)$.

Έστω ότι ισχύει $\psi(a) > \chi(b)$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon$. Όμως, από τον ορισμό της ψ έχουμε ότι $\psi(a) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\ge n} \phi_k(a)$, άρα από τις ιδιότητες του limsup που αποδείχθηκαν στην §7.1 προκύπτει ότι υπάρχει υπακολουθία $(\phi_{n_k}(a))$ της $(\phi_n(a))$, της οποίας όλοι οι όροι είναι μεγαλύτεροι από $\psi(a) - \varepsilon$. Όμοια, επειδή $\chi(b) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\ge n} \phi_k(b)$, θα υπάρχει υπακολουθία $\left(\phi_{n'_m}(b)\right)$ της $(\phi_n(b))$, της οποίας όλοι οι όροι είναι μικρότεροι του $\chi(b) + \varepsilon$.

Θα δείξουμε τώρα ότι κανένα από τα πολυώνυμα $Q_{2n_k}(-z)$ και $Q_{2n'_m}(-z)$ δεν έχουν ρίζα στο (a, b). Πράγματι, ας υποθέσουμε αντίθετα ότι το $Q_{2n_k}(-z)$ έχει μία ρίζα c στο (a, b). Τότε η συνάρτηση $\phi_{n_k}(u)$ είναι ασυνεχής στο c, οπότε

$$\phi_{n_k}(c-) \ge \phi_{n_k}(a) > \psi(a) - \varepsilon > \chi(b) + \varepsilon \ . \quad (*)$$

Θεωρούμε, τώρα, ένα δείκτη n'_m μεγαλύτερο του n_k. Λόγω της παρατήρησης 7.1 θα είναι

$$\phi_{n_k}(c-) < \phi_{n'_m}(c-) \le \phi_{n'_m}(c+) < \phi_{n_k}(c+) \ . \quad (**)$$

Όμως, η $\phi_{n'_m}$ είναι αύξουσα, άρα

$$\phi_{n'_m}(c+) \le \phi_{n'_m}(b) < \chi(b) + \varepsilon \ .$$

Από την τελευταία σειρά ανισοτήτων και τις $(*)$, $(**)$ καταλήγουμε σε άτοπο.

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι και τα πολυώνυμα $Q_{2n'_m}(-z)$ δεν έχουν ρίζα στο (a, b).

Επειδή η υπακολουθία πολυωνύμων $(Q_{2n_k}(-z))$ δεν έχει καμία ρίζα στο (a, b), βάσει των παρατηρήσεων πριν από την πρόταση 5.1, η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n_k}(-z)}{Q_{2n_k}(-z)}\right)$ θα συγκλίνει στην ολόμορφη συνάρτηση $F(-z)$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του δακτυλίου $a < |z| < b$. Αν $F(-z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_i(-z)^i$ είναι η σειρά Laurent της $F(-z)$ στο δακτύλιο $a < |z| < b$, από την (5.2) έχουμε ότι για το συντελεστή c_{-1} θα ισχύει

$$c_{-1} = \lim_{k\to+\infty} \phi_{n_k}(c) \ , \quad (1)$$

όπου c τυχαίος αριθμός του (a, b).

Η συνάρτηση $F(-z)$ είναι ταυτόχρονα και το όριο της υπακολουθίας $\left(\frac{P_{2n'_m}(-z)}{Q_{2n'_m}(-z)}\right)$, άρα με το ίδιο σκεπτικό καταλήγουμε στο ότι θα πρέπει

$$c_{-1} = \lim_{m\to+\infty} \phi_{n'_m}(c) \ . \quad (2)$$

Όμως, οι ισότητες (1) και (2) είναι αδύνατον να ισχύουν ταυτόχρονα, γιατί όλοι οι αριθμοί $\phi_{n_k}(c)$ είναι μεγαλύτεροι από $\psi(a)-\varepsilon$, όλοι οι αριθμοί $\phi_{n'_m}(c)$ είναι μικρότεροι από $\chi(b)+\varepsilon$ και επιπλέον ισχύει $\chi(b) + \varepsilon < \psi(a) - \varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\psi(a) > \chi(b)$. Άρα θα είναι $\psi(a) \le \chi(b)$.

7.5 Η συνάρτηση $\Phi(u) = \frac{\chi(u)+\psi(u)}{2}$ και ιδιότητές της.

Θεωρούμε τη συνάρτηση Φ που σε κάθε σημείο u του $[0, +\infty)$ ορίζεται από την ισότητα

$$\Phi(u) = \frac{\chi(u) + \psi(u)}{2} \ .$$

Πρόταση 7.4 *Η συνάρτηση Φ έχει τις παρακάτω απλές ιδιότητες:*

- *Είναι αύξουσα.*
- *Ισχύει ότι $\Phi(0) = 0$ και $\Phi(+\infty) = \frac{1}{\alpha_1}$, επομένως η Φ παίρνει μη αρνητικές και πεπερασμένες τιμές.*
- *Για κάθε σημείο u του $(0, +\infty)$ ισχύει ότι $\Phi(u+) \geq \psi(u)$ και $\Phi(u-) \leq \chi(u)$.*

  Άρα, όταν είναι $\psi(u) > \chi(u)$, η Φ είναι ασυνεχής. Δηλαδή, όταν η ακολουθία $(\phi_n(u))$ δεν έχει όριο, τότε η Φ είναι ασυνεχής με άλμα $\Phi(u+) - \Phi(u-)$ που είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $\psi(u) - \chi(u)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει απαραίτητα.

  Όμως, η Φ είναι αύξουσα, άρα έχει το πολύ αριθμησίμου πλήθους σημεία ασυνέχειας και, τελικά, το όριο $\lim_{n\to+\infty} \phi_n(u)$ δεν ορίζεται για σημεία, το πλήθος των οποίων είναι το πολύ αριθμήσιμο.
- *Εάν x_k είναι σημείο ασυνέχειας κάποιας ϕ_n, τότε*

$$\phi_n(x_k-) \leq \Phi(x_k) \leq \phi_n(x_k+) \ .$$

Απόδειξη: Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι προφανείς.

Έστω u τυχαίο σημείο του $(0, +\infty)$. Τότε, αν ε είναι ένας θετικός και οσοδήποτε μικρός αριθμός, θα ισχύει ότι

$$\Phi(u + \varepsilon) \geq \chi(u + \varepsilon) \geq \psi(u) \ .$$

Επομένως,

$$\Phi(u+) \geq \psi(u)$$

και με αντίστοιχο τρόπο προκύπτει η ανισότητα $\Phi(u-) \leq \chi(u)$. Άρα, η τρίτη ιδιότητα της Φ έχει αποδειχθεί.

Για την τελευταία ιδιότητα, υποθέτουμε ότι το x_k είναι σημείο ασυνέχειας της ϕ_n. Τότε, από την παρατήρηση 7.1 συνεπάγεται ότι για κάθε $n' > n$ ισχύει

$$\phi_n(x_k-) < \phi_{n'}(x_k) < \phi_n(x_k+)$$

και, άρα, θα είναι

$$\phi_n(x_k-) \leq \chi(x_k) \leq \psi(x_k) \leq \phi_n(x_k+) \ .$$

Επομένως,

$$\phi_n(x_k-) \leq \Phi(x_k) \leq \phi_n(x_k+) \ .$$

7.6 Διαστήματα πρώτου και δευτέρου είδους και ιδιότητές τους.

Ορισμός 7.1 *Θεωρούμε ένα διάστημα (a,b) με $0 \leq a < b$. Εάν υπάρχουν πεπερασμένου πλήθους πολυώνυμα από τα $Q_{2n}(-z)$, $n = 1,2,3,\ldots$, που δεν έχουν ρίζα στο διάστημα αυτό, τότε θα λέμε ότι το (a,b) είναι πρώτου είδους. Στην αντίθετη περίπτωση, το (a,b) θα λέγεται διάστημα δευτέρου είδους.*

Παράδειγμα 7.1 *Κάθε διάστημα της μορφής $(0,b)$ για το οποίο υπάρχει έστω και ένα πολυώνυμο $Q_{2n}(-z)$ που να έχει ρίζα σ' αυτό είναι πρώτου είδους: εφόσον υπάρχει ένα πολυώνυμο $Q_{2n}(-z)$ που να μηδενίζεται σ' αυτό, λόγω του θεωρήματος 1.1, κάθε πολυώνυμο $Q_{2k}(-z)$ με $k \geq n$ θα μηδενίζεται στο $(0,b)$, άρα μόνο πεπερασμένου πλήθους πολυώνυμα δε θα μηδενίζονται στο διάστημα αυτό.*

Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.5 *Εάν για κάποιο φυσικό n το πολυώνυμο $Q_{2n}(-z)$ έχει δύο ρίζες στο (a,b), τότε το διάστημα αυτό είναι πρώτου είδους.*

Απόδειξη: Έστω ότι το πολυώνυμο $Q_{2n}(z)$ έχει δύο ρίζες στο $(-b,-a)$, τις k_1, k_2 με $k_2 < k_1 < 0$. Θεωρούμε έναν τυχαίο φυσικό n' και το πολυώνυμο $Q_{2n+2n'}(z)$. Εάν υποθέσουμε ότι το τελευταίο πολυώνυμο δεν έχει καμία ρίζα στο $(-b,-a)$, τότε οι k_1, k_2 θα βρίσκονται στο διάστημα (ρ_2,ρ_1) δύο διαδοχικών ριζών του. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να συμβαίνει, γιατί από το θεώρημα 1.3 έχουμε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του $Q_{2n+2n'}(z)$ βρίσκεται το πολύ μία ρίζα του $Q_{2n}(z)$. Άρα, για κάθε φυσικό n' το πολυώνυμο $Q_{2n+2n'}(-z)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (a,b) και το διάστημα αυτό είναι πρώτου είδους.

Ακολουθεί μία επίσης χρήσιμη πρόταση.

Πρόταση 7.6 *Εάν το διάστημα (a,b) είναι δευτέρου είδους και τα a, b είναι σημεία συνέχειας της Φ, τότε είναι $\Phi(a) = \Phi(b)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ν έτσι ώστε για κάθε $n > \nu$ και για κάθε $a \leq u \leq b$ να ισχύει ότι*

$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon \ . \ (**)$$

Δηλαδή, η (ϕ_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στη Φ στο διάστημα $[a,b]$.

Απόδειξη: Υποθέσαμε ότι τα a και b είναι σημεία συνέχειας της Φ, επομένως, είναι $\Phi(a) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(a)$ και $\Phi(b) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(b)$.

Θα δείξουμε ότι ισχύει $\Phi(a) = \Phi(b)$. Πράγματι, αν υποθέσουμε το αντίθετο, τότε θα έχουμε ότι $\Phi(a) < \Phi(b)$. Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Phi(a) + \varepsilon < \Phi(b) - \varepsilon \ . \ (1)$$

Για το ε αυτό υπάρχει φυσικός ν ώστε για κάθε $n > \nu$ να ισχύει

$$|\phi_n(a) - \Phi(a)| < \varepsilon \quad (2)$$

και

$$|\phi_n(b) - \Phi(b)| < \varepsilon\ . \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι για κάθε $n > \nu$ ισχύει ότι $\phi_n(a) < \phi_n(b)$, δηλαδή κανένα ϕ_n για $n > \nu$ δεν είναι σταθερό στο διάστημα $[a, b]$ και επομένως τα πολυώνυμα $Q_{2n}(-z)$, για $n > \nu$, έχουν τουλάχιστον μία ρίζα στο (a, b). Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα αυτό είναι πρώτου είδους, πράγμα που είναι αντίθετο με την υπόθεση. Άρα είναι $\Phi(a) = \Phi(b)$ και η Φ είναι σταθερή στο $[a, b]$.

Επειδή $\Phi(a) = \Phi(b) = \Phi(u)$ για κάθε u στο $[a, b]$, οι σχέσεις (2) και (3) γράφονται

$$\Phi(u) - \varepsilon < \phi_n(a) < \Phi(u) + \varepsilon$$

και

$$\Phi(u) - \varepsilon < \phi_n(b) < \Phi(u) + \varepsilon$$

για κάθε $n > \nu$.

Αλλά, κάθε ϕ_n είναι αύξουσα, άρα για κάθε u του $[a, b]$ και για κάθε $n > \nu$ θα έχουμε ότι

$$\Phi(u) - \varepsilon < \phi_n(u) < \Phi(u) + \varepsilon$$

ή ισοδύναμα

$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon\ .$$

Παρατήρηση 7.3 *Με τις υποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, συνεπάγεται ότι ισχύει $\Phi(u) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(u)$, άρα σε κάθε σημείο u του $[a, b]$ υπάρχει το όριο των $\phi_n(u)$ και, επομένως, οι χ και ψ ταυτίζονται στο $[a, b]$.*

Πόρισμα 7.1 *Εάν το διάστημα $(0, b)$ είναι δευτέρου είδους, τότε ισχύει ότι*

$$\Phi(u) = \phi_n(u) = 0$$

για κάθε φυσικό n και για κάθε u στο $[0, b]$.

Απόδειξη: Από το παράδειγμα στην αρχή αυτής της παραγράφου προκύπτει ότι εφόσον το διάστημα $(0, b)$ είναι δευτέρου είδους, κανένα πολυώνυμο $Q_{2n}(-z)$ δεν μπορεί να μηδενίζεται στο $[0, b]$. Επομένως, είναι $\phi_n(u) = 0$ για κάθε φυσικό n και κάθε $u \in [0, b]$ και οι χ, ψ, Φ μηδενίζονται στο $[0, b]$.

7.7 Εκτίμηση του ολοκληρώματος $\int_0^L |\phi_n(u) - \Phi(u)|du$, όπου L σημείο συνέχειας της Φ.

Θεωρούμε μία διαμέριση

$$0 = u_0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_{k-1} < u_k = L$$

του $[0, L]$ τέτοια ώστε κανένα u_i να μην είναι σημείο ασυνέχειας της Φ.[3]

Έστω ότι ε είναι το μεγαλύτερο μήκος των διαστημάτων (u_{i-1}, u_i) της διαμέρισης.

Σε κάθε διάστημα (u_{i-1}, u_i) αντιστοιχούμε έναν ακέραιο αριθμό ν_i με τον ακόλουθο τρόπο:

- Εάν το εν λόγω διάστημα είναι πρώτου είδους, τότε ο ν_i είναι ο μεγαλύτερος φυσικός n για τον οποίο το πολυώνυμο $Q_{2n}(-z)$ δεν έχει ρίζα στο (u_{i-1}, u_i).

- Εάν το (u_{i-1}, u_i) είναι δευτέρου είδους, τότε ο ν_i είναι ο μικρότερος φυσικός, ο οποίος έχει την ιδιότητα για κάθε μεγαλύτερό του φυσικό n να ισχύει

$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon' ,$$

  όπου ε' είναι αυθαίρετος θετικός αριθμός και $u \in [u_{i-1}, u_i]$. (Λόγω της πρότασης 7.6, ένας τέτοιος φυσικός ν_i πάντα υπάρχει.)

Συμβολίζουμε με N το μεγαλύτερο από τους k αριθμούς $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ και παίρνουμε τυχαίο φυσικό n μεγαλύτερο από N.

Επειδή ισχύει

$$\int_0^L |\phi_n(u) - \Phi(u)|du = \sum_{i=1}^{k} \int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du ,$$

αρκεί να εκτιμήσουμε το κάθε ολοκλήρωμα $\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du$.

- Εάν το διάστημα (u_{i-1}, u_i) είναι πρώτου είδους, τότε, επειδή $n > N$, η συνάρτηση ϕ_n έχει ένα τουλάχιστον σημείο ασυνέχειας c στο διάστημα αυτό, άρα

$$\phi_n(c-) \leq \Phi(c) \leq \phi_n(c+) .$$

  Επομένως,

$$\Phi(u_{i-1}) < \phi_n(u_i)$$

  και

$$\phi_n(u_{i-1}) < \Phi(u_i) .$$

[3]Από τη στιγμή που τα σημεία ασυνέχειας της Φ είναι αριθμησίμου πλήθους, τα υπόλοιπα σημεία του $[0, L]$ απ' όπου μπορούμε να διαλέξουμε τα σημεία της διαμέρισης πλην του 0 είναι υπεραριθμησίμου πλήθους.

Άρα, για κάθε $u \in [u_{i-1}, u_i]$ ισχύει

$$\phi_n(u) - \Phi(u) \leq \phi_n(u_i) - \Phi(u_{i-1}) < \phi_n(u_i) - \phi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})$$

και

$$\phi_n(u) - \Phi(u) \geq \phi_n(u_{i-1}) - \Phi(u_i) > \phi_n(u_{i-1}) - \phi_n(u_i) + \Phi(u_{i-1}) - \Phi(u_i) \ .$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες έχουμε ότι

$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \phi_n(u_i) - \phi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1}) \ .$$

Άρα είναι

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du \leq \varepsilon\Big(\phi_n(u_i) - \phi_n(u_{i-1}) + \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})\Big) \ .$$

Τελικά, το άθροισμα των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du$, όπου το (u_{i-1}, u_i) είναι διάστημα πρώτου είδους, θα είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2) \ ,$$

όπου σ_1, σ_2 είναι τα αθροίσματα $\sum_i (\phi_n(u_i) - \phi_n(u_{i-1}))$ και $\sum_i (\Phi(u_i) - \Phi_n(u_{i-1}))$ αντίστοιχα.[4] Οπότε,

$$\varepsilon(\sigma_1 + \sigma_2) \leq \varepsilon\Big(\phi_n(+\infty) - \phi_n(0) + \Phi(+\infty) - \Phi(0)\Big) = \varepsilon\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_1}\right) = \frac{2\varepsilon}{\alpha_1} \ .$$

- Αν το διάστημα (u_{i-1}, u_i) είναι δευτέρου είδους, τότε επειδή $n > N \geq \nu_i$ θα έχουμε ότι
$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \varepsilon'$$
επομένως,
$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du \leq \varepsilon'(u_i - u_{i-1})$$
και, τελικά, το άθροισμα των ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{u_{i-1}}^{u_i} |\phi_n(u) - \Phi(u)|du$, όπου το (u_{i-1}, u_i) είναι διάστημα δευτέρου είδους, θα είναι μικρότερο ή ίσο από $\varepsilon' L$.

Δείξαμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.7 *Εάν L είναι σημείο συνέχειας της Φ και ε, ε' είναι αυθαίρετοι θετικοί αριθμοί, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει ότι*

$$\int_0^L |\phi_n(u) - \Phi(u)|du \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon' \ .$$

Δηλαδή, ισχύει

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^L |\phi_n(u) - \Phi(u)|du = 0 \ .$$

[4] Τα αθροίσματα αυτά δεν είναι τηλεσκοπικά, εκτός αν όλα τα διαστήματα (u_{i-1}, u_i) είναι πρώτου είδους.

7.8 Οι συναρτήσεις F και F_1 με τη μορφή ολοκληρωμάτων Stieltjes.

Λήμμα 7.1 *Έστω A ο ημιάξονας των μη θετικών πραγματικών αριθμών. Τότε, για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$ ισχύει ότι*

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi_n(u)}{z+u} = \int_0^{+\infty} \frac{\phi_n(u)du}{(z+u)^2} .$$

Απόδειξη: Καταρχάς, το $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi_n(u)}{z+u}$ είναι ένα καλά ορισμένο ολοκλήρωμα Stieltjes, διότι η ϕ_n είναι αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση και η $\frac{1}{z+u}$ είναι συνεχής συνάρτηση του u στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει ότι[5]

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{z+x_i}$$

και

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\phi_n(u)\, du}{(z+u)^2} &= \int_0^{x_1} \frac{\phi_n(u)\, du}{(z+u)^2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\phi_n(u)\, du}{(z+u)^2} + \ldots + \int_{x_n}^{+\infty} \frac{\phi_n(u)\, du}{(z+u)^2} \\
&= \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_1\, du}{(z+u)^2} + \ldots + \int_{x_n}^{+\infty} \frac{(M_1 + M_2 + \ldots + M_n)\, du}{(z+u)^2} \\
&= -M_1 \left[\frac{1}{z+u}\right]_{x_1}^{x_2} - (M_1 + M_2) \left[\frac{1}{z+u}\right]_{x_2}^{x_3} - \ldots \\
&\quad -(M_1 + \ldots + M_n) \left[\frac{1}{z+u}\right]_{x_n}^{+\infty} \\
&= \frac{M_1}{z+x_1} + \frac{M_2}{z+x_2} + \ldots + \frac{M_n}{z+x_n} .
\end{aligned}$$

Άρα, η ζητούμενη ισότητα έχει αποδειχθεί.

Με τη βοήθεια του λήμματος θα δείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 7.1 *Για κάθε $z \in \mathbb{C} - A$ ισχύει ότι*

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u} .$$

Απόδειξη: Από το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι

$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{\phi_n(u)du}{(z+u)^2} ,$$

[5] Πιο σωστά, είναι $M_i^{(n)}$ αντί για M_i και $x_i^{(n)}$ αντί για x_i.

άρα
$$\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^{+\infty} \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\phi_n(u) - \Phi(u)}{(z+u)^2}\, du\ .$$
Επομένως,
$$\left| \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^{+\infty} \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} \right| \le \int_0^{+\infty} \frac{|\phi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du\ .$$
Το τελευταίο άνω φράγμα της παράστασης γράφεται
$$\int_0^{L} \frac{|\phi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du + \int_L^{+\infty} \frac{|\phi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du\ ,$$
όπου L είναι τυχαίο σημείο συνέχειας της Φ.

Θεωρούμε στη συνέχεια δυο τυχαίους αριθμούς ε και ε'. Τότε, από την προηγούμενη παράγραφο, συνεπάγεται ότι υπάρχει φυσικός N έτσι ώστε για κάθε n με $n > N$ να ισχύει
$$\int_0^{L} |\phi_n(u) - \Phi(u)| du \le \frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon'\ .$$
Οπότε,
$$\int_0^{L} \frac{|\phi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2} du \le \frac{1}{< z >^2} \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon' \right)\ ,\quad (*)$$
όπου $< z >$ είναι το ελάχιστο της $|z+u|$ καθώς το u μεταβάλλεται από το 0 έως το $+\infty$.

Για κάθε u στο διάστημα $[L, +\infty)$ ισχύει ότι
$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| < \frac{1}{\alpha_1}$$
και για κάθε $z = a + bi$ του $\mathbb{C} - A$ έχουμε
$$|z+u|^2 = (u+a)^2 + b^2 \ge (u+a)^2\ .$$
Επομένως,
$$\int_L^{+\infty} \frac{|\phi_n(u) - \Phi(u)|}{|z+u|^2}\, du < \frac{1}{\alpha_1} \int_L^{+\infty} \frac{du}{(u+a)^2} = \frac{1}{\alpha_1 (L+a)}\ ,\quad (**)$$
όπου υποθέτουμε ότι το L είναι αρκετά μεγάλο ώστε το άθροισμα $L + a$ να είναι θετικός αριθμός.

Τελικά, από τις (*) και (**) προκύπτει ότι
$$\left| \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} - \int_0^{+\infty} \frac{\Phi(u)\, du}{(z+u)^2} \right| < \frac{1}{< z >^2} \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon' \right) + \frac{1}{\alpha_1 (L+a)}\ ,$$
όπου ο αριθμός L μπορεί να πάρει οσοσδήποτε μεγάλες τιμές και οι ε, ε' μπορούν να πάρουν οσοδήποτε μικρές τιμές. Άρα, η παράσταση στο απόλυτο γίνεται οσοδήποτε μικρή για αρκετά μεγάλα n.

Από τα παραπάνω έχουμε ότι η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$ συγκλίνει στο $\int_0^{+\infty}\frac{\Phi(u)\ du}{(z+u)^2}$. Γνωρίζουμε όμως ότι η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $F(z)$ σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}-A$. Άρα, η συνάρτηση F μπορεί να πάρει τη μορφή

$$F(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\Phi(u)\ du}{(z+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{d\Phi(u)}{z+u}\ ,\quad z\ \in\ \mathbb{C}-A\ . \tag{7.1}$$

Στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ συγκλίνει, ισχύει ακόμη μία ισότητα:

$$F(z)=\lim_{n\to+\infty}\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}=\int_0^{+\infty}\frac{d\Phi(u)}{z+u}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\mu_i}{z+\lambda_i}\ ,\quad z\ \in\ \mathbb{C}-A\ ,$$

όπως είδαμε στα θεωρήματα 4.3, 5.3 και 5.4. Άρα, η Φ είναι εκείνη η αύξουσα συνάρτηση που προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται στον άξονα $0x$ το σύστημα των μαζών

$$(\mu_i,\lambda_i),\ i=1,2,3,\dots\ .$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω μπορούμε να βγάλουμε το εξής συμπέρασμα για τη μορφή της Φ.

Πρόταση 7.8 *Όταν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ συγκλίνει, η συνάρτηση Φ είναι αύξουσα και κλιμακωτή. Παίρνει αριθμησίμου πλήθους τιμές και ισχύει: $\Phi(0)=0$ και $\Phi(+\infty)=\frac{1}{\alpha_1}$. Τα σημεία ασυνέχειάς της είναι οι ρίζες λ_k, $k=1,2,\dots$ της $q(-z)$. Μάλιστα, σε κάθε σημείο ασυνέχειας λ_k το άλμα της συνάρτησης είναι ίσο με μ_k.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αύξουσα συνάρτηση Φ^*, της οποίας η τιμή στο τυχαίο $u\in[0,+\infty)$ ισούται με

$$\Phi^*(u)=\sum_{\lambda_i\le u}\mu_i\ .$$

Σημεία ασυνέχειας της Φ^* είναι τα λ_k, όπου $k=1,2,\dots$, ενώ το άλμα της σε κάθε λ_k είναι μ_k. Επίσης, γι' αυτήν ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\Phi^*(u)}{z+u}=\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{\mu_i}{z+\lambda_i}=\int_0^{+\infty}\frac{d\Phi(u)}{z+u}\ ,\quad z\ \in\ \mathbb{C}-A.$$

Από το θεώρημα 6.1 έπεται ότι οι συναρτήσεις Φ και Φ^* έχουν ακριβώς τα ίδια σημεία ασυνέχειας και τα άλματά τους στα σημεία αυτά είναι ίσα. Άρα, το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Ανάλογα συμπεράσματα ισχύουν και για την υπακολουθία των περιττών όρων της $\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right)$. Η συνάρτηση $F_1(z)$ στην οποία συγκλίνει η ακολουθία $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right)$ γράφεται στη μορφή

$$F_1(z)=\int_0^{+\infty}\frac{\Phi_1(u)\ du}{(z+u)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{d\Phi_1(u)}{z+u},\quad z\,\epsilon\,\mathbb{C}-A\ , \tag{7.2}$$

όπου Φ_1 είναι μία αύξουσα συνάρτηση που χαρακτηρίζει μία κατανομή μάζας στον $0x$. Στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, ισχύει επιπλέον η ισότητα

$$F_1(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu_i}{z+\theta_i} \ , \quad z \ \in \ \mathbb{C} - A \ ,$$

ενώ η Φ_1 είναι εκείνη η αύξουσα συνάρτηση που προσδιορίζει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται στον άξονα $0x$ το σύστημα των μαζών

$$(\nu_i, \theta_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \ .$$

Αποδεικνύεται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο, όπως στην παραπάνω πρόταση, ότι στην περίπτωση αυτή, η Φ_1 είναι μία κλιμακωτή συνάρτηση, η οποία παίρνει αριθμησίμου πλήθους τιμές και ότι ισχύουν οι ισότητες $\Phi_1(0) = 0$ και $\Phi_1(+\infty) = \frac{1}{\alpha_1}$. Τα σημεία ασυνέχειας της Φ_1 είναι οι ρίζες θ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, της $q_1(-z)$ και το άλμα της σε κάθε σημείο θ_k ισούται με ν_k. Σε κάθε σημείο $u \ \in \ [0, +\infty)$ στο οποίο η Φ_1 είναι συνεχής, η τιμή της θα είναι ίση με $\Phi_1(u) = \sum_{\theta_i \leq u} \nu_i$.

Επειδή μας ενδιαφέρει η περίπτωση στην οποία η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει στο $+\infty$, όπου οι συναρτήσεις F και F_1 ταυτίζονται και, άρα, οι Φ και Φ_1 χαρακτηρίζουν την ίδια κατανομή μάζας, στο υπόλοιπο του κεφαλαίου δε θα ασχοληθούμε με την ακολουθία των περιττών προσεγγίσεων $\left(\frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)}\right)$ και τη συνάρτηση Φ_1.

Παρατήρηση 7.4 *Από τα παραπάνω έχουμε ότι, όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, τότε για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει*

$$F_1(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu_i}{x+\theta_i}$$

ή

$$xF_1(x) = \nu_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\nu_i x}{x+\theta_i} \ .$$

Οπότε,

$$\lim_{x \to 0^+} xF_1(x) = \nu_0 \ .$$

Λόγω της πρότασης 3.1 θα είναι

$$\nu_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k+1}} \ . \tag{7.3}$$

Η ισότητα αυτή θα φανεί χρήσιμη παρακάτω.

7.9 Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $\int_0^{+\infty} u^k d\Phi(u)$.

Θεώρημα 7.2 *Ισχύει ότι* $\int_0^{+\infty} u^k d\Phi(u) = c_k$ *για κάθε φυσικό* k.

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε μαθηματική επαγωγή. Καταρχάς, θ' αποδείξουμε ότι $\int_0^{+\infty} d\Phi(u) = c_0$.
Στο τέλος του τρίτου κεφαλαίου είχαμε δείξει ότι για κάθε θετικό αριθμό x και για κάθε φυσικό p είναι

$$F(x) = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^p} + (-1)^p\frac{\xi c_p}{x^{p+1}},\ 0 < \xi < 1\ ,\quad (*)$$

οπότε,

$$xF(x) = c_0 - \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{c_{p-1}}{x^{p-1}} + (-1)^p\frac{\xi c_p}{x^p},\ 0 < \xi < 1\ .\quad (**)$$

Από τη σχέση (7.1), θέτοντας όπου z το x και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με x, παίρνουμε ότι

$$xF(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u)\quad (***)$$

και από την σχέση (**) έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} xF(x) = c_0\ .\quad (\diamond)$$

Επειδή το προηγούμενο όριο υπάρχει, η συνάρτηση $xF(x)$ είναι άνω φραγμένη στο $[0, +\infty)$ και έστω M ένα άνω φράγμα της.

Επίσης, ισχύει ότι

$$0 \le \int_0^L d\Phi(u) - \int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^L \left(1 - \frac{x}{x+u}\right) d\Phi(u) \le \frac{L}{x+L} V_0^L \Phi\ ,$$

οπότε, για $x \to +\infty$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^L d\Phi(u)\ .$$

Μάλιστα, για να είμαστε πιο ακριβείς, είναι

$$\sup_{x\in[0,+\infty)} \int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^L d\Phi(u)\ ,\quad (\diamond\diamond)$$

διότι η $\int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του x.

Όμως, για κάθε θετικό αριθμό L ισχύει προφανώς ότι

$$\int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) \le \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = xF(x) \le M$$

για κάθε $x \in [0,+\infty)$.

Άρα, από την $(\diamond\diamond)$ προκύπτει ότι

$$\int_0^L d\Phi(u) \le M$$

για κάθε L. Συνεπώς, το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} d\Phi(u)$ είναι πεπερασμένο.

Θα δείξουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} d\Phi(u) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) \ .$$

Επειδή το $\int_0^{+\infty} d\Phi(u)$ είναι πεπερασμένο, δοθέντος $\varepsilon > 0$, θα υπάρχει L τέτοιο ώστε

$$0 \le \int_L^{+\infty} d\Phi(u) < \varepsilon \ . \ \ (1)$$

Εφόσον $\int_L^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) \le \int_L^{+\infty} d\Phi(u)$ θα είναι επίσης

$$0 \le \int_L^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) < \varepsilon \ . \ \ (2)$$

Τέλος, λόγω της $(\diamond\diamond)$, ισχύει για αρκετά μεγάλα x ότι

$$\left| \int_0^L \frac{x}{x+u} d\Phi(u) - \int_0^L d\Phi(u) \right| < \varepsilon \ . \ \ (3)$$

Συνδυάζοντας τις ανισότητες (1), (2), (3), παίρνουμε ότι για αρκετά μεγάλα x ισχύει

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) - \int_0^{+\infty} d\Phi(u) \right| < 3\varepsilon \ .$$

Συνεπώς,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} d\Phi(u) = \int_0^{+\infty} d\Phi(u) \ .$$

Λόγω της $(\diamond)$ και της $(***)$, παίρνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} d\Phi(u) = c_0 \ .$$

Έστω, τώρα, ότι για $n \le k-1$ ισχύει $\int_0^{+\infty} u^n d\Phi(u) = c_n$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{x+u} \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \frac{u^2}{x^3} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{u^{k-1}}{x^k} + (-1)^k \frac{u^k}{x^k(x+u)} \right) d\Phi(u) \\ &= \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots + (-1)^{k-1} \frac{c_{k-1}}{x^k} + \frac{(-1)^k}{x^k} \int_0^{+\infty} \frac{u^k}{x+u} d\Phi(u) \ . \end{aligned}$$

Οπότε

$$x^{k+1}\left(F(x)-\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}-\ldots+(-1)^k\frac{c_{k-1}}{x^k}\right)=(-1)^k\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+u}u^k\,d\Phi(u)\ .$$

Από την $(*)$ για $p=k+1$ έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}x^{k+1}\left(F(x)-\frac{c_0}{x}+\frac{c_1}{x^2}-\ldots+(-1)^k\frac{c_{k-1}}{x^k}\right)=(-1)^k c_k$$

και, επομένως,

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+u}u^k d\Phi(u)=c_k\ .\quad (a)$$

Με παρόμοιο τρόπο, όπως και στην περίπτωση του $k=0$ (αντικαθιστώντας το $d\Phi(u)$ με το $u^k d\Phi(u)$), αποδεικνύεται ότι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x}{x+u}u^k d\Phi(u)=\int_0^{+\infty}u^k d\Phi(u)\ .\quad (b)$$

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη τις (a), (b), παίρνουμε ότι $\int_0^{+\infty}u^k d\Phi(u)=c_k$ και το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Παρατήρηση 7.5 *Το προηγούμενο θεώρημα είναι από τα σπουδαιότερα θεωρήματα της εργασίας του Stieltjes, γιατί αποδεικνύει μ' αυτό ότι τα ολοκληρώματα* $\int_0^{+\infty}u^k d\Phi(u)$, $k=0,1,2,\ldots$ *είναι μία λύση του προβλήματος των ροπών. Μένει ν' αποδείξει ότι όταν η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ *αποκλίνει, η λύση του θεωρήματος 7.2 είναι και η μοναδική. Αυτός θα είναι ο βασικότερος στόχος του επόμενου κεφαλαίου.*

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως στο παραπάνω θεώρημα αποδεικνύεται ότι και στην περίπτωση της F_1 *ισχύει ότι* $c_k=\int_0^{+\infty}u^k d\Phi_1(u)$, $k=0,1,2,\ldots$ *. Άρα, στην περίπτωση που η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ *συγκλίνει, το πρόβλημα των ροπών έχει δύο τουλάχιστον λύσεις, τις* $c_k=\int_0^{+\infty}u^k d\Phi(u)$ *και* $c_k=\int_0^{+\infty}u^k d\Phi_1(u)$ *για κάθε φυσικό* k*. Τότε όμως και οι εξισώσεις* $c_k=\int_0^{+\infty}u^k d\left(t\Phi(u)+(1-t)\Phi_1(u)\right)$*, όπου* $k=0,1,\ldots$ *και* t *ανήκει στο (0,1), θα είναι, επίσης, λύση του προβλήματος. Άρα το πρόβλημα των ροπών έχει σ' αυτήν την περίπτωση άπειρες λύσεις.*[6]

7.10 Μερικές ακόμη ιδιότητες της Φ.

Θεώρημα 7.3 *Ισχύει ότι*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|\phi_n(u)-\Phi(u)|\,u^k du=0$$

για κάθε $k=0,1,2,\ldots$.

[6] Αυτό είναι κάτι που έχουμε ήδη δει στο τέλος του κεφαλαίου 4.

Απόδειξη: Από την πρόταση 7.7 έχουμε ότι, εάν L είναι σημείο συνέχειας της Φ και ε, ε' είναι αυθαίρετοι θετικοί αριθμοί, τότε υπάρχει φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει ότι

$$\int_0^L |\phi_n(u) - \Phi(u)| du \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon' \ . \quad (1)$$

Είδαμε ακόμα ότι $\Phi(+\infty) = \phi_n(+\infty) = \frac{1}{\alpha_1} = c_0$. Άρα οι αριθμοί $c_0 - \phi_n(u)$ και $c_0 - \Phi(u)$ είναι μη αρνητικοί, οπότε,

$$|\phi_n(u) - \Phi(u)| \leq (c_0 - \Phi(u)) + (c_0 - \phi_n(u)) \ .$$

Επειδή

$$\int_0^{+\infty} u^{k+2} d\Phi(u) = c_{k+2} \ ,$$

έχουμε ότι για κάθε u ισχύει

$$u^{k+2} \left(\Phi(+\infty) - \Phi(u)\right) \leq \int_0^{+\infty} x^{k+2} d\Phi(x) = c_{k+2}$$

και για τον ίδιο λόγο ισχύει

$$u^{k+2} \left(\phi_n(+\infty) - \phi_n(u)\right) \leq c_{k+2} \ .$$

Άρα

$$u^k |\Phi(u) - \phi_n(u)| \leq \frac{2c_{k+2}}{u^2}$$

και, επομένως,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |\Phi(u) - \phi_n(u)| u^k du &\leq \int_0^L |\Phi(u) - \phi_n(u)| u^k du + \int_L^{+\infty} |\Phi(u) - \phi_n(u)| u^k du \\ &\leq L^k \left(\frac{2\varepsilon}{\alpha_1} + L\varepsilon'\right) + \frac{2c_{k+2}}{L} \ . \end{aligned}$$

Επιλέγοντας πρώτα το L αρκετά μεγάλο και έπειτα τα ε, ε' αρκετά μικρά, βλέπουμε ότι

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} |\Phi(u) - \phi_n(u)| u^k du = 0 \ .$$

Παρακάτω ακολουθούν δύο ακόμη ιδιότητες της συνάρτησης Φ.

Πρόταση 7.9 *Για κάθε n, η συνάρτηση $\phi_n - \Phi$ αλλάζει πρόσημο τουλάχιστον $2n - 1$ φορές.*

Απόδειξη: Στην αρχή της §7.3 δείξαμε ότι

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}-\phi_n(u)\right)u^k du=\frac{c_{k+1}}{k+1}$$

για $k=0,1,2,\ldots,2n-2$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι

$$\left|\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}-\phi_n(u)\right)u^k du-\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{\alpha_1}-\Phi(u)\right)u^k du\right|$$

$$\leq\int_0^{+\infty}|\phi_n(u)-\Phi(u)|u^k du\to 0$$

όταν $n\to+\infty$. Άρα, είναι

$$\int_0^{+\infty}\left(\phi_n(u)-\Phi(u)\right)u^k du=0\ ,$$

για $k=0,1,2,\ldots,2n-2$, πράγμα το οποίο συνεπάγεται[7] το ζητούμενο.

Πρόταση 7.10 *Έστω $0\leq a<b$. Αν η Φ είναι σταθερή στο $[a,b]$ και συνεχής στα a, b, τότε στο διάστημα $[a,b]$ μηδενίζονται πεπερασμένου πλήθους πολυώνυμα $Q_{2n}(-z)$.*

Απόδειξη: Το διάστημα $[a,b]$ θα περιέχεται σε ένα από τα διαστήματα $(\lambda_{i-1},\lambda_i)$. Προφανώς, επειδή τα λ_{i-1} και λ_i είναι τα όρια των ακολουθιών $(x_{i-1}^{(n)})$ και $(x_i^{(n)})$, στο $[a,b]$ θα περιέχονται πεπερασμένου πλήθους ρίζες πολυωνύμων $Q_{2n}(-z)$.

7.11 Ερμηνεία του $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|\phi_n(u)-\Phi(u)|\,du=0$.

Συμβολίζουμε με D_n και D τις κατανομές μάζας που ορίζουν οι συναρτήσεις ϕ_n και Φ. Από την τυχαία κατανομή D_n μπορούμε εύκολα να περάσουμε στην κατανομή D αν κάνουμε κάποια ανακατανομή μαζών. Αν υποθέσουμε ότι για τη μεταφορά μιας μάζας m κατά l απαιτείται έργο ml, τότε εύκολα προκύπτει ότι για να πάρουμε από την κατανομή D_n την D το συνολικό έργο που απαιτείται είναι ίσο με

$$\int_0^{+\infty}|\phi_n(u)-\Phi(u)|\,du$$

Αυτό το συνολικό έργο το συμβολίζουμε με $\{D_n,D\}$. Επειδή

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}|\phi_n(u)-\Phi(u)|\,du=0$$

το έργο αυτό γίνεται οσοδήποτε μικρό καθώς αυξάνει το n. Επομένως, η κατανομή D μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο της ακολουθίας των κατανομών (D_n), οπότε οδηγούμαστε στον παρακάτω ορισμό.

[7] Χρησιμοποιούμε ακριβώς την ίδια μέθοδο, όπως και στην §7.3.

Ορισμός 7.2 *Θα λέμε ότι μία κατανομή μαζών D είναι το όριο μιας ακολουθίας κατανομών μαζών (D_n) όταν η αριθμητική ακολουθία $(\{D_n, D\})$ των έργων που απαιτούνται είναι μηδενική.*

Αν n, n' είναι δύο τυχαίοι φυσικοί αριθμοί, τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\{D_n, D_{n+n'}\} \leq \{D_n, D\} + \{D, D_{n+n'}\} \ . \quad (*)$$

Επομένως, θα μπορούσαμε να δώσουμε και τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.3 *Θα λέμε ότι υπάρχει το όριο μιας ακολουθίας κατανομών μαζών (D_n), όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φυσικός n έτσι ώστε $\{D_n, D_{n+n'}\} < \varepsilon$ για κάθε φυσικό n'.*

Αν μία ακολουθία κατανομών έχει όριο με βάση τον πρώτο ορισμό, τότε θα έχει όριο και με τον δεύτερο ορισμό. Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύει και το αντίστροφο. Άρα, οι δύο ορισμοί είναι ισοδύναμοι και το μόνο στο οποίο διαφέρουν είναι ότι στον πρώτο πρέπει να γνωρίζουμε την κατανομή-όριο της ακολουθίας των κατανομών.[8]

Επειδή ισχύει ότι $\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i^{(n)}}{z+x_i^{(n)}}$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι όροι της ακολουθίας $\left(\frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)}\right)$ αποτελούν κατά κάποιο τρόπο παραμετρικές[9] ροπές των αντίστοιχων κατανομών μαζών της ακολουθίας (D_n). Και με βάση τα όσα έχουμε δείξει, η παραπάνω ακολουθία των παραμετρικών κατανομών έχει ως όριο την αντίστοιχη παραμετρική ροπή της D.

Αν τώρα θεωρήσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}$, με τη βοήθεια του οποίου εκφράζεται η παραμετρική ροπή της D, και θυμηθούμε από τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes ότι είναι το όριο ενός αθροίσματος, καταλήγουμε στο ότι γι' αυτό το άθροισμα αρκεί να πάρουμε την παραμετρική ροπή της D_n, δηλαδή τον $2n$-οστό όρο της ακολουθίας

[8] Ο Stieltjes δίνει τους δύο ορισμούς και παρατηρεί ότι ο δεύτερος ορισμός δεν είναι και τόσο ακριβής, διότι δεν προσδιορίζει την κατανομή D για την οποία ο αριθμός $\{D_n, D\}$ γίνεται οσοδήποτε μικρός. Όμως, γράφει ότι δε θα ασχοληθεί παραπάνω με το θέμα των δύο ορισμών. Όσον αφορά την ισοδυναμία τους, ισχύουν τα εξής.

Αν μία ακολουθία (D_n) έχει όριο με τον πρώτο ορισμό, λόγω της $(*)$ θα έχει όριο και με τον δεύτερο.

Αν έχουμε μία ακολουθία κατανομών μαζών (D_n) που έχει όριο με βάση το δεύτερο ορισμό και αν (f_n) είναι η αντίστοιχη ακολουθία των αυξουσών συναρτήσεων που τις ορίζει, τότε από τη Θεωρία Μέτρου έχουμε ότι η (f_n) είναι ακολουθία Cauchy κατά μέσο. Άρα, από γνωστή πρόταση, θα υπάρχει μία συνάρτηση F τέτοια ώστε η ακολουθία των συναρτήσεων να συγκλίνει σ' αυτή κατά μέσο, δηλαδή να ισχύει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} |f_n(u) - F(u)|\, du = 0 \ .$$

Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία (f_{n_k}) της (f_n) που να συγκλίνει σημειακά στην F σχεδόν παντού στο $(0, +\infty)$, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι (αν στα σημεία της μη σύγκλισης διορθώσουμε την F κατάλληλα) η F είναι μία αύξουσα συνάρτηση, άρα ορίζει μία κατανομή μάζας D στον $0x$. Τότε, η τελευταία σχέση γράφεται

$$\lim_{n\to+\infty} \{D_n, D\} = 0 \ ,$$

πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ακολουθία έχει όριο και με βάση τον πρώτο ορισμό.

[9] Γιατί είναι συναρτήσεις του z.

των προσεγγίσεων $\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right)$ του συνεχούς κλάσματος Stieltjes. Μ' άλλα λόγια, το συνεχές κλάσμα Stieltjes είναι στην ουσία μία άλλη ισοδύναμη μορφή κατάλληλου ορισμένου ολοκληρώματος.[10]

Αυτή η στενή σχέση που συνδέει τα συνεχή κλάσματα με τα ορισμένα ολοκληρώματα Stieltjes είναι και ο λόγος για τον οποίο θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο με τη μελέτη των τελευταίων.

[10]Στο σημείο αυτό ο Stieltjes παρατηρεί ότι ακριβώς το ίδιο συνέβαινε σε μία παλαιότερη δημοσίευση (στο περιοδικό Comptes rendus, τόμος $XCIX$, σελ. 508 του 1884), όπου τα πολυώνυμα $Q_{2n}(z)$ ήταν πολυώνυμα του Legendre.

Κεφάλαιο 8

Μελέτη του $\int_0^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u}$. Η επίλυση του προβλήματος των ροπών στην περίπτωση που $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n=+\infty$.

8.1 Συνεχή κλάσματα που ορίζονται από αύξουσες συναρτήσεις.

Θεωρούμε μία αύξουσα συνάρτηση ϕ που είναι τέτοια ώστε να ορίζεται στο $[0,+\infty)$, να ισχύει $\phi(0)=0$ και οι ροπές κάθε τάξης της κατανομής μαζών που ορίζει να είναι πεπερασμένες. Θέτουμε

$$c_k=\int_0^{+\infty}u^k d\phi(u)$$

για κάθε $k=0,1,2,\dots$.

Το ότι το $c_0=\int_0^{+\infty}d\phi(u)$ είναι πεπερασμένο, ισοδυναμεί με το ότι το $\phi(+\infty)=\lim_{u\to+\infty}\phi(u)$ είναι πεπερασμένο.

Μία επιπλέον συνθήκη για τη ϕ είναι ότι θα πρέπει να έχει άπειρα σημεία αυξητικότητας.[1] Ισοδύναμα, η συνθήκη αυτή για τη ϕ μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: η ϕ δεν μπορεί να είναι κλιμακωτή συνάρτηση με πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας. Με αυτήν την επιπλέον υπόθεση που κάνουμε, εξασφαλίζουμε το εξής: αν f είναι μη αρνητική και συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο $[0,+\infty)$ και τέτοια ώστε $\int_0^{+\infty}f(u)d\phi(u)=0$, τότε η f μηδενίζεται σε κάθε σημείο αυξητικότητας της ϕ και, επομένως, θα μηδενίζεται σε άπειρα σημεία.

Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u}$. Έχουμε δείξει ότι παριστάνει μία συνάρτηση ολόμορφη στο $\mathbb{C}-A$. Στην ειδική περίπτωση που η ϕ σταθεροποιείται από το a και μετά, το παραπάνω ολοκλήρωμα θα ισούται με $\int_0^{a}\frac{d\phi(u)}{z+u}$ και θα παριστάνει συνάρτηση

[1] Ένα σημείο $u>0$ θα είναι σημείο αυξητικότητας της ϕ αν ισχύει $\phi(u')<\phi(u'')$ για κάθε u', u'' με $u'<u<u''$.

ολόμορφη στο $\mathbb{C} - A_1$, όπου $A_1 = [-a, 0]$. Σ' αυτήν την περίπτωση, οι ροπές κάθε τάξης είναι πάντα πεπερασμένες και μάλιστα ισχύει $c_0 = \phi(a)$.

Στο παραπάνω γενικευμένο ολοκλήρωμα αντιστοιχεί η παρακάτω δυναμοσειρά με κέντρο το $+\infty$

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \dots \ ,$$

η οποία στη γενική περίπτωση που η ϕ δεν σταθεροποιείται αποκλίνει, ενώ στην περίπτωση που η ϕ είναι σταθερή από το a και μετά, συγκλίνει για κάθε $|z| > a$.

Έστω x τυχαίος θετικός αριθμός. Τότε, επειδή

$$0 < \int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} u^k d\phi(u) < \int_0^{+\infty} u^k d\phi(u) \ ,$$

υπάρχει ξ με $0 < \xi < 1$ ώστε να ισχύει

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x+u} u^k d\phi(u) = \xi \int_0^{+\infty} u^k d\phi(u)$$

και με υπολογισμούς αντίστοιχους με αυτούς που κάναμε στην απόδειξη του θεωρήματος 7.2 για την F, έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} = \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{x^n} + (-1)^n \frac{\xi c_n}{x^{n+1}} \ .$$

Η εύρεση του συνεχούς κλάσματος που αντιστοιχεί σε ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^{+\infty} \frac{f(u)du}{x+u}$ ή της αντίστοιχης δυναμοσειράς $\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{c_{n-1}}{x^n} + \dots$ είναι ένα θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν σε εργασίες τους οι μαθηματικοί P. Chebycheff (1821-1894), H. Heine (1821-1881) και J. Darboux (1842-1917). Θα χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματά τους και θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με το πρόβλημα της ακτίνας σύγκλισης, στο οποίο δεν αναφέρθηκαν αρκετά οι προηγούμενοι.

Για να βρούμε από μία δυναμοσειρά της παραπάνω μορφής το συνεχές κλάσμα που της αντιστοιχεί, αρκεί να αντικαταστήσουμε τα c_i στους τύπους της §2.5 και να υπολογίσουμε τις ορίζουσες U_n, W_n των παρακάτω τετραγωνικών μορφών[2]

$$\int_0^{+\infty} \left(X_0 + uX_1 + u^2 X_2 + \dots + u^{n-1} X_{n-1}\right)^2 d\phi(u)$$

και

$$\int_0^{+\infty} u \left(X_0 + uX_1 + u^2 X_2 + \dots + u^{n-1} X_{n-1}\right)^2 d\phi(u) \ .$$

Αυτές οι τετραγωνικές μορφές είναι θετικά ορισμένες, διότι αν για κάποια επιλογή των $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$ το πρώτο ολοκλήρωμα (ή το δεύτερο) μηδενίζεται, τότε το πολυώνυμο

$$\left(X_0 + uX_1 + u^2 X_2 + \dots + u^{n-1} X_{n-1}\right)^2$$

[2] Αν λάβουμε υπόψη τους τύπους $c_k = \int_0^{+\infty} u^k d\phi(u)$, τότε η πρώτη από τις παραπάνω τετραγωνικές μορφές είναι ίδια με αυτήν που θεωρήσαμε στην §2.3. Στη δεύτερη μορφή πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του αθροίσματος με u, οπότε παίρνουμε τις ορίζουσες W_n.

θα μηδενίζεται στα άπειρα σημεία αυξητικότητας της ϕ, οπότε $X_0 = X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0$. Άρα, οι ορίζουσες U_n, W_n είναι θετικές.

Με την βοήθεια του τύπου (2.10) υπολογίζουμε τους συντελεστές α_k του συνεχούς κλάσματος, που είναι θετικοί αριθμοί. Μ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε ένα συνεχές κλάσμα της μορφής που έχουμε μελετήσει. Επομένως, με βάση όλα όσα έχουμε δείξει στα προηγούμενα κεφάλαια, έχουμε δύο περιπτώσεις:

- Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει, τότε για τις ακολουθίες των άρτιων και περιττών προσεγγίσεων του συνεχούς κλάσματος θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n}(z)}{Q_{2n}(z)} = F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu_i}{z+\lambda_i} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}\ ,\ z\ \in\ \mathbb{C} - A\ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_{2n+1}(z)}{Q_{2n+1}(z)} = F_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu_i}{z+\theta_i} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}\ ,\ z\ \in\ \mathbb{C} - A.$$

  Οι συναρτήσεις $p(z)$, $q(z)$, $p_1(z)$, $q_1(z)$ και τα μ_i, ν_i, λ_i, θ_i ορίζονται με τη διαδικασία που περιγράφεται στο κεφάλαιο 4, ενώ οι Φ, Φ_1 με τον τρόπο που περιγράφεται στο κεφάλαιο 7.

- Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, τότε για κάθε z του $\mathbb{C} - A$ η ακολουθία $\left(\frac{P_n(z)}{Q_n(z)}\right)$ των προσεγγίσεων του συνεχούς κλάσματος έχει όριο

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}\ ,$$

  όπου η Φ ορίζεται έτσι όπως περιγράψαμε στο κεφάλαιο 7.

Στις παρακάτω παραγράφους θα βρούμε τη σχέση που έχουν τα όρια $\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u}$ και $\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u}$ της ακολουθίας των προσεγγίσεων του συνεχούς κλάσματος με το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$ απ' όπου αυτό προήλθε.

8.2 Σχέση των $F(z)$, $F_1(z)$ και $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$ στην περίπτωση που το z είναι θετικός αριθμός.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα βρούμε τη σχέση που συνδέει τους αριθμούς $F(x)$, $F_1(x)$ και $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$ στην περίπτωση που το x είναι θετικός πραγματικός αριθμός. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα και το θεώρημα[3] που ακολουθούν.

[3]Το θεώρημα διατυπώθηκε και αποδείχθηκε σε άλλη εργασία του Stieltjes στο Comptes Rendus, τόμος $CVIII$, σελ. 1297, έτος 1889.

Λήμμα 8.1 *Έστω $Q(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ μία θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Τότε υπάρχουν θετικοί αριθμοί c και C ώστε να ισχύει*

$$c(X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2) \leq Q(X_0, X_1, \ldots, X_n) \leq C(X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2)$$

για κάθε X_0, X_1, $\ldots$, X_n.

Απόδειξη: Η $Q(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ είναι συνεχής συνάρτηση των X_0, X_1, $\ldots$, X_n και, άρα, έχει μέγιστη τιμή C και ελάχιστη τιμή $c > 0$ στο συμπαγές σύνολο που ορίζεται από την ισότητα $X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 = 1$. Επομένως, ισχύει ότι $c \leq Q(X_0, X_1, \ldots, X_n) \leq C$ για κάθε X_0, X_1, $\ldots$, X_n που ικανοποιούν την $X_0^2 + X_1^2 + \ldots + X_n^2 = 1$ και, επειδή η Q είναι ομογενής δευτέρου βαθμού, έπεται η διπλή ανισότητα του λήμματος.

Θεώρημα 8.1 *Αν $x > 0$, το ελάχιστο της παράστασης*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n\right)^2 \frac{d\phi(u)}{x+u} \quad (*)$$

ως προς τα X_1, X_2, $\ldots$, X_n υπάρχει και ισούται με

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \ .$$

Άρα, για κάθε θετικό x ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} > \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \ .$$

Απόδειξη: Η τετραγωνική μορφή

$$\int_0^{+\infty} (X_0 + X_1(x+u) + \ldots + X_n(x+u)^n)^2 \frac{d\phi(u)}{x+u}$$

είναι θετικά ορισμένη. Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα, υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$\int_0^{+\infty} (1 + X_1(x+u) + \ldots + X_n(x+u)^n)^2 \frac{d\phi(u)}{x+u} \geq c(1 + X_1^2 + \ldots + X_n^2)$$

για κάθε X_1, $\ldots$, X_n. Συνεπάγεται ότι η παράσταση $(*)$ τείνει $+\infty$, όταν το άθροισμα $(X_1^2 + \ldots + X_n^2) \to +\infty$, οπότε επειδή είναι συνεχής συνάρτηση των X_1, $\ldots$,X_n, έχει ελάχιστη τιμή.

Θέτουμε

$$\mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n) = 1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n \ .$$

Εύκολα προκύπτει με υπολογισμούς ότι η παράσταση $(*)$ γίνεται ελάχιστη όταν ισχύει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\int_0^{+\infty} (x+u)^k \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n)\, d\phi(u) = 0\ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\ .$$

Επαγωγικά προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} u^k \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n)\, d\phi(u) = 0\ , \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\ ,$$

το οποίο με τη βοήθεια του συμβόλου S, που ορίσαμε στο τέλος του κεφαλαίου 2, γράφεται

$$S\{u^k \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n)\} = 0\ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{8.1}$$

Λόγω της παρατήρησης 2.2 και επειδή $S\{u^k Q_{2n}(-u)\} = 0$, έχουμε ότι η παράσταση $\mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n)$, αν θεωρηθεί ως πολυώνυμο του u, ισούται με το $Q_{2n}(-u)$ επί μία σταθερά. Όμως, $\mathbb{L}(0; X_1, \ldots, X_n) = 1$, άρα έχουμε

$$\mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n) = \frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}\ . \tag{8.2}$$

Η παράσταση $(*)$ ισούται με

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n)\, (1 + X_1(x+u) + \ldots + X_n(x+u)^n)\, \frac{d\phi(u)}{x+u}\ ,$$

επομένως, αν λάβουμε υπόψη το σύστημα εξισώσεων (8.1) και τη σχέση (8.2) παίρνουμε ότι η ελάχιστη τιμή της $(*)$ είναι ίση με

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n) \frac{d\phi(u)}{x+u} &= \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} \\ &\quad - \frac{1}{Q_{2n}(x)} \int_0^{+\infty} \frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u} d\phi(u)\ .\end{aligned}$$

Από την §2.5 έχουμε ότι

$$S\left\{\frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u}\right\} = P_{2n}(x)\ ,$$

άρα,

$$\int_0^{+\infty} \frac{Q_{2n}(x) - Q_{2n}(-u)}{x+u} d\phi(u) = P_{2n}(x)$$

και έχουμε τελικά ότι

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n) \frac{d\phi(u)}{x+u} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}\ .$$

Ακριβώς με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και το θεώρημα

Θεώρημα 8.2 *Αν $x > 0$, τότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n\right)^2 \frac{u d\phi(u)}{x+u}$$

ως προς τα $X_1, \ldots, X_n$ υπάρχει και ισούται με

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} - \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} .$$

Άρα, για κάθε θετικό x ισχύει ότι

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} > \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} .$$

Παρατήρηση 8.1 *Με μεθοδολογία παρόμοια με αυτή που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος προκύπτει ότι η τετραγωνική μορφή*

$$\int_0^{+\infty} (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u)$$

γίνεται ελάχιστη ως προς τα $X_1, \ldots, X_n$, όταν ισχύει το σύστημα εξισώσεων

$$S\{u^i W(u, X_1, \ldots, X_n)\} = 0 \ , \quad i = 1, \ldots, n \ ,$$

όπου $W(u, X_1, \ldots, X_n) = 1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n$. Αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (2.7) και την παρατήρηση 2.2, τότε προκύπτει ότι

$$W(u, X_1, \ldots, X_n) = \frac{Q_{2n+1}(-u)}{-uQ'_{2n+1}(0)} . \tag{8.3}$$

Παρατήρηση 8.2 *Στην παράσταση*

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n\right)^2 \frac{d\phi(u)}{x+u} \quad (*)$$

τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$ είναι τυχαίοι αριθμοί ανεξάρτητοι του u, άρα στη θέση του

$$\mathbb{L}(x+u; X_1, \ldots, X_n) = 1 + X_1(x+u) + X_2(x+u)^2 + \ldots + X_n(x+u)^n$$

μπορούμε να θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε πολυώνυμο του u, που είναι βαθμού n και για $u = -x$ παίρνει την τιμή 1. Επειδή το $\left(\frac{-u}{x}\right)^n$ είναι ένα τέτοιο πολυώνυμο, θα ισχύει, λόγω του θεωρήματος 8.1, ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} - \frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{u^{2n} d\phi(u)}{x^{2n}(x+u)} .$$

Επίσης, είναι

$$\frac{1}{x+u} = \frac{1}{x} - \frac{u}{x^2} + \ldots + (-1)^{2n-1} \frac{u^{2n-1}}{x^{2n}} + (-1)^{2n} \frac{u^{2n}}{x^{2n}(x+u)} ,$$

οπότε το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{u^{2n} d\phi(u)}{x^{2n}(x+u)}$ είναι τελικά ίσο με

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} - \frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} - \ldots + \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}}$$

και, άρα, έχουμε ότι

$$\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)} \geq \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots - \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}} \ .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε το ίδιο πολυώνυμο και για την παράσταση του θεωρήματος 8.2, παίρνουμε με όμοιο τρόπο ότι

$$\frac{P_{2n+1}(x)}{Q_{2n+1}(x)} \leq \frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \ldots - \frac{c_{2n-1}}{x^{2n}} + \frac{c_{2n}}{x^{2n+1}} \ .$$

Έτσι, δείξαμε και με δεύτερο τρόπο την ισχύ των δύο τελευταίων ανισοτήτων, οι οποίες προκύπτουν άμεσα και από την απόδειξη της πρότασης 3.2.

Παρατήρηση 8.3 *Ένας τρόπος να προσεγγίσουμε την αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$ είναι να βρούμε πρώτα τη δυναμοσειρά*

$$\frac{c_0}{x} - \frac{c_1}{x^2} + \frac{c_2}{x^3} - \ldots$$

για την οποία ξέρουμε ότι εν γένει αποκλίνει. Προσθέτοντας κάθε φορά άρτιο πλήθος προσθετέων της παραπάνω σειράς παίρνουμε μία αριθμητική ακολουθία της οποίας κάθε όρος είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο της $\left(\frac{P_{2n}(x)}{Q_{2n}(x)}\right)$, λόγω της προηγούμενης παρατήρησης. Το $limsup$ της πρώτης ακολουθίας είναι μικρότερο ή ίσο του $F(x)$ και αποτελεί ένα κάτω φράγμα του $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$. Όμοια, προσθέτοντας περιττό πλήθος όρων της παραπάνω σειράς παίρνουμε μία ακολουθία της οποίας το $liminf$ είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $F_1(x)$ και ταυτόχρονα ένα άνω φράγμα του $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$.

Ένας δεύτερος τρόπος για να προσεγγίσουμε την αριθμητική τιμή του ολοκληρώματος είναι να βρούμε το αντίστοιχο συνεχές κλάσμα και να θεωρήσουμε τις υπακολουθίες των άρτιων και περιττών προσεγγίσεών του. Αυτές έχουν όρια $F(x)$ και $F_1(x)$ αντίστοιχα και, σύμφωνα με τα θεωρήματα 8.1 και 8.2, θα ισχύει ότι

$$F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} \leq F_1(x) \ .$$

Αν λάβουμε υπόψη τα παραπάνω, τότε ο δεύτερος τρόπος δίνει μία καλύτερη προσέγγιση του ολοκληρώματος.

8.3 Σχέση των ολοκληρωμάτων $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$ και $\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{x+u}$.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε τα θεωρήματα της προηγούμενης παραγράφου για να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$ και $\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{x+u}$.

Θα μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου η $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει. Στην περίπτωση αυτή είδαμε ότι το πρόβλημα των ροπών έχει άπειρες λύσεις και ότι δύο τέτοιες λύσεις είναι οι κατανομές που ορίζονται από τις Φ, Φ_1. Σ' όλες αυτές τις λύσεις αντιστοιχεί η ίδια δυναμοσειρά

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} - \ldots + (-1)^k \frac{c_k}{z^{k+1}} + \ldots \ .$$

Αν θεωρήσουμε το αντίστοιχο συνεχές κλάσμα, τότε έχουμε δείξει ότι οι ακολουθίες των άρτιων και περιττών προσεγγίσεων συγκλίνουν αντίστοιχα στις συναρτήσεις

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu_i}{z+\lambda_i}$$

και

$$F_1(z) = \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi_1(u)}{z+u} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu_i}{z+\theta_i} \ .$$

Όμως, δεν μπορούμε να βρούμε την ακριβή σχέση που συνδέει τις $F(z)$ και $F_1(z)$ με το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$. Το μόνο που μπορούμε να πούμε σ' αυτήν την περίπτωση είναι αυτό στο οποίο καταλήξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, ότι δηλαδή στην περίπτωση που το $z = x$ είναι θετικός πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει ότι

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} \leq \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = F_1(x) \ . \quad (\diamond)$$

Μάλιστα, εν γένει δεν υπάρχει καμία τιμή του x για την οποία να ισχύει έστω η μία από τις δύο ισότητες στην $(\diamond)$, σύμφωνα με το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 8.3 *Έστω ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ συγκλίνει. Αν η κατανομή που ορίζει η ϕ είναι διαφορετική από αυτές που ορίζουν οι Φ και Φ_1, τότε για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει ότι*

$$F(x) = \frac{p(x)}{q(x)} < \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} < \frac{p_1(x)}{q_1(x)} = F_1(x) \ .$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε με την εις άτοπο απαγωγή ότι δεν είναι δυνατό να ισχύει η ισότητα από αριστερά στην $(\diamond)$. Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει και η ισότητα από τα δεξιά.

Έστω λοιπόν ότι υπάρχει θετικός x_0 έτσι ώστε

$$\frac{p(x_0)}{q(x_0)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x_0+u} \ .$$

Από το θεώρημα 8.1 έχουμε ότι για το x_0 είναι

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x_0+u} - \frac{P_{2n}(x_0)}{Q_{2n}(x_0)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x_0)}\right)^2 \frac{d\phi(u)}{x_0+u} \geq 0 \ .$$

Εάν πάρουμε το όριο του καθενός μέλους της παραπάνω ισότητας καθώς το $n \to +\infty$, το πρώτο μέλος μηδενίζεται. Το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και με το δεύτερο μέλος. Επίσης, επειδή για κάθε $x > x_0$ είναι

$$\frac{1}{x+u}\left(\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}\right)^2 \leq \frac{1}{x_0+u}\left(\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x_0)}\right)^2 \ ,$$

θα ισχύει ότι

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{Q_{2n}(-u)}{Q_{2n}(x)}\right)^2 \frac{d\phi(u)}{x+u} = 0 \ .$$

Άρα, για κάθε $x \geq x_0$ θα είναι

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u}$$

και από την Αρχή της Ταύτισης έπεται ότι για κάθε z του $\mathbb{C} - A$ έχουμε ότι

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u} \ .$$

Από το θεώρημα 6.1 προκύπτει τότε ότι οι συναρτήσεις Φ και ϕ διαφέρουν το πολύ στα σημεία ασυνέχειάς τους. Άτοπο, από την υπόθεση.

Στην περίπτωση που $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$, ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 8.4 *Όταν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, τότε το πρόβλημα των ροπών έχει μοναδική λύση.*

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει άλλη μία κατανομή που είναι λύση του ίδιου προβλήματος. Τότε, αυτή θα περιγράφεται από μία αύξουσα και φραγμένη συνάρτηση ϕ_1, που θα ορίζεται στο $[0, +\infty)$ και για την οποία θα ισχύουν $\phi_1(0) = 0$ και $c_k = \int_0^{+\infty} u^k d\phi_1(u)$, όπου $k = 0, 1, \ldots$.

Η ϕ_1 έχει άπειρα σημεία αυξητικότητας. Σε αντίθετη περίπτωση, αν u_1, u_2, ..., u_N είναι τα μόνα σημεία αυξητικότητας της ϕ_1, μπορούμε να βρούμε X_0, X_1, ..., X_N, όχι όλα μηδέν, ώστε το $X_0 + X_1 u + \ldots + X_N u^N$ να μηδενίζεται στα u_1, u_2, ..., u_N. Τότε, οι τετραγωνικές μορφές

$$\int_0^{+\infty} \left(X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^N X_N\right)^2 d\phi_1(u)$$

και

$$\int_0^{+\infty} u\left(X_0 + uX_1 + u^2X_2 + \ldots + u^N X_N\right)^2 d\phi_1(u) \ ,$$

οι οποίες ταυτίζονται με τις θετικά ορισμένες τετραγωνικές μορφές της σελίδας 122 που ορίζονται από την ϕ, θα μηδενίζονται. Άτοπο.

Η ϕ_1 έχει ακριβώς τις ίδιες ιδιότητες με την ϕ, άρα από την παρατήρηση 8.3, γι' αυτήν προκύπτει, όπως ακριβώς και με την ϕ, ότι ισχύει

$$F(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{d\phi_1(u)}{x+u} \leq F_1(x) \ , \quad x > 0 \ .$$

Όμως, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$, άρα οι συναρτήσεις F και F_1 ταυτίζονται στο $\mathbb{C} - A$ και έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi_1(u)}{z+u} = F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\Phi(u)}{z+u} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u} \ .$$

Επομένως, από το θεώρημα 6.1 προκύπτει ότι οι ϕ και ϕ_1 ορίζουν την ίδια κατανομή μάζας. Άρα, η λύση στο πρόβλημα των ροπών είναι μοναδική.

Παρατήρηση 8.4 *Πρέπει να παρατηρήσουμε εδώ ότι αυτή η τελευταία περίπτωση είναι δυνατόν να συμβαίνει ακόμη και όταν η δυναμοσειρά*

$$\frac{c_0}{z} - \frac{c_1}{z^2} + \ldots + (-1)^k \frac{c_k}{z^{k+1}} + \ldots$$

είναι παντού αποκλίνουσα: στην περίπτωση που συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα ισχύει ότι $\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = +\infty$, *άρα η ακολουθία* $\left(\frac{1}{\alpha_n \alpha_{n+1}}\right)$ *δεν μπορεί να είναι άνω φραγμένη. Παρόλ' αυτά, αυτό δε σημαίνει ότι η σειρά* $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ *θα είναι κατ' ανάγκη συγκλίνουσα. Μπορούμε, για παράδειγμα, να διαλέξουμε όλους τους συντελεστές* α_n *του συνεχούς κλάσματος αυθαίρετα, εκτός από τους όρους μιας υπακολουθίας* (α_{n_k}) *της* (α_n) *ώστε οι αριθμοί*

$$\frac{1}{\alpha_{n_1}\alpha_{n_1+1}}, \frac{1}{\alpha_{n_2}\alpha_{n_2+1}}, \ldots, \frac{1}{\alpha_{n_k}\alpha_{n_k+1}}, \ldots$$

να τείνουν στο άπειρο.

Παρατήρηση 8.5 *Μία τελευταία απλή παρατήρηση είναι ότι, είτε η λύση στο πρόβλημα των ροπών είναι μοναδική, είτε όχι, η ποσότητα της μάζας που κατανέμεται κατά μήκος του άξονα* $0x$ *είναι ίση με* $c_0 = \frac{1}{\alpha_1}$. *Δηλαδή, η ροπή μηδενικής τάξης* c_0 *είναι πάντοτε ίση με τη συνολική ποσότητα μάζας.*

8.4 Πρώτο παράδειγμα.

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με ένα παράδειγμα που θα μας βοηθήσει να καταλάβουμε τη θεωρία που έχουμε αναπτύξει.

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+\lambda \sin \sqrt[4]{u})\, e^{-\sqrt[4]{u}}}{z+u} du$$

όπου $-1 \leq \lambda \leq 1$. Η συνάρτηση

$$\begin{aligned} \phi(u) &= 24 - 4(\sqrt[4]{u^3} + 3\sqrt{u} + 6\sqrt[4]{u} + 6)e^{-\sqrt[4]{u}} - 2\lambda(\sqrt[4]{u^3} - 3\sqrt[4]{u} - 3)e^{-\sqrt[4]{u}} \sin \sqrt[4]{u} \\ &\quad -2\lambda(\sqrt[4]{u^3} + 3\sqrt{u} + 3\sqrt[4]{u})e^{-\sqrt[4]{u}} \cos \sqrt[4]{u} \end{aligned}$$

είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$, ικανοποιεί την $\phi(0) = 0$ και τη σχέση

$$d\phi(u) = (1 + \lambda \sin \sqrt[4]{u})e^{-\sqrt[4]{u}} du \ , \quad 0 \leq u < +\infty \ .$$

Άρα, η ϕ ορίζει μία κατανομή μάζας που εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου λ. Όμως, θα δούμε ότι δεν ισχύει το ίδιο και με τις ροπές c_k. Για να τις υπολογίσουμε θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 8.2 *Ισχύει ότι* $\int_0^{+\infty} u^{4n+3} e^{-u} \sin u du = 0$.

Απόδειξη[4]: Εφαρμόζοντας για τον υπολογισμό κάθε ολοκληρώματος την κατά παράγοντες ολοκλήρωση και χρησιμοποιώντας τις τιμές των προηγούμενων ολοκληρωμάτων, έχουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-u} \sin u du = \int_0^{+\infty} e^{-u} \cos u du = \frac{1}{2} \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} u e^{-u} \sin u du = \frac{1}{2} \ , \qquad \int_0^{+\infty} u e^{-u} \cos u du = 0 \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} \sin u du = - \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} \cos u du = \frac{1}{2} \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \sin u du = 0 \ , \qquad \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} \cos u du = -\frac{3}{2} \ ,$$

$$\int_0^{+\infty} u^4 e^{-u} \sin u du = \int_0^{+\infty} u^4 e^{-u} \cos u du = -3 \ .$$

Θα δείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει

$$\int_0^{+\infty} u^{4n} e^{-u} \sin u du = \int_0^{+\infty} u^{4n} e^{-u} \cos u du \ . \quad (1)$$

[4] Πρόκειται για μια άσκηση Ολοκληρωτικού Λογισμού, γι' αυτό και παραλείπουμε τους υπολογισμούς.

Για $n=0$ και $n=1$ η παραπάνω ισότητα προφανώς ισχύει. Έστω ότι ισχύει για κάποιο φυσικό k. Τότε, όμοια με τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\int_0^{+\infty} u^{4k+1} e^{-u} \cos u du = 0 \ ,$$

άρα είναι

$$\int_0^{+\infty} u^{4k+2} e^{-u} \sin u du = -\int_0^{+\infty} u^{4k+2} e^{-u} \cos u du \ ,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\int_0^{+\infty} u^{4k+3} e^{-u} \sin u du = 0$$

και, τέλος, από το παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} u^{4k+4} e^{-u} \sin u du = \int_0^{+\infty} u^{4k+4} e^{-u} \cos u du \ .$$

Άρα, αποδείχθηκε η (1) για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ και, όπως είδαμε προηγουμένως, αυτό συνεπάγεται ότι $\int_0^{+\infty} u^{4n+3} e^{-u} \sin u du = 0$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ισχύει και

$$\int_0^{+\infty} u^{4n+3} e^{-u} \sin u du = 0$$

για κάθε φυσικό n.

Ξαναγυρνάμε στο παράδειγμά μας. Λόγω του λήμματος έχουμε ότι

$$c_k = \int_0^{+\infty} u^k d\phi(u) = \int_0^{+\infty} u^k \left(1 + \lambda \sin \sqrt[4]{u}\right) e^{-\sqrt[4]{u}} du = \int_0^{+\infty} u^k e^{-\sqrt[4]{u}} du \ .$$

Δηλαδή, οι ροπές δεν εξαρτώνται από την παράμετρο λ. Αυτό σημαίνει ότι το πρόβλημα των ροπών έχει άπειρες λύσεις, άρα είμαστε στην αόριστη περίπτωση του προβλήματος και, επομένως, οι τιμές των συντελεστών α_i του συνεχούς κλάσματος θα είναι τέτοιες ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ να συγκλίνει.

Από το συνεχές κλάσμα θα πάρουμε τις δύο συναρτήσεις-όρια

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\mu_i}{z + \lambda_i} \ , \qquad \frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\nu_i}{z + \theta_i}$$

και οι κατανομές μάζας (μ_i, λ_i) και (ν_i, θ_i) αποτελούν δύο από τις λύσεις του προβλήματος. Όμως, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την ακριβή σχέση μεταξύ του ολοκληρώματος

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left(1 + \lambda \sin \sqrt[4]{u}\right) e^{-\sqrt[4]{u}}}{z + u} du$$

και των συναρτήσεων $\frac{p(z)}{q(z)}$ και $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$. Όπως είδαμε, μόνο στην περίπτωση που $z = x$ μπορούμε να πάρουμε ένα κάτω και ένα άνω φράγμα του παραπάνω ολοκληρώματος.

Επειδή τα c_k δεν εξαρτώνται από το λ, το ίδιο θα συμβαίνει και με τα α_i και με τις προσεγγίσεις $\frac{p(z)}{q(z)}$ και $\frac{p_1(z)}{q_1(z)}$. Εφόσον

$$\int_0^{+\infty} \frac{\lambda e^{-\sqrt[4]{u}} \sin \sqrt[4]{u}}{x+u} du = \pi \lambda e^{-\sqrt[4]{4x}}$$

και το λ παίρνει τιμές από -1 έως 1, θα ισχύει ότι

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} - \frac{p(x)}{q(x)} > 2\pi e^{-\sqrt[4]{4x}} \ .$$

Επομένως, σ' αυτή την περίπτωση ούτε η δυναμοσειρά, αλλά ούτε και το συνεχές κλάσμα, μπορεί να δώσει μία καλή προσέγγιση του ολοκληρώματος. Ο υπολογισμός των συντελεστών α_i του συνεχούς κλάσματος είναι μία διαδικασία αρκετά πολύπλοκη και γι' αυτό η σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ δεν είναι καθόλου εύκολο να αποδειχθεί.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί αποδεικνύουμε την απειρία των λύσεων στο πρόβλημα των ροπών, υπολογίζοντας τους συντελεστές του συνεχούς κλάσματος και δείχνοντας ότι η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει.

8.5 Δεύτερο παράδειγμα.

Θεωρούμε μία περιττή και περιοδική συνάρτηση $f(x)$, η οποία είναι συνεχής και ικανοποιεί για κάθε x μία από τις ισότητες: $f(x+\frac{1}{2}) = f(x)$ ή $f(x+\frac{1}{2}) = -f(x)$. Επειδή η f είναι περιττή, για κάθε φυσικό n θα ισχύει ότι

$$\int_0^n e^{-x^2} f(x)dx = -\int_0^{-n} e^{-y^2} f(-y)dy = -\int_0^{-n} e^{-y^2} f(y)dy \ .$$

Επομένως, είναι

$$\int_{-n}^n e^{-x^2} f(x)dx = 0 \ ,$$

άρα και

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)dx = 0 \ .$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $x = -\frac{k+1}{2} + \ln u$, όπου k ένας οποιοσδήποτε ακέραιος, παίρνουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} u^k u^{-\ln u} f(\ln u)du = 0$$

όπου k είναι, επίσης, οποιοσδήποτε ακέραιος.

Αν πάρουμε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $f(x) = \sin(2\pi x)$, τότε αυτή ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις, οπότε

$$\int_0^{+\infty} u^k u^{-\ln u} \sin(2\pi \ln u)du = 0$$

για κάθε ακέραιο k.

Θεωρούμε στη συνέχεια το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1+\lambda\sin(2\pi\ln u)}{z+u}u^{-\ln u}du$$

όπου το λ παίρνει τιμές από -1 έως 1. Επομένως, έχουμε και πάλι ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\phi(u)}{z+u}$$

όπου η ϕ είναι η αύξουσα συνάρτηση που ορίζεται στο $[0,+\infty)$ και έχει τύπο

$$\phi(u)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{u}\left(1+\lambda\sin(2\pi lnv)\right)v^{-lnv}dv\ .$$

Κάθε ροπή c_k έχει τιμή

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^k\left(1+\lambda\sin(2\pi lnu)\right)u^{-lnu}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}u^k u^{-lnu}du\\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2+(k+1)x}dx=\frac{e^{\frac{(k+1)^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\\
&= e^{\frac{(k+1)^2}{4}}\ ,
\end{aligned}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου λ. Επομένως, και σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε άπειρες λύσεις στο πρόβλημα των ροπών. Χρησιμοποιώντας τους τύπους της παραγράφου §2.5 και κάνοντας κατάλληλες απλοποιήσεις στις ορίζουσες, παίρνουμε τους συντελεστές α_i του συνεχούς κλάσματος:

$$\alpha_{2n}=(1-e^{-\frac{1}{2}})(1-e^{-1})(1-e^{-\frac{3}{2}})\cdots(1-e^{-\frac{n-1}{2}})e^{-\frac{n}{2}}$$

και

$$\alpha_{2n+1}=\frac{e^{-\frac{2n+1}{4}}}{(1-e^{-\frac{1}{2}})(1-e^{-1})(1-e^{-\frac{3}{2}})\cdots(1-e^{-\frac{n}{2}})}\ .$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_{2n}$ φράσσεται από την $\sum_{n=1}^{+\infty}e^{-\frac{n}{2}}$ και η $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{2n+1}$ από την $32\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{n}{2}}$, άρα συγκλίνουν. Τελικά, και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ συγκλίνει.

Επίσης, με τον ίδιο τρόπο όπως και στο πρώτο παράδειγμα, παίρνουμε ότι η διαφορά

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}-\frac{p(x)}{q(x)}$$

είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση από

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(2\pi\ln u)}{x+u}u^{-\ln u}du=2e^{-\pi^2}\sqrt{\pi}x^{-\ln x}\ .$$

8.6 Άλλα παραδείγματα.

Ένα παράδειγμα όπου το πρόβλημα των ροπών έχει μοναδική λύση είναι στην περίπτωση που οι ροπές c_k είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από το συνεχές κλάσμα που μελέτησε ο Laguerre, στο οποίο αναφέρεται ο Stieltjes στον πρόλογο της δημοσίευσής του. Οι συντελεστές α_i του κλάσματος αυτού είναι:

$$\alpha_{2n-1} = 1 \ , \qquad \alpha_{2n} = \frac{1}{n} \ .$$

Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, άρα το συνεχές κλάσμα συγκλίνει και παριστάνει συνάρτηση $F(z)$ ολόμορφη στο $\mathbb{C} - A$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση $\phi = \Phi = \Phi_1$ δίνεται από τον τύπο

$$\phi(u) = 1 - e^{-u} \ , \quad u \geq 0 \ .$$

Ο Laguerre έδειξε ότι για κάθε z το συνεχές κλάσμα ισούται με το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}du}{z+u} \ .$$

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχει μάζα οσοδήποτε μακριά από το σημείο 0.

Φυσικά, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, στην περίπτωση που η μάζα δεν εκτείνεται μέχρι το άπειρο, αλλά σταματά σε κάποιο σημείο, το αντίστοιχο συνεχές κλάσμα πάντα θα συγκλίνει, γιατί και η αντίστοιχη δυναμοσειρά συγκλίνει για αρκετά μεγάλες τιμές του $|z|$. Για να κατανοήσουμε την τελευταία περίπτωση, θεωρούμε το συνεχές κλάσμα με συντελεστές $b_{2n} = p > 0$ και $b_{2n-1} = q > 0$:

$$\cfrac{p}{z + \cfrac{q}{1 + \ddots + \cfrac{p}{z + \cfrac{q}{1 + \ddots}}}} \ .$$

Προφανώς, το κλάσμα αυτό είναι περιοδικό, άρα, αν θέσουμε την τιμή του ίση με k, τότε έχουμε ότι

$$k = \frac{p}{z + \frac{q}{1+k}} \ .$$

Προκύπτει έτσι μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς k, η οποία δίνει δύο λύσεις. Η μία απορρίπτεται γιατί, στην περίπτωση που ο z είναι θετικός πραγματικός, δίνει αρνητικές τιμές του συνεχούς κλάσματος. Έτσι, τελικά έχουμε ότι σε κάθε z η τιμή του θα είναι ίση με

$$F(z) = \frac{\sqrt{z^2 + 2(p+q)z + (p-q)^2} - z + p - q}{2z} \ .$$

Οι συντελεστές α_i δίνονται από τους τύπους $\alpha_{2n} = (\frac{p}{q})^n$ και $\alpha_{2n+1} = \frac{1}{p}(\frac{q}{p})^n$. Επομένως, μία τουλάχιστον από τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{2n}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}$ θα αποκλίνει.

Το πρόβλημα των ροπών έχει μοναδική λύση και η συνάρτηση F αναγκαστικά θα γράφεται στη μορφή $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$. Για να τη γράψουμε με τη μορφή αυτή, διακρίνουμε για τα p, q τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $p > q$, τότε θέτουμε $a = \left(\sqrt{p} - \sqrt{q}\right)^2$ και $b = \left(\sqrt{p} + \sqrt{q}\right)^2$. Στην περίπτωση αυτή, με πράξεις προκύπτει ότι η F γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{\sqrt{ab}}{z} + \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{(u-a)(b-u)}}{u}\frac{du}{z+u} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}\ , \end{aligned}$$

όπου

$$\phi(u) = \begin{cases} 0\ , & u = 0 \\ \sqrt{ab}\ , & 0 < u < a \\ \sqrt{ab} + \frac{1}{2\pi}\int_a^u \sqrt{(t-a)(b-t)}\frac{dt}{t}\ , & a \le u \le b \\ \sqrt{ab} + \frac{1}{2\pi}\int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)}\frac{dt}{t}\ , & b < u. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μία συγκέντρωση μάζας στο 0, η οποία είναι ίση με $\sqrt{ab}$ και η υπόλοιπη μάζα είναι συνεχώς κατανεμημένη στο (a, b). Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ συγκλίνει, το άθροισμά της είναι $\frac{1}{p-q}$ και, λόγω της πρότασης που θα δείξουμε στην αμέσως επόμενη παράγραφο, επιβεβαιώνεται ότι η μάζα που είναι συγκεντρωμένη στο 0 ισούται με $\sqrt{ab} = pq$.

- Στην περίπτωση που $p < q$ προκύπτει ότι η F δίνεται από τον τύπο

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{\sqrt{(u-a)(b-u)}}{u}\frac{du}{z+u} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}\ ,$$

όπου

$$\phi(u) = \begin{cases} 0\ , & 0 \le u < a \\ \frac{1}{2\pi}\int_a^u \sqrt{(t-a)(b-t)}\frac{dt}{t}\ , & a \le u \le b \\ \frac{1}{2\pi}\int_a^b \sqrt{(t-a)(b-t)}\frac{dt}{t}\ , & b < u. \end{cases}$$

Τώρα, ολόκληρη η μάζα είναι συνεχώς κατανεμημένη στο (a, b). Στην περίπτωση αυτή η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ αποκλίνει και, από την πρόταση της επόμενης παραγράφου, επιβεβαιώνεται ότι η μάζα στο 0 είναι ίση με μηδέν.

- Όταν $p = q$, τότε $a = 0$ και είτε τους τύπους της πρώτης περίπτωσης εφαρμόσουμε είτε αυτούς της δεύτερης θα πάρουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

8.7 Υπολογισμός της μάζας που συγκεντρώνεται στο 0.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα υπολογίσουμε την ποσότητα της μάζας που συγκεντρώνεται στο 0.

Πρόταση 8.1 *Στην ορισμένη περίπτωση του προβλήματος των ροπών, η μάζα που είναι συγκεντρωμένη στο 0 ισούται με*

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} \; .$$

Στην περίπτωση που η σειρά αυτή αποκλίνει, η αντίστοιχη μάζα ισούται με μηδέν.

Στην αόριστη περίπτωση, το πηλίκο

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$$

είναι το μέγιστο της μάζας που μπορεί να είναι συγκεντρωμένη στο 0 και αυτό συμβαίνει στην περίπτωση της λύσης (ν_i, θ_i), αφού στο σημείο $\theta_0 = 0$ έχουμε ποσότητα μάζας ίση με $\nu_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$. Για κάθε άλλη λύση του προβλήματος των ροπών η ποσότητα της μάζας στο 0 είναι μικρότερη από ν_0.

Απόδειξη: Έστω ϕ μία αύξουσα συνάρτηση με $\phi(0) = 0$, με άπειρα σημεία αυξητικότητας, η οποία ορίζει μία κατανομή μάζας στον ημιάξονα $0x$ που αποτελεί λύση του προβλήματος των ροπών. Τότε, είδαμε ότι θα ισχύει

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} \leq F_1(x)$$

για κάθε $x \geq 0$. Επίσης, από την πρόταση 3.1 και την παρατήρηση 7.4 έχουμε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} x F_1(x) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} = \nu_0 \; .$$

Θα δείξουμε ότι, αν $\mu = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \phi(\varepsilon)$ είναι η μάζα που είναι συγκεντρωμένη στο 0, τότε είναι

$$\mu = \lim_{x \to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{x d\phi(u)}{x+u} \; .$$

Πράγματι, ισχύει ότι

$$\int_0^{+\infty} \frac{x d\phi(u)}{x+u} = \int_0^{x^2} \frac{x d\phi(u)}{x+u} + \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{x d\phi(u)}{x+u} + \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{x d\phi(u)}{x+u}$$

(υποθέτουμε το x αρκετά μικρό θετικό αριθμό, μικρότερο της μονάδας, άρα $x^2 < \sqrt{x}$). Επειδή

$$\frac{\phi(x^2)}{1+x} = \frac{x}{x+x^2}(\phi(x^2) - \phi(0)) \leq \int_0^{x^2} \frac{x d\phi(u)}{x+u} \leq \phi(x^2) - \phi(0) = \phi(x^2)$$

συνεπάγεται ότι

$$\lim_{x \to 0^+} \int_0^{x^2} \frac{x d\phi(u)}{x+u} = \lim_{x \to 0^+} \phi(x^2) = \mu \; .$$

Επίσης, είναι προφανές ότι

$$0 \leq \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{xd\phi(u)}{x+u} < \phi(\sqrt{x}) - \phi(x^2)$$

οπότε, επειδή $\lim_{x\to 0^+} (\phi(\sqrt{x}) - \phi(x^2)) = 0$, θα είναι και

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \frac{xd\phi(u)}{x+u} = 0 \ .$$

Τέλος, επειδή η $\frac{x}{x+u}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του u θα ισχύει ότι

$$0 \leq \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{xd\phi(u)}{x+u} \leq \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \left(\phi(+\infty) - \phi(\sqrt{x})\right) \ .$$

Επομένως, αφού είναι $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} (\phi(+\infty) - \phi(\sqrt{x})) = 0$, θα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{xd\phi(u)}{x+u} = 0 \ .$$

Άρα, το ζητούμενο αποδείχθηκε.

Στην ορισμένη περίπτωση του προβλήματος των ροπών, δηλαδή, όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n = +\infty$, θα είναι $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{x+u} = F_1(x)$, πράγμα το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mu = \lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{xd\phi(u)}{x+u} = \lim_{x\to 0^+} xF_1(x) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} \ .$$

Στην αόριστη περίπτωση, δηλαδή, όταν $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n < +\infty$, επειδή

$$xF(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{xd\phi(u)}{x+u} \leq xF_1(x)$$

θα είναι

$$0 = \lim_{x\to 0^+} xF(x) \leq \mu \leq \lim_{x\to 0^+} xF_1(x) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} \ .$$

Γνωρίζουμε ότι για εκείνη την κατανομή μαζών που ορίζει η αύξουσα συνάρτηση[5] Φ_1 ισχύει

$$\mu = \lim_{x\to 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{xd\Phi_1(u)}{x+u} = \lim_{x\to 0^+} xF_1(x) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} = \nu_0 \ .$$

Μένει να δείξουμε ότι για κάθε άλλη κατανομή μάζας που αποτελεί λύση του προβλήματος των ροπών είναι

$$\mu < \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} \ .$$

[5] Ο ορισμός της υπάρχει στην §7.8.

Έστω ότι υπάρχει μία άλλη αύξουσα συνάρτηση Ψ με $\Psi(0) = 0$ και με άπειρα σημεία αυξητικότητας, τέτοια ώστε η κατανομή μάζας που ορίζει να αποτελεί, επίσης, λύση του αόριστου προβλήματος των ροπών και για την οποία ισχύει $\mu = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$. Εάν από τις κατανομές που ορίζουν οι Φ_1 και Ψ αφαιρέσουμε τη μάζα μ που είναι συγκεντρωμένη στο 0, τότε παίρνουμε δύο διαφορετικά συστήματα μαζών που δίνουν επίσης τις ίδιες ροπές k-τάξης, άρα υπάρχουν άπειρες άλλες κατανομές μαζών που δίνουν τις ίδιες ροπές k-τάξης με τα δύο προηγούμενα. Λόγω της παρατήρησης 8.5, σ' όλες αυτές τις κατανομές η ποσότητα της μάζας που κατανέμεται κατά μήκος του $0x$ είναι ίση με $c_0 - \mu$. Θεωρούμε μία τέτοια κατανομή μαζών, η οποία ορίζεται από μία αύξουσα συνάρτηση Φ_1^* και στο 0 είναι τοποθετημένη μάζα $\mu' > 0$. Εάν σ' αυτήν την κατανομή προσθέσουμε στο 0 μάζα μ, τότε παίρνουμε ένα νέο σύστημα μαζών που αποτελεί επίσης λύση του αρχικού προβλήματος των ροπών. Πράγματι, η συνολική ποσότητα της μάζας κατά μήκος του $0x$ ισούται με c_0, ενώ, από τον τρόπο με τον οποίο ορίσαμε αυτήν την κατανομή, είναι προφανές ότι και οι υπόλοιπες ροπές είναι ίσες. Η μάζα του συστήματος αυτού που αντιστοιχεί στο 0 θα είναι ίση με $\mu + \mu' > \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$, άτοπο.

8.8 Σχετικά με τον ημιάξονα $0x'$ των αρνητικών αριθμών.

Έχουμε αποδείξει ότι στην περίπτωση που η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ αποκλίνει, το συνεχές κλάσμα Stieltjes συγκλίνει και μάλιστα, το όριο των προσεγγίσεων του είναι η συνάρτηση

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u} \ ,$$

όπου οι μόνες ιδιότητες που οφείλει να πληροί η συνάρτηση ϕ, η οποία ορίζεται στο $[0, +\infty)$, είναι να είναι αύξουσα συνάρτηση του u, να ικανοποιεί την $\phi(0) = 0$ και να έχει άπειρα σημεία αυξητικότητας. Τότε, προκύπτει εν γένει ότι η συνάρτηση F είναι αναλυτική παντού στο $\mathbb{C} - A$, όμως, δεν μπορούμε πάντα να την επεκτείνουμε αναλυτικά και στο A. Πράγματι, αν μπορούσαμε να βρούμε αναλυτική επέκτασή της στο $(-b, -a)$, τότε η συνάρτηση ϕ θα έπρεπε αναγκαστικά να είναι αναλυτική συνάρτηση του u στο (a, b). Όμως, το να απαιτήσουμε για την ϕ να είναι αναλυτική περιορίζει κατά πολύ την κλάση των αυξουσών συναρτήσεων με τις οποίες ασχολούμαστε.

Αν θέλουμε να βρούμε παραδείγματα συνεχών κλασμάτων για τα οποία η αντίστοιχη συνάρτηση F συμπεριφέρεται ομαλά σε υποδιαστήματα του A, τότε δεν πρέπει να ορίσουμε πρώτα τους συντελεστές α_k, αλλά να ξεκινήσουμε παίρνοντας τη ϕ έτσι ώστε να έχει την κατάλληλη συμπεριφορά στα αντίστοιχα υποδιαστήματα του A. Στο πρώτο παράδειγμα της παραγράφου 8.6 η ϕ είναι αναλυτική στο $(0, +\infty)$ και, επομένως, η αντίστοιχη συνάρτηση F θα επεκτείνεται αναλυτικά στα σημεία του $(-\infty, 0)$. Επίσης, στο δεύτερο παράδειγμα της ίδιας παραγράφου, η ϕ επεκτείνεται αναλυτικά στα διαστήματα $(0, a)$, (a, b), $(b, +\infty)$ και, όπως είναι φανερό, και η αντίστοιχη F επεκτείνεται αναλυτικά στα σημεία αυτών των διαστημάτων.

8.9 Μελέτη του συνεχούς κλάσματος που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$ ως προς τη σύγκλιση.

Όταν έχουμε μία αύξουσα συνάρτηση ϕ στο $[0, +\infty)$, με $\phi(0) = 0$ και άπειρα σημεία αυξητικότητας ή την κατανομή μάζας που αυτή ορίζει, τότε ως γνωστόν παίρνουμε ένα συνεχές κλάσμα που αντιστοιχεί στο γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$. Η μελέτη αυτού του συνεχούς κλάσματος ως προς τη σύγκλιση αποτελεί ένα πρόβλημα που παρουσιάζει αρκετές αναλογίες με τη μελέτη μιας δυναμοσειράς ως προς τη σύγκλιση. Δεν μπορούμε να δώσουμε γενική λύση στο παραπάνω πρόβλημα, παρά μόνο να καταλήξουμε σε κάποια συμπεράσματα που μας δίνουν απαντήσεις σε ειδικές περιπτώσεις. Στην περίπτωση που το συνεχές κλάσμα συγκλίνει, το πρόβλημα των ροπών έχει μία και μοναδική λύση και σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η κατανομή της μάζας που ορίζει η ϕ είναι **ορισμένη**. Φυσικά, θα μπορούσαμε εισάγοντας «αρνητικές μάζες» να πάρουμε και άλλες λύσεις στο πρόβλημα των ροπών, όμως δε θα ασχοληθούμε με την έννοια της αρνητικής μάζας γιατί το πρόβλημα θα γίνει περίπλοκο. Αντίθετα, όταν το συνεχές κλάσμα αποκλίνει, τότε το πρόβλημα των ροπών έχει άπειρες λύσεις και τότε θα ονομάζουμε την κατανομή των μαζών που ορίζει η ϕ **αόριστη**.

Παρατηρούμε ότι προφανώς ισχύουν τα εξής:

- Αν σε μία αόριστη κατανομή μαζών προσθέσουμε μία ακόμη μάζα, τότε έχουμε και πάλι αόριστη κατανομή μαζών.
- Αν από μία ορισμένη κατανομή μαζών αφαιρέσουμε μία μάζα, τότε έχουμε και πάλι ορισμένη κατανομή μαζών.
- Όταν έχουμε δυο διαφορετικές κατανομές μάζας που έχουν ίσες ροπές, τότε και οι δύο κατανομές μάζας είναι αόριστες.

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση.

Πρόταση 8.2 *Εάν*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n} C_{i,k}X_iX_k = Q(X_0, X_1, \ldots, X_n)$$

είναι μία συμμετρική και θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, τότε το ελάχιστο της $Q(1, X_1, X_2, \ldots, X_n)$ *ισούται με*

$$\begin{vmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & \ldots & C_{0,n} \\ C_{1,0} & C_{1,1} & \ldots & C_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n,0} & C_{n,1} & \ldots & C_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} C_{1,1} & \ldots & C_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n,1} & \ldots & C_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Απόδειξη: Από το λήμμα 8.1 γνωρίζουμε ότι $Q(1, X_1, \ldots, X_n) \geq c(1+X_1^2+\ldots+X_n^2)$ για κάθε $X_1, \ldots, X_n$. Έπεται ότι $Q(1, X_1, \ldots, X_n) \to +\infty$ όταν $1+X_1^2+\ldots+X_n^2 \to +\infty$ και, επειδή η $Q(1, X_1, \ldots, X_n)$ είναι συνεχής συνάρτηση των $X_1, \ldots, X_n$, θα έχει ελάχιστη τιμή για κάποιες τιμές των $X_1, \ldots, X_n$. Εξισώνοντας τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial Q}{\partial X_1}, \ldots,$

$\frac{\partial Q}{\partial X_n}$ με το μηδέν, βρίσκουμε ένα γραμμικό σύστημα n εξισώσεων, του οποίου η λύση είναι οι τιμές των $X_1, \ldots, X_n$ που ελαχιστοποιούν το $Q(1, X_1, \ldots, X_n)$. Λύνοντας και κάνοντας πράξεις επιβεβαιώνουμε την ελάχιστη τιμή της εκφώνησης.

Αν, τώρα, θεωρήσουμε την τετραγωνική μορφή

$$Q(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) = \int_0^{+\infty} (X_0 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u)$$

παρατηρούμε ότι

$$Q(X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} c_{i+k} X_i X_k \ .$$

Εφαρμόζουμε την πρόταση 8.2 και τη σχέση (2.11) και βρίσκουμε ότι το ελάχιστο της $\int_0^{+\infty} (X_0 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u)$, ισούται με

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n+1} & \ldots & c_{2n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}} \ .$$

Αν, για λόγους συντομίας, συμβολίσουμε $\{d\phi(u)\}_n$ την ελάχιστη τιμή του

$$\int_0^{+\infty} (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u) \ ,$$

τότε, έχουμε αποδείξει ότι

$$\{d\phi(u)\}_n = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}} \ .$$

Επίσης, αν θέσουμε $c_{-1} = \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{u}$ και εφαρμόσουμε την πρόταση 8.2 και τη σχέση (2.14), βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή της παράστασης

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2\right) \frac{d\phi(u)}{u}$$

ως προς τα $X_1, \ldots, X_n$ ισούται με

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{u} \quad - \quad & \begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 & \ldots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \\ = \quad & \begin{vmatrix} c_{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & \ldots & c_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & \ldots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\begin{vmatrix} c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \\
= & -\begin{vmatrix} 0 & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} c_1 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots \\ c_n & \dots & c_{2n-1} \end{vmatrix} \\
= & \ \alpha_2 + \alpha_4 + \ldots + \alpha_{2n} \ .
\end{aligned}
$$

Από την παρατήρηση 8.1 προκύπτει ότι το ελάχιστο της τετραγωνικής μορφής

$$\int_0^{+\infty} (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u)$$

λαμβάνεται όταν

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = \frac{Q_{2n+1}(-u)}{-uQ'_{2n+1}(0)} \ ,$$

ενώ από το θεώρημα 8.1 και τη σχέση (8.2) έχουμε ότι το μέγιστο της παράστασης

$$\int_0^{+\infty} \left(1 - (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2\right) \frac{d\phi(u)}{u}$$

ως προς $X_1, \ldots, X_n$ λαμβάνεται όταν

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = Q_{2n}(-u) \ .$$

Παρατήρηση 8.6 *Επειδή η ελάχιστη τιμή* $\{d\phi(u)\}_n$ *της τετραγωνικής μορφής*

$$\int_0^{+\infty} (1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 d\phi(u)$$

λαμβάνεται όταν

$$1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n = \frac{Q_{2n+1}(u)}{-uQ'_{2n+1}(0)} \ ,$$

έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
\mu &= \phi(0+) - \phi(0) = (\phi(0+) - \phi(0)) \left(\frac{Q_{2n+1}(-u)}{-uQ'_{2n+1}(0)} \right)^2 \Bigg|_{u=0} \\
&< \int_0^{+\infty} \left(\frac{Q_{2n+1}(-u)}{-uQ'_{2n+1}(0)} \right)^2 d\phi(u) = \{d\phi(u)\}_n
\end{aligned}
$$

και επομένως,

$$\mu < \{d\phi(u)\}_n = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2n+1}} \ .$$

Άρα, δείξαμε με δεύτερο τρόπο την ανισότητα

$$\mu \leq \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}} \ .$$

8.10 Μελέτη της σύγκλισης του συνεχούς κλάσματος στην περίπτωση που η μάζα στο O είναι μηδέν.

Υποθέτουμε ότι στο 0 δε συγκεντρώνεται μάζα. Τότε, επειδή στην περίπτωση της ορισμένης κατανομής μάζας η μάζα μ που συγκεντρώνεται στο 0 ισούται με $\mu = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$, προκύπτει ότι $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1} = +\infty$ και $\{d\phi(u)\}_\infty = 0$.

Στην περίπτωση της αόριστης κατανομής μάζας η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ συγκλίνει, άρα $\{d\phi(u)\}_\infty > 0$. Καταλήγουμε λοιπόν στο παρακάτω συμπέρασμα.

Όταν στο O δεν υπάρχει μάζα και ισχύει $\{d\phi(u)\}_\infty = 0$, τότε το συνεχές κλάσμα συγκλίνει, ενώ όταν είναι $\{d\phi(u)\}_\infty > 0$, τότε το συνεχές κλάσμα αποκλίνει.

Προκύπτει τώρα το εξής ερώτημα. Έστω ότι D είναι η κατανομή μάζας που ορίζεται από μία αύξουσα συνάρτηση ϕ στο $[0, +\infty)$, με $\phi(0) = 0$ και με άπειρα σημεία αυξητικότητας και ας υποθέσουμε ότι μ είναι η ποσότητα της μάζας στο 0. Αν αφαιρέσουμε αυτή τη μάζα, προκύπτει μία άλλη κατανομή, έστω D'. Υποθέτουμε ότι με κάποιο τρόπο (π.χ. με τη βοήθεια του παραπάνω συμπεράσματος) βρίσκουμε το είδος της κατανομής D' (δηλ. το αν είναι ορισμένη ή αόριστη). Τότε ποιο είναι το συμπέρασμα που βγάζουμε για την D;

Εάν η D' είναι αόριστη, τότε και η D θα είναι.

Εάν η D' είναι ορισμένη, τότε και η D είναι ορισμένη ή είναι εκείνη η λύση της αόριστης περίπτωσης του προβλήματος των ροπών όπου έχουμε τη μέγιστη μάζα στο 0. Πράγματι, θα δείξουμε ότι, αν η D' είναι ορισμένη, τότε η D δεν μπορεί να είναι λύση της αόριστης περίπτωσης του προβλήματος των ροπών με μάζα μ στο μηδέν αυστηρά μικρότερη από $\frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$. Έστω ότι δεν ισχύει το τελευταίο. Τότε, υπάρχει αόριστη κατανομή D, της οποίας η μάζα μ που περιεχέται στο 0 να είναι μικρότερη της μέγιστης δυνατής και τέτοια ώστε, όταν αφαιρέσουμε τη μάζα μ, να προκύπτει μία ορισμένη κατανομή D'. Επειδή το πρόβλημα των ροπών, του οποίου λύση είναι η D, είναι αόριστο, θα υπάρχει μία κατανομή D_1, η οποία είναι επίσης λύση του και στην οποία, η μάζα που είναι συγκεντρωμένη στο 0 είναι η μέγιστη δυνατή, δηλαδή ισούται με $\mu_1 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}}$. Τότε, αν από την κατανομή D_1 αφαιρέσουμε από το 0 ποσότητα μάζας ίση με μ, προκύπτει μία κατανομή D_1', η οποία έχει ακριβώς τις ίδιες ροπές με την D'. Άρα, οι δύο κατανομές είναι λύσεις του ίδιου προβλήματος ροπών και επειδή είναι διαφορετικές, θα είναι και οι δύο αόριστες. Άτοπο. Άρα, η D ή θα είναι ορισμένη ή θα είναι αόριστη και στην περίπτωση αυτή, η μάζα που θα είναι συγκεντρωμένη στο 0 θα είναι μικρότερη από τη μέγιστη δυνατή.

8.11 Ιδιότητες του $\{d\phi(u)\}_n$.

Σ' αυτήν την παράγραφο θα ασχοληθούμε με την περίπτωση όπου η αύξουσα συνάρτηση ϕ στο $[0, +\infty)$, με $\phi(0) = 0$ και με άπειρα σημεία αυξητικότητας, έχει συνεχή παράγωγο πρώτης τάξης. Δηλαδή, ισχύει $d\phi(u) = f(u)du$, όπου η f είναι μη αρνητική συνάρτηση, συνεχής στο $[0,+\infty)$ και δεν είναι ταυτοτικά μηδέν.[6] Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα ισχύει ότι

$$\{f(u)du\}_n = min\int_0^{+\infty} f(u)(1+X_1u+\ldots+X_nu^n)^2du = \frac{1}{\alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n+1}}$$

και

$$\min\int_0^{+\infty} f(u)\left(1-(1+X_1u+\ldots+X_nu^n)^2\right)\frac{du}{u} = \alpha_2+\alpha_4+\ldots+\alpha_{2n}\ .$$

Κάποιες φορές είναι εύκολο να υπολογίσουμε το παραπάνω ελάχιστο ή το αντίστοιχο συνεχές κλάσμα. Εάν, για παράδειγμα, έχουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty}\frac{u^{a-1}e^{-bu}}{z+u}du\ ,$$

τότε, από τις ροπές

$$c_k = \frac{b^a}{\Gamma(a)}\int_0^{+\infty} u^k u^{a-1}e^{-bu}du = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}$$

βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
\alpha_1 = 1\ , \qquad & \alpha_{2n+1} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}\\
\alpha_2 = \frac{b}{a}\ , \qquad & \alpha_{2n} = \frac{(n-1)!\, b}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\\
S_{2n+1} = \alpha_1+\alpha_3+\ldots+\alpha_{2n+1} \quad = & \quad \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}\ .
\end{aligned}$$

Σχετικά με τη σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{2n+1}$, παρατηρούμε ότι

$$S_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a}{k}+1\right) = e^{\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{a}{k}+1\right)}\ .$$

Το όριο της ακολουθίας (S_{2n+1}) είναι $+\infty$, γιατί η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{a}{k}+1\right)$ αποκλίνει για $a>0$. Επομένως, και η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_{2n+1}$ θα αποκλίνει και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, θα είναι

$$\left\{\frac{b^a}{\Gamma(a)}u^{a-1}e^{-bu}du\right\}_\infty = 0\ .$$

Παρατήρηση 8.7 *Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής στο ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{+\infty} f(u)(1+X_1u+\ldots+X_nu^n)^2du$$

[6] Αν η f είχε πεπερασμένου πλήθους σημεία ασυνέχειας, τότε και πάλι ισχύουν όσα θα πούμε σ' αυτήν την παράγραφο.

παίρνουμε ότι $\{f(cu)du\}_n = \frac{1}{c}\{f(u)du\}_n$ *και, τελικά, αν πάρουμε το όριο για* $n \to +\infty$*, βρίσκουμε ότι*

$$\{f(cu)du\}_\infty = \frac{1}{c}\{f(u)du\}_\infty \ . \tag{8.4}$$

Παρατήρηση 8.8 *Επίσης, αν θεωρήσουμε δύο συνεχείς συναρτήσεις* f_1, f *από τις οποίες η πρώτη είναι μη αρνητική και η δεύτερη πάντα θετική και η* $\frac{f_1}{f}$ *είναι άνω φραγμένη από ένα θετικό αριθμό, τότε είναι προφανές ότι*

$$\{f(u)du\}_\infty = 0 \ \Rightarrow \ \{f_1(u)du\}_\infty = 0 \ ,$$

ενώ όταν η $\frac{f_1}{f}$ *είναι κάτω φραγμένη από ένα θετικό αριθμό, τότε*

$$\{f(u)du\}_\infty > 0 \ \Rightarrow \ \{f_1(u)du\}_\infty > 0 \ .$$

Παρακάτω αποδεικνύουμε κάτι πολύ ισχυρότερο από την παρατήρηση 8.7. Η πρόταση αναφέρεται και πάλι σε δύο συνεχείς συναρτήσεις f_1, f από τις οποίες η πρώτη είναι μη αρνητική και η δεύτερη πάντα θετική.

Πρόταση 8.3 *Υποθέτουμε ότι*

$$\{f(u)du\}_\infty = 0$$

και ότι το πηλίκο $\frac{f_1(u)}{f(u)}$ *έχει πεπερασμένο μέγιστο* M_δ *σε κάθε διάστημα* $(\delta, +\infty)$ *(ο αριθμός* M_δ *ενδεχομένως να τείνει στο άπειρο καθώς το* δ *τείνει στο μηδέν). Τότε, θα ισχύει και*

$$\{f_1(u)du\}_\infty = 0 \ .$$

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα θετικό αριθμό ε οσοδήποτε μικρό και ένα $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_0^\delta f_1(u)du < \frac{1}{2}\varepsilon \ .$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση f^- που ορίζεται ως εξής:

$$f^-(u) = \begin{cases} 0, & 0 \le u \le \delta \\ f(u), & u > \delta. \end{cases}$$

Εάν n είναι τυχαίος φυσικός, τότε ισχύει ότι

$$\{f^-(u)du\}_n = \int_0^{+\infty} f^-(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du = \int_\delta^{+\infty} f(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du \ ,$$

όπου $\mathbb{L}^-(u)$ είναι το πολυώνυμο βαθμού n για το οποίο η τετραγωνική μορφή

$$\int_0^{+\infty} f^-(u)(1 + X_1 u + \ldots + X_n u^n)^2 du$$

παίρνει την ελάχιστη τιμή της και η τιμή του στο μηδέν είναι ίση με 1.

Από τη άλλη μεριά, αν είναι

$$\{f(u)du\}_n = \int_0^{+\infty} f(u)\,(\mathbb{L}(u))^2\,du$$

με ένα αντίστοιχο πολυώνυμο $\mathbb{L}(u)$, τότε από τον ορισμό του $\{f^-(u)du\}_n$ προκύπτει ότι ισχύει

$$\{f^-(u)du\}_n \leq \int_0^{+\infty} f^-(u)\,(\mathbb{L}(u))^2\,du = \int_\delta^{+\infty} f(u)\,(\mathbb{L}(u))^2\,du \leq \{f(u)du\}_n \ .$$

Επομένως,

$$\{f(u)du\}_\infty = 0 \ \Rightarrow\ \{f^-(u)du\}_\infty = 0 \ .$$

Επίσης, από τον ορισμό του $\{f_1(u)du\}_n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\{f_1(u)du\}_n &\leq \int_0^{+\infty} f_1(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du \\ &= \int_0^{\delta} f_1(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du + \int_\delta^{+\infty} f_1(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du \ .\end{aligned}$$

Όμως, το πολυώνυμο $\mathbb{L}^-(u)$ ικανοποιεί το σύστημα των εξισώσεων

$$\int_0^{+\infty} f^-(u)\mathbb{L}^-(u)u^k du = 0 \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \ ,$$

ή, ισοδύναμα,

$$\int_\delta^{+\infty} f(u)\mathbb{L}^-(u)u^k du = 0 \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Επειδή στο διάστημα $(\delta, +\infty)$ η $f(u)u^k$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, το πολυώνυμο $\mathbb{L}^-(u)$ θα αλλάζει πρόσημο ακριβώς n φορές στο $(\delta, +\infty)$, δηλαδή οι ρίζες του είναι όλες μεγαλύτερες του δ.[7] Εφόσον $\mathbb{L}^-(0) = 1$, στο διάστημα $[0, \delta]$, αναγκαστικά, θα ισχύει ότι

$$0 < \mathbb{L}^-(u) \leq 1 \ .$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\delta} f_1(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du \leq \int_0^{\delta} f_1(u)du < \frac{1}{2}\varepsilon \ . \ \ (*)$$

Αλλά, είναι

$$\int_\delta^{+\infty} f_1(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du \leq M_\delta \int_\delta^{+\infty} f(u)\left(\mathbb{L}^-(u)\right)^2 du = M_\delta\{f^-(u)du\}_n$$

και, επομένως, έχουμε

$$\{f_1(u)du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon + M_\delta\{f^-(u)du\}_n \ .$$

[7] Για να πάρουμε το τελευταίο αποτέλεσμα χρησιμοποιούμε εκείνο το επιχείρημα του Legendre που χρησιμοποιήσαμε ήδη δύο φορές στα προηγούμενα κεφάλαια.

Επειδή $\{f^-(u)du\}_\infty = 0$, υπάρχει φυσικός ν έτσι ώστε για κάθε $n > \nu$ να ισχύει

$$M_\delta\{f^-(u)du\}_n < \frac{1}{2}\varepsilon \ . \quad (**)$$

Συνδυάζοντας τις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε ότι για το δοθέν ε υπάρχει ν ώστε για κάθε $n > \nu$ να ισχύει

$$\{f_1(u)du\}_n < \varepsilon$$

και η πρόταση έχει αποδειχθεί.

Παράδειγμα 8.1 *Στην περίπτωση που έχουμε τη συνάρτηση*

$$f(u) = \frac{4}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}} \ ,$$

τότε οι συντελεστές του αντίστοιχου συνεχούς κλάσματος είναι $\alpha_k = \frac{4}{k}$, *επομένως η σειρά* $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{2n+1}$ *αποκλίνει και θα είναι*

$$\left\{\frac{4du}{e^{2\pi\sqrt{u}} - e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0 \ .$$

Λόγω της παρατήρησης 8.6, για τον τυχαίο θετικό αριθμό c *θα ισχύει επίσης ότι*

$$\left\{\frac{4du}{e^{c\sqrt{u}} - e^{-c\sqrt{u}}}\right\}_\infty = 0 \ .$$

Αν θέσουμε

$$f_1(u) = u^{a-1}e^{-bu^\lambda}G(u) \ , \qquad f(u) = \frac{4}{e^{c\sqrt{u}} - e^{-c\sqrt{u}}} \ ,$$

όπου $a > 0$, $b > 0$, $\lambda \geq \frac{1}{2}$, $c < b$ *και* $G(u)$ *μία θετική συνάρτηση του* u *η οποία είναι άνω φραγμένη σε κάθε διάστημα* $(\delta, +\infty)$, *τότε έχουμε ότι*

$$\frac{f_1(u)}{f(u)} = \frac{1}{4}u^{a-1}e^{-bu^\lambda + c\sqrt{u}}G(u)\left(1 - e^{-2c\sqrt{u}}\right)$$

και το όριο της παραπάνω συνάρτησης καθώς το u *τείνει στο άπειρο είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι η* $\frac{f_1}{f}$ *σε κάθε διάστημα της μορφής* $(\delta, +\infty)$ *είναι άνω φραγμένη από έναν αριθμό* M_δ. *Δηλαδή, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις της προηγούμενης πρότασης, οπότε*

$$\{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}G(u)\}_\infty = 0 \ .$$

Άρα, από το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}e^{-bu^\lambda}G(u)}{z+u}du = 0$$

προκύπτει ένα συνεχές κλάσμα που συγκλίνει εφόσον $\lambda \geq \frac{1}{2}$. *Εάν* $G(u) = 1$ *και* $\lambda < \frac{1}{2}$, *τότε το συνεχές κλάσμα αποκλίνει.*[8] *Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε το παραπάνω αποτέλεσμα στη σειρά του Stirling.*

Γνωρίζουμε ότι

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2}\log(2\pi) + J(z) \ ,$$

όπου

$$J(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{z}{z^2+u^2} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi u}}\right) du \ ,$$

ή, κάνοντας αλλαγή μεταβλητής,

$$J(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{zu^{-\frac{1}{2}}}{z^2+u} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right) du \ .$$

Η δυναμοσειρά που αντιστοιχεί στο ολοκλήρωμα αυτό είναι η

$$\frac{B_1}{1\cdot 2\cdot z} - \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot z^2} + \frac{B_3}{5\cdot 6\cdot z^3} - \dots \qquad (A)$$

και το αντίστοιχο συνεχές κλάσμα

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \cfrac{1}{\alpha_2 z + \ddots + \cfrac{1}{\alpha_{2k-1}z + \cfrac{1}{\alpha_{2k} z + \ddots}}}} \ .$$

Η συνάρτηση f, σ' αυτή την περίπτωση, έχει τύπο

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right) = \frac{1}{2\pi} u^{-\frac{1}{2}} e^{-2\pi\sqrt{u}} G(u)$$

με $G(u) = e^{2\pi\sqrt{u}} \log\left(\frac{1}{1-e^{-2\pi\sqrt{u}}}\right)$. *Είναι* $\lim_{u\to+\infty} G(u) = 1$, *άρα η G ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις. Για να εκφράσουμε την* $J(z)$ *με μία παράσταση που συγκλίνει για κάθε μιγαδικό z με θετικό πραγματικό μέρος αρκεί να μετασχηματίσουμε τη σειρά Stirling (A) στο παραπάνω συνεχές ολοκλήρωμα. Ο υπολογισμός των συντελεστών* α_k, *όπως παρατηρεί ο Stieltjes, είναι μία διαδικασία επίπονη. Προκύπτει ότι* $\alpha_1 = 12$, $\alpha_2 = \frac{5}{2}$, $\alpha_3 = \frac{84}{53}$, $\alpha_4 = \frac{2809}{2340}$, $\alpha_5 = \frac{1003860}{1218947}$, … *και το πώς συνεχίζουν οι αριθμοί αυτοί παραμένει κάτι το εξαιρετικά πολύπλοκο.*

[8] Η απόδειξη αυτή παραλείπεται και στην εργασία του Stieltjes.

8.12 Συνέπειες της σύγκλισης του συνεχούς κλάσματος που προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$.

Στην τελευταία παράγραφο της εργασίας του ο Stieltjes διατυπώνει κάποιες προτάσεις που σχετίζονται με τις συνέπειες της σύγκλισης του συνεχούς κλάσματος που προκύπτει από το ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$. Για τις αποδείξεις τους παραπέμπει σε τύπους που δίνει στη συνέχεια της εργασίας του.

Πρόταση 8.4 *Εάν από το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$$

προκύπτει συνεχές κλάσμα που συγκλίνει, τότε το ίδιο συμβαίνει και με το συνεχές κλάσμα που προκύπτει από το

$$\frac{\mu}{z} + \int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u} ,$$

όπου το μ είναι σταθερός θετικός αριθμός. Εξαιρείται μία μόνο τιμή του μ, εκείνη για την οποία η συνάρτηση ϕ δίνει την ίδια κατανομή με αυτή που προκύπτει αν από την κατανομή (ν_i, ϑ_i) της Φ_1 αφαιρέσουμε τη μάζα ν_0 από το 0.

Πρόταση 8.5 *Εάν από το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$$

προκύπτει συνεχές κλάσμα που συγκλίνει, τότε το ίδιο συμβαίνει και με το συνεχές κλάσμα που προκύπτει από το

$$\int_0^{+\infty} \frac{u d\phi(u)}{z+u} ,$$

με εξαίρεση την ίδια περίπτωση με αυτήν της προηγούμενης πρότασης.

Πρόταση 8.6 *Εάν από το ολοκλήρωμα*

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\phi(u)}{z+u}$$

προκύπτει συνεχές κλάσμα που συγκλίνει, τότε το ίδιο συμβαίνει και με το συνεχές κλάσμα που προκύπτει από το

$$\int_\lambda^{+\infty} \frac{d\phi(u-\lambda)}{z+u}$$

όπου λ σταθερός θετικός αριθμός. Εξαιρείται μία περίπτωση, εκείνη κατά την οποία η κατανομή της μάζας που ορίζει η ϕ είναι η $(\mu_i, \lambda_i - \lambda_1)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, δηλαδή η κατανομή που προκύπτει αν πλησιάσουμε κάθε μάζα της κατανομής που ορίζει η Φ κατά λ_1 πιο κοντά στο 0.

Μέρος II

Το ολοκλήρωμα Stieltjes μέσα από τις εργασίες των F. Riesz, H. Legesgue και J. Radon.

Κεφάλαιο 9

Οι εργασίες του F. Riesz σχετικά με την υφή των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών.

Το ολοκλήρωμα Stieltjes άρχισε να γίνεται γνωστό και να βρίσκει εφαρμογές περίπου 15 χρόνια μετά τη δημοσίευση της εργασίας «Recherches sur les fractions continues», αν και φαίνεται να υπήρχαν κάποιοι μαθηματικοί που ασχολήθηκαν μ' αυτό, όπως ο Ούγγρος J. König, που το 1897 γράφει γι' αυτό στο σημείωμα του «Mathematikai ès Tennészettudomànyi Ertesitö».

Στις αρχές του 20ου αιώνα, ένα από τα θέματα με τα οποία ασχολούνταν κυρίως Ιταλοί και Γάλλοι μαθηματικοί ήταν η μελέτη του *συναρτησοειδούς*, μίας έννοιας ιδιαίτερα χρήσιμης στη Μαθηματική Φυσική. Το συναρτησοειδές οριζόταν ως μία συνάρτηση U, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση f έναν πραγματικό ή μιγαδικό αριθμό.[1] Ως *γραμμικό* όριζαν το συναρτησοειδές που «διατηρεί» την επιμεριστική ιδιότητα, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση $U(\lambda f+\mu g)=\lambda U(f)+\mu U(g)$. *Συνεχές* γραμμικό συναρτησοειδές ήταν εκείνο που έχει επιπλέον την ιδιότητα να διατηρεί το όριο μιας ομοιόμορφα συγκλίνουσας ακολουθίας συναρτήσεων. Φυσικά, ο ορισμός που έδιναν για το συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές την εποχή εκείνη είναι ισοδύναμος με το σημερινό, αν εξαιρέσουμε ότι το πεδίο ορισμού ενός συναρτησοειδούς μπορεί να είναι οποιοσδήποτε γραμμικός χώρος με νόρμα.

Το 1903 ο J. Hadamard απέδειξε στη δημοσίευσή του «Sur les opérations fonctionelles» ότι εάν U είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές με πεδίο ορισμού το σύνολο Ω των συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται σε κάποιο συμπαγές σύνολο, π.χ. στο διάστημα

[1] Αρχικά οριζόταν ως συνάρτηση συναρτήσεων «fonction de fonction», γι' αυτό και ο J. Hadamard (1865-1963) την ονόμασε «fonctionnelle» και, τελικά, το τελευταίο όνομα επικράτησε ανάμεσα στα διάφορα άλλα που χρησιμοποιούνταν για την έννοια αυτή. Οι F. Riesz (1880-1965) και H. Lebesgue (1875-1941) στις δημοσιεύσεις τους την ονομάζουν συνάρτηση-πράξη («opération-fonctionnelle») για να τονίσουν ότι το πεδίο ορισμού της δεν είναι σύνολο αριθμών, όπως των συνηθισμένων συναρτήσεων, αλλά σύνολο συναρτήσεων.

$[a, b]$, τότε για κάθε συνάρτηση f του Ω ισχύει ότι

$$U(f) = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b k_n(x) f(x) dx \ , \tag{9.1}$$

όπου (k_n) είναι μία ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται στο $[a, b]$ και είναι ανεξάρτητη της f. Έξι χρόνια αργότερα, το 1909, ο F. Riesz στην εργασία του «Sur les opérations fonctionnelles linéaires» κατάφερε να αναπαραστήσει τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή με ένα πιο κομψό τρόπο, χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα Stieltjes. Πρόκειται για την εργασία στην οποία αποδεικνύεται το περίφημο Θεώρημα Αναπαράστασης των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών. Την εργασία αυτή σχολίασε και επέκτεινε, περίπου ένα χρόνο μετά, ο H. Lebesgue στη δημοσίευσή του με τίτλο «Sur l' intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionnelles linéaires». Σαν απάντηση στα σχόλια του Lebesgue, ο F. Riesz δημοσίευσε το 1911 μία νέα εργασία, με τίτλο «Sur certains systèmes singuliers d' équations intégrales». Εκεί μελέτησε αναλυτικά κάποιες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Stieltjes που του χρειάζονται στην εργασία, έδωσε ξανά απόδειξη του Θεωρήματος Αναπαράστασης χωρίς να κάνει ουσιαστικές αλλαγές και ασχολήθηκε με προβλήματα ολοκληρωτικών εξισώσεων, τα οποία λύνονται με εφαρμογή του θεωρήματός του.

Υπάρχει και τρίτη εργασία του F. Riesz όπου δίνει νέα απόδειξη του Θεωρήματος Αναπαράστασης.[2] Δημοσιεύτηκε το 1914 με τίτλο «Démonstration nouvelle d' un théorème concernant les opérations fonctionelles linéaires». Η απόδειξη που δίνει διαφέρει από τις προηγούμενες και είναι πιο κομψή και απλή, όπως γράφει και ο ίδιος στον πρόλογο. Αυτό που του έδωσε την ιδέα γι' αυτή την απόδειξη ήταν τα σχόλια του Lebesgue για την πρώτη του δημοσίευση.

Από τις τρεις δημοσιεύσεις του F. Riesz θα μελετήσουμε στις επόμενες παραγράφους τη δεύτερη, γιατί εκεί ασχολείται αναλυτικά με το ολοκλήρωμα Stieltjes.

9.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να είναι μία συνάρτηση η αρχική μιας συνάρτησης φραγμένης κύμανσης.

Τίθεται το εξής ερώτημα: **εάν έχουμε μία συνάρτηση A, πώς μπορούμε να εξετάσουμε αν η A είναι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης α φραγμένης κύμανσης;** Παρακάτω αποδεικνύουμε ένα χρήσιμο κριτήριο σχετικό με το παραπάνω ερώτημα.

Λήμμα 9.1 *Αν η α είναι συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$, τότε η α είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) στο $[a, b]$.*

Απόδειξη: Η α είναι η διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων στο $[a, b]$ και είναι γνωστό ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$.

[2] Δε δόθηκαν μόνο από τον F. Riesz αποδείξεις του εν λόγω θεωρήματος. Ο E. Helly (1884-1943) δημοσίευσε επίσης μία απόδειξή του το 1912 στο περιοδικό Comptes rendus de l' Académie de Vienne.

Ορισμός 9.1 *Έστω A μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Για κάθε αριθμό $x \in [a, b)$ ορίζουμε τους* ***άνω*** *και* ***κάτω δεξιούς παράγωγους αριθμούς Dini*** *της A:*

$$D^u_+ A(x) = \limsup_{y \to x+} \frac{A(y) - A(x)}{y - x} \ , \quad D^l_+ A(x) = \liminf_{y \to x+} \frac{A(y) - A(x)}{y - x} \ .$$

Επίσης, για κάθε $x \in (a, b]$ ορίζουμε τους ***άνω*** *και* ***κάτω αριστερούς παράγωγους αριθμούς Dini*** *της A:*

$$D^u_- A(x) = \limsup_{y \to x-} \frac{A(y) - A(x)}{y - x} \ , \quad D^l_- A(x) = \liminf_{y \to x-} \frac{A(y) - A(x)}{y - x} \ .$$

Προφανώς, η A έχει δεξιά παράγωγο $D_+ A(x) = A'_+(x)$ στο $x \in [a, b)$ αν και μόνο αν $D^u_+ A(x) = D^l_+ A(x) = A'_+(x)$. Ομοίως, η A έχει αριστερή παράγωγο $D_- A(x) = A'_-(x)$ στο $x \in [a, b)$ αν και μόνο αν $D^u_- A(x) = D^l_- A(x) = A'_-(x)$.

Λήμμα 9.2 *Έστω ότι η πραγματική συνάρτηση A είναι ορισμένη και συνεχής στο $[a, b]$. Τότε υπάρχει $\xi \in [a, b)$ ώστε*

$$\frac{A(b) - A(a)}{b - a} \leq D^l_+ A(\xi) \leq D^u_+ A(\xi)$$

και υπάρχει $\eta \in [a, b)$ ώστε

$$D^l_+ A(\eta) \leq D^u_+ A(\eta) \leq \frac{A(b) - A(a)}{b - a} \ .$$

Απόδειξη: Παίρνουμε την ειδική περίπτωση, όπου $A(a) = A(b) = 0$.

Η A έχει ελάχιστη τιμή στο $[a, b]$. Αν η τιμή αυτή είναι αρνητική, τότε πιάνεται σε κάποιο σημείο $\xi \in (a, b)$, ενώ, αν η τιμή αυτή είναι μηδέν, τότε πιάνεται στο $\xi = a$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $0 \leq \frac{A(y) - A(\xi)}{y - \xi}$ για κάθε $y > \xi$ και, επομένως, $0 \leq D^l_+ A(\xi) \leq D^u_+ A(\xi)$.

Ομοίως, αποδεικνύουμε ότι η A έχει μέγιστη τιμή σε κάποιο σημείο $\eta \in [a, b)$. Τότε έχουμε $\frac{A(y) - A(\eta)}{y - \eta} \leq 0$ για κάθε $y > \eta$ και, επομένως, $D^l_+ A(\eta) \leq D^u_+ A(\eta) \leq 0$.

Η γενική περίπτωση ανάγεται εύκολα στην ειδική θεωρώντας τη συνάρτηση

$$A(x) - \frac{A(b) - A(a)}{b - a} x - \frac{bA(a) - aA(b)}{b - a} \ .$$

Φυσικά, ισχύει και η ανάλογη παραλλαγή του προηγούμενου λήμματος για τους αριστερούς παραγώγους αριθμούς Dini της A και η απόδειξη είναι εντελώς όμοια.

Λήμμα 9.3 *Έστω A μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $D^u_+ A$, ορισμένη αυθαίρετα στο σημείο b, είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$. Τότε ισχύει*

$$A(b) - A(a) = \int_a^b D^u_+ A(x) dx \ .$$

Απόδειξη: Παίρνουμε την τυχαία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a, b]$. Σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ έχουμε, βάσει του λήμματος 9.2, ότι υπάρχουν ξ_k και η_k ώστε να ισχύει ότι

$$D_+^u A(\eta_k) \le \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \le D_+^u A(\xi_k) \ .$$

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{m} D_+^u A(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{k=1}^{m} (A(x_k) - A(x_{k-1})) = A(b) - A(a)$$

και

$$A(b) - A(a) = \sum_{k=1}^{m} (A(x_k) - A(x_{k-1})) \le \sum_{k=1}^{m} D_+^u A(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \ .$$

Παίρνοντας διαμερίσεις D των οποίων το πλάτος τείνει στο μηδέν, αποδεικνύεται το συμπέρασμα του λήμματος.

Παρατήρηση 9.1 *Ισχύουν και οι ανάλογες παραλλαγές του λήμματος για τις συναρτήσεις $D_+^l A$, $D_-^u A$ και $D_-^l A$.*

Παρατήρηση 9.2 *Το συμπέρασμα του λήμματος ισχύει, προφανώς, σε κάθε υποδιάστημα $[a, c]$ του $[a, b]$, οπότε παίρνουμε ότι, με τις υποθέσεις του λήμματος, η A ισούται με το αόριστο ολοκλήρωμα της $D_+^u A$ στο $[a, b]$.*

Πρόταση 9.1 *Έστω A μία συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$. Τότε, η A θα είναι το αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης α που είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$, ακριβώς τότε, όταν το άθροισμα*

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right| , \quad (*)$$

όπου $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ είναι τυχαία διαμέριση του $[a, b]$, είναι άνω φραγμένο από ένα σταθερό θετικό αριθμό ανεξάρτητο της D.

Απόδειξη: Είναι φανερό ότι μπορούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις α και A είναι πραγματικές.

Έστω ότι η συνάρτηση A είναι το αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης α που είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$. Τότε, αν $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ είναι μία τυχαία διαμέριση του $[a, b]$, θα ισχύει ότι

$$\frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \alpha(x)dx = \beta_k \ ,$$

όπου β_k είναι ένας αριθμός μεταξύ του κατώτερου και του ανώτερου φράγματος της α στο $[x_{k-1}, x_k]$.

Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$, οπότε για κάθε k υπάρχουν ξ_k, η_k στο $[x_{k-1}, x_k]$ με την ιδιότητα:

$$\alpha(\xi_k) - \frac{\varepsilon}{m} < \beta_k < \alpha(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{m} \ .$$

Συνεπάγεται ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m-1} |\beta_{k+1} - \beta_k| &\leq \sum_{k=1}^{m-1} (|\beta_{k+1} - \alpha(x_k)| + |\alpha(x_k) - \beta_k|) \\
&= \sum_{k=1}^{m-1} |\beta_{k+1} - \alpha(x_k)| + \sum_{k=1}^{m-1} |\beta_k - \alpha(x_k)| \\
&= \sum_{k=2}^{m} |\beta_k - \alpha(x_{k-1})| + \sum_{k=1}^{m-1} |\beta_k - \alpha(x_k)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} (|\beta_k - \alpha(x_{k-1})| + |\beta_k - \alpha(x_k)|) \ .
\end{aligned}$$

Τώρα, για κάθε k έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
|\beta_k - \alpha(x_{k-1})| + |\beta_k - \alpha(x_k)| &< \max\Big(|\alpha(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{m} - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(\eta_k) + \frac{\varepsilon}{m} - \alpha(x_k)|, \\
&\qquad |\alpha(\xi_k) - \frac{\varepsilon}{m} - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(\xi_k) - \frac{\varepsilon}{m} - \alpha(x_k)|\Big) \\
&\leq \max(|\alpha(\eta_k) - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(\eta_k) - \alpha(x_k)|, \\
&\qquad |\alpha(\xi_k) - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(\xi_k) - \alpha(x_k)|) + \frac{2\varepsilon}{m} \\
&= |\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(t_k) - \alpha(x_k)| + \frac{2\varepsilon}{m} \ ,
\end{aligned}$$

όπου t_k είναι είτε το ξ_k είτε το η_k. Άρα,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m-1} |\beta_{k+1} - \beta_k| &< \sum_{k=1}^{m} (|\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})| + |\alpha(t_k) - \alpha(x_k)|) + 2\varepsilon \\
&\leq V_a^b \alpha + 2\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Επειδή το ε είναι τυχαίο, καταλήγουμε στο ότι

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right| = \sum_{k=1}^{m-1} |\beta_{k+1} - \beta_k| \leq V_a^b \alpha \ .$$

Αντιστρόφως, έστω ότι η συνάρτηση A ορίζεται στο $[a, b]$ και είναι τέτοια ώστε το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left| \frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right|$$

να είναι άνω φραγμένο από ένα σταθερό θετικό αριθμό G για οποιαδήποτε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a, b]$.

Θεωρούμε τυχαίο σημείο $x \in [a, b)$ και το θετικό h, που είναι μικρότερος του $\frac{b-x}{3}$. Παίρνουμε τον αριθμό $y = \frac{x+2b}{3}$ και τη διαμέριση $\{a, x, x+h, y, b\}$. Θεωρούμε το άθροισμα $(*)$ που αντιστοιχεί σ' αυτήν και, λαμβάνοντας υπόψη την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε ότι

$$\left|\frac{A(x+h)-A(x)}{h} - \frac{A(b)-A(y)}{b-y}\right|$$
$$\leq \left|\frac{A(x+h)-A(x)}{h} - \frac{A(y)-A(x-h)}{y-(x-h)}\right| \quad + \quad \left|\frac{A(y)-A(x-h)}{y-(x-h)} - \frac{A(b)-A(y)}{b-y}\right| \leq G \; .$$

Παίρνοντας τα ανώτερα όρια όταν $h \to 0^+$, προκύπτει ότι ο $D_+^u A(x)$ είναι πεπερασμένος.

Θεωρούμε τη συνάρτηση α, η οποία στο $[a, b)$ ισούται με την $D_+^u A$, ενώ η τιμή της στο b ισούται με την $D_-^u A(b)$.

Η συνάρτηση α είναι φραγμένης κύμανσης και μάλιστα, η κύμανσή της δεν ξεπερνά τον αριθμό G. Πράγματι, έστω μία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ και το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)| \; .$$

Από τον ορισμό της $D_+^u A$ προκύπτει ότι για κάθε $k < m$ υπάρχει θετικός αριθμός h_k έτσι ώστε το $\alpha(x_k)$ να διαφέρει οσοδήποτε λίγο από τον αριθμό $\frac{A(x_k+h_k)-A(x_k)}{h_k}$. Για $k = m$ διαλέγουμε το h_m αρνητικό και έτσι ώστε το $\alpha(x_m)$ να διαφέρει οσοδήποτε λίγο από τον αριθμό $\frac{A(x_m+h_m)-A(x_m)}{h_m}$. Επιπλέον, μπορούμε να πάρουμε τα διάφορα h_k όσο μικρά θέλουμε, ώστε τα διαστήματα $(x_k, x_k + h_k)$, όπου $k = 1, \ldots, m-1$, και $(x_m + h_m, x_m)$ να μην έχουν κοινά σημεία. Τότε, το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)|$$

διαφέρει οσοδήποτε λίγο από το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left|\frac{A(x_{k+1}+h_{k+1}) - A(x_{k+1})}{h_{k+1}} - \frac{A(x_k+h_k) - A(x_k)}{h_k}\right| \; .$$

Όμως, το τελευταίο άθροισμα, αν χρησιμοποιήσουμε την τριγωνική ανισότητα, προκύπτει ότι είναι μικρότερο ή ίσο από το άθροισμα της μορφής $(*)$ που αντιστοιχεί στη διαμέριση $D = \{a = x_0, x_0+h_0, x_1, x_1+h_1, \ldots, x_{m-1}+h_{m-1}, x_m+h_m, x_m = b\}$, το οποίο προφανώς είναι μικρότερο ή ίσο από G. Άρα, το άθροισμα $\sum_{k=0}^{m-1} |\alpha(x_{k+1}) - \alpha(x_k)|$ είναι μικρότερο ή ίσο από το G. Επειδή η διαμέριση που διαλέξαμε ήταν τυχαία, έπεται ότι η συνάρτηση α είναι φραγμένης κύμανσης και, μάλιστα, η κύμανσή της θα είναι μικρότερη ή ίση του G. Από το λήμμα 9.1 συνεπάγεται ότι η α είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$

και, επομένως, βάσει του λήμματος 9.3 και της παρατήρησης 2, η A είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της α.

9.2 Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Stieltjes.

Στην παράγραφο αυτή αποδεικνύουμε σημαντικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Stieltjes, που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Πρόταση 9.2 *Έστω f, α δύο συναρτήσεις που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής και ότι η α είναι φραγμένης κύμανσης. Τότε, το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ υπάρχει και μάλιστα ισχύει*

$$\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \leq \max_{x\epsilon[a,b]} |f(x)| V_a^b \alpha \ . \quad (**)$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε ότι το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ είναι το όριο των αθροισμάτων

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \ , \quad (\diamond)$$

όπου $\xi_k \,\epsilon\, [x_{k-1}, x_k]$, καθώς το πλάτος της διαμέρισης $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ τείνει στο μηδέν. Επομένως, αν υποθέσουμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ υπάρχει, τότε η ισχύς της $(**)$ είναι προφανής.

Μένει ν' αποδείξουμε την ύπαρξη του εν λόγω ολοκληρώματος, όταν η f είναι συνεχής και η α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο $[a,b]$, άρα και ομοιόμορφα συνεχής. Επομένως, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε x, y του $[a,b]$ να ισχύει

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \ .$$

Παίρνουμε μία τυχαία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ με πλάτος μικρότερο του δ και οποιαδήποτε διαμέριση D' λεπτότερη από τη D. Αν

$$x_{k-1} = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < \ldots < t_{p-1}^{(k)} < t_p^{(k)} = x_k$$

είναι τα διαιρετικά σημεία της D' στο διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$, αν $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ και αν $\eta_l^{(k)} \in [t_{l-1}^{(k)}, t_l^{(k)}]$, τότε, συγκρίνοντας τα αθροίσματα της f στο $[x_{k-1}, x_k]$ που αντιστοιχούν στη D και στη D', παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Big|f(\xi_k)\,(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) \ &- \ \sum_{l=1}^{p} f(\eta_l^{(k)})(\alpha(t_l^{(k)}) - \alpha(t_{l-1}^{(k)}))\Big| \\ &= \ \Big|\sum_{l=1}^{p} (f(\xi_k) - f(\eta_l^{(k)}))(\alpha(t_l^{(k)}) - \alpha(t_{l-1}^{(k)}))\Big| \\ &< \ \varepsilon \sum_{l=1}^{p} \Big|\alpha(t_l^{(k)}) - \alpha(t_{l-1}^{(k)})\Big| \ .\end{aligned}$$

Αθροίζοντας τις ανισότητες αυτές για $k = 1, \ldots, m$, βρίσκουμε ότι η διαφορά των αθροισμάτων της f στο $[a, b]$ που αντιστοιχούν στις διαμερίσεις D, D' διαφέρουν κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο από $\varepsilon \cdot V_a^b \alpha$.

Αν, τώρα, πάρουμε δύο οποιεσδήποτε διαμερίσεις D, D' του $[a, b]$ με πλάτος μικρότερο του δ και τις συγκρίνουμε με την κοινή εκλέπτυνσή τους, καταλήγουμε στο ότι τα αντίστοιχα αθροίσματα της f διαφέρουν κατ' απόλυτη τιμή λιγότερο από $2\varepsilon \cdot V_a^b \alpha$.

Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία διαμερίσεων (D_n) του $[a, b]$, των οποίων τα πλάτη τείνουν στο μηδέν. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, η αντίστοιχη ακολουθία αθροισμάτων της f είναι ακολουθία Cauchy και, επομένως, συγκλίνει σε κάποιον μιγαδικό αριθμό A.

Τώρα, παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε το αντίστοιχο δ και οποιαδήποτε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ με πλάτος μικρότερο του δ. Παίρνουμε, επίσης, αρκετά μεγάλο n ώστε η D_n να έχει πλάτος μικρότερο του δ. Τότε, η διαφορά του $\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right)$ από το άθροισμα που αντιστοιχεί στη D_n είναι κατ' απόλυτη τιμή μικρότερη από $2\varepsilon \cdot V_a^b \alpha$. Παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\Big|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\left(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})\right) - A\Big| \leq 2\varepsilon \cdot V_a^b \alpha \ .$$

Άρα, το $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με τον αριθμό A.

Πρόταση 9.3 *Έστω f, α δύο φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται στο $[a, b]$. Εάν το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) d\alpha(x)$ υπάρχει, τότε και το ολοκλήρωμα $\int_a^b \alpha(x) df(x)$ υπάρχει και μάλιστα ισχύει η ισότητα*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) + \int_a^b \alpha(x) df(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) \ . \tag{9.2}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε μία διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a, b]$, τα ενδιάμεσα σημεία $t_1, t_2, \ldots, t_m$ και το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} \alpha(t_k) f(x_k) - \sum_{k=1}^{m} \alpha(t_k) f(x_{k-1}) \ .$$

Επίσης,

$$f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k)\alpha(x_k) - \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})\alpha(x_{k-1}) \ .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο προηγούμενες ισότητες παίρνουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) - (f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a))$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f(x_k)(\alpha(x_k) - \alpha(t_k)) + \sum_{k=1}^{m} f(x_{k-1})(\alpha(t_k) - \alpha(x_{k-1})) \ .$$

Το δεύτερο μέλος της προηγούμενης ισότητας είναι το άθροισμα που αντιστοιχεί στη διαμέριση D', η οποία προκύπτει από όλα τα σημεία x_k, t_j (χωρίς επαναλήψεις). Επομένως, το όριο του δευτέρου μέλους της προηγούμενης ισότητας, καθώς το πλάτος της D τείνει στο μηδέν, υπάρχει και είναι ίσο με $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$. Άρα, και το όριο του αθροίσματος στο πρώτο μέλος θα υπάρχει, δηλαδή υπάρχει και το ολοκλήρωμα $\int_a^b \alpha(x)df(x)$ και ισχύει η ισότητα (9.2).

Πρόταση 9.4 *Έστω f και α δύο φραγμένες συναρτήσεις που ορίζονται στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ και ότι η α είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a,b]$. Άρα, ορίζεται η συνάρτηση A με $A(x) = \int_a^x \alpha(t)dt + A(a)$ για κάθε $x\epsilon[a,b]$. Τότε, υπάρχει και το όριο των αθροισμάτων*

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))(A(x_k) - A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}$$

καθώς το πλάτος της διαμέρισης $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ τείνει στο μηδέν.

Απόδειξη: Θεωρούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι οι συναρτήσεις f και α είναι πραγματικές. Εάν

$$D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$$

είναι μία τυχαία διαμέριση του $[a,b]$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} \alpha(x) \leq \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \leq \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \alpha(x) \ ,$$

οπότε για τυχαίο $\varepsilon > 0$ υπάρχουν ξ_k, η_k στο $[x_{k-1}, x_k]$ ώστε

$$\alpha(\eta_k) - \frac{\varepsilon}{m\left(|f(x_k) - f(x_{k-1})| + 1\right)} < \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

και

$$\frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} < \alpha(\xi_k) + \frac{\varepsilon}{m\left(|f(x_k) - f(x_{k-1})| + 1\right)} \ .$$

Από τις τελευταίες ανισότητες έχουμε ότι

$$\alpha(s_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) - \frac{\varepsilon}{m} < \frac{\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)\left(A(x_k) - A(x_{k-1})\right)}{x_k - x_{k-1}}$$

και

$$\frac{\left(f(x_k) - f(x_{k-1})\right)\left(A(x_k) - A(x_{k-1})\right)}{x_k - x_{k-1}} < \alpha(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) + \frac{\varepsilon}{m} \ ,$$

όπου: $s_k = \eta_k$, $t_k = \xi_k$ στην περίπτωση που $f(x_k) - f(x_{k-1}) \geq 0$ και $s_k = \xi_k$, $t_k = \eta_k$ στην περίπτωση που $f(x_k) - f(x_{k-1}) < 0$.

Άρα,

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha(s_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) - \varepsilon < \sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(A(x_k) - A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}$$

και

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(A(x_k) - A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}} < \sum_{k=1}^{m} \alpha(t_k)(f(x_k) - f(x_{k-1})) + \varepsilon\ .$$

Επειδή υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$, λόγω της προηγούμενης πρότασης, θα υπάρχει και το $\int_a^b \alpha(x)df(x)$. Αφήνοντας, τώρα, το πλάτος της διαμέρισης D, αλλά και το ε, να τείνουν στο μηδέν, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(A(x_k) - A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}} = \int_a^b \alpha(x)df(x)\ .$$

Λόγω της (9.2) θα ισχύει ότι

$$\lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k) - f(x_{k-1}))\,(A(x_k) - A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}} = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b f(x)d\alpha(x)\ . \tag{9.3}$$

Παρατήρηση 9.3 *Το όριο* $\lim_{|D|\to 0} \sum_{k=1}^{m} \frac{(f(x_k)-f(x_{k-1}))(A(x_k)-A(x_{k-1}))}{x_k - x_{k-1}}$ *θα το συμβολίζουμε με* $\int_a^b \frac{df(x)dA(x)}{dx}$. *Επομένως, οι δύο ισότητες της προηγούμενης απόδειξης γράφονται*

$$\begin{aligned} \int_a^b \alpha(x)df(x) &= \int_a^b \frac{df(x)dA(x)}{dx}\ , \\ \int_a^b f(x)d\alpha(x) &= f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \frac{df(x)dA(x)}{dx}\ . \end{aligned} \tag{9.4}$$

Παρατήρηση 9.4 *Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι το αν μεταβάλλεται ή όχι η τιμή του ολοκληρώματος* $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ *όταν αλλάζουμε την τιμή της* α *σε κάποια σημεία, υπό την προϋπόθεση ότι η* f *είναι συνεχής στο* $[a, b]$. *Είναι προφανές ότι αν προσθέσουμε σε κάθε τιμή της* α *τον ίδιο σταθερό πραγματικό αριθμό, τότε η τιμή του αθροίσματος* $\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}))$ *δε μεταβάλλεται, άρα το ίδιο ισχύει και για την τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος. Εάν μεταβάλλουμε τις τιμές της* α *σε ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων, ώστε η* α *να παραμείνει συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, τότε, λόγω της συνέχειας της* f, *πάλι η τιμή του* $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ *δε μεταβάλλεται. Αυτό προκύπτει πολύ εύκολα από την πρόταση που ακολουθεί.*

Πρόταση 9.5 *Έστω ότι η συνάρτηση α ορίζεται στο $[a,b]$ και είναι φραγμένης κύμανσης. Το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ μηδενίζεται για κάθε συνεχή συνάρτηση f ακριβώς τότε, όταν η α είναι σταθερή εκτός από ένα σύνολο σημείων του (a,b) που μπορεί να είναι το πολύ αριθμήσιμο.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι η α είναι μια συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τέτοια ώστε το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ να μηδενίζεται για κάθε συνεχή συνάρτηση f. Αν πάρουμε στη θέση της f τη σταθερή συνάρτηση με τιμή 1, προκύπτει ότι

$$\alpha(a) = \alpha(b) \ . \ \ (1)$$

Αν θεωρήσουμε την

$$g(x;\xi) = \begin{cases} x, & a \le x \le \xi \\ \xi, & \xi \le x \le b \ , \end{cases}$$

τότε έχουμε ότι

$$\int_a^b \alpha(x)dg(x;\xi) = \int_a^\xi \alpha(x)dg(x;\xi) + \int_\xi^b \alpha(x)dg(x;\xi) \ .$$

Τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στο δεύτερο μέλος της παραπάνω ισότητας ορίζονται γιατί η α είναι φραγμένης κύμανσης και η $g(x;\xi)$ συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[a,\xi]$ και $[\xi,b]$. Όμως, είναι $\int_\xi^b \alpha(x)dg(x;\xi) = 0$, γιατί η $g(x;\xi)$ είναι σταθερή στο $[\xi,b]$. Άρα,

$$\int_a^b \alpha(x)dg(x;\xi) = \int_a^\xi \alpha(x)dg(x;\xi) \ .$$

Από την πρόταση (9.3), τη σχέση (1) κι επειδή $\int_a^b g(x;\xi)d\alpha(x) = 0$, παίρνουμε τελικά ότι

$$\int_a^\xi \alpha(x)dx = (\xi - a)\alpha(a) \ .$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή στα σημεία συνέχειας της α, βρίσκουμε ότι $\alpha(\xi) = \alpha(a)$ για κάθε σημείο συνέχειας της α. Άρα, η α είναι σταθερή στο $[a,b]$, εκτός από ένα το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων του (a,b).

Αντιστρόφως, έστω ότι η α είναι σταθερή και ίση με c στο $[a,b]$, εκτός από ένα το πολύ αριθμήσιμο σύνολο σημείων του (a,b). Είναι προφανές ότι αν x είναι οποιοδήποτε σημείο συνέχειας της α στο (a,b), τότε ισχύει $\alpha(x) = \alpha(x+) = c$. Παίρνοντας μία οποιαδήποτε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$, όπου τα $x_1, \ldots, x_{m-1}$ είναι όλα σημεία συνέχειας της α, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(\alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(c - c) = 0 \ ,$$

όπου η f είναι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$.

Επειδή το πλάτος μιας τέτοιας διαμέρισης μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό θέλουμε και επειδή το $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ υπάρχει σύμφωνα με την πρόταση 9.2, παίρνοντας το όριο, βρίσκουμε $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = 0$.

Πρόταση 9.6 *Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και α που ορίζονται στο $[a,b]$ και η πρώτη είναι συνεχής, ενώ η δεύτερη φραγμένης κύμανσης. Τότε, η τιμή του ολοκληρώματος $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ δεν αλλάζει και η κύμανση της α δεν αυξάνεται, αν αντικαταστήσουμε τις τιμές της α σε οποιαδήποτε σημεία ασυνέχειάς της $x \in (a,b)$ με οποιοδήποτε κυρτό συνδυασμό των ορίων $\alpha(x-)$ και $\alpha(x+)$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τη συνάρτηση α^*, η οποία προκύπτει από την α αν σε κάποια σημεία ασυνέχειας $x \in (a,b)$ της α αντικαταστήσουμε την τιμή $\alpha(x)$ με τον κυρτό συνδυασμό $\alpha^*(x) = \theta\alpha(x+) + (1-\theta)\alpha(x-)$, όπου ο αριθμός θ εξαρτάται από το x.

Παίρνουμε οποιαδήποτε διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a,b]$ και παρεμβάλλουμε σημεία συνέχειας $y_1, \ldots, y_m$ της α ώστε να είναι $x_{k-1} < y_k < x_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, m$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |\alpha^*(x_k) - \alpha^*(x_{k-1})| \;&\leq\; |\alpha^*(y_1) - \alpha^*(a)| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \left(|\alpha^*(x_k) - \alpha^*(y_k)| + |\alpha^*(y_{k+1}) - \alpha^*(x_k)|\right) \\
&\quad + |\alpha^*(b) - \alpha^*(y_m)| \\
&= |\alpha(y_1) - \alpha(a)| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m-1} \left(|\alpha^*(x_k) - \alpha(y_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \alpha^*(x_k)|\right) \\
&\quad + |\alpha(b) - \alpha(y_m)| \;.
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε σημεία ξ_k, η_k κοντά στο x_k, ώστε

$$y_k < \xi_k < x_k < \eta_k < y_{k+1}$$

και

$$|\alpha(\xi_k) - \alpha(x_k-)| < \frac{\varepsilon}{2m}\;, \qquad |\alpha(\eta_k) - \alpha(x_k+)| < \frac{\varepsilon}{2m}\;.$$

Τότε, για κάθε x_k και με το αντίστοιχο θ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\alpha^*(x_k) - \theta\alpha(\eta_k) - (1-\theta)\alpha(\xi_k)| \;&\leq\; \theta|\alpha(x_k+) - \alpha(\eta_k)| + (1-\theta)|\alpha(x_k-) - \alpha(\xi_k)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2m}\;.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι αυτό ισχύει είτε το x_k είναι σημείο ασυνέχειας είτε είναι σημείο συνέχειας της α.

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& |\alpha^*(x_k) - \alpha(y_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \alpha^*(x_k)| \\
<\; & |\theta\alpha(\eta_k) + (1-\theta)\alpha(\xi_k) - \alpha(y_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \theta\alpha(\eta_k) - (1-\theta)\alpha(\xi_k)| + \frac{\varepsilon}{m} \\
\leq\; & |\alpha(\xi_k) - \alpha(y_k)| + \theta|\alpha(\eta_k) - \alpha(\xi_k)| \\
& + (1-\theta)|\alpha(\eta_k) - \alpha(\xi_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \alpha(\eta_k)| + \frac{\varepsilon}{m} \\
=\; & |\alpha(\xi_k) - \alpha(y_k)| + |\alpha(\eta_k) - \alpha(\xi_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \alpha(\eta_k)| + \frac{\varepsilon}{m}\;.
\end{aligned}$$

Τέλος, ισχύει

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} |\alpha^*(x_k) - \alpha^*(x_{k-1})| &< |\alpha(y_1) - \alpha(a)| \\
&+ \sum_{k=1}^{m-1} \Big(|\alpha(\xi_k) - \alpha(y_k)| + |\alpha(\eta_k) - \alpha(\xi_k)| + |\alpha(y_{k+1}) - \alpha(\eta_k)| \Big) \\
&+ |\alpha(b) - \alpha(y_m)| + \varepsilon \\
&\leq V_a^b \alpha + \varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Επειδή το ε που θεωρήσαμε ήταν τυχαίο, βρίσκουμε ότι

$$\sum_{k=1}^{m} |\alpha^*(x_k) - \alpha^*(x_{k-1})| \leq V_a^b \alpha$$

και επομένως

$$V_a^b \alpha^* \leq V_a^b \alpha \ .$$

Η συνάρτηση $\alpha^* - \alpha$ είναι φραγμένης κύμανσης και σταθερή μηδέν στο $[a, b]$, εκτός από το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων του (a, b). Από την πρόταση 9.5 συνεπάγεται ότι

$$\int_a^b f(x) d\alpha^*(x) - \int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) d(\alpha^* - \alpha)(x) = 0 \ .$$

9.3 Αναπαράσταση συνεχούς γραμμικού συναρτησοειδούς με τη βοήθεια του ολοκληρώματος Stieltjes.

Θεωρούμε το σύνολο Ω όλων των μιγαδικών συναρτήσεων που ορίζονται και είναι συνεχείς στο $[a, b]$.

Ορισμός 9.2 *Κάθε συνάρτηση U που ορίζεται στο Ω, παίρνει μιγαδικές τιμές και για κάθε $f, g \in \Omega$ και οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς λ, μ ικανοποιεί την*

$$U(\lambda f + \mu g) = \lambda U(f) + \mu U(g)$$

θα λέγεται ***γραμμικό συναρτησοειδές****.*

Ορισμός 9.3 *Ένα γραμμικό συναρτησοειδές U που ορίζεται στο Ω και διατηρεί το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων του Ω που συγκλίνει ομοιόμορφα, δηλαδή για κάθε ακολουθία (f_n) του Ω που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση f του Ω, ισχύει ότι $\lim_{n\to+\infty} U(f_n) = U(f)$, θα ονομάζεται* ***συνεχές****.*

Παράδειγμα 9.1 *Εάν g είναι μία ολοκληρώσιμη κατά Riemann συνάρτηση που ορίζεται στο $[a,b]$, τότε η συνάρτηση $U : \Omega \to \mathbb{C}$ με $U(f) = \int_a^b g(x)f(x)dx$ είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές. Επίσης, η συνάρτηση $V : \Omega \to \mathbb{C}$ με $V(f) = f(x_0)$, όπου x_0 τυχαίο σταθερό σημείο του $[a,b]$, είναι επίσης συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, αλλά δεν μπορεί να πάρει τη μορφή του παραδείγματος U.*[3]

Λήμμα 9.4 *Έστω U ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές ορισμένο στο σύνολο Ω. Τότε το U είναι* ***φραγμένο****, δηλαδή υπάρχει σταθερός θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε να ισχύει*

$$|U(f)| \leq M \max_{x\epsilon[a,b]} |f(x)| \tag{9.5}$$

για κάθε f στο Ω. Και αντιστρόφως, κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές είναι συνεχές.

Απόδειξη: Έστω ότι το U είναι ένα συνεχές αλλά μη φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, για κάθε φυσικό k θα υπάρχει συνάρτηση f_k στο Ω τέτοια ώστε να ισχύει

- $|f_k(x)| \leq 1$ για κάθε $x \,\epsilon\, [a,b]$,
- $|U(f_k)| > k^2$. (1)

Η σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \overline{sign\,(U(f_k))} \frac{f_k(x)}{k^2}$$

θα συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση f του Ω. Επειδή το U είναι συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, θα ισχύει ότι

$$U(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \overline{sign\,(U(f_k))} \frac{U(f_k)}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|U(f_k)|}{k^2}\ .$$

Όμως, η σειρά στο δεύτερο μέλος αποκλίνει λόγω της (1), άρα το $U(f)$ δεν είναι αριθμός, πράγμα άτοπο.

Συνεπώς, το U είναι φραγμένο.

Αντιστρόφως, έστω ότι το U είναι ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Τότε, σύμφωνα με την υπόθεση υπάρχει σταθερά M ώστε να ισχύει η (9.5), άρα για κάθε ακολουθία (f_n) του Ω, που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μία συνάρτηση $f \in \Omega$, ισχύει $|U(f_n - f)| \leq M \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} U(f_n) = U(f)$.

Ορισμός 9.4 *Έστω U ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται στο Ω. Τότε ο αριθμός*

$$M_U = \sup\{|U(f)|\ :\ f \in \Omega,\ |f(x)| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in [a,b]\}$$

[3] Αυτό αποδεικνύεται πολύ εύκολα, σαν άσκηση Απειροστικού Λογισμού.

ονομάζεται ***νόρμα*** *του U και είναι, προφανώς, ο ελάχιστος αριθμός M για τον οποίο ισχύει*

$$|U(f)| \leq M \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \quad \textit{για κάθε } f \ \in \Omega \ .$$

Ακολουθεί το περίφημο Θεώρημα Αναπαράστασης του F. Riesz.

Θεώρημα 9.1 *Έστω U ένα γραμμικό συναρτησοειδές που ορίζεται στο Ω. Το U είναι συνεχές ακριβώς τότε, όταν υπάρχει συνάρτηση φραγμένης κύμανσης α που ορίζεται στο $[a,b]$ και είναι τέτοια ώστε για κάθε f του Ω να ισχύει*

$$U(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \ .$$

Απόδειξη: Εάν για το γραμμικό συναρτησοειδές U υπάρχει συνάρτηση φραγμένης κύμανσης α που ορίζεται στο $[a,b]$ και είναι τέτοια ώστε για κάθε f του Ω να ισχύει

$$U(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \ ,$$

τότε, λόγω της πρότασης 9.2 και του λήμματος 9.4, το U θα είναι συνεχές.

Αντιστρόφως, έστω ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές U. Χρησιμοποιώντας το U, θα ορίσουμε μία συνάρτηση A με πεδίο ορισμού το διάστημα $[a,b]$, ως εξής. Εάν $\xi \ \epsilon[a,b]$, τότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x;\xi)$ που ορίζεται από τον κανόνα:

$$g(x;\xi) = \begin{cases} x, & a \leq x \leq \xi \\ \xi, & \xi \leq x \leq b \end{cases}$$

και ορίζουμε $A(\xi) = -U\left(g(x;\xi)\right)$.

Στη συνέχεια, θεωρούμε μία διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ του $[a,b]$ και τις $m-1$ συνεχείς συναρτήσεις f_1, f_2, $\ldots$, f_{m-1}. Κάθε f_k είναι μηδενική εκτός του διαστήματος (x_{k-1}, x_{k+1}), στο σημείο x_k παίρνει την τιμή

$$f_k(x_k) = -\overline{sign\left(\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right)}$$

και τέλος, σε καθένα από τα διαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$, $[x_k, x_{k+1}]$ είναι γραμμική.

Με τη βοήθεια των συναρτήσεων αυτών ορίζουμε την f που παίρνει τιμή $f(x) = \sum_{k=1}^{m-1} f_k(x)$ για κάθε x στο $[a,b]$. Προφανώς, η f είναι συνεχής και ισχύει $|f(x)| \leq 1$ για κάθε x του $[a,b]$.

Για κάθε $k = 1, 2, \ldots, m-1$ η τιμή της f_k στο τυχαίο x του $[a,b]$, ως συνάρτηση των συναρτήσεων της μορφής $g(x;\xi)$ θα δίνεται από τον τύπο:

$$f_k(x) = -f_k(x_k)\left[\frac{g(x;x_{k+1}) - g(x;x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{g(x;x_k) - g(x;x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right] \ ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} U(f_k) &= f_k(x_k)\left[\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right] \\ &= -\left|\frac{A(x_{k+1}) - A(x_k)}{x_{k+1} - x_k} - \frac{A(x_k) - A(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\right| \leq 0 \end{aligned}$$

και συνεπώς,

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left|\frac{A(x_{k+1})-A(x_k)}{x_{k+1}-x_k}-\frac{A(x_k)-A(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\right| = |U(f)| \le M_U \ .$$

Από την πρόταση 9.1 έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση φραγμένης κύμανσης α, που ορίζεται στο $[a,b]$ και της οποίας το αόριστο ολοκλήρωμα είναι η A. Αν αλλάξουμε τις τιμές της α στα σημεία a και b, τότε η α θα παραμείνει συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ και η A θα συνεχίσει να είναι το αόριστο ολοκλήρωμα της α στο $[a,b]$. Ορίζουμε να είναι $\alpha(a) = -U(1)$, όπου 1 είναι η μοναδιαία συνάρτηση στο $[a,b]$, και $\alpha(b) = 0$.

Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x;\xi)d\alpha(x) &= g(b;\xi)\alpha(b) - g(a;\xi)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x)dg(x;\xi) \\
&= \xi\cdot 0 + aU(1) - \int_a^{\xi}\alpha(x)dx \\
&= -A(a) - \int_a^{\xi}\alpha(x)dx \\
&= -A(\xi) \\
&= U\left(g(x;\xi)\right) \ . \qquad (9.6)
\end{aligned}$$

Παίρνουμε τυχαία συνεχή συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[a,b]$ και $\varepsilon > 0$. Λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της f, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε x, y στο $[a,b]$ με $|x-y| < \delta$ να ισχύει $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Βρίσκουμε μία διαμέριση

$$D = \{a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b\}$$

του $[a,b]$ για την οποία ισχύει $y_k - y_{k-1} < \delta$ για $k = 1,\ldots,n$. Τότε, για τη συνάρτηση h που παίρνει την τιμή

$$h(x) = f(a)\left(\frac{g(x;a)}{a} - \frac{g(x;y_1)-g(x;a)}{y_1-a}\right) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1} f(y_k)\left(\frac{g(x;y_k)-g(x;y_{k-1})}{y_k-y_{k-1}} - \frac{g(x;y_{k+1})-g(x;y_k)}{y_{k+1}-y_k}\right) + f(b)\frac{g(x;b)-g(x;y_{n-1})}{b-y_{n-1}}$$

σε κάθε $x \in [a,b]$, θα ισχύει ότι $h(y_k) = f(y_k)$ για κάθε $k = 0,1,\ldots,n$. Επίσης, η h είναι γραμμική σε κάθε διάστημα $[y_{k-1},y_k]$, όπου $k = 1,\ldots,n$. Άρα, $|h(x)-f(x)| \le \varepsilon$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τέλος, η h είναι γραμμικός συνδυασμός των $g(x;y_k)$, οπότε θα ισχύει

$$U(h) = \int_a^b h(x)d\alpha(x) \ .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\left|U(f)-\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| &\leq |U(f)-U(h)|+\left|\int_a^b h(x)d\alpha(x)-\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right| \\ &\leq M_U \max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)|+V_a^b\alpha \max_{x\in[a,b]}|f(x)-h(x)| \\ &\leq (M_U+V_a^b\alpha)\varepsilon \ .\end{aligned}$$

Το ε που θεωρήσαμε ήταν τυχαίο, άρα ισχύει ότι

$$U(f)=\int_a^b f(x)d\alpha(x) \ .$$

Λήμμα 9.5 *Έστω συνάρτηση α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ με την ιδιότητα*

$$\alpha(x)=\frac{\alpha(x-)+\alpha(x+)}{2} \ , \quad x \in (a,b) \ .$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση $D=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$ ώστε καθένα από τα $x_1, \ldots, x_{m-1}$ να είναι σημείο συνέχειας της α και ώστε

$$V_a^b\alpha-\varepsilon<\sum_{k=1}^m|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})| \ .$$

Απόδειξη: Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon>0$ και βρίσκουμε διαμέριση

$$D=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_m=b\}$$

ώστε

$$V_a^b\alpha-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{k=1}^m|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})| \ .$$

Έπειτα θεωρούμε τα σημεία συνέχειας $y_1, \ldots, y_m$ της α ώστε $y_k \in (x_{k-1},x_k)$ για κάθε k. Επίσης, παίρνουμε σημεία συνέχειας η_k, ξ_k της α τα οποία είναι αρκετά κοντά στο x_k ώστε να ισχύει

$$y_k<\eta_k<x_k<\xi_k<y_{k+1} \quad \text{και} \quad \left|\alpha(x_k)-\frac{\alpha(\xi_k)+\alpha(\eta_k)}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{4m}$$

για κάθε $k=1,\ldots,m-1$. Τότε,

$$\sum_{k=1}^m|\alpha(x_k)-\alpha(x_{k-1})|\leq\sum_{k=1}^m\left(|\alpha(x_k)-\alpha(y_k)|+|\alpha(y_k)-\alpha(x_{k-1})|\right)=$$

$$=|\alpha(y_1)-\alpha(a)|+\sum_{k=1}^{m-1}\left(|\alpha(x_k)-\alpha(y_k)|+|\alpha(y_{k+1})-\alpha(x_k)|\right)+$$

$$
\begin{aligned}
& +|\alpha(b)-\alpha(y_m)| \\
\le\ & |\alpha(y_1)-\alpha(a)| + \\
& +\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left|\frac{\alpha(\xi_k)+\alpha(\eta_k)}{2}-\alpha(y_k)\right|+\left|\alpha(y_{k+1})-\frac{\alpha(\xi_k)+\alpha(\eta_k)}{2}\right|\right)+ \\
& +|\alpha(b)-\alpha(y_m)|+\frac{\varepsilon}{2} \\
\le\ & |\alpha(y_1)-\alpha(a)| + \\
& +\sum_{k=1}^{m-1}\left(|\alpha(\eta_k)-\alpha(y_k)|+|\alpha(\xi_k)-\alpha(\eta_k)|+|\alpha(y_{k+1})-\alpha(\xi_k)|\right)+ \\
& +|\alpha(b)-\alpha(y_m)|+\frac{\varepsilon}{2}\ .
\end{aligned}
$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$
\begin{aligned}
V_a^b\alpha-\varepsilon\ <\ & |\alpha(y_1)-\alpha(a)| + \\
& +\sum_{k=1}^{m-1}\left(|\alpha(\eta_k)-\alpha(y_k)|+|\alpha(\xi_k)-\alpha(\eta_k)|+|\alpha(y_{k+1})-\alpha(\xi_k)|\right)+ \\
& +|\alpha(b)-\alpha(y_m)|\ ,
\end{aligned}
$$

οπότε η ζητούμενη διαμέριση είναι αυτή που αποτελείται από τα σημεία

$$
a, b, y_1, \dots, y_m, \eta_1, \xi_1, \dots, \eta_{m-1}, \xi_{m-1}\ .
$$

Πρόταση 9.7 *Έστω U ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές του Ω και M_U η νόρμα του. Αν α είναι οποιαδήποτε συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τέτοια ώστε να ισχύει*

$$
U(f)=\int_a^b f(x)d\alpha(x)\ ,\quad f\ \in\ \Omega\ ,\quad (*)
$$

τότε έχουμε ότι $M_U \le V_a^b\alpha$.

Επίσης, υπάρχει κάποια α ώστε να ισχύει η $(*)$ και επιπλέον να ισχύει $M_U = V_a^b\alpha$.

Απόδειξη: Έστω f τυχαία συνάρτηση στο Ω, για την οποία ισχύει $|f(x)|\le 1$ για κάθε x στο $[a,b]$. Από την πρόταση 9.2 έπεται ότι

$$
|U(f)|=\left|\int_a^b f(x)d\alpha(x)\right|\le V_a^b\alpha
$$

και, επομένως, $M_U \le V_a^b\alpha$.

Θεωρούμε, τώρα, μία τυχαία συνάρτηση α, που είναι φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$ και έχει την ιδιότητα

$$
U(f)=\int_a^b f(x)d\alpha(x)\ ,\quad f\ \in\ \Omega\ .
$$

Κατασκευάζουμε την α^* ώστε $\alpha^*(x) = \alpha(x)$ για κάθε x το οποίο είναι είτε το a είτε το b είτε σημείο συνέχειας της α στο (a, b) και $\alpha^*(x) = \frac{\alpha(x-)+\alpha(x+)}{2}$ για κάθε $x \in (a, b)$ που είναι σημείο ασυνέχειας της α. Από την πρόταση 9.6 έχουμε ότι

$$U(f) = \int_a^b f(x) d\alpha^*(x) \ , \quad f \ \in \ \Omega \ .$$

και $V_a^b \alpha^* \leq V_a^b \alpha$.
Επειδή τα σημεία ασυνέχειας είναι το πολύ αριθμησίμου πλήθους, είναι εύκολο να δούμε ότι $\alpha^*(x+) = \alpha(x+)$ και $\alpha^*(x-) = \alpha(x-)$ για κάθε $x \in (a, b)$ και, επομένως,

$$\alpha^*(x) = \frac{\alpha^*(x+) + \alpha^*(x-)}{2} \ , \quad x \ \in \ (a, b) \ .$$

Παίρνουμε τυχαίο $\varepsilon > 0$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο λήμμα για την α^*. Υπάρχει διαμέριση $D = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ ώστε καθένα από τα $x_1, \ \ldots, \ x_{m-1}$ να είναι σημείο συνέχειας της α^* και να ισχύει

$$V_a^b \alpha^* - \frac{\varepsilon}{2} < \sum_{k=1}^{m} |\alpha^*(x_k) - \alpha^*(x_{k-1})| \ .$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, m-1$ παίρνουμε σημεία ξ_k, η_k αρκετά κοντά στο x_k τέτοια ώστε

- $\xi_k < x_k < \eta_k$ για κάθε $k = 1, \ldots, m-1$,
- $\eta_{k-1} < \xi_k$ για κάθε $k = 2, \ldots, m-1$,
- $a < \xi_1$, $\eta_{m-1} < b$ και
- $|\alpha^*(x) - \alpha^*(x')| < \frac{\varepsilon}{10m}$ για κάθε x, x' στο $[\xi_k, \eta_k]$ και $k = 1, \ldots, m-1$.

Στη συνέχεια ορίζουμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a, b]$, η οποία είναι σταθερή με τιμή $sign\,(\alpha^*(\xi_1) - \alpha^*(a))$ στο $[a, \xi_1]$, σταθερή με τιμή $sign\,(\alpha^*(b) - \alpha^*(\eta_{m-1}))$ στο $[\eta_{m-1}, b]$, σταθερή με τιμή $sign\,(\alpha^*(\xi_k) - \alpha^*(\eta_{k-1}))$ στο $[\eta_{k-1}, \xi_k]$ για κάθε $k = 2, ..., m-1$ και γραμμική σε κάθε μικρό διάστημα $[\xi_k, \eta_k]$.

Παρατηρούμε αμέσως ότι ισχύει

$$|f(x)| \leq 1 \ , \quad x \ \in \ [a, b] \ .$$

Κατόπιν, για κάθε $k = 2, ..., m-1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\eta_{k-1}}^{\xi_k} f(x) d\alpha^*(x) &= sign(\alpha^*(\xi_k) - \alpha^*(\eta_{k-1}))(\alpha^*(\xi_k) - \alpha^*(\eta_{k-1})) \\ &= |\alpha^*(\xi_k) - \alpha^*(\eta_{k-1})| \ , \end{aligned}$$

όπως επίσης

$$\int_a^{\xi_1} f(x) d\alpha^*(x) = sign(\alpha^*(\xi_1) - \alpha^*(a))(\alpha^*(\xi_1) - \alpha^*(a)) = |\alpha^*(\xi_1) - \alpha^*(a)|$$

και

$$\int_{\eta_{m-1}}^{b} f(x)d\alpha^*(x) = \overline{sign(\alpha^*(b)-\alpha^*(\eta_{m-1}))}(\alpha^*(b)-\alpha^*(\eta_{m-1})) = |\alpha^*(b)-\alpha^*(\eta_{m-1})| \ .$$

Σε κάθε διάστημα $[\xi_k, \eta_k]$ ισχύει ότι $|f(\eta_k)| \leq 1$ και $|f(\xi_k)| \leq 1$. Αν p_k είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της γραμμικής συνάρτησης με την οποία ισούται η f στο διάστημα αυτό, τότε ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\xi_k}^{\eta_k} f(x)d\alpha^*(x) &= \int_{\xi_k}^{\eta_k} (f(x)-f(\xi_k))\, d\alpha^*(x) + f(\xi_k)\int_{\xi_k}^{\eta_k} d\alpha^*(x) \\
&= p_k \int_{\xi_k}^{\eta_k} (x-\xi_k)d\alpha^*(x) + f(\xi_k)\,(\alpha^*(\eta_k)-\alpha^*(\xi_k)) \\
&= p_k\left((\eta_k-\xi_k)\alpha^*(\eta_k) - \int_{\xi_k}^{\eta_k} \alpha^*(x)dx\right) + f(\xi_k)\,(\alpha^*(\eta_k)-\alpha^*(\xi_k)) \\
&= p_k \int_{\xi_k}^{\eta_k} (\alpha^*(\eta_k)-\alpha^*(x))\, dx + f(\xi_k)\,(\alpha^*(\eta_k)-\alpha^*(\xi_k))
\end{aligned}$$

και, επομένως,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\xi_k}^{\eta_k} f(x)d\alpha^*(x)\right| &\leq |p_k|(\eta_k-\xi_k)\frac{\varepsilon}{10m} + |f(\xi_k)|\frac{\varepsilon}{10m} \\
&= |f(\eta_k)-f(\xi_k)|\frac{\varepsilon}{10m} + |f(\xi_k)|\frac{\varepsilon}{10m} \\
&\leq \frac{3\varepsilon}{10m} \ .
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\left|\int_{a}^{b} f(x)d\alpha^*(x)\right| &\geq |\alpha^*(\xi_1)-\alpha^*(a)| + \sum_{k=2}^{m-1} |\alpha^*(\xi_k)-\alpha^*(\eta_{k-1})| \\
&\quad + |\alpha^*(b)-\alpha^*(\eta_{m-1})| - \frac{3(m-1)\varepsilon}{10m} \\
&\geq |\alpha^*(\xi_1)-\alpha^*(a)| + \sum_{k=1}^{m-1}\Big(|\alpha^*(x_k)-\alpha^*(\xi_k)| + |\alpha^*(\eta_k)-\alpha^*(x_k)|\Big) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{m-1} |\alpha^*(\xi_k)-\alpha^*(\eta_{k-1})| + |\alpha^*(b)-\alpha^*(\eta_{m-1})| \\
&\quad - \frac{3(m-1)\varepsilon}{10m} - \frac{2(m-1)\varepsilon}{10m} \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} |\alpha^*(x_k)-\alpha^*(x_{k-1})| - \frac{5(m-1)\varepsilon}{10m} \\
&\geq V_a^b\alpha^* - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \ .
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
V_a^b\alpha^* - \varepsilon &\le \left|\int_a^b f(x)d\alpha^*(x)\right| = |U(f)| \\
&\le M_U \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \le M_U \le V_a^b\alpha^* \ .
\end{aligned}
$$

Επειδή το ε ήταν τυχαίο, συμπεραίνουμε ότι $M_U = V_a^b\alpha^*$.

9.4 Σχόλια για το υπόλοιπο της δημοσίευσης.

Οι τρεις προηγούμενες παράγραφοι αποτελούν και τις τρεις πρώτες παραγράφους της δημοσίευσης του F. Riesz και είναι σημαντικές στην ιστορία του ολοκληρώματος Stieltjes, αφού εκεί αποδεικνύονται για πρώτη φορά κάποιες βασικές ιδιότητές του, καθώς και το περίφημο Θεώρημα Αναπαράστασης του F. Riesz, το οποίο δείχνει πόσο σημαντικό μαθηματικό εργαλείο είναι το ολοκλήρωμα αυτό.

Στις υπόλοιπες παραγράφους της δημοσίευσης, ο Riesz αποδεικνύει τα παρακάτω, σημαντικά επίσης, θεωρήματα.

Θεώρημα 9.2 *Έστω ότι η ακολουθία (f_k) αποτελείται από δοσμένες μιγαδικές συναρτήσεις συνεχείς στο $[a,b]$ και η (c_k) αποτελείται από δοσμένους μιγαδικούς αριθμούς. Τότε, η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε να υπάρχει συνάρτηση α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, η οποία να ικανοποιεί το σύστημα*

$$
\int_a^b f_k(x)d\alpha(x) = c_k \ , \qquad k = 1, 2, ... \tag{9.7}
$$

είναι να υπάρχει μη αρνητικός αριθμός M με την ιδιότητα

$$
\left|\sum_{k=1}^n \mu_k c_k\right| \le M \max_{x\in[a,b]} \left|\sum_{k=1}^n \mu_k f_k(x)\right| \tag{9.8}
$$

για κάθε φυσικό αριθμό n και για τυχαίους μιγαδικούς αριθμούς μ_1, ..., μ_n.

Αν M_0 είναι ο ελάχιστος M για τον οποίο ισχύει η (9.8), τότε

$$
M_0 \le V_a^b\alpha
$$

για κάθε συνάρτηση α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, η οποία ικανοποιεί το σύστημα (9.7). Επίσης, υπάρχει κάποια α_0 φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, η οποία ικανοποιεί το σύστημα (9.7) και την $M_0 = V_a^b\alpha_0$.

Θεώρημα 9.3 *Με τις υποθέσεις του προηγούμενου θεωρήματος και με την προϋπόθεση ότι ισχύει η συνθήκη (9.8), οποιεσδήποτε συναρτήσεις α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, που ικανοποιούν το σύστημα (9.7), διαφέρουν σε το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων του $[a,b]$ αν και μόνο αν κάθε μιγαδική συνάρτηση συνεχής στο $[a,b]$ είναι ομοιόμορφο όριο γραμμικών συνδυασμών των f_k, $k = 1, 2, ...$.*

Θεώρημα 9.4 *Έστω ότι η ακολουθία* (f_k) *αποτελείται από δοσμένες μιγαδικές συναρτήσεις συνεχείς στο* $[a,b]$. *Τότε, κάθε μιγαδική συνάρτηση συνεχής στο* $[a,b]$ *είναι ομοιόμορφο όριο γραμμικών συνδυασμών των* f_k, $k = 1,2,\ldots$, *αν και μόνο αν οι μόνες συναρτήσεις* α *φραγμένης κύμανσης στο* $[a,b]$ *οι οποίες ικανοποιούν το σύστημα*

$$\int_a^b f_k(x)d\alpha(x) = 0 \ , \quad k = 1,2,\ldots \ ,$$

είναι εκείνες που έχουν σταθερή τιμή στο $[a,b]$, *εκτός από ένα το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων του* $[a,b]$.

Με το τελευταίο θεώρημα δίνει μία κομψή απάντηση σε ένα πρόβλημα που είχε τεθεί από τον E. Schmidt (1876-1959) και διατυπώνεται ως εξής: **αν δοθεί ένα αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2, ..., συνεχών στο $[a,b]$, πότε το σύνολο αυτό είναι τέτοιο ώστε κάθε συνάρτηση f, που είναι συνεχής στο $[a,b]$, να αποτελεί το ομοιόμορφο όριο γραμμικών συνδυασμών των παραπάνω συναρτήσεων.** Ο Schmidt είχε αποδείξει ότι για να έχει ένα αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων ϕ_1, ϕ_2, ..., συνεχών στο $[a,b]$, την παραπάνω ιδιότητα θα πρέπει το σύστημα αυτό να ικανοποιεί δύο συνθήκες. Η πρώτη συνθήκη, που αργότερα αποδείχθηκε ότι είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή, είναι να μην υπάρχει μη μηδενική και συνεχής στο $[a,b]$ συνάρτηση, η οποία θα είναι ορθογώνια σε κάθε ϕ_k, $k = 1,2,\ldots$. Η δεύτερη συνθήκη, η οποία είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία, είναι οι συναρτήσεις ϕ_k, $k = 1,2,\ldots$ να έχουν συνεχείς παραγώγους δευτέρας τάξεως και να μην υπάρχει μη μηδενική και συνεχής στο $[a,b]$ συνάρτηση, η οποία θα είναι ορθογώνια σ' όλες τις παραγώγους.

Στην ένατη παράγραφο ο Riesz παρατηρεί ότι αν στο πρόβλημα της επίλυσης του συστήματος (9.7) απαιτήσουμε η α που ψάχνουμε να έχει και άλλες ιδιότητες, όπως π.χ. να είναι πραγματική συνάρτηση ή μονότονη, τότε οδηγούμαστε σε προβλήματα με τα οποία ήδη είχαν ασχοληθεί σε εργασίες τους μαθηματικοί, όπως ο T.-J. Stieltjes (1856-1894) και ο C. Carathéodory (1873-1950). Πράγματι, στο πρόβλημα των ροπών, έτσι όπως το όρισε ο Stieltjes, αναζητούμε μία πραγματική και αύξουσα συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί κατάλληλο σύστημα συναρτησιακών εξισώσεων που έχει τη μορφή (9.7).

Στο δέκατο κεφάλαιο της δημοσίευσής του σχολιάζει την εργασία του H. Lebesgue με τίτλο "Sur l' intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionelles linéaires" με την οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 10

Το ολοκλήρωμα Stieltjes μέσα από τις εργασίες του Lebesgue.

Το 1910, ένα χρόνο μετά τη δημοσίευση της εργασίας του F. Riesz, η οποία περιείχε για πρώτη φορά το Θεώρημα Αναπαράστασης των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών, ο H. Lebesgue δημοσιεύει την εργασία με τίτλο «Sur l' intégrale de Stieltjes et sur les opérations fonctionelles linéaires». Στην αρχή της δημοσίευσής του αυτής ο Lebesgue αναφέρεται στο ολοκλήρωμα Stieltjes, το οποίο ορίζει ως ένα γραμμικό τελεστή που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση f, που ικανοποιεί κατάλληλες ιδιότητες, τον αριθμό $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \lim \sum_1^n f(\xi_i)(\alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i))$. Ο ίδιος γράφει ότι δεν είναι στόχος του να εξετάσει τις προϋποθέσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι συναρτήσεις f και α ώστε να ορίζεται το παραπάνω ολοκλήρωμα · είναι ήδη γνωστό ότι το παραπάνω όριο υπάρχει όταν η f είναι συνεχής και η α φραγμένης κύμανσης στο $[a, b]$ και αυτές είναι οι συναρτήσεις με τις οποίες θα ασχοληθεί, άρα δεν τον ενδιαφέρουν οι υπόλοιπες περιπτώσεις. Στόχος του είναι ν' αποδείξει ότι τελικά κάθε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές μπορεί να εκφραστεί με τη βοήθεια ενός ολοκληρώματος Lebesgue. Αυτό το καταφέρνει δείχνοντας ότι κάθε ολοκλήρωμα Stieltjes συνεχούς συνάρτησης ανάγεται σε ολοκλήρωμα Lebesgue αθροίσιμης συνάρτησης.

10.1 Η αναγωγή του ολοκληρώματος Stieltjes σε ολοκλήρωμα Lebesgue.

Λήμμα 10.1 *Έστω μία μιγαδική συνάρτηση ϕ στο $[a, b]$, η οποία είναι φραγμένης κύμανσης. Αν x_0 είναι τυχαίο σημείο του $[a, b]$, θα ισχύουν για τη ϕ και τη συνάρτηση κύμανσής της $V_a^x\phi$ οι ισότητες*

$$\begin{aligned} V_a^{x_0+}\phi - V_a^{x_0}\phi &= |\phi(x_0+) - \phi(x_0)| \ , \\ V_a^{x_0}\phi - V_a^{x_0-}\phi &= |\phi(x_0) - \phi(x_0-)| \ , \end{aligned}$$

εφόσον η θέση του x_0 στο διάστημα $[a, b]$ είναι τέτοια ώστε τα αντίστοιχα όρια να ορίζονται.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $x_0 \in [a,b)$ και θα δείξουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη ισότητα, στην περίπτωση που $x_0 \in (a,b]$, προκύπτει με ανάλογο τρόπο.

Καταρχάς, τα όρια $V_a^{x_0+}\phi$ και $\phi(x_0+)$ υπάρχουν γιατί η $V_a^x\phi$ είναι αύξουσα συνάρτηση και η ϕ φραγμένης κύμανσης. Εάν $y > x_0$, τότε

$$V_a^y\phi - V_a^{x_0}\phi = V_{x_0}^y\phi \geq |\phi(y) - \phi(x_0)| \ .$$

Παίρνοντας τα όρια των μελών της παραπάνω ανισότητας καθώς $y \to x_0+$, έχουμε ότι

$$V_a^{x_0+}\phi - V_a^{x_0}\phi \geq |\phi(x_0+) - \phi(x_0)| \ .$$

Μένει να δείξουμε την ανισότητα της αντίθετης φοράς.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει διαμέριση $D = \{a = y_0 < y_1 < ... < y_m = b\}$ του $[a,b]$, τέτοια ώστε

$$V_a^b\phi - \varepsilon < V_a^b(\phi, D) \leq V_a^b\phi \ .$$

Εάν i είναι ο δείκτης για τον οποίο ισχύει $y_{i-1} \leq x_0 < y_i$, τότε θεωρούμε τυχαίο y με $x_0 < y < y_i$ και τη διαμέριση $D' = D \cup \{x_0, y\} = \{a = z_0 < z_1 < ... < z_l = b\}$. Ισχύει ότι

$$V_a^b\phi - \varepsilon < V_a^b(\phi, D) \leq V_a^b(\phi, D') \leq V_a^b\phi \ ,$$

οπότε

$$0 \leq \sum_{j=1}^{l} \left(V_{z_{j-1}}^{z_j}\phi - |\phi(z_j) - \phi(z_{j-1})|\right) < \varepsilon \ .$$

Από το τελευταίο έπεται ότι

$$0 \leq V_{x_0}^y\phi < |\phi(y) - \phi(x_0)| + \varepsilon \ .$$

Παίρνοντας τα όρια στις παραπάνω ανισότητες για $y \to x_0+$ έχουμε ότι για τυχαίο $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$0 \leq V_{x_0}^{x_0+}\phi < |\phi(x_0+) - \phi(x_0)| + \varepsilon$$

ή, ισοδύναμα,

$$0 \leq V_a^{x_0+}\phi - V_a^{x_0}\phi < |\phi(x_0+) - \phi(x_0)| + \varepsilon$$

και άρα το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Παρατήρηση 10.1 *Από το προηγούμενο λήμμα προκύπτει ότι η ϕ είναι συνεχής από δεξιά σ' ένα σημείο αν και μόνο αν και η $V_a^x\phi$ είναι συνεχής από δεξιά στο σημείο αυτό. Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τη συνέχεια από αριστερά. Άρα, οι ϕ και $V_a^x\phi$ έχουν τα ίδια σημεία συνέχειας.*

Έστω α μία συνάρτηση φραγμένης κύμανσης ορισμένη στο $[a,b]$ και $v = v(x) = V_a^x\alpha$ η συνάρτηση κύμανσής της. Η συνάρτηση $V_a^x\alpha : [a,b] \to [0, V_a^b\alpha]$ είναι αύξουσα και θα προσπαθήσουμε να την αντιστρέψουμε, δηλαδή να ορίσουμε μία συνάρτηση $x(v) : [0, V_a^b\alpha] \to [a,b]$, η οποία θα συμπεριφέρεται, κατά κάποιο τρόπο, όπως η αντίστροφη της $V_a^x\alpha$, αν αυτή υπήρχε.

Έστω $v_0 \in [0, V_a^b\alpha]$. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις.

- Αν υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο ώστε $V_a^{x_0}\alpha = v_0$, τότε ορίζουμε $x(v_0) = x_0$.

- Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα x τέτοια ώστε $V_a^x\alpha = v_0$, τότε υπάρχει διάστημα, όχι μονοσύνολο, στο οποίο η $V_a^x\alpha$ είναι σταθερή. Προφανώς, και η α είναι σταθερή στο ίδιο διάστημα. Εάν x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού, τότε ορίζουμε $x(v_0) = x_0$.

- Εάν η εξίσωση $V_a^x\alpha = v_0$ δεν έχει λύση ως προς x, τότε υπάρχει (μοναδικό) x_0 στο $[a, b]$, στο οποίο οι α και $V_a^x\alpha$ είναι ασυνεχείς και τέτοιο ώστε $v_0 \in [V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0}\alpha)$ ή $(V_a^{x_0}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha]$. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε $x(v_0) = x_0$. Δηλαδή, η $x(v)$ είναι σταθερή στο ανοικτό διάστημα $(V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha)$ και ίση με x_0. Στο διάστημα αυτό είναι δυνατόν να περιέχεται τουλάχιστον ένα από τα άκρα του.

Η συνάρτηση $x(v)$ είναι ασυνεχής στα σημεία v_0, τα οποία αντιστοιχούν σε διαστήματα όπου οι α και $V_a^x\alpha$ είναι σταθερές, ενώ είναι σταθερή σε διαστήματα, τα οποία αντιστοιχούν σε σημεία ασυνέχειας των α και $V_a^x\alpha$. Είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στις εικόνες των διαστημάτων όπου η $V_a^x\alpha$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής, με εξαίρεση, ίσως, των άκρων των διαστημάτων αυτών.

Θεωρούμε τη σύνθετη συνάρτηση $\alpha(x(v)) : [0, V_a^b\alpha] \to \mathbb{C}$.

- Αν υπάρχει ακριβώς ένα x_0 τέτοιο ώστε $V_a^{x_0}\alpha = v_0$, τότε ισχύει $\alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0)$.

- Αν υπάρχει διάστημα, όχι μονοσύνολο, στο οποίο ισχύει $V_a^x\alpha = v_0$, τότε ισχύει $\alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0)$, όπου x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού. Προφανώς, η επιλογή του x_0 δεν επηρεάζει την τιμή $\alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0)$, διότι η α είναι σταθερή στο διάστημα αυτό.

- Αν $v_0 \in (V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha)$ για κάποιο (μοναδικό) x_0, τότε $\alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0)$. Δηλαδή, η $\alpha(x(v))$ είναι σταθερή στο διάστημα $(V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha)$.

Τροποποιούμε την $\alpha(x(v))$, έτσι ώστε να είναι γραμμική σε καθένα από τα διαστήματα $[V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0}\alpha]$ και $[V_a^{x_0}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha]$. Τότε παίρνουμε μία συνάρτηση $\beta(v)$, η οποία ορίζεται ως εξής.

Έστω v_0 τυχαίο σημείο του $[0, V_a^b\alpha]$.

- Εάν υπάρχει μοναδικό x_0 για το οποίο ισχύει $V_a^{x_0}\alpha = v_0$, τότε θέτουμε
$$\beta(v_0) = \alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0) \ .$$

- Εάν υπάρχει διάστημα, όχι μονοσύνολο, στο οποίο ισχύει $V_a^x\alpha = v_0$, τότε θέτουμε
$$\beta(v_0) = \alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0) \ ,$$
όπου x_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος αυτού. Η επιλογή του x_0 δεν επηρεάζει την τιμή $\beta(v_0) = \alpha(x(v_0)) = \alpha(x_0)$, διότι η α είναι σταθερή στο διάστημα αυτό.

- Στην περίπτωση που δεν υπάρχουν τιμές των x που να αντιστοιχούν στην v_0, τότε θα υπάρχει στο διάστημα $[a,b]$ ένα (μοναδικό) x_0 στο οποίο η $V_a^x\alpha$ είναι ασυνεχής και θα ισχύει ένα από τα δύο: $V_a^{x_0-}\alpha \leq v_0 < V_a^{x_0}\alpha$ ή $V_a^{x_0}\alpha < v_0 \leq V_a^{x_0+}\alpha$. Αν συμβαίνει το πρώτο, ορίζουμε

  $$\beta(v_0) = \alpha(x_0-) + \frac{\alpha(x_0) - \alpha(x_0-)}{V_a^{x_0}\alpha - V_a^{x_0-}\alpha}(v_0 - V_a^{x_0-}\alpha) \ .$$

  Αν ισχύει το δεύτερο, τότε ορίζουμε

  $$\beta(v_0) = \alpha(x_0) + \frac{\alpha(x_0+) - \alpha(x_0)}{V_a^{x_0+}\alpha - V_a^{x_0}\alpha}(v_0 - V_a^{x_0}\alpha) \ .$$

Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι για κάθε $x_0 \in [a,b]$ ισχύει

$$\beta(V_a^{x_0}\alpha) = \alpha(x_0) \ .$$

Πράγματι, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις, αφού θέσουμε $v_0 = V_a^{x_0}\alpha$.

- Αν το x_0 είναι το μοναδικό x για το οποίο ισχύει $V_a^x\alpha = v_0$, τότε από τον ορισμό της β, ισχύει $\beta(V_a^{x_0}\alpha) = \beta(v_0) = \alpha(x_0)$.

- Αν εκτός από το x_0 υπάρχει και δεύτερο x ώστε να ισχύει $V_a^x\alpha = v_0$, τότε, από τον ορισμό της β, ισχύει $\beta(V_a^{x_0}\alpha) = \beta(v_0) = \alpha(x_0')$, όπου x_0' είναι οποιοδήποτε από τα x για τα οποία ισχύει $V_a^x\alpha = v_0$. Όμως, η α είναι σταθερή σε κάποιο διάστημα που περιέχει τα x_0, x_0', οπότε $\beta(V_a^{x_0}\alpha) = \alpha(x_0') = \alpha(x_0)$.

Ορισμός 10.1 *Έστω ϕ μία μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$. Η ϕ ονομάζεται* ***απολύτως συνεχής*** *στο $[a,b]$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα (a_1,b_1), (a_2,b_2), $\ldots$, (a_n,b_n) που περιέχονται στο $[a,b]$ και ικανοποιούν την*

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \ldots + (b_n - a_n) < \delta$$

συνεπάγεται ότι

$$|\phi(b_1) - \phi(a_1)| + \ldots + |\phi(b_n) - \phi(a_n)| < \varepsilon \ .$$

Οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις παίζουν κεντρικό ρόλο στη θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue και το σημαντικότερο αποτέλεσμα που σχετίζεται μ' αυτές τις συναρτήσεις είναι το εξής.

Θεώρημα 10.1 *Έστω ϕ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη στο $[a,b]$. Τότε, η ϕ είναι απολύτως συνεχής στο $[a,b]$ αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση ψ ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue στο $[a,b]$ με την ιδιότητα*

$$\phi(x) = \int_{[a,x]} \psi(t)dt \ , \ x \in [a,b] \ .$$

Πρόταση 10.1 *Έστω πραγματική συνάρτηση α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, η συνάρτηση κύμανσης $V_a^x\alpha$ της α και η συνάρτηση β που κατασκευάστηκε στα προηγούμενα. Η β ικανοποιεί τη σχέση*

$$|\beta(v_2)-\beta(v_1)| \le v_2 - v_1$$

για κάθε $v_1, v_2 \in [0, V_a^b\alpha]$ με $v_1 < v_2$. Επίσης, η β είναι απολύτως συνεχής στο διάστημα $[0, V_a^b\alpha]$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχαία $v_1, v_2 \in [0, V_a^b\alpha]$ με $v_1 < v_2$ και διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις.

i. Αν υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1 και τουλάχιστον ένα x_2 στο $[a,b]$ ώστε να ισχύουν οι $V_a^{x_1}\alpha = v_1$, $V_a^{x_2}\alpha = v_2$, τότε

$$|\beta(v_2)-\beta(v_1)| = |\alpha(x_2)-\alpha(x_1)| \le V_{x_1}^{x_2}\alpha = V_a^{x_2}\alpha - V_a^{x_1}\alpha = v_2 - v_1 \ .$$

ii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα x_1 στο $[a,b]$ ώστε $V_a^{x_1}\alpha = v_1$, αλλά δεν υπάρχει κανένα x ώστε $V_a^x\alpha = v_2$. Τότε υπάρχει (μοναδικό) x_2 στο $[a,b]$ ώστε $v_2 \in [V_a^{x_2-}\alpha, V_a^{x_2}\alpha)$ ή $v_2 \in (V_a^{x_2}\alpha, V_a^{x_2+}\alpha]$. Προφανώς ισχύει $x_1 < x_2$ και, παίρνοντας τυχαίο $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε x_3 ώστε $x_1 < x_3 < x_2$ και

$$|\alpha(x_3)-\alpha(x_2-)| < \varepsilon \ , \quad |V_a^{x_3}\alpha - V_a^{x_2-}\alpha| < \varepsilon \ .$$

Λόγω γραμμικότητας της β στα διαστήματα $[V_a^{x_2-}\alpha, V_a^{x_2}\alpha]$ και $[V_a^{x_2}\alpha, V_a^{x_2+}\alpha]$, ισχύει

$$|\beta(v_2)-\alpha(x_2-)| = |\beta(v_2)-\beta(V_a^{x_2-}\alpha)| \le v_2 - V_a^{x_2-}\alpha \ .$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
|\beta(v_2)-\beta(v_1)| &\le |\beta(v_2)-\alpha(x_2-)| + |\alpha(x_2-)-\alpha(x_3)| + |\alpha(x_3)-\alpha(x_1)| \\
&< v_2 - V_a^{x_2-}\alpha + \varepsilon + V_{x_1}^{x_3}\alpha \\
&< v_2 - V_a^{x_3}\alpha + 2\varepsilon + V_{x_1}^{x_3}\alpha \\
&= v_2 - V_a^{x_1}\alpha + 2\varepsilon \\
&= v_2 - v_1 + 2\varepsilon \ .
\end{aligned}$$

Επειδή το ε είναι τυχαίο, καταλήγουμε στη σχέση

$$|\beta(v_2)-\beta(v_1)| \le v_2 - v_1 \ .$$

iii. Αν υπάρχει τουλάχιστον ένα x_2 ώστε $V_a^{x_2}\alpha = v_2$, αλλά κανένα x ώστε $V_a^x\alpha = v_1$, τότε υπάρχει (μοναδικό) $x_1 < x_2$ ώστε $v_1 \in [V_a^{x_1-}\alpha, V_a^{x_1}\alpha)$ ή $v_1 \in (V_a^{x_1}\alpha, V_a^{x_1+}\alpha]$. Παίρνουμε τυχαίο ε και βρίσκουμε x_3 ώστε $x_1 < x_3 < x_2$ και

$$|\alpha(x_3)-\alpha(x_1+)| < \varepsilon \ , \quad |V_a^{x_3}\alpha - V_a^{x_1+}\alpha| < \varepsilon \ .$$

Όπως στην περίπτωση *ii*, λόγω γραμμικότητας της β, ισχύει

$$|\beta(v_1)-\alpha(x_1+)| = |\beta(v_1) - V_a^{x_1+}\alpha| \le V_a^{x_1+}\alpha - v_1$$

και

$$\begin{aligned} |\beta(v_2)-\beta(v_1)| &\le |\alpha(x_2)-\alpha(x_3)|+|\alpha(x_3)-\alpha(x_1+)|+|\alpha(x_1+)-\beta(v_1)| \\ &\le V_{x_3}^{x_2}\alpha+\varepsilon+V_a^{x_1+}\alpha-v_1 \\ &< V_{x_3}^{x_2}\alpha+2\varepsilon+V_a^{x_3}\alpha-v_1 \\ &= V_a^{x_2}\alpha-v_1+2\varepsilon \\ &= v_2-v_1+2\varepsilon\ . \end{aligned}$$

Άρα, $|\beta(v_2)-\beta(v_1)|\le v_2-v_1$.

iv. Δεν υπάρχει κανένα x_1 και κανένα x_2 ώστε $V_a^{x_1}\alpha = v_1$ και $V_a^{x_2}\alpha = v_2$. Τότε, μια περίπτωση είναι να υπάρχει x_0 ώστε τα v_1, v_2 να ανήκουν στο $[V_a^{x_0-}\alpha, V_a^{x_0+}\alpha]$, οπότε, λόγω γραμμικότητας της β, συνεπάγεται η σχέση $|\beta(v_2)-\beta(v_1)|\le v_2-v_1$. Μία δεύτερη περίπτωση είναι να υπάρχουν x_1, x_2 ώστε $v_1\in[V_a^{x_1-}\alpha, V_a^{x_1}\alpha)$ ή $v_1\in(V_a^{x_1}\alpha, V_a^{x_1+}\alpha]$ και $v_2\in[V_a^{x_2-}\alpha, V_a^{x_2}\alpha)$ ή $v_2\in(V_a^{x_2}\alpha, V_a^{x_2+}\alpha]$. Παίρνουμε τυχαίο x_3 ώστε $x_1<x_3<x_2$ και εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα των *ii* και *iii* με το $v_3 = V_a^{x_3}\alpha$:

$$\begin{aligned} |\beta(v_2)-\beta(v_1)| &\le |\beta(v_2)-\beta(v_3)|+|\beta(v_3)-\beta(v_1)| \\ &\le v_2-v_3+v_3-v_1 \\ &= v_2-v_1\ . \end{aligned}$$

Το ότι η β είναι απολύτως συνεχής στο $[0,V_a^b\alpha]$ είναι τώρα προφανές, αφού για κάθε πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο διαστήματα (v_1,u_1), (v_2,u_2), …, (v_n,u_n) του $[0,V_a^b\alpha]$ έχουμε

$$|\beta(u_1)-\beta(v_1)|+\ldots+|\beta(u_n)-\beta(v_n)|\le(u_1-v_1)+\ldots+(u_n-v_n)\ .$$

Θεώρημα 10.2 *Εάν f είναι συνεχής και η α συνάρτηση φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, τότε ισχύει ότι $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_0^V f(x(v))\beta'(v)dv$, όπου $V = V_a^b\alpha$ και $x(v)$ και $\beta(v)$ οι συναρτήσεις που ορίστηκαν προηγουμένως.*

Απόδειξη: Επειδή η f είναι συνεχής και η α φραγμένης κύμανσης στο $[a,b]$, το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ προφανώς θα ορίζεται. Η σύνθετη συνάρτηση $f(x(v)) : [0,V_a^b\alpha]\to\mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού συνεχής στο $[a,b]$ και η $\beta'(v)$ είναι σχεδόν παντού ±1, άρα και το ολοκλήρωμα Lebesgue $\int_0^V f(x(v))\beta'(v)dv$ θα ορίζεται. Θα δείξουμε ότι τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε, επειδή η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$, θα υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε για κάθε x,y στο $[a,b]$ με $|x-y|<\delta$ να συνεπάγεται ότι $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. Θεωρούμε μία διαμέριση D του $[a,b]$, τέτοια ώστε το μήκος κάθε διαστήματος της $\delta_i = [l_i,m_i]$ να είναι μικρότερο από δ. Από κάθε τέτοιο διάστημα θεωρούμε ένα σημείο ξ_i και θέτουμε $\Delta_i = [v(l_i), v(m_i)]$, $\Delta v_i = v(m_i)-v(l_i)$.

Σε ένα τυχαίο διάστημα $[u,w]\subseteq[a,b]$ όπου οι v και α είναι σταθερές ισχύει ότι

$$\alpha(w)-\alpha(u) = 0 = \int_{v(u)}^{v(w)}\beta'(v)dv\ .$$

Αν η v δεν είναι σταθερή στο $[u, w]$ και είναι $u = x(v_1)$, $w = x(v_2)$, τότε θα ισχύει ότι

$$\alpha(w) - \alpha(u) = \alpha(x(v_2)) - \alpha(x(v_1)) = \beta(v_2) - \beta(v_1) = \int_{v_1}^{v_2} \beta'(v)dv \ .$$

Επομένως, σε κάθε διάστημα Δ_i θα έχουμε ότι

$$\alpha(m_i) - \alpha(l_i) = \int_{\Delta_i} \beta'(v)dv$$

και τελικά

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x(v))\beta'(v)dv - \sum_i f(\xi_i)[\alpha(m_i) - \alpha(l_i)] \right| &= \left| \sum_i \int_{\Delta_i} [f(x(v)) - f(\xi_i)]\beta'(v)dv \right| \\ &\leq \sum_i \varepsilon \int_{\Delta_i} |\beta'(v)|dv = \varepsilon \sum_i \Delta v_i = \varepsilon V \ . \end{aligned}$$

Επίσης, είναι

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x)d\alpha(x) - \sum_i f(\xi_i)[\alpha(m_i) - \alpha(l_i)] \right| &= \left| \sum_i \int_{\delta_i} [f(x) - f(\xi_i)]d\alpha(x) \right| \\ &\leq \sum_i \varepsilon \int_{\delta_i} dv(x) = \varepsilon \sum_i \Delta v_i = \varepsilon V \ . \end{aligned}$$

Άρα, ισχύει ότι $\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_0^V f(x(v))\beta'(v)dv$.

Έστω τώρα ότι έχουμε το συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές A, το οποίο ορίζεται στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων του $[a, b]$. Τότε, από το Θεώρημα Αναπαραστάσεως του Riesz έπεται ότι υπάρχει συνάρτηση α, που ορίζεται στο $[a, b]$, είναι φραγμένης κύμανσης και τέτοια ώστε για κάθε συνεχή συνάρτηση f του $[a, b]$ να ισχύει ότι $A(f) = \int_a^b f(x)d\alpha(x)$. Σύμφωνα, όμως, με την παραπάνω πρόταση, η τιμή $A(f)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $\int_0^V f(x(v))\beta'(v)dv$, δηλαδή με τη βοήθεια ενός ολοκληρώματος Lebesgue. Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση α, τότε οι συναρτήσεις $x(v)$ και $\beta'(v)$ είναι γνωστές, με εξαίρεση ίσως τις τιμές τους σε ένα σύνολο σημείων μέτρου μηδέν. Άρα, έχουμε προσδιορίσει και το συναρτησοειδές A.

Η παράσταση ενός συναρτησοειδούς με τη βοήθεια ενός ολοκληρώματος Lebesgue έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα, όπως παρατηρεί ο Lebesgue στο τέλος της δημοσίευσής του:

- Μας επιτρέπει να επεκτείνουμε τα συναρτησοειδή σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και να τα εκφράσουμε με τη βοήθεια ολοκληρωμάτων Lebesgue πολλών μεταβλητών.

- Η συνάρτηση f που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα $\int_0^V f(x(v))\beta'(v)dv$ υποθέταμε μέχρι τώρα ότι ήταν συνεχής. Όμως, το προηγούμενο ολοκλήρωμα ορίζεται και στην περίπτωση που θεωρούμε συναρτήσεις για τις οποίες έχουμε κάνει ασθενέστερες υποθέσεις. Τέτοιες είναι οι φραγμένες συναρτήσεις $f(x)$, οι οποίες μετασχηματίζονται σε μετρήσιμες συναρτήσεις $f(x(v))$ της μεταβλητής v, οι οποίες είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue στο $[a, b]$. Βέβαια, αυτός ο μετασχηματισμός εξαρτάται από τη συνάρτηση α. Μία μεγαλύτερη κλάση συναρτήσεων στην οποία θα μπορούσαμε να «διευρύνουμε» το πεδίο ορισμού των συναρτησοειδών και το ολοκλήρωμα Stieltjes, είναι όλες οι φραγμένες συναρτήσεις f που είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue στο $[a, b]$. Αυτή η παρατήρηση του Lebesgue δίνει στον F. Riesz την ιδέα να διευρύνει το πεδίο ορισμού των συνεχών γραμμικών συναρτησοειδών στις επόμενες εργασίες του.

10.2 Ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις από το βιβλίο «Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives.»

Δείξαμε στην τελευταία πρόταση της προηγούμενης παραγράφου ότι κάθε ολοκλήρωμα Stieltjes μιας συνεχούς συνάρτησης f ως προς μία συνάρτηση φραγμένης κύμανσης α μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα μιας αθροίσιμης συνάρτησης.[1] Αυτή η διαδικασία μετατροπής του ολοκληρώματος από το ένα είδος στο άλλο περιγράφεται αναλυτικότερα από τον Lebesgue το 1928 στη δεύτερη έκδοση του βιβλίου του «Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives».

Η πρώτη έκδοση αυτού του σημαντικού βιβλίου, που βοήθησε στη ευρύτερη διάδοση των μαθηματικών του ιδεών, έγινε το 1904 και περιείχε τα μαθήματα που δίδαξε ο Lebesgue στο Collège de France την ακαδημαϊκή χρονιά 1902-1903. Ο στόχος των μαθημάτων και του βιβλίου, όπως γράφει και ο ίδιος στον πρόλογό του, είναι από τους πολλούς ορισμούς, που είχαν δοθεί μέχρι τότε για το ολοκλήρωμα των πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής, να δώσει εκείνους που αυτός θεωρεί σημαντικούς στην επίλυση του προβλήματος της ολοκλήρωσης και στην κατανόηση της στενής σχέσης που συνδέει το πρόβλημα αυτό με την έννοια του εμβαδού. Εκεί ορίζει και μελετά το περίφημο ολοκλήρωμά του. Ο λόγος για τον οποίο παραθέτει έναν ακόμα ορισμό του ολοκληρώματος, τη στιγμή που ήδη υπάρχουν πολλοί, είναι ότι το νέο αυτό ολοκλήρωμα είναι «γενικότερο» από αυτό του Riemann και δε μας περιορίζει στη μελέτη των ολοκληρωμάτων των «καλών» συναρτήσεων. Εκτός από τον ορισμό του ολοκληρώματος του, στο βιβλίο αυτό μελετά το πρόβλημα της εύρεσης αρχικών συναρτήσεων και τις ευθυγραμμίσιμες καμπύλες.

Η δεύτερη έκδοση του βιβλίου του, μετά από 25 περίπου χρόνια, δεν είναι απλώς μια ανατύπωση της παλιάς, αλλά περιέχει και όλα τα νέα και σημαντικά αποτελέσματα που σχετίζονται με τις βασικές έννοιες και τα προβλήματα που μελετά η πρώτη. Δηλαδή, ασχολείται και σ' αυτήν με το ολοκλήρωμα των πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Δεν επεκτείνεται στο ολοκλήρωμα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών,

[1] Μία μετρήσιμη συνάρτηση λέγεται αθροίσιμη όταν είναι ολοκληρώσιμη κατά Lebesgue.

αλλά αφιερώνει ένα ολόκληρο κεφάλαιο στη μελέτη του ολοκληρώματος Stieltjes. Όπως παρατηρεί και ο ίδιος στον πρόλογο της δεύτερης έκδοσής του:

«...Δεν ασχολήθηκα με το ολοκλήρωμα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, επειδή οι αναγνώστες αυτών των διαλέξεων μπορούν να διαβάσουν σχετικά με αυτό στο εξαιρετικό βιβλίο του Vallée Poussin, στο οποίο είδα μια άλλου είδους γενίκευση του γνωστού μας ολοκληρώματος: το ολοκλήρωμα Stieltjes.

Για του λόγου το αληθές, είναι σα να μειώνουμε τη σπουδαιότητα του ολοκληρώματος Stieltjes όταν το μελετούμε στα πλαίσια των συναρτήσεων μιας μόνο μεταβλητής. Πιστεύω ότι πρέπει να ασχοληθούμε και με αυτό, όμως, είμαι ικανοποιημένος που κατάφερα να δώσω μία φυσική και πιο γενική ερμηνεία αυτού του ολοκληρώματος.»

Στο κεφάλαιο XI της δεύτερης έκδοσης του βιβλίου του, εξηγεί γιατί, κατά τη γνώμη του, το ολοκλήρωμα Stieltjes είναι τόσο σημαντικό:

«...Στο κεφάλαιο I μελετήσαμε την ολοκλήρωση έτσι όπως τη συναντούμε στα πρώτα μαθήματα του απειροστικού λογισμού: είδαμε ότι πρόκειται για μία καλά ορισμένη πράξη, που αντιστοιχεί σε κάθε συνεχή συνάρτηση έναν αριθμό. Στα κεφάλαια II, III, VI, VII, X διευρύναμε την πράξη αυτή σε μεγαλύτερες οικογένειες συναρτήσεων. Ο Stieltjes διατήρησε σταθερή την κλάση των ολοκληρωσίμων συναρτήσεων f, όμως έδειξε ότι την ίδια συνάρτηση f μπορεί κανείς να την ολοκληρώσει όσες φορές θέλει και να αντιστοιχίσει πολλούς τέτοιους αριθμούς σ' αυτή. Αυτό που κατάφερε ήταν να επεκτείνει την έννοια της ολοκλήρωσης στο πεδίο των συναρτησοειδών.»

Πράγματι, με το νέο αυτό τρόπο ολοκλήρωσης αντιστοιχούμε σε κάθε συνεχή συνάρτηση f, ανάλογα με τη συνάρτηση α που θεωρούμε και έναν διαφορετικό αριθμό, τον $\int f(x)d\alpha(x)$.

Ο πρώτος σημαντικός στόχος του Lebesgue, αφού δώσει τον ορισμό του ολοκληρώματος και αποδείξεις κάποιων βασικών ιδιοτήτων του, είναι να δείξει ότι, ανάλογα με την συνάρτηση α ως προς την οποία ολοκληρώνεται μία συνεχής συνάρτηση f, το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ μπορεί τελικά να εκφραστεί με τη βοήθεια ενός ή περισσότερων ολοκληρωμάτων Lebesgue. Έπειτα, αναφέρει κάποια σημαντικά αποτελέσματα σχετικά με αυτό, που δημοσιεύτηκαν μέχρι τη δεύτερη έκδοση του βιβλίου του.

Τέλος, μία σημαντική παρατήρηση που κάνει σχετικά με την ιστορία του ολοκληρώματος Stieltjes είναι ότι:

«...Ο Cauchy ήταν αυτός που πρώτος συνέλαβε τη σπουδαιότητα και τη διαισθητική σημασία αυτού του νέου τρόπου ολοκλήρωσης, ενώ ο Stieltjes ήταν αυτός που όρισε με μαθηματικό τρόπο την πράξη αυτή στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.» (πρόλογος δεύτερης έκδοσης, σελ. vi)

«...ο Cauchy ασχολήθηκε πριν από τον Stieltjes με την ολοκλήρωση μιας συνάρτησης ως προς μία άλλη, όμως το έκανε λιγότερο αυστηρά από αυτόν και περισσότερο από την άποψη της Φυσικής...» (κεφάλαιο XI, §IV, σελ. 290)

Ο Cauchy θεωρεί σε μελέτη του για ένα θέμα της Φυσικής την έννοια των «*μεγεθών που συνυπάρχουν*». Έτσι ονομάζει εκείνα τα μεγέθη που ορίζονται μέσα από τις ίδιες γεωμετρικές ή φυσικές καταστάσεις. Για παράδειγμα, εάν έχουμε έναν κύλινδρο, τότε η ακτίνα του, το ύψος του, το εμβαδόν της επιφάνειάς του και ο όγκος του είναι «μεγέθη που συνυπάρχουν». Στην περίπτωση ενός αέριου σώματος, τέτοια μεγέθη είναι ο όγκος του, η μάζα που καταλαμβάνει και η ποσότητα της θερμότητας που απαιτείται για την ανύψωση της θερμοκρασίας κατά ένα βαθμό, εφόσον ο όγκος παραμένει σταθερός.

Η έννοια αυτή είναι μια έννοια πιο γενική από την έννοια της συνάρτησης: εάν ένα μέγεθος είναι συνάρτηση άλλων μεγεθών, τότε είναι προφανές ότι όλα αυτά τα μεγέθη είναι «μεγέθη που συνυπάρχουν».

Στα παραδείγματα που προηγήθηκαν, παρατηρούμε ότι τα «μεγέθη που συνυπάρχουν» εξαρτώνται άμεσα από ένα σώμα: τον κύλινδρο ή το αέριο σώμα. Αυτό το σώμα μπορούμε να το δούμε, πιο αφηρημένα, σαν ένα πεδίο του $\mathbb{R}^3$. Άρα, τα «μεγέθη που συνυπάρχουν» είναι στην ουσία συναρτήσεις που αναφέρονται κάθε φορά στο ίδιο πεδίο. Το πεδίο αυτό δεν είναι αναγκαστικά υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, μπορεί να είναι και διάστημα ή χωρίο του επιπέδου και, γενικότερα, ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

Εκτός όμως από τις συνολο-συναρτήσεις, στη Φυσική μας είναι χρήσιμες και οι συναρτήσεις σημείων ή αυστηρότερα οι συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Στην πραγματικότητα, οι σημειο-συναρτήσεις είναι όρια συνολο-συναρτήσεων: κάθε σημείο του χώρου μπορεί να θεωρηθεί ως το όριο σωμάτων που το περιέχουν και γίνονται οσοδήποτε μικρά, επομένως μία σημειο-συνάρτηση είναι το όριο συνολο-συναρτήσεων. Για παράδειγμα, η πυκνότητα σε ένα τυχαίο σημείο ενός σώματος είναι το όριο του πηλίκου της μάζας ενός τμήματος του σώματος που περιέχει το εν λόγω σημείο προς τον όγκο του, καθώς αυτό το τμήμα «συρρικνώνεται» ολοένα και περισσότερο γύρω από το σημείο.

Η παράγωγος μιας συνάρτησης πεδίου ως προς μία δεύτερη συνάρτηση, η οποία αναφέρεται κάθε φορά στο ίδιο πεδίο τιμών με την πρώτη είναι μία σημειο-συνάρτηση: *αν $\phi(D)$, $\psi(D)$ είναι δύο συναρτήσεις πεδίου, η παράγωγος της μιας ως προς την άλλη σ' ένα σημείο P είναι το όριο του πηλίκου $\frac{\phi(D_i)}{\psi(D_i)}$, καθώς τα πεδία της ακολουθίας D_i γίνονται ολοένα και πιο μικρά και συρρικνώνονται στο σημείο P.*

Σύμφωνα με τον Lebesgue, το πρόβλημα με το οποίο ασχολήθηκε ο Cauchy ήταν ο προσδιορισμός της συνάρτησης $\phi(D)$ από τη συνάρτηση $\psi(D)$ και την παράγωγο $f(P)$ της ϕ ως προς την ψ. Για να μπορέσει να μελετήσει ευκολότερα το πρόβλημα, ο Cauchy υποθέτει επιπλέον ότι οι συνολο-συναρτήσεις του είναι προσθετικές.

Εάν θεωρήσουμε τυχαίο σημείο P_0, τότε υπάρχει πεδίο D_{P_0} τέτοιο ώστε το πηλίκο $\frac{\phi(D)}{\psi(D)}$ να διαφέρει απολύτως από την $f(P)$ λιγότερο από ε για κάθε πεδίο D που περιέχεται στο D_{P_0} και περιέχει το P.

Από το γνωστό θεώρημα του Borel έπεται ότι για το τυχόν πεδίο D μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους ξένα ανά δύο μικρότερα πεδία D_1, D_2, ..., D_n. Διαλέγουμε ένα σημείο P_i από το καθένα τους έτσι ώστε να ισχύει

$$\phi(D_i) = \psi(D_i)(f(P_i) + \theta_i\varepsilon) \ , \quad -1 \leq \theta_i \leq 1 \ ,$$

οπότε τελικά
$$\phi(D)=\sum_{i=1}^{n}\phi(D_i)=\sum_{i=1}^{n}\psi(D_i)f(P_i)+\theta\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\psi(D_i)\ .$$
Εάν για οποιαδήποτε διαμέριση του D και για τυχαία επιλογή των P_i το πρώτο άθροισμα έχει πεπερασμένο όριο καθώς τα D_i γίνονται οσοδήποτε μικρά και το δεύτερο άθροισμα παραμένει φραγμένο (κάτι το οποίο συμβαίνει όταν η ψ είναι φραγμένης κύμανσης), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την ϕ.

Στην περίπτωση που δουλεύουμε στην πραγματική ευθεία, τα πεδία γίνονται διαστήματα, η συνάρτηση $f(P)$ γράφεται $f(x)$, η $\phi(P)$ γράφεται $\alpha(x)$ και τελικά, το παραπάνω όριο, εφόσον υπάρχει, είναι το ολοκλήρωμα που όρισε ο Stieltjes.

Κεφάλαιο 11

Γενίκευση του ολοκληρώματος Stieltjes από τον J. Radon.

Στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας μελετούμε συνοπτικά και χωρίς ιδιαίτερη αυστηρότητα το πρώτο μέρος της δημοσίευσης του Johann Radon (1887-1956) με τίτλο «Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen» [1]. Η εργασία αυτή, που δημοσιεύτηκε το 1913, είναι ιδιαίτερα σημαντική γιατί εκεί ορίζεται ένα ολοκλήρωμα που αποτελεί γενίκευση των ολοκληρωμάτων των Stieltjes και Lebesgue. Για να κατανοήσουμε καλύτερα το λόγο που οδήγησε τον Radon σ' αυτόν τον ορισμό, θα πρέπει προηγουμένως να κάνουμε μια μικρή ιστορική αναδρομή.

11.1 Η έννοια της συνολοσυνάρτησης.

Μέχρι την πρώτη δεκαετία του 1900 είχαν δοθεί διάφοροι ορισμοί για το ολοκλήρωμα μιας μεταβλητής και είχαν δημοσιευτεί πολυάριθμες εργασίες όπου μελετούνται οι ιδιότητές του. Το επόμενο ερώτημα που απασχόλησε τους αναλύστες ήταν το πώς θα μπορούσαν να γενικεύσουν στον $\mathbb{R}^n$ τις πράξεις της ολοκλήρωσης και της παραγώγισης, αλλά και έννοιες και ιδιότητες συναρτήσεων κατά τέτοιο τρόπο, ώστε βασικά θεωρήματα που αφορούσαν την παραγώγιση και την ολοκλήρωση συναρτήσεων μιας μεταβλητής να συνεχίσουν να ισχύουν και εκεί.

Σύμφωνα με τον Hawkins στο [4], ο G. Vitali (1875-1932) ήταν ένας από αυτούς που ασχολήθηκαν με το παραπάνω ερώτημα. Σε εργασία του, που δημοσιεύτηκε το 1908, προσπάθησε να γενικεύσει ένα σημαντικό θεώρημά του: ότι κάθε απόλυτα συνεχής συνάρτηση μιας μεταβλητής, θα είναι το αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας άλλης. Στους ορισμούς που έδωσε χρησιμοποίησε σημειοσυναρτήσεις ορισμένες για ορθογώνια παραλληλεπίπεδα του $\mathbb{R}^n$ κι αυτό ήταν που έδωσε στον Lebesgue την ιδέα να μελετήσει το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας συναρτήσεις ορισμένες σε σύνολα. Αυτή η προσέγγιση έλυσε πολλά προβλήματα, όπως αυτό της γενίκευσης του ορισμού της παραγώγου και ήταν πρωτότυπη για την εποχή εκείνη, διότι οι αναλύστες είχαν σχεδόν ταυτίσει την έννοια της συνάρτησης με

[1] Στα ελληνικά: «Θεωρία και εφαρμογές των προσθετικών συναρτήσεων».

αυτή της σημειοσυνάρτησης. [2]

Στην εργασία του «Sur l' intégration des fonctions discontinues», που δημοσιεύτηκε το 1910, ο Lebesgue ασχολήθηκε με το ολοκλήρωμα συνάρτησης πολλών μεταβλητών και ανάμεσα στα άλλα, κατάφερε να δώσει μια γενίκευση του θεωρήματος του Vitali. Στο πρώτο κεφάλαιο της δημοσίευσής του, γενίκευσε το μέτρο συνόλου, την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης και τον ορισμό του ολοκληρώματός του στον $\mathbb{R}^n$. Οι ορισμοί που έδωσε είναι οι αντίστοιχοι ορισμοί που είχε δώσει στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής με μία πολύ απλή τροποποίηση: στη θέση της μεταβλητής x έχουμε το τυχαίο σημείο P του $\mathbb{R}^n$. Δε θα ασχοληθούμε με το πώς όρισε το εξωτερικό, το εσωτερικό μέτρο ενός συνόλου του n-διάστατου χώρου και με το τι ονόμασε μετρήσιμο σύνολο,[3] θα αναφέρουμε όμως τους ορισμούς του Lebesgue για τη μετρήσιμη συνάρτηση και το ολοκλήρωμά του, γιατί στην επόμενη παράγραφο θα τους συγκρίνουμε με αυτούς του Radon.

Ορισμός 11.1 *Έστω f μία συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Η f θα λέγεται μετρήσιμη ακριβώς τότε, όταν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a και b το σύνολο των σημείων P του E για τα οποία ισχύει $a < f(P) < b$ είναι σύνολο μετρήσιμο.*

Ορισμός 11.2 *Έστω f μία φραγμένη και μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα φραγμένο και μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Ας είναι m και M ένα κάτω και ένα άνω φράγμα αντίστοιχα της f στο E και δ ένας τυχαίος θετικός αριθμός. Θεωρούμε τους $n-1$ πραγματικούς αριθμούς α_1, α_2, ..., α_{n-1}, που είναι τέτοιοι ώστε*

$$m = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < ... < \alpha_{n-1} < \alpha_n = M = \alpha_{n+1}$$

και οι διαφορές $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ να μην υπερβαίνουν τον αριθμό δ. Προφανώς, το n εξαρτάται από το δ.

Για κάθε $i = 0, 1, ..., n-1$ θέτουμε $E_i = \{P \in E | \alpha_i \leq f(P) < \alpha_{i+1}\}$. Τέλος, ορίζουμε $E_n = \{P \in E | f(P) = \alpha_n\}$ και θεωρούμε τα αθροίσματα $\sum_0^n \alpha_i m(E_i)$, $\sum_0^n \alpha_{i+1} m(E_i)$, όπου $m(A)$ είναι το μέτρο Lebesgue οποιουδήποτε μετρήσιμου συνόλου A. Ισχύει ότι

$$m \cdot m(E) \leq \sum_0^n \alpha_i m(E_i) \leq \sum_0^n \alpha_{i+1} m(E_i) \leq M \cdot m(E) \ .$$

[2] Φυσικά, ο Lebesgue δεν ήταν ο πρώτος που τόνισε το γεγονός ότι το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι δυνατό να περιέχει άλλου είδους στοιχεία, εκτός από σημεία του $\mathbb{R}^n$. Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 9, το συναρτησοειδές, που άρχισε να μελετάται επίσης στις αρχές του 1900, είναι ακόμη ένα παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης. Σύμφωνα με τον Hawkins, ο Lebesgue φαίνεται να επηρεάστηκε από τον Volterra, ο οποίος ήταν από τους πρώτους που ασχολήθηκαν με τα συναρτησοειδή και σε μία εργασία του το 1889 τονίζει το πόσο γενική είναι η έννοια της συνάρτησης, έτσι όπως την όρισε ο Dirichlet:

«...Οι αναλύστες συνηθίζουν να θεωρούν τις συναρτήσεις τριών ανεξάρτητων μεταβλητών ως συναρτήσεις σημείων του τρισδιάστατου χώρου. Όμως, τα σημεία δεν είναι τα μόνα γεωμετρικά στοιχεία του χώρου. Υπάρχουν επίσης οι γραμμές και οι επιφάνειες και με αυτό το σκεπτικό οι μεταβλητές που θεωρούμε μπορούν να έχουν ως τιμές σημεία, ευθείες ή επιφάνειες. Έτσι, παίρνουμε αντίστοιχα συναρτήσεις σημείων, γραμμών ή επιφανειών. Μέχρι τώρα, μελετήσαμε μόνο τις συναρτήσεις σημείων, όμως θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να μελετήσουμε και συναρτήσεις γραμμών ή επιφανειών.»

[3] Οι ορισμοί που έδωσε στην εργασία του αυτή και οι προτάσεις που απέδειξε για τις ιδιότητες των μετρησίμων συνόλων είναι πράγματα που μπορεί κανείς να διαβάσει σε οποιοδήποτε βιβλίο που μελετά το ολοκλήρωμα Lebesgue, γι' αυτό και δε θα επεκταθούμε σε λεπτομέρειες.

Αν υπάρχει κάποιος αριθμός I τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για οποιαδήποτε επιλογή των α_i, που ικανοποιούν την προαναφερθείσα συνθήκη, να ισχύει

$$\left|\sum_{i=0}^{n} \alpha_i m(E_i) - I\right| < \varepsilon \ , \quad \left|\sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+1} m(E_i) - I\right| < \varepsilon \ ,$$

τότε η f ονομάζεται αθροίσιμη στο E, ο I ονομάζεται ολοκλήρωμα της f στο E και συμβολίζεται $\int_E f(P)dP$.

Στην περίπτωση που η συνάρτηση f δεν είναι φραγμένη, ο παραπάνω ορισμός τροποποιείται ως εξής.

Ορισμός 11.3 *Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα φραγμένο και μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τυχαίο θετικό αριθμό δ και μία αύξουσα ακολουθία αριθμών $(\alpha_i)_{i=-\infty}^{+\infty}$, της οποίας οι όροι παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$ και επιπλέον, για κάθε i η διαφορά $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από τον δ.*

Θέτουμε $E_{-\infty} = \{P \in E | f(P) = -\infty\}$, $E_{+\infty} = \{P \in E | f(P) = +\infty\}$ και για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, $E_i = \{P \in E | \alpha_i \leq f(P) < \alpha_{i+1}\}$. Θεωρούμε επίσης τις σειρές $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_i m(E_i)$, $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \alpha_{i+1} m(E_i)$ και υποθέτουμε ότι συγκλίνουν απολύτως.

Αν υπάρχει κάποιος αριθμός I τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$, να υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για οποιαδήποτε επιλογή των α_i που ικανοποιούν την προαναφερθείσα συνθήκη ισχύει

$$\left|\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_i m(E_i) - I\right| < \varepsilon \ , \quad \left|\sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_{i+1} m(E_i) - I\right| < \varepsilon \ ,$$

τότε η f ονομάζεται αθροίσιμη στο E, ο I ονομάζεται ολοκλήρωμα της f στο E και συμβολίζεται $\int_E f(P)dP$.

Κάτι που προκύπτει από τον ορισμό είναι ότι αν η μετρήσιμη συνάρτηση f είναι αθροίσιμη στο E, τότε και η $|f|$ θα είναι επίσης αθροίσιμη στο E.

Στη συνέχεια του πρώτου κεφαλαίου της εργασίας του ο Lebesgue αποδεικνύει τις γνωστές βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματός του, μεταξύ των οποίων και την επόμενη.

Πρόταση 11.1 *Εάν f είναι μία συνάρτηση αθροίσιμη στο φραγμένο και μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ και αν e είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του E, τότε η τιμή του ολοκληρώματος $\int_e f(P)dP$ τείνει στο μηδέν καθώς το μέτρο $m(e)$ του e τείνει στο μηδέν.*

Στο δεύτερο κεφάλαιο δίνει τον ορισμό μιας σημαντικής συνολοσυνάρτησης, του αορίστου ολοκληρώματος.

Ορισμός 11.4 *Έστω f μία συνάρτηση αθροίσιμη στο φραγμένο και μετρήσιμο σύνολο E. Τότε, για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο e του E ορίζεται η τιμή $\int_e f(P)dP$. Η συνάρτηση F που ορίζεται στην κλάση των μετρησίμων υποσυνόλων του E από τον τύπο $F(e) = \int_e f(P)dP$ για κάθε μετρήσιμο σύνολο $e \subseteq E$ ονομάζεται **αόριστο ολοκλήρωμα** της f.*

Το αόριστο ολοκλήρωμα της f έχει δύο σημαντικές ιδιότητες.

1) **Είναι μία απόλυτα συνεχής συνάρτηση**, δηλαδή για μία οποιαδήποτε ακολουθία e_1, e_2, ... μετρησίμων υποσυνόλων του E, των οποίων τα μέτρα τείνουν στο μηδέν, η αντίστοιχη αριθμητική ακολουθία $\int_{e_1} f(P)dP$, $\int_{e_2} f(P)dP$, ... τείνει επίσης στο μηδέν. Η ιδιότητα αυτή είναι άμεση συνέπεια της πρότασης που διατυπώθηκε προηγουμένως.

2) **Είναι προσθετική συνάρτηση**[4], δηλαδή αν e_1, e_2, ... είναι μία οποιαδήποτε ακολουθία ξένων ανά δύο μετρησίμων υποσυνόλων του E, τότε ισχύει ότι

$$\int_{e_1 \cup e_2 \cup \ldots} f(P)dP = \int_{e_1} f(P)dP + \int_{e_2} f(P)dP + \ldots .$$

Ο Lebesgue παρατηρεί ότι, λόγω της απόλυτης συνέχειας του αορίστου ολοκληρώματος, αυτή η ιδιότητα μπορεί να διατυπωθεί πιο απλά και με ισοδύναμο τρόπο, για δύο μόνο μετρήσιμα και ξένα μεταξύ τους σύνολα.

Μία ακόμη σημαντική ιδιότητα του αορίστου ολοκληρώματος, που προκύπτει άμεσα από την ιδιότητα 2, είναι ότι έχει φραγμένη κύμανση. Δηλαδή, αν A_1, A_2, ..., A_n είναι τυχαία, ξένα ανά δύο, μετρήσιμα υποσύνολα του E, τότε

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \int_{A_i} f(P)dP \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} |f(P)|dP = \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_n} |f(P)|dP \leq \int_E |f(P)|dP < +\infty .$$

Στη συνέχεια της εργασίας του ο Lebesgue ασχολήθηκε με την παράγωγο μιας συνολοσυνάρτησης. Αν και είχαν δοθεί κάποιοι ορισμοί για την παράγωγο σημειοσυνάρτησης που ορίζεται στον $\mathbb{R}^n$, ο ορισμός που έδωσε ο Lebesgue του επέτρεψε να γενικεύσει καλύτερα το θεώρημα του Vitali ως εξής:

Θεώρημα 11.1 *Εάν F είναι μία απόλυτα συνεχής και προσθετική συνολοσυνάρτηση, η οποία ορίζεται για τα μετρήσιμα υποσύνολα ενός φραγμένου και μετρησίμου συνόλου E, τότε η F είναι το αόριστο ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης. Δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση f που είναι αθροίσιμη στο σύνολο E και τέτοια ώστε για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο e του E να ισχύει ότι $F(e) = \int_e f(P)dP$. Η συνάρτηση f θα είναι σχεδόν παντού ίση με την παράγωγο της F. Δηλαδή, για σχεδόν κάθε P στο E ισχύει $\frac{F(e)}{m(e)} \to f(P)$, όπου το e είναι μετρήσιμο υποσύνολο του E, το οποίο συρρικνώνεται στο σημείο P.*

Τελικά, ο Lebesgue κατάφερε να δείξει σ' αυτή την εργασία του ότι κάθε αόριστο ολοκλήρωμα έχει τις ιδιότητες 1 και 2, αλλά και αντιστρόφως, κάθε συνολοσυνάρτηση που έχει τις ιδιότητες αυτές είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα. Τα παραπάνω αποτελέσματα του επηρέασαν σημαντικά το Radon, όπως γράφει και ο ίδιος στον πρόλογο της εργασίας που μελετούμε στην επόμενη παράγραφο, καθώς του έδωσαν την ιδέα να χρησιμοποιήσει την έννοια της συνολοσυνάρτησης για να γενικεύσει τα ολοκληρώματα των Lebesgue και Stieltjes.

[4] Στη σύγχρονη βιβλιογραφία οι συναρτήσεις που έχουν αυτήν την ιδιότητα λέγονται σ-προσθετικές.

11.2 J. Radon, Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen.

Το 1906 ο Hilbert δημοσίευσε μία εργασία σχετική με τις ολοκληρωτικές εξισώσεις, στην οποία χρησιμοποιούσε το ολοκλήρωμα Stieltjes για την αναπαράσταση των φραγμένων τετραγωνικών μορφών. Από την άλλη μεριά, το 1910, ο F. Riesz σε μία δημοσίευσή του πάνω στους χώρους L^p χρησιμοποιούσε ως βασικό εργαλείο το ολοκλήρωμα Lebesgue. Σκοπός της εργασίας του Radon, όπως αναφέρεται στον πρόλογό της, ήταν, γενικεύοντας τα δύο ολοκληρώματα, να προετοιμάσει το έδαφος για την παραγωγή μιας θεωρίας γενικότερης των θεωριών των Hilbert και Lebesgue.

Θα ασχοληθούμε με τα δύο πρώτα κεφάλαια της δημοσίευσης. Στο πρώτο μελετούνται ιδιότητες των προσθετικών συναρτήσεων και στο δεύτερο ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα Stieltjes.

11.2.1 Προσθετικές συναρτήσεις.

Καταρχάς, όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που θεωρούμε στη μελέτη μας είναι υποσύνολα ενός αριστερά κλειστού και δεξιά ανοικτού διαστήματος

$$J = [-M, M) \times [-M, M) \times ... \times [-M, M) ,$$

όπου M είναι ένας οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

Επίσης, θα αναφερόμαστε πάντα σε μία κλάση T υποσυνόλων του J που θα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- Κάθε διάστημα που είναι αριστερά κλειστό, δεξιά ανοικτό και περιέχεται στο J ανήκει στην T.
- Η κλάση T είναι κλειστή ως προς τις πράξεις της τομής και της διαφοράς.
- Αν (E_n) είναι μία αριθμήσιμη ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων της T, τότε η ένωσή τους ανήκει επίσης στην T.

Μ' άλλα λόγια, η κλάση T είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του J, που περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του J.[5]

Ορισμός 11.5 *Μία συνολοσυνάρτηση f, που ορίζεται σε μία κλάση T με τις παραπάνω ιδιότητες, λέγεται* ***προσθετική*** *ακριβώς τότε, όταν για οποιαδήποτε ακολουθία συνόλων (E_n) στην T, που είναι ξένα ανά δύο, ισχύει ότι*

$$f(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} f(E_n) .$$

[5] Ο Radon δεν την αναφέρει ως σ-άλγεβρα, γράφει μόνο ότι περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του J.

Στη συνέχεια ο Radon δείχνει με εις άτοπο απαγωγή ότι κάθε προσθετική συνάρτηση είναι φραγμένης κύμανσης. Δηλαδή ότι υπάρχει κάποιος μη αρνητικός αριθμός $N < +\infty$, ώστε για κάθε διαμέριση (E_i) του J σε αριθμησίμου πλήθους σύνολα E_i της T ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{+\infty} |f(E_i)| \leq N$.

Έτσι, η παρακάτω έννοια θα είναι καλά ορισμένη.

Ορισμός 11.6 *Έστω f μία προσθετική συνολοσυνάρτηση, ορισμένη στη σ-άλγεβρα T και E ένα σύνολο της T. Θεωρούμε όλες τις διαμερίσεις (E_i) του E σε αριθμησίμου πλήθους σύνολα E_i της T και σχηματίζουμε τα αντίστοιχα αθροίσματα $\sum_{i=1}^{+\infty} |f(E_i)|$. Το ελάχιστο άνω φράγμα των αθροισμάτων αυτών ονομάζεται **απόλυτη κύμανση** της E και συμβολίζεται με $\int_E |df|$. Η συνολοσυνάρτηση που ορίζεται στην κλάση T και αντιστοιχεί σε κάθε σύνολο $E \in T$ την απόλυτη κύμανσή του θα λέγεται **συνάρτηση απόλυτης κύμανσης** της f.*

Ο Radon αποδεικνύει ότι η συνάρτηση απόλυτης κύμανσης είναι επίσης προσθετική συνάρτηση και με τη βοήθειά της ορίζονται οι δύο παρακάτω μη αρνητικές συνολοσυναρτήσεις, που θα είναι επίσης προσθετικές:

$$\phi(E) = \frac{\int_E |df| + f(E)}{2} \ , \quad \psi(E) = \frac{\int_E |df| - f(E)}{2}$$

για κάθε $E \in T$. Λόγω της μη αρνητικότητάς τους, οι συνολοσυναρτήσεις ϕ και ψ θα είναι αύξουσες: εάν $A, B \in T$, με $A \subseteq B$, τότε θα είναι $\phi(A) + \phi(B - A) = \phi(B)$, άρα $\phi(A) \leq \phi(B)$. Όμοια έχουμε ότι και η ψ είναι αύξουσα.

Με τη βοήθεια των ϕ και ψ, η f και η απόλυτη κύμανσή της γράφονται

$$f(E) = \phi(E) - \psi(E) \ , \qquad \int_E |df| = \phi(E) + \psi(E)$$

και μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε καταφέρει να γράψουμε την f ως διαφορά δύο αυξουσών συνολοσυναρτήσεων. Η πρώτη από τις δύο παραπάνω ισότητες ονομάζεται **κανονική διάσπαση της προσθετικής συνάρτησης** f **σε δύο αύξουσες συναρτήσεις** και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, γιατί μας δίνει τη δυνατότητα να περιορίσουμε τη μελέτη μας στις αύξουσες και προσθετικές συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τώρα την κλάση στην οποία ορίζεται η f, γενικεύοντας την έννοια του εσωτερικού και εξωτερικού μέτρου που έδωσε ο Lebesgue, ως εξής. Καταρχήν, θεωρούμε την f **αύξουσα**.

Ορισμός 11.7 *Έστω E τυχαίο υποσύνολο του J. Σ' αυτό αντιστοιχούμε δύο αριθμούς:*

- *τον $\overline{f}(E)$, που είναι το infimum όλων των αθροισμάτων της μορφής $\sum_{j=1}^{+\infty} f(I_j)$, όπου (I_j) είναι αριθμήσιμη οικογένεια κλειστών αριστερά, ανοικτών δεξιά διαστημάτων στην ένωση των οποίων περιέχεται το E.*
- *τον $\underline{f}(E)$, που ορίζεται από την ισότητα*

$$\underline{f}(E) = f(J) - \overline{f}(J - E) \ .$$

Θα λέμε ότι το σύνολο E είναι ***μετρήσιμο ως προς την*** *f όταν οι δύο παραπάνω αριθμοί ταυτίζονται.*

Αν συμβολίσουμε με T_f την κλάση όλων των υποσυνόλων του J, που είναι μετρήσιμα ως προς την f, τότε αποδεικνύεται ότι η T_f είναι μία σ-άλγεβρα. Στην περίπτωση αυτή, για κάθε σύνολο $E \in T_f - T$ μπορούμε να ορίσουμε την τιμή της f να είναι

$$f(E) = \overline{f}(E) = \underline{f}(E) \ .$$

Από τον τρόπο ορισμού της, είναι προφανές ότι η σ-άλγεβρα T_f περιέχει όλα τα κλειστά αριστερά, ανοικτά δεξιά διαστήματα, άρα και όλα τα Borel υποσύνολα του J. Άρα, οι T_f, T έχουν κοινά στοιχεία τα Borel υποσύνολα του J.

Αν υποθέσουμε ότι η f και η κλάση T έχουν επιπλέον την παρακάτω ιδιότητα (P): **για κάθε σύνολο E της κλάσης T και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει κλειστό σύνολο E', που περιέχεται στο E, τέτοιο ώστε να ισχύει**

$$f(E) - f(E') < \varepsilon \ ,$$

τότε αποδεικνύεται ότι η κλάση T περιέχεται στην T_f. Επεκτείνοντας τη συνάρτηση f στην T_f με τον τρόπο που αναφέραμε προηγουμένως, η T_f ονομάζεται **φυσικό πεδίο ορισμού της f.**

Στην περίπτωση που η f δεν είναι αύξουσα, τότε θεωρούμε την κανονική της διάσπαση σε δύο αύξουσες και προσθετικές συναρτήσεις ϕ, ψ και θεωρούμε το φυσικό πεδίο ορισμού της καθεμιάς. Η τομή τους θα είναι επίσης μία σ-άλγεβρα και θα αποτελεί το φυσικό πεδίο ορισμού της f.

Στη συνέχεια, ο Radon ορίζει την έννοια της βάσης.

Ορισμός 11.8 *Μία αύξουσα και προσθετική συνολοσυνάρτηση b θα λέγεται* ***βάση*** *της προσθετικής συνάρτησης f, όταν για κάθε σύνολο E στο οποίο η f ορίζεται και ισχύει $b(E) = 0$, ισχύει επίσης $f(E) = 0$.*

Μεταξύ των ιδιοτήτων που έχει μία συνολοσυνάρτηση, που είναι η βάση κάποιας άλλης, είναι και η εξής: όταν η b είναι βάση της f, τότε το φυσικό πεδίο ορισμού της θα περιέχεται σε αυτό της f. Έτσι, θα ισχύει και η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 11.2 *Όταν η συνολοσυνάρτηση b είναι μία βάση της f, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για κάθε σύνολο $E \in T_b$ με $b(E) < \delta$ να ισχύει $|f(E)| < \varepsilon$.*

Η έννοια της βάσης θα βοηθήσει τον Radon να διατυπώσει τον ορισμό της απόλυτης συνέχειας με κομψό τρόπο.

Ορισμός 11.9 *Αν συμβολίσουμε με $m(E)$ το μέτρο Lebesgue ενός μετρησίμου συνόλου E, τότε η f θα λέγεται απόλυτα συνεχής όταν η συνολοσυνάρτηση m είναι μία βάση της f.*

11.2.2 Πρώτη γενίκευση του ολοκληρώματος Stieltjes.

Έστω F μία ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση που ορίζεται σ' ένα υποσύνολο E του J και f μία προσθετική συνολοσυνάρτηση όπως στην ενότητα 11.2.1 τέτοια ώστε το E ν' ανήκει στο πεδίο ορισμού της T_f. Θεωρούμε μία διαμέριση Π του E που αποτελείται από σύνολα του T

$$\Pi = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$$

και από κάθε σύνολο E_i διαλέγουμε τυχαία ένα σημείο P_i. Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$S_\Pi = \sum_{k=1}^{n} F(P_k) f(E_k) \ .$$

Έστω $d(\Pi)$ το πλάτος της διαμέρισης Π, δηλαδή η μέγιστη από τις διαμέτρους των συνόλων E_i. Η συνάρτηση F είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα σε κάθε $\varepsilon > 0$ αντιστοιχεί ένα $\delta > 0$, τέτοιο ώστε για οποιαδήποτε σημεία P, P' του E με $\|PP'\| < \delta$, να ισχύει $|F(P) - F(P')| < \varepsilon$.

Θεωρούμε στη συνέχεια μία ακόμη διαμέριση Π' του E με $\Pi' = \{E'_1, E'_2, ..., E'_m\}$ και ένα αντίστοιχο άθροισμα $S_{\Pi'}$ αυτής. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} S_\Pi - S_{\Pi'} &= \sum_{k=1}^{n} F(P_k) f(E_k) - \sum_{j=1}^{m} F(P'_j) f(E'_j) \\ &= \sum_{k,j} (F(P_k) - F(P'_j)) f(E_k E'_j) \ . \end{aligned}$$

Για εκείνους τους όρους του αθροίσματος για τους οποίους είναι $E_k E'_j \neq \emptyset$, ισχύει

$$\|P_k P'_j\| \leq d(\Pi) + d(\Pi') \ .$$

Παίρνοντας τυχαίο $\varepsilon > 0$, βρίσκουμε $\delta > 0$ από την ομοιόμορφη συνέχεια της F και παίρνουμε διαμερίσεις Π, Π' με $d(\Pi), d(\Pi') < \frac{\delta}{2}$. Από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι

$$|S_\Pi - S_{\Pi'}| \leq \varepsilon \sum_{k,j} |f(E_k E'_j)| \leq \varepsilon \int_E |df| \ .$$

Αν θεωρήσουμε μία τυχαία ακολουθία διαμερίσεων (Π_n) του E, τέτοια ώστε

$$\lim_{n \to +\infty} d(\Pi_n) = 0 \ ,$$

τότε, λόγω της τελευταίας ανισότητας και της ομοιόμορφης συνέχειας της F, η ακολουθία (S_{Π_n}) είναι Cauchy και το όριο $\lim_{n\to+\infty} S_{\Pi_n} = l$ θα υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Λήμμα 11.1 *Το όριο $\lim_{n\to+\infty} S_{\Pi_n}$ είναι ανεξάρτητο της ακολουθίας των διαμερίσεων (Π_n) που διαλέξαμε.*

Απόδειξη: Έστω (Π'_n) μία δεύτερη ακολουθία διαμερίσεων του E με $\lim_{n\to+\infty} d(\Pi'_n) = 0$. Τότε, και η ακολουθία Π_1, Π'_1, Π_2, Π'_2, ... είναι μία ακολουθία διαμερίσεων του E με την παραπάνω ιδιότητα και, επομένως, υπάρχει το όριο της $S_{\Pi_1}, S_{\Pi'_1}, S_{\Pi_2}, S_{\Pi'_2}, \ldots$.

Επειδή η υπακολουθία (S_{Π_n}) έχει όριο τον αριθμό l και η υπακολουθία $(S_{\Pi'_n})$ θα έχει το ίδιο όριο.

Δείξαμε, επομένως, ότι ο επόμενος ορισμός είναι καλός.

Ορισμός 11.10 *Ο αριθμός l θα συμβολίζεται με $\int_E F(P)df(P)$ και λέγεται **ολοκλήρωμα Stieltjes της F ως προς τη συνολοσυνάρτηση f**.*

Παρατήρηση 11.1 *Από τα παραπάνω προκύπτει ότι ισχύει η παρακάτω ανισότητα, που φυσικά αποτελεί γενίκευση αντίστοιχης ανισότητας που δείξαμε για το απλό ολοκλήρωμα Stieltjes*

$$\left|\int_E F(P)df(P)\right| \leq \sup_E |F| \int_E |df| \ .$$

11.2.3 Δεύτερη γενίκευση του ολοκληρώματος Stieltjes.

O Radon ορίζει στη συνέχεια ένα δεύτερο ολοκλήρωμα, πιο γενικό από το πρώτο, μιμούμενος τον ορισμό του ολοκληρώματος Lebesgue για τις συνεχείς συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Πρώτα θα χρειαστεί να γενικεύσει την έννοια της μετρήσιμης κατά Lebesgue συνάρτησης.

Ορισμός 11.11 *Έστω f μία προσθετική συνολοσυνάρτηση όπως στην ενότητα 11.2.1 με πεδίο ορισμού T_f και F μία συνάρτηση που ορίζεται σε κάποιο υποσύνολο E του J, που ανήκει στην T_f. Η F θα λέγεται **f-μετρήσιμη**, όταν για κάθε πραγματικό αριθμό a, το σύνολο των σημείων P με $F(P) > a$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.*

Είναι προφανές ότι κάθε Borel-μετρήσιμη συνάρτηση θα είναι επίσης f-μετρήσιμη συνάρτηση. Οι συναρτήσεις που προκύπτουν από f-μετρήσιμες συναρτήσεις με τις γνωστές πράξεις, καθώς και το ανώτερο και κατώτερο όριο ακολουθίας f-μετρησίμων συναρτήσεων είναι επίσης f-μετρήσιμες.

Ορισμός 11.12 *Έστω (y_n) μία γνησίως αύξουσα ακολουθία αριθμών, τέτοια ώστε $y_0 = 0$, $\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty$ και $\sup(y_{n+1} - y_n) = a$, όπου a είναι ένας θετικός αριθμός. Μία τέτοια ακολουθία θα λέγεται **θεμελιώδης ακολουθία με μέγιστη διαφορά** a.*

Ορισμός 11.13 *Θεωρούμε μία αύξουσα και προσθετική συνολοσυνάρτηση f όπως στην ενότητα 11.2.1 και μία μη αρνητική και f-μετρήσιμη συνάρτηση F που ορίζεται σ' ένα σύνολο E, το οποίο ανήκει στην T_f.*

Αν (y_n) είναι μία τυχαία θεμελιώδης ακολουθία, τότε σχηματίζουμε τη σειρά

$$\sum_{k=0}^{+\infty} y_k f(E_k) \ ,$$

όπου $E_k = \{P \in E |\ y_k \leq F(P) < y_{k+1}\}$.

Εάν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, τότε η F *θα λέγεται* ***αθροίσιμη ως προς την*** f.

Θα δείξουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλαδή δεν εξαρτάται από τη θεμελιώδη ακολουθία που έχουμε θεωρήσει. Έστω (y'_n) μία δεύτερη θεμελιώδης ακολουθία, τέτοια ώστε $\sup(y'_{n+1} - y'_n) = b > 0$.

Αν το $E_i E'_j$ δεν είναι κενό, τότε εύκολα βλέπουμε ότι $-a \leq y_i - y'_j \leq b$.

Πράγματι, από τις $y_i \leq F(P) < y_{i+1}$, $y'_j \leq F(P) < y'_{j+1}$ συνεπάγεται $y'_j < y_{i+1}$ και $y_i < y'_{j+1}$ και, επομένως, $-a \leq y_i - y_{i+1} < y_i - y'_j < y'_{j+1} - y'_j \leq b$. Άρα,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} y'_j f(E'_j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} y'_j f(E'_j E_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} (y_i + a) f(E'_j E_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) + a f(E) \ .$$

Η ανισότητα αυτή είναι ανεξάρτητη του b, οπότε αν η σειρά $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i)$ συγκλίνει για κάποια θεμελιώδη ακολουθία, τότε θα συγκλίνει και για κάθε άλλη θεμελιώδη ακολουθία. Άρα, ο προηγούμενος ορισμός είναι καλός.

Από την ίδια ανισότητα είναι φανερό ότι για το supremum $\underline{S}$ όλων των αθροισμάτων $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i)$ για κάθε θεμελιώδη ακολουθία με τυχαία μέγιστη διαφορά ισχύει

$$\underline{S} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) + a f(E) \ ,$$

όπου (y_n) είναι μία από αυτές με μέγιστη διαφορά a.

Επειδή $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) \leq \underline{S}$, συνεπάγεται ότι

$$0 \leq \underline{S} - \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) \leq a f(E) \ .$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν η μέγιστη διαφορά a της (y_n) τείνει στο μηδέν, τότε το αντίστοιχο $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i)$ τείνει στο $\underline{S}$.

Έστω τώρα μία τυχαία θεμελιώδης ακολουθία (y_n) με μέγιστη διαφορά a, τέτοια ώστε η $\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i)$ να συγκλίνει. Τότε, επειδή για κάθε i είναι $y_{i+1} \leq y_i + a$, θα συγκλίνει και η σειρά $\sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i)$. Δουλεύοντας ακριβώς όπως και παραπάνω, προκύπτει ότι συμβαίνει το ίδιο με την αντίστοιχη σειρά κάθε άλλης θεμελιώδους ακολουθίας και ότι υπάρχει το infimum όλων αυτών των αθροισμάτων, το οποίο συμβολίζουμε με $\overline{S}$.

Επίσης, θα ισχύει

$$0 \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i) - \overline{S} \leq a f(E) \ ,$$

οπότε, αν η μέγιστη διαφορά a της (y_n) τείνει στο μηδέν, τότε το αντίστοιχο $\sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i)$ τείνει στο $\overline{S}$.

Προφανώς, επειδή

$$\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i) \ ,$$

θα ισχύει $\underline{S} \leq \overline{S}$.

Επειδή

$$\overline{S} \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) + a f(E) \leq \underline{S} + a f(E) ,$$

αν αφήσουμε το a να τείνει στο μηδέν παίρνουμε $\underline{S} = \overline{S}$.

Από τον ορισμό του ολοκληρώματος της ενότητας 11.2.2 προκύπτει αμέσως ότι

$$\underline{S} \leq \int_E F(P) df(P) \leq \overline{S}$$

και, επομένως,

$$\int_E F(P) df(P) = S .$$

Τελικά, υπάρχει ένας ισοδύναμος τρόπος να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης F ως προς μία συνολοσυνάρτηση f, αυτός που ακολουθεί παρακάτω.

Ορισμός 11.14 *Έστω f μία αύξουσα και προσθετική συνολοσυνάρτηση όπως στην ενότητα 11.2.1 και μία μη αρνητική και f-μετρήσιμη συνάρτηση F που ορίζεται σ' ένα σύνολο E, το οποίο ανήκει στην T_f. Το όριο των σειρών της μορφής*

$$\sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i) ,$$

όπου (y_n) είναι θεμελιώδης ακολουθία και $E_i = \{P \in E | \ y_i \leq F(P) < y_{i+1}\}$, καθώς οι μέγιστες διαφορές των ακολουθιών τείνουν στο μηδέν, εφόσον υπάρχει στο $\mathbb{R}$, θα είναι το ***ολοκλήρωμα Lebesgue-Stieltjes της*** *F* ***ως προς την*** *f και θα συμβολίζεται με $\int_E F(P) df(P)$. Τότε, θα λέμε ότι η F είναι* ***αθροίσιμη ως προς την*** *f.*

Στην περίπτωση που η F παίρνει και αρνητικές τιμές, τότε μπορούμε να τη γράψουμε ως διαφορά δύο μη αρνητικών συναρτήσεων F_1 και F_2, που είναι επίσης f-μετρήσιμες, ως εξής

$$F = \frac{|F| + F}{2} - \frac{|F| - F}{2} = F_1 - F_2 .$$

Θα θεωρούμε την F f-αθροίσιμη, όταν οι F_1 και F_2 είναι f-αθροίσιμες και τότε ορίζουμε

$$\int_E F(P) df(P) = \int_E F_1(P) df(P) - \int_E F_2(P) df(P) .$$

Και σ' αυτή την περίπτωση ο ορισμός του $\int_E F(P) df(P)$ διατυπώνεται με τη βοήθεια θεμελιωδών ακολουθιών, με τον τρόπο που περιγράφεται παρακάτω.

Θεωρούμε μία τυχαία «διπλή» θεμελιώδη ακολουθία με μέγιστη διαφορά a, δηλαδή μία ακολουθία (y_n) με τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\ldots < y_{-2} < y_{-1} < y_0 < y_1 < y_2 < \ldots$$

$$y_{i+1} - y_i \leq a \ , \ \text{για κάθε } i \ \in \mathbb{Z} \ ,$$

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = +\infty \ , \quad \lim_{n\to+\infty} y_{-n} = -\infty \ .$$

Σχηματίζουμε το άθροισμα

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} y_k f(E_k) \ .$$

Η F θα είναι αθροίσιμη ως προς την f, όταν η παραπάνω σειρά συγκλίνει απόλυτα για μία τέτοια διπλή θεμελιώδη ακολουθία. Το ολοκλήρωμα της F ως προς την f στην περίπτωση αυτή θα ισούται με το όριο

$$\int_E F(P)df(P) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}) \ ,$$

καθώς οι μέγιστες διαφορές των διπλών θεμελιωδών ακολουθιών $(y_k^{(n)})$ τείνουν στο μηδέν.

Στη γενικότερη περίπτωση που η f δεν είναι μονότονη, θεωρούμε την κανονική της διάσπαση σε δύο αύξουσες συναρτήσεις ϕ και ψ. Θα λέμε ότι η F είναι αθροίσιμη ως προς την f, όταν είναι αθροίσιμη ως προς τις ϕ και ψ, δηλαδή, ισοδύναμα, όταν είναι αθροίσιμη ως προς την απόλυτη κύμανση της f. Τότε, το ολοκλήρωμά της ως προς την f θα ισούται με

$$\int_E F(P)df(P) = \int_E F(P)d\phi(P) - \int_E F(P)d\psi(P) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} y_k^{(n)} f(E_k^{(n)}) \ .$$

Παρατήρηση 11.2 *Το ολοκλήρωμα που όρισε ο Radon είναι γενίκευση του ολοκληρώματος του Lebesgue, αφού αρκεί να θεωρήσουμε στη θέση της f τη συνολοσυνάρτηση m που ορίζεται από το μέτρο Lebesgue.*

Επίσης, είναι γενίκευση και του ολοκληρώματος Stieltjes, διότι κάθε πραγματική συνάρτηση F που ορίζεται στο $[a,b]$ και είναι συνεχής, θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a,b]$. Έστω τώρα ότι f είναι μία πραγματική συνάρτηση φραγμένης κύμανσης, ορισμένη επίσης στο $[a,b]$, η οποία είναι συνεχής από αριστερά.[6] Τότε, για κάθε διάστημα $[c,d)$ έχουμε ότι $f([c,d)) = f(d) - f(c)$ και τα αθροίσματα $S_\Pi = \sum_{k=1}^n F(P_k) f(E_k)$ στον ορισμό του Radon είναι ίσα με τα αντίστοιχα αθροίσματα $\sum_{k=0}^n F(P_k)\left(f(x_{k+1}) - f(x_k)\right)$ του Stieltjes. Στη γενικότερη περίπτωση που η f δεν είναι συνεχής από αριστερά, τότε θα ισχύει $f([c,d)) = f(d-) - f(c-)$. Αποδεικνύεται ότι, αν αντί για την f θεωρήσουμε τη συνάρτηση f^* με $f^*(x) = f(x-)$, τότε θα είναι $\int_a^b F(x)df(x) = \int_a^b F(x)df^*(x)$.

[6] Με αυτή την τελευταία υπόθεση εξασφαλίζουμε την ύπαρξη μιας προσθετικής συνολοσυνάρτησης που σχετίζεται με την f.

11.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue-Stieltjes.

Στη συνέχεια του δευτέρου κεφαλαίου του ο Radon αποδεικνύει ότι το ολοκλήρωμά του έχει ιδιότητες αντίστοιχες μ' αυτές του Lebesgue.

Καταρχάς, είναι εύκολο να αποδειχθεί από τον ορισμό η γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα και προσθετική συνολοσυνάρτηση, η F μη αρνητική και αθροίσιμη ως προς την f στο J και A, B είναι f-μετρήσιμα υποσύνολα του J, με $A \subseteq B$, τότε ισχύει $\int_A F(P)df(P) \leq \int_B F(P)df(P)$.

Πρόταση 11.3 *Εάν η συνάρτηση F είναι αθροίσιμη ως προς την f στο J, τότε ορίζεται μία συνολοσυνάρτηση G, η οποία αντιστοιχεί σε κάθε μετρήσιμο ως προς την f σύνολο $E \subseteq J$ τον αριθμό $\int_E F(P)df(P)$. Η συνολοσυνάρτηση αυτή είναι προσθετική και έχει ως βάση τη συνάρτηση απόλυτης κύμανσης της f.*

Απόδειξη: Αρκεί να κάνουμε την απόδειξη μόνο στην περίπτωση που η f είναι αύξουσα και η F μη αρνητική. Έστω λοιπόν A_1, A_2, ..., A_n, ... ξένα μεταξύ τους μετρήσιμα υποσύνολα του J. Θέτουμε $A = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ και $S_n = \cup_{k=1}^{n} A_k$.

Από την παρατήρηση που προηγήθηκε της πρότασης έπεται ότι η G είναι αύξουσα συνάρτηση. Επομένως, για κάθε φυσικό n θα ισχύει ότι

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} F(P)df(P) = \int_{S_n} F(P)df(P) \leq \int_A F(P)df(P) \ .$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P)$ συγκλίνει και, μάλιστα, για το άθροισμα της θα ισχύει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P) \leq \int_A F(P)df(P) \ .$$

Έστω $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ μία θεμελιώδης ακολουθία με μέγιστη διαφορά a. Τότε, για κάθε φυσικό n θα ισχύει

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} F(P)df(P) = \int_{S_n} F(P)df(P) \geq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i S_n) \geq \sum_{i=0}^{N} y_i f(E_i S_n) \ ,$$

όπου N τυχαίος φυσικός αριθμός.

Επειδή η f είναι προσθετική, έχουμε ότι $\lim_{n \to +\infty} f(E_i S_n) = f(E_i A)$. Άρα, αν στην ανισότητα $\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} F(P)df(P) \geq \sum_{i=0}^{N} y_i f(E_i S_n)$ πάρουμε τα όρια των δύο μελών, καθώς $n \to +\infty$, προκύπτει ότι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P) \geq \sum_{i=0}^{N} y_i f(E_i A)$$

και για $N \to +\infty$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P) \geq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i A) \ . \tag{11.1}$$

Επειδή η μέγιστη διαφορά της θεμελιώδους ακολουθίας είναι a, θα ισχύει

$$\int_A F(P)df(P) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_{i+1} f(E_i A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i A) + af(A) \ .$$

Άρα, είναι

$$\int_A F(P)df(P) - af(A) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} y_i f(E_i A)$$

και λόγω της (11.1) είναι

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P) \geq \int_E F(P)df(P) - af(A)$$

για οσοδήποτε μικρό $a > 0$. Επομένως, ισχύει

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_{A_k} F(P)df(P) = \int_A F(P)df(P)$$

και η απόδειξη έχει τελειώσει.

Στη συνέχεια, όπως ήταν αναμενόμενο, ο Radon αποδεικνύει ότι το ολοκλήρωμά του έχει τις παρακάτω ιδιότητες.

Πρόταση 11.4 *Έστω F συνάρτηση ορισμένη στο f-μετρήσιμο σύνολο E, f-μετρήσιμη και τέτοια ώστε $|F| \leq M$. Τότε η F είναι αθροίσιμη ως προς την f και ισχύει*

$$\left| \int_E F df \right| \leq M \int_E |df| \ .$$

Πρόταση 11.5 *Έστω f μία προσθετική συνολοσυνάρτηση ορισμένη στο J και E ένα f-μετρήσιμο υποσύνολο του. Εάν η F_1 είναι αθροίσιμη και η F_2 μετρήσιμη ως προς την f και φραγμένη, τότε και η $F_1 F_2$ θα είναι συνάρτηση αθροίσιμη ως προς την f.*

Πρόταση 11.6 *Έστω f μία προσθετική συνολοσυνάρτηση και E υποσύνολο του J. Εάν (F_n) είναι μία ακολουθία f-μετρησίμων συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει σημειακά σε κάποια συνάρτηση F και είναι ομοιόμορφα φραγμένη από κάποιο θετικό αριθμό M, τότε ισχύει ότι*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_E F_n df = \int_E \lim_{n \to +\infty} F_n df \ .$$

Πρόταση 11.7 *Εάν f είναι μία αύξουσα προσθετική συνολοσυνάρτηση, (F_n) μία αύξουσα ακολουθία f-ολοκληρωσίμων συναρτήσεων, τέτοια ώστε το όριο $\lim_{n\to+\infty}\int_E F_n df$ να είναι ένας πεπερασμένος αριθμός A, τότε και η συνάρτηση $F = \lim_{n\to+\infty} F_n$ είναι αθροίσιμη ως προς την f και ισχύει*

$$\int_E F df = \lim_{n\to+\infty}\int_E F_n df \ .$$

Με τη βοήθεια όλων των προηγούμενων γενικεύει στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας του το Θεώρημα Αναπαραστάσεως του F. Riesz.

Θεώρημα 11.2 *Εάν U είναι ένα συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές, με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων F που ορίζονται σ' ένα συμπαγές σύνολο E, τότε υπάρχει προσθετική συνολοσυνάρτηση f, τέτοια ώστε για κάθε F στο πεδίο ορισμού του U να ισχύει*

$$U(F) = \int_E F df$$

και η νόρμα του συναρτησοειδούς να ισούται με

$$\|U\| = \int_E |df| \ .$$

Ο επόμενος στόχος του είναι να γενικεύσει το θεώρημα 11.1 του Lebesgue.

Θεώρημα 11.3 *Εάν g είναι μία προσθετική συνολοσυνάρτηση με βάση f, τότε υπάρχει μία f-αθροίσιμη συνάρτηση Ψ, τέτοια ώστε για κάθε $E \in T_f$ να ισχύει*

$$g(E) = \int_E \Psi(P) df \ .$$

Στη συνέχεια της εργασίας του ασχολείται με τη γενίκευση του ολοκληρώματος του Hellinger, όπου χρησιμοποιεί όλα τα προηγούμενα και τελειώνει με την αναπαράσταση των φραγμένων διγραμμικών μορφών.

Κεφάλαιο 12

Η ζωή του Thomas-Jan Stieltjes.

Ο Thomas-Jan Stieltjes γεννήθηκε στις 29 Δεκεμβρίου του 1856 στη Zwolle, μια μικρή επαρχιακή πόλη της Ολλανδίας.

Ο πατέρας του, που είχε ακριβώς το ίδιο όνομα με αυτόν, ήταν σπουδαίος πολιτικός μηχανικός, μέλος της βουλής και διδάκτορας του πανεπιστημίου του Leiden. Ήταν ιδιαίτερα αγαπητός και περισσότερο γνωστός στους Ολλανδούς από το γιο του, αφού συνέβαλλε στην κατασκευή των λιμανιών του Rotterdam και στην οργάνωση του συστήματος των καναλιών στην ανατολική Ολλανδία. Ήταν άνθρωπος ιδιαίτερα ευφυής και με αρχές. Αρκετά νέος, όντας υπολοχαγός στο σώμα μηχανικού του Ολλανδικού στρατού, έγραψε συμβουλές για την καλύτερη οργάνωση της άμυνας των Κάτω Χωρών, τις οποίες γνωστοποίησε στους ανωτέρους του διατηρώντας την ανωνυμία του. Οι συμβουλές αυτές αποδείχθηκαν πολύ χρήσιμες και έκαναν ιδιαίτερη εντύπωση, όμως ο Stieltjes ποτέ στη ζωή του δεν αποκάλυψε ότι αυτός ήταν ο συγγραφέας, παρά μόνο λίγο πριν το θάνατό του. Οι θαυμαστές και φίλοι του έστησαν προς τιμήν του ένα άγαλμα σε κεντρική τοποθεσία του Rotterdam.

Ο Thomas-Jan Stieltjes junior, όπως συνήθιζε να υπογράφει, είχε άλλα έξι αδέρφια και πέρασε την παιδική του ηλικία σε διάφορες πόλεις της Ολλανδίας εξαιτίας της δουλειάς του πατέρα του. Το 1873 ξεκίνησε τις σπουδές του στο Πολυτεχνείο του Delft, απ' όπου δεν πήρε ποτέ το πτυχίο του. Αντί να πηγαίνει στις διαλέξεις, προτιμούσε να περνά τον περισσότερο χρόνο του στη βιβλιοθήκη, μελετώντας τα έργα των Jacobi και Gauss κι αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αποτύχει στις εξετάσεις του. Προσπάθησε άλλες δύο χρονιές, το 1875 και το 1876, όμως και τότε δεν τα κατάφερε. Ο πατέρας του, απελπισμένος με την κατάσταση του γιου του, ζήτησε βοήθεια από ένα στενό του φίλο, τον H. G. van de Sande-Bakhuyzen (1838-1923), που ήταν καθηγητής Αστρονομίας στο πανεπιστήμιο του Leiden και διευθυντής του αστεροσκοπείου της πόλης. Έτσι, τον Απρίλιο του 1877, ο Stieltjes junior προσλήφθηκε εκεί ως βοηθός στους αστρονομικούς υπολογισμούς. Από το 1878 παίρνει μέρος και σε παρατηρήσεις και ασχολείται με την Ουράνια Μηχανική. Την ίδια χρονιά πεθαίνει ο πατέρας του.

Το Νοέμβριο του 1882 αρχίζει ν' αλληλογραφεί με τον C. Hermite (1822-1901) πάνω σε θέματα Ουράνιας Μηχανικής, πολύ σύντομα όμως αρχίζουν να τους απασχολούν μόνο μαθηματικά ερωτήματα. Ο Hermite διατηρούσε αλληλογραφία με πολλούς επιστήμονες, όμως καμία άλλη δεν ήταν τόσο τακτική και πληθωρική όσο αυτή που είχε με τον Stieltjes. Διήρκεσε δώδεκα χρόνια, μέχρι τον πρόωρο θάνατο του Stieltjes, και οι δύο άνδρες έγιναν γρήγορα καλοί φίλοι και στενοί συνεργάτες. Στα 432 γράμματα που ανταλλάσσουν, ο Stieltjes γράφει στον Hermite για τα αποτελέσματά του και ο Γάλλος μαθηματικός τα σχολιάζει και του θέτει νέα ερωτήματα, στα οποία ο πρώτος απαντά με μεγάλη ταχύτητα και κομψότητα. Η αλληλογραφία τους εκδόθηκε μετά το θάνατο του Hermite από τον εκδοτικό οίκο Gauthier-Villars στο Παρίσι.

Πολύ γρήγορα ο Stieltjes αναζητά ένα αντικείμενο πιο θεωρητικό από την Αστρονομία και έτσι, από το 1883 στρέφεται αποκλειστικά στα Μαθηματικά. Σ' αυτό τον ενθαρρύνουν ο Hermite και η Elizabeth Intveld, με την οποία παντρεύεται την ίδια χρονιά. Για κάποιο διάστημα παίρνει άδεια από την εργασία του στο αστεροσκοπείο, ώστε να ασχοληθεί με την έρευνα και από το Σεπτέμβριο του 1883 αντικαθιστά το μαθηματικό F. G. van den Berg, που αρρωσταίνει, στα μαθήματα της Αναλυτικής και Προβολικής Γεωμετρίας στο Πολυτεχνείο του Delft. Στο τέλος της 1883 αποφασίζει να παραιτηθεί από τη δουλειά του και να ασχοληθεί μόνο με τα Μαθηματικά. Στο διάστημα αυτό μελετά τον τύπο παρεμβολής του Lagrange, αποδεικνύει με απλό και κομψό τρόπο τις ιδιότητες των πολυωνύμων Hansen-Tisserand, ασχολείται με την ανάλυση ενός αριθμού σε άθροισμα πέντε τετραγώνων και τότε αρχίζει το ενδιαφέρον του για τα συνεχή κλάσματα.

Η εργασία του στο αστεροσκοπείο του Leiden επηρέασε ιδιαίτερα τον τρόπο με τον οποίο δούλευε στα Μαθηματικά. Στον πρόλογο της έκδοσης της αλληλογραφίας των Stieltjes και Hermite, ο H. Bourget, ο οποίος ήταν αστρονόμος και φίλος του πρώτου στο πανεπιστήμιο της Τουλούζης, γράφει ότι:

«...Οι μελέτες που έκανε αυτά τα 6 χρόνια που δούλευε στο Αστεροσκοπείο φαίνεται να έχουν επιδράσει αρκετά στον τρόπο σκέψης του και, κυρίως, στον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζει τα διάφορα (μαθηματικά) προβλήματα. Αυτή η ικανότητα που είχε στο να χειρίζεται αλγεβρικούς τύπους και στο να τους χρησιμοποιεί για τους πολύπλοκους αριθμητικούς υπολογισμούς, καθώς και οι κομψές μέθοδοί του στο Λογισμό κυριαρχούν στο έργο του. Είχε, επίσης, τη συνήθεια να χρησιμοποιεί πολλά αριθμητικά παραδείγματα και την ικανότητα ν' ανακαλύπτει μέσα από αυτούς τους υπολογισμούς τα διάφορα αποτελέσματά του. Σε πολλά γράμματά του προς τον Hermite μιλά για τις εικασίες στις οποίες τον οδηγούν οι αριθμητικοί υπολογισμοί του...»

Αυτό είναι κάτι που επίσης φαίνεται και στην τελευταία του εργασία. Οι αποδείξεις που δίνει σε κάποιες ισότητες και ανισότητες, κυρίως του όγδοου κεφαλαίου, δείχνουν ότι του άρεσε να ερμηνεύει τα αποτελέσματά του από την πλευρά της Μηχανικής και να χρησιμοποιεί έννοιές της, όπως οι ροπές k-τάξης, ως εργαλεία για να μελετήσει τα μαθηματικά προβλήματα.

Το 1884 κάνει αίτηση για μία θέση στον τομέα της Ανάλυσης στο πανεπιστήμιο του Groningen και παρόλο που είχε μεγάλες πιθανότητες να πάρει τη θέση, δεν έγινε τελικά δεκτός. Αυτό έγινε πιθανότατα, όπως γράφει και ο ίδιος σε γράμμα του στον Hermite, εξαιτίας της έλλειψης τυπικών προσόντων, αφού ο Stieltjes δεν είχε ούτε πτυχίο ούτε διδακτορικό.

Τον Απρίλιο του 1885 εγκαθίσταται με την οικογένειά του στο Παρίσι. Εκεί ασχολείται για κάποιο διάστημα με την κατανομή των πρώτων αριθμών και τη μελέτη της συνάρτησης ζ του Riemann, όμως γρήγορα εγκαταλείπει το θέμα αυτό γιατί δεν είχε ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Το 1886 τελειώνει το διδακτορικό του με τίτλο «Recherches sur quelques séries semiconvergentes». Εκεί ασχολείται με τη μελέτη των ασυμπτωτικών σειρών, δηλαδή των αποκλινουσών δυναμοσειρών που έχουν τη μορφή

$$\frac{c_0}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^{n+1}} + \ldots\ , \qquad c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots \in \mathbb{R},$$

οι οποίες προκύπτουν από τα ολοκληρώματα

$$\int_0^a \frac{du}{\log u}\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin au}{1+u^2} du\ ,\quad \int_0^{+\infty} \frac{u\cos au}{1+u^2} du\ ,\quad a > 0.$$

Οι ασυμπτωτικές σειρές χρησιμοποιούνται σε προσεγγιστικούς υπολογισμούς σε πολλούς κλάδους της Φυσικής και ιδιαίτερα στην Ουράνια Μηχανική. Επομένως, ήταν ένα θέμα αρκετά οικείο στον Stieltjes, ο οποίος είχε μελετήσει αρκετά παραδείγματα σειρών αυτής της μορφής όταν εργαζόταν στο αστεροσκοπείο. Η μελέτη των ασυμπτωτικών σειρών θα πρέπει να ήταν αυτή που έστρεψε το ενδιαφέρον του αποκλειστικά στα συνεχή κλάσματα.

Τον 18ο αιώνα ο Euler είχε αποδείξει ότι μία άπειρη σειρά μπορεί να μετασχηματιστεί σε ένα συνεχές κλάσμα και αντιστρόφως. Επομένως, αν έχουμε κατάλληλο ορισμένο ολοκλήρωμα, μπορούμε τελικά να το μετατρέψουμε σε συνεχές κλάσμα και αυτό μας επιτρέπει, κάποιες φορές, να προσεγγίσουμε καλύτερα την τιμή του πρώτου. Αυτήν την ιδέα την είχε πρώτος ο E. Laguerre (1834-1886). Θεώρησε το ολοκλήρωμα

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$$

και με κατά παράγοντες ολοκλήρωση κατέληξε στην ισότητα

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1\cdot 2}{x^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right) + (-1)^n n! \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u^{n+1}} du\ .$$

Η σειρά

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

αποκλίνει για κάθε x, άρα είναι ασυμπτωτική. Ο Laguerre όμως απέδειξε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα ισούται τελικά με ένα συνεχές κλάσμα που συγκλίνει.

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = e^{-x} \cfrac{1}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cfrac{1}{\frac{x+5}{4}-\cfrac{\frac{1}{4}}{\frac{x+7}{9}-\cfrac{\frac{1}{9}}{\ddots}}}}}\ .$$

Σύμφωνα με τον T. H. Kjeldsen στο [8], το γεγονός ότι μπορεί κανείς να συνδέσει δύο τόσο ανόμοια μαθηματικά αντικείμενα, ένα ορισμένο ολοκλήρωμα με ένα συνεχές κλάσμα, θα πρέπει να γοήτευσε ιδιαίτερα το Stieltjes, γι' αυτό και στην τελευταία εργασία του ασχολείται με τη γενίκευση αυτής της παρατήρησης του Laguerre.

Το 1886, μετά τη δημοσίευση της διδακτορικής του διατριβής, αρχίζει να εργάζεται στο πανεπιστήμιο της Τουλούζης. Διδάσκει τα μαθήματα του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Στην αρχή ένιωθε κάπως αμήχανα, εξαιτίας της γλώσσας, όμως, έγινε γρήγορα αγαπητός στους μαθητές του, γιατί είχε την ικανότητα να παρουσιάζει με πολύ απλό τρόπο τις πιο δύσκολες θεωρίες και να τους εκπλήσσει. Το 1889 διορίστηκε καθηγητής στο ίδιο πανεπιστήμιο. Από τον Οκτώβριο του 1890 αρχίζει να κουράζεται και να νιώθει τα πρώτα συμπτώματα της αρρώστιας του. Παίρνει άδεια από τη διδασκαλία στο πανεπιστήμιο και τους χειμώνες των ετών 1892 και 1893 τους περνά στην Αλγερία, γιατί η υγεία του επιδεινώνεται άσχημα.

Όσον αφορά τα ενδιαφέροντά του μετά τη μελέτη των ασυμπτωτικών σειρών, αυτά στρέφονται σε θέματα σχετικά με τη συνάρτηση Γ, τη θεωρία των ελλειπτικών συναρτήσεων, τα πολυώνυμα Legendre, τις σφαιρικές συναρτήσεις και φυσικά τα συνεχή κλάσματα.

Παράλληλα με τις άλλες του δημοσιεύσεις, στο διάστημα 1884-1894, δουλεύει την τελευταία του εργασία στα συνεχή κλάσματα. Το πρώτο μέρος της εργασίας αυτής δημοσιεύτηκε το 1894 με τον τίτλο «Recherches sur les fractions continues» και το τέλος της το 1895, μετά το θάνατο του. Όπως γράφει τον Ιούνιο του 1885 σε γράμμα του προς τον Hermite, αρχικά σκόπευε να χωρίσει την εργασία του σε δύο μέρη:

«...*Κύριος στόχος μου είναι να τελειώσω και να τελειοποιήσω τη δουλειά που κάνω τώρα στα συνεχή κλάσματα, όμως για να μην περιέχει πολλά πράγματα ανόμοια θα χωρίσω την εργασία μου σε δύο μέρη: το πρώτο θα είναι το αλγεβρικό, ενώ στο άλλο θα ασχολούμαι με το πρόβλημα της σύγκλισης του συνεχούς κλάσματος...*».

Τελικά, τα αποτελέσματα που σχετίζονταν με το κομμάτι της Ανάλυσης ήταν τόσο σημαντικά, που επισκίασαν το αλγεβρικό κομμάτι.

Αυτό που τον εμπόδιζε να δημοσιεύσει τα αποτελέσματά του ήταν η απόδειξη του πρώτου θεωρήματος του πέμπτου κεφαλαίου της τελικής εργασίας του,[1] το οποίο αργότερα, γενικεύοντάς το κατάλληλα, του επιτρέπει να επεκτείνει την αναλυτική συνέχιση του κλάσματος που μελετά σε μεγαλύτερο σύνολο του μιγαδικού επιπέδου. Κατάφερε να το αποδείξει αυστηρά την τελευταία χρονιά, το 1894.

Η εργασία του αυτή είναι σπουδαία όχι μόνο επειδή πρόκειται για ένα πολύ όμορφο μαθηματικό έργο, αλλά και γιατί ήταν η αρχή της αναλυτικής θεωρίας των συνεχών κλασμάτων. Πρώτος ο Ολλανδός μαθηματικός θεώρησε ένα συνεχές κλάσμα σα μιγαδική συνάρτηση μιας μεταβλητής και μελέτησε την αναλυτική συμπεριφορά του από την πλευρά της μιγαδικής ανάλυσης. Όμως, η εργασία αυτή είναι γνωστή και για το ολοκλήρωμα που σήμερα έχει το όνομα του Stieltjes, αλλά και για το πρόβλημα των ροπών. Μολονότι και τα δυο τους χρησιμοποιήθηκαν από τον Stieltjes ως εργαλεία για να μελετήσει καλύτερα την αναλυτική συμπεριφορά του συνεχούς κλάσματός του, αργότερα αποδείχθηκαν πολύ σημαντικά, αφού πολλές νέες εργασίες της Ανάλυσης ασχολήθηκαν μ' αυτά.

Το 1893 η Ακαδημία Επιστημών του Παρισιού βράβευσε τον Stieltjes για τα αποτελέ-

[1]Πρόκειται για το θεώρημα στη σελίδα 79 αυτής της εργασίας.

σματά του στα συνεχή κλάσματα με το βραβείο Petit d' Ormoy.

Ο T.-J. Stieltjes πέθανε στις 31 Δεκεμβρίου του 1894 στην Τουλούζη.

Σήμερα υπάρχει προς τιμήν του στην Ολλανδία ένα ίδρυμα για τα Μαθηματικά που φέρει το όνομά του.

Βιβλιογραφία

[1] Apostol T., 1974. *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, second edition, New York.

[2] Γιαννόπουλος Α., Δεληγιάννη Ε., 2002. *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.
(http://users.uoa.gr/ apgiannop/real.ps)

[3] Hardy G.H., Wright E.M., 1979. *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, fifth edition, Oxford.

[4] Hawkins T., 1975. *Lebesgue 's theory of integration. It 's origins and development.*, Chelsea Publishing Company, second edition, New York.

[5] Hermite C., 1905. *Correspondance d' Hermite et de Stieltjes*, tome 1 et tome 2, Gauthier-Villars, Paris.
(http://historical.library.cornell.edu/math/title_C.html)

[6] Hobson E.W., 1826. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier 's series*, volume II (first edition), Dover Publications, New York.

[7] Hobson E.W., 1827. *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier 's series*, volume I (second edition), Dover Publications, New York.

[8] Kjeldsen T.-H., 1993. *The Early History of the Moment Problem*, Historia Mathematica 20, 19-44.

[9] Lebesgue H., 1910. *Sur l' intégrale de Stieltjes et sur les opérations linéaires*, Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l' Académie des Sciences, 150, 86-88.

[10] Lebesgue H., 1910. *Sur l' intégration de fonctions discontinues*, Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure (3), tome 27, 361-450.
(http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1910_3_27__361_0)

[11] Lebesgue H., 1973. *Leçons sur l' intégration et la recherche des fonctions primitives*, Chelsea Publishing Company, New York.

[12] Math Archives. *Continued Fractions...An introduction.*, University of Tennessee, Knoxville.
(http://archives.math.utk.edu/articles/atuyl/confrac/)

[13] Mac Tutor History of Mathematics, *Biographies Index*, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland.
(http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/ history/BiogIndex.html)

[14] Ξενικάκης Π., 1999. *Πραγματική Ανάλυση*, εκδόσεις ΖΗΤΗ, δεύτερη έκδοση, Θεσσαλονίκη.

[15] Papadimitrakis M., 2004. *Notes on Measure Theory*, Department of Mathematics, University of Crete.
(http://www.math.uoc.gr/ papadim/Measure Theory 2.pdf)

[16] Radon J., 1913. *Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunctionen*, Sitzungsberichte der kairerlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, 122_{IIa}, 1295-1438.

[17] Riesz F., 1909. *Sur les opérations fonctionelles linéaires*, Comptes Rendus hebdomadaires des Séances de l' Académie des Sciences, 149, 974-977.

[18] Riesz F., 1911. *Sur certains systèmes singuliers d' équations intégrales*, Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure (3), tome 28, 33-62.
(http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1911_3_28__33_0)

[19] Riesz F., 1914. *Démonstration nouvelle d' un théorème concernant les opérations fonctionnelles linéaires*, Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure (3), tome 31, 9-14.
(http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1914_3_31__9_0)

[20] Stieltjes T.-J., 1889. *Sur la réduction en fraction continue d' une série procédant suivant les puissances descendantes d' une variable*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1), tome 3, p. H1-H17.
(http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3__H1_0)

[21] Stieltjes T.-J., 1894. *Recherches sur les fractions continues*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1), tome 8, p. J1-J122.
(http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_4_J1_0)

[22] Stieltjes T.-J., 1895. *Recherches sur les fractions continues*, suite et fin, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1), tome 9, p. A5-A47.
(http://www.numdam.org/item?id=AFST_1895_1_9_1_A5_0)

[23] Stieltjes T.-J. 1914-18. *Œuvres complètes de Thomas Jan Stieltjes, publié par les soins de la Société mathématique d'Amsterdam*, Groningen.
(http://name.umdl.umich.edu/AAS8082.0001.001)

[24] Van Dijk G., *About the life of Thomas Joannes Stieltjes*, Thomas Stieltjes Institute for Mathematics, Leiden, The Netherlands.
(http://www.math.leidenuniv.nl/ stieltjes/life.html)

[25] Wall H.S., 1973. *Analytic Theory of Continued Fractions*, Chelsea Publishing Company, second edition, New York.

[26] Wikipedia. *Continued Fractions.*
(http://en.wikipedia.org/wiki/Continued_fractions)