Ασκήσεις από το *Διανυσματικός Λογισμός* των Marsden - Tromba και από το *Calculus* του Apostol.

1. Βρείτε τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης και την εξίσωση της εφαπτομένης για κάθε μία από τις παρακάτω καμπύλες και για την τιμή του t που δίνεται κάθε φορά.

   (a) $\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin(2t)\,\vec{j}$, $t = 0$.

   (b) $\vec{\sigma}(t) = (t\sin t, t\cos t, \sqrt{3}t)$, $t = 0$.

   (c) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k}$, $t = 0$.

   (d) $\vec{\sigma}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\vec{k}$, $t = 9$.

   Λύση: (a) Είναι

   $$\vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + 2\cos(2t)\,\vec{j}, \quad \vec{r}\,''(t) = -\cos t\,\vec{i} - 4\sin(2t)\,\vec{j}$$

   για κάθε t, οπότε

   $$\vec{r}\,'(0) = 2\,\vec{j}, \qquad \vec{r}\,''(0) = -\vec{i}.$$

   Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\vec{r}(0)$ είναι

   $$\vec{r}(0) + h\vec{r}\,'(0) = \vec{i} + 2h\,\vec{j}, \qquad -\infty < h < +\infty.$$

   (b) Είναι

   $$\vec{\sigma}\,'(t) = (\sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, \sqrt{3}),$$
   $$\vec{\sigma}\,''(t) = (2\cos t - t\sin t, -2\sin t - t\cos t, 0)$$

   για κάθε t, οπότε

   $$\vec{\sigma}\,'(0) = (0, 1, \sqrt{3}), \qquad \vec{\sigma}\,''(0) = (2, 0, 0).$$

   Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\vec{\sigma}(0)$ είναι

   $$\vec{\sigma}(0) + h\vec{\sigma}\,'(0) = (0, 0, 0) + h(0, 1, \sqrt{3}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

   (c) Είναι

   $$\vec{r}\,'(t) = \sqrt{2}\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} - e^{-t}\,\vec{k}, \quad \vec{r}\,''(t) = e^t\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k}$$

   για κάθε t, οπότε

   $$\vec{r}\,'(0) = \sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \qquad \vec{r}\,''(0) = \vec{j} + \vec{k}.$$

   Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\vec{r}(0)$ είναι

   $$\vec{r}(0) + h\,\vec{r}\,'(0) = \vec{j} + \vec{k} + h(\sqrt{2}\,\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

   (d) Είναι

   $$\vec{\sigma}\,'(t) = \vec{i} + \vec{j} + t^{\frac{1}{2}}\,\vec{k}, \quad \vec{\sigma}\,''(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\,\vec{k}$$

   για κάθε t, οπότε

   $$\vec{\sigma}\,'(9) = \vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}, \qquad \vec{\sigma}\,''(9) = \frac{1}{6}\,\vec{k}.$$

   Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $\vec{\sigma}(9)$ είναι

   $$\vec{\sigma}(9) + h\,\vec{\sigma}\,'(9) = (9\,\vec{i} + 9\,\vec{j} + 18\,\vec{k}) + h(\vec{i} + \vec{j} + 3\,\vec{k}), \qquad -\infty < h < +\infty.$$

2. Βρείτε την καμπύλη $\vec{\sigma}$ αν $\vec{\sigma}(0) = (0, -5, 1)$ και $\vec{\sigma}\,'(t) = (t, e^t, t^2)$.

Λύση: Αν $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, τότε

$$x'(t) = t, \qquad y'(t) = e^t, \quad z'(t) = t^2$$

και

$$x(0) = 0, \quad y(0) = -5, \quad z(0) = 1.$$

Με ολοκλήρωση βρίσκουμε

$$x(t) = \frac{t^2}{2}, \quad y(t) = e^t - 6, \quad z(t) = \frac{t^3}{3} + 1$$

οπότε

$$\vec{\sigma}(t) = \Big(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1\Big)$$

για κάθε t.

3. Βρείτε καμπύλες $\vec{\sigma}(t)$ που να περιγράφουν τις παρακάτω τροχιές.

(a) $\{(x, y) \,|\, y = e^x\}$.

(b) $\{(x, y) \,|\, 4x^2 + y^2 = 1\}$.

(c) Μια ευθεία στον $\mathbb{R}^3$ που περνάει από την αρχή των αξόνων και από το σημείο (a, b, c).

(d) $\{(x, y) \,|\, 9x^2 + 16y^2 = 4\}$.

Λύση: (a) $\vec{\sigma}(t) = (t, e^t),\ -\infty < t < +\infty$.

(b) $\vec{\sigma}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

(c) $\vec{\sigma}(t) = t(a, b, c) = (at, bt, ct),\ -\infty < t < +\infty$.

(d) $\vec{\sigma}(t) = (\frac{2}{3}\cos t, \frac{1}{2}\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

4. Υποθέτουμε ότι ένα σωματίδιο ακολουθεί την καμπύλη $\vec{\sigma}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ την οποία εγκαταλείπει στη διεύθυνση της εφαπτομένης όταν $t = 2$. Πού βρίσκεται την χρονική στιγμή $t = 3$;

Λύση: Είναι

$$\vec{\sigma}\,'(t) = (2t, 3t^2 - 4, 0)$$

για κάθε $t \le 2$, οπότε

$$\vec{\sigma}\,'(2) = (4, 8, 0).$$

Για $t \ge 2$ το σωματίδιο διαγράφει ευθεία κίνηση με σταθερή διανυσματική ταχύτητα ίση με $(4, 8, 0)$ ξεκινώντας από το σημείο $\vec{\sigma}(2) = (4, 0, 0)$. Άρα η κίνησή του για $t \ge 2$ έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(t) = (4, 0, 0) + (t - 2)(4, 8, 0), \qquad t \ge 2.$$

Άρα όταν $t = 3$ η θέση του σωματιδίου θα είναι

$$\vec{r}(3) = (8, 8, 0).$$

5. Έστω $\vec{f}(t) = \frac{2t}{1+t^2}\,\vec{i} + \frac{1-t^2}{1+t^2}\,\vec{j} + \vec{k}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η γωνία ανάμεσα στα $\vec{f}(t)$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του t). Ποιά είναι η τιμή της;

Λύση: Είναι

$$\vec{f}\,'(t) = \frac{2(1 - t^2)}{(1 + t^2)^2}\,\vec{i} - \frac{4t}{(1 + t^2)^2}\,\vec{j},$$

οπότε

$$\vec{f}(t) \cdot \vec{f}\,'(t) = \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} - \frac{4t(1-t^2)}{(1+t^2)^3} = 0$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Άρα η γωνία ανάμεσα στα $\vec{f}(t)$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι σταθερή $\frac{\pi}{2}$.

6. Έστω σταθερό $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, και δυο φορές παραγωγίσιμη $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^n$ ώστε $\vec{f}\,'(t) \neq \vec{0}$ για κάθε t στο διάστημα I. Αν $\vec{f}(t) \cdot \vec{u} = t$ για κάθε $t \in I$ και η γωνία ανάμεσα στα $\vec{u}$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι σταθερή, αποδείξτε ότι τα $\vec{f}\,'(t)$ και $\vec{f}\,''(t)$ είναι ορθογώνια.

   Λύση: Από το ότι $\vec{f}(t) \cdot \vec{u} = t$ για κάθε $t \in I$ συνεπάγεται με παραγώγιση ότι

$$\vec{f}\,'(t) \cdot \vec{u} = 1$$

   για κάθε $t \in I$.

   Η γωνία ανάμεσα στα $\vec{u}$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι σταθερή, οπότε και το συνημίτονο της γωνίας είναι σταθερό. Άρα υπάρχει σταθερά $c \in [-1, 1]$ ώστε να ισχύει

$$\frac{\vec{f}\,'(t) \cdot \vec{u}}{\|\vec{f}\,'(t)\|\|\vec{u}\|} = c$$

   για κάθε $t \in I$.

   Συνεπάγεται

$$\frac{1}{\|\vec{f}\,'(t)\|\|\vec{u}\|} = c$$

   για κάθε $t \in I$, οπότε $c \neq 0$ και

$$\vec{f}\,'(t) \cdot \vec{f}\,'(t) = \|\vec{f}\,'(t)\|^2 = \frac{1}{c^2\|\vec{u}\|^2}$$

   για κάθε $t \in I$.

   Παραγωγίζουμε:

$$\vec{f}\,''(t) \cdot \vec{f}\,'(t) + \vec{f}\,'(t) \cdot \vec{f}\,''(t) = 0$$

   οπότε

$$2\vec{f}\,'(t) \cdot \vec{f}\,''(t) = 0$$

   για κάθε $t \in I$.

   Άρα τα $\vec{f}\,'(t)$ και $\vec{f}\,''(t)$ είναι κάθετα.

7. Έστω $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^3$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I. Αν $\vec{g} = \vec{f} \times \vec{f}\,'$, αποδείξτε ότι $\vec{g}\,' = \vec{f} \times \vec{f}\,''$.

   Λύση: Είναι

$$\vec{g}\,' = \vec{f}\,' \times \vec{f}\,' + \vec{f} \times \vec{f}\,'' = \vec{0} + \vec{f} \times \vec{f}\,'' = \vec{f} \times \vec{f}\,''.$$

8. Έστω $\vec{f} : I \to \mathbb{R}^3$ τρεις φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα I. Αν $\vec{g} = \vec{f} \cdot (\vec{f}\,' \times \vec{f}\,'')$, αποδείξτε ότι $\vec{g}\,' = \vec{f} \cdot (\vec{f}\,' \times \vec{f}\,''')$.

   Λύση: Είναι

$$\begin{aligned} \vec{g}\,' &= \vec{f}\,' \cdot (\vec{f}\,' \times \vec{f}\,'') + \vec{f} \cdot (\vec{f}\,' \times \vec{f}\,'')' = \vec{0} + \vec{f} \cdot (\vec{f}\,'' \times \vec{f}\,'' + \vec{f}\,' \times \vec{f}\,''') \\ &= \vec{f} \cdot (\vec{0} + \vec{f}\,' \times \vec{f}\,''') = \vec{f} \cdot (\vec{f}\,' \times \vec{f}\,'''). \end{aligned}$$

9. (i) Αν $\vec{f}\,'(t) = \vec{0}$ για κάθε t σε κάποιο διάστημα I, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερό $\vec{u}$ ώστε $\vec{f}(t) = \vec{u}$ για κάθε $t \in I$.

   (ii) Αν $\vec{f}\,''(t) = t\,\vec{u} + \vec{v}$ για κάθε t στο διάστημα I με $0 \in I$ και $\vec{f}(0) = \vec{A}$, $\vec{f}\,'(0) = \vec{B}$, βρείτε τον τύπο του $\vec{f}(t)$.

   Λύση: (i) Έστω
$$\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)), \qquad t \in I.$$
   Τότε
$$({f_1}'(t), \dots, {f_n}'(t)) = \vec{f}\,'(t) = \vec{0} = (0, \dots, 0)$$
   για κάθε $t \in I$, οπότε
$${f_k}'(t) = 0$$
   για κάθε $t \in I$ και κάθε $k = 1, \dots, n$.

   Άρα υπάρχουν σταθερές $u_k \in \mathbb{R}$ ώστε
$$f_k(t) = u_k$$
   για κάθε $t \in I$ και κάθε $k = 1, \dots, n$.

   Αν ορίσουμε $\vec{u} = (u_1, \dots, u_k)$, τότε
$$\vec{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) = (u_1, \dots, u_k) = \vec{u}$$
   για κάθε $t \in I$.

   (ii) Είναι
$$\Big(\vec{f}\,'(t) - \frac{t^2}{2}\,\vec{u} - t\,\vec{v}\Big)' = \vec{f}\,''(t) - t\,\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$
   για κάθε $t \in I$. Από το (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ ώστε
$$\vec{f}\,'(t) - \frac{t^2}{2}\,\vec{u} - t\,\vec{v} = \vec{c}$$
   για κάθε $t \in I$. Με $t = 0$ βρίσκουμε $\vec{c} = \vec{B}$, οπότε
$$\vec{f}\,'(t) = \frac{t^2}{2}\,\vec{u} + t\,\vec{v} + \vec{B}$$
   για κάθε $t \in I$.

   Τώρα
$$\Big(\vec{f}(t) - \frac{t^3}{6}\,\vec{u} - \frac{t^2}{2}\,\vec{v} - t\,\vec{B}\Big)' = \vec{f}\,'(t) - \frac{t^2}{2}\,\vec{u} - t\,\vec{v} - \vec{B} = \vec{0}$$
   για κάθε $t \in I$. Από το (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$ ώστε
$$\vec{f}(t) - \frac{t^3}{6}\,\vec{u} - \frac{t^2}{2}\,\vec{v} - t\,\vec{B} = \vec{d}$$
   για κάθε $t \in I$. Με $t = 0$ βρίσκουμε $\vec{d} = \vec{A}$, οπότε
$$\vec{f}(t) = \frac{t^3}{6}\,\vec{u} + \frac{t^2}{2}\,\vec{v} + t\,\vec{B} + \vec{A}$$
   για κάθε $t \in I$.

10. Έστω οποιαδήποτε παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}^n$ καμπύλης C η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Αποδείξτε ότι: *το εσωτερικό γινόμενο της διανυσματικής ταχύτητας και της διανυσματικής επιτάχυνσης είναι ίσο με το μισό του ρυθμού μεταβολής του τετραγώνου της αριθμητικής ταχύτητας.* Δηλαδή

$$\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t)=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,v^2(t)$$

για κάθε $t\in[a,b]$. ($v(t)=\|\vec{v}(t)\|$.)

Λύση: Είναι

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,v^2(t)=\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}(\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t))=\frac{1}{2}\,(\vec{a}(t)\cdot\vec{v}(t)+\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t))=\vec{v}(t)\cdot\vec{a}(t).$$

11. Έστω ότι η $\vec{f}\,:\,I\to\mathbb{R}^n$ έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα I, ότι $\vec{f}(t)\neq\vec{0}$, $\vec{f}\,'(t)\neq\vec{0}$ και ότι τα $\vec{f}(t)$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι παράλληλα για κάθε $t\in I$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}\neq\vec{0}$, και αριθμητική συνάρτηση $h\,:\,I\to\mathbb{R}$ ώστε $h(t)>0$ για κάθε $t\in I$ και $\vec{f}(t)=h(t)\,\vec{u}$ για κάθε $t\in I$. Επομένως, το $\vec{f}(t)$ βρίσκεται πάνω σε μια σταθερή ημιευθεία με κορυφή το $\vec{0}$.

Λύση: Επειδή τα $\vec{f}(t)$ και $\vec{f}\,'(t)$ είναι παράλληλα για κάθε $t\in I$, υπάρχει συνάρτηση $g\,:\,I\to\mathbb{R}$ ώστε

$$\vec{f}\,'(t)=g(t)\vec{f}(t)$$

για κάθε $t\in I$.

Συνεπάγεται

$$\vec{f}\,'(t)\cdot\vec{f}(t)=g(t)\,\vec{f}(t)\cdot\vec{f}(t)=g(t)\|\vec{f}(t)\|^2$$

οπότε

$$g(t)=\frac{\vec{f}\,'(t)\cdot\vec{f}(t)}{\|\vec{f}(t)\|^2}$$

για κάθε $t\in I$. Άρα η g είναι συνεχής στο I.

Θεωρούμε οποιαδήποτε αντιπαράγωγο $\int g(t)\,dt$ της g στο I και ορίζουμε την $h\,:\,I\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(t)=e^{\int g(t)\,dt},\qquad t\in I.$$

Προφανώς

$$h(t)>0$$

για κάθε $t\in I$ και

$$\Big(\frac{1}{h(t)}\,\vec{f}(t)\Big)'=-\frac{h'(t)}{h(t)^2}\,\vec{f}(t)+\frac{1}{h(t)}\,\vec{f}\,'(t)=-\frac{g(t)}{h(t)}\,\vec{f}(t)+\frac{1}{h(t)}\,g(t)\,\vec{f}(t)=\vec{0}$$

για κάθε $t\in I$.

Άρα υπάρχει $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{u}\neq\vec{0}$ ώστε

$$\frac{1}{h(t)}\,\vec{f}(t)=\vec{u}$$

και, επομένως,

$$\vec{f}(t)=h(t)\,\vec{u}$$

για κάθε $t\in I$.

12. Έστω $\vec{r}(t) = f(t)\,\vec{A} + \vec{B}$ για κάθε $t \in [a,b]$, όπου $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{A} \neq \vec{0}$ και η $f\,:\,[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$. Τότε η τροχιά της καμπύλης C με παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}$ βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία και αποδείξτε ότι η διανυσματική επιτάχυνση $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$ είναι παράλληλη με την διανυσματική ταχύτητα $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$.

   Λύση: Είναι σαφές ότι για κάθε $t \in [a,b]$ το σημείο $\vec{r}(t)$ βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση
   $$s\,\vec{A} + \vec{B}, \qquad -\infty < s < +\infty.$$
   Είναι
   $$\vec{v}(t) = f'(t)\,\vec{A}, \qquad \vec{a}(t) = f''(t)\,\vec{A}.$$
   Άρα τα $\vec{v}(t)$ και $\vec{a}(t)$ είναι πολλαπλάσια του ίδιου $\vec{A}$, οπότε είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου.

13. Έστω $\vec{r}(t) = r\cos(\omega t)\,\vec{i} + r\sin(\omega t)\,\vec{j}\ \ (r > 0, \omega > 0)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε η τροχιά της καμπύλης C με παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα r. Αποδείξτε για την διανυσματική επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ ότι $\vec{a}(t) = -\omega^2\,\vec{r}(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$.

   Λύση: Είναι
   $$(r\cos(\omega t))^2 + (r\sin(\omega t))^2 = r^2,$$
   οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = r^2$.

   Επίσης,
   $$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -\omega r\sin(\omega t)\,\vec{i} + \omega r\cos(\omega t)\,\vec{j}$$
   και
   $$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = -\omega^2 r\cos(\omega t)\,\vec{i} - \omega^2 r\sin(\omega t)\,\vec{j} = -\omega^2\,\vec{r}(t)$$
   για κάθε $t \in [a,b]$.

14. Έστω $\vec{r}(t) = \kappa\cos(\omega t)\,\vec{i} + \lambda\sin(\omega t)\,\vec{j}\ \ (\kappa > 0, \lambda > 0, \omega > 0)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε η τροχιά της καμπύλης C με παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}$ βρίσκεται πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$. Αποδείξτε για την διανυσματική επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ ότι $\vec{a}(t) = -\omega^2\,\vec{r}(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$.

   Λύση: Είναι
   $$\frac{(\kappa\cos(\omega t))^2}{\kappa^2} + \frac{(\lambda\sin(\omega t))^2}{\lambda^2} = 1,$$
   οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$.

   Επίσης,
   $$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -\omega\kappa\sin(\omega t)\,\vec{i} + \omega\lambda\cos(\omega t)\,\vec{j}$$
   και
   $$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = -\omega^2\kappa\cos(\omega t)\,\vec{i} - \omega^2\lambda\sin(\omega t)\,\vec{j} = -\omega^2\,\vec{r}(t)$$
   για κάθε $t \in [a,b]$.

15. Έστω $\vec{r}(t) = \kappa\cosh(\omega t)\,\vec{i} + \lambda\sinh(\omega t)\,\vec{j}\ \ (\kappa > 0, \lambda > 0, \omega > 0)$ για κάθε $t \in [a,b]$. Τότε η τροχιά της καμπύλης C με παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}$ βρίσκεται πάνω στον δεξιό κλάδο της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2} - \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$. Αποδείξτε για την διανυσματική επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ ότι $\vec{a}(t) = \omega^2\,\vec{r}(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$. (Θυμηθείτε: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.)

Λύση: Είναι
$$\frac{(\kappa\cosh(\omega t))^2}{\kappa^2}-\frac{(\lambda\sinh(\omega t))^2}{\lambda^2}=1,$$
και
$$\kappa\cosh(\omega t)>0$$
οπότε η τροχιά της καμπύλης C βρίσκεται πάνω στον δεξιό κλάδο της υπερβολής με εξίσωση $\frac{x^2}{\kappa^2}-\frac{y^2}{\lambda^2}=1$.

Επίσης,
$$\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=\omega\kappa\sinh(\omega t)\,\vec{i}+\omega\lambda\cosh(\omega t)\,\vec{j}$$
και
$$\vec{a}(t)=\vec{r}\,''(t)=\omega^2\kappa\cosh(\omega t)\,\vec{i}+\omega^2\lambda\sinh(\omega t)\,\vec{j}=\omega^2\,\vec{r}(t)$$
για κάθε $t\in[a,b]$.

16. Έστω $\vec{r}(t)=r\cos(\omega t)\,\vec{i}+r\sin(\omega t)\,\vec{j}+\kappa\omega t\,\vec{k}\quad(r>0,\kappa>0,\omega>0)$ για κάθε $t\in[a,b]$. Τότε η τροχιά της καμπύλης C με παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}$ βρίσκεται πάνω σε μια έλικα στον $\mathbb{R}^3$. Αποδείξτε ότι:

    (i) σε κάθε σημείο της τροχιάς η εφαπτόμενη ευθεία σχηματίζει σταθερή γωνία με τον z-άξονα το συνημίτονο της οποίας είναι ίσο με $\frac{\kappa}{\sqrt{r^2+\kappa^2}}$.

    (ii) η διανυσματική ταχύτητα $\vec{v}(t)$ και η διανυσματική επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ έχουν σταθερά μήκη και $\frac{\|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\|}{\|\vec{v}(t)\|^3}=\frac{r}{r^2+\kappa^2}$ για κάθε $t\in[a,b]$.

    (iii) Αν $\vec{u}(t)=\sin(\omega t)\,\vec{i}-\cos(\omega t)\,\vec{j}$, αποδείξτε ότι $\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)=A\,\vec{u}(t)+B\,\vec{k}$ για κάθε $t\in[a,b]$ και βρείτε τις σταθερές A,B συναρτήσει των r,κ,ω.

    Λύση: (i) Σε κάθε σημείο $\vec{r}(t)$ η εφαπτόμενη ευθεία είναι παράλληλη στο
$$\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=-\omega r\sin(\omega t)\,\vec{i}+\omega r\cos(\omega t)\,\vec{j}+\kappa\omega\,\vec{k},$$
    οπότε η γωνία της με τον z-άξονα είναι ίδια με την γωνία ανάμεσα στα $\vec{v}(t)$ και $\vec{k}$. Το συνημίτονο της γωνίας αυτής είναι ίσο με
$$\frac{\vec{v}(t)\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}(t)\|\|\vec{k}\|}=\frac{\kappa\omega}{\omega\sqrt{r^2+\kappa^2}}=\frac{\kappa}{\sqrt{r^2+\kappa^2}}.$$
    (ii) Είναι
$$\vec{a}(t)=\vec{r}\,''(t)=-\omega^2 r\cos(\omega t)\,\vec{i}-\omega^2 r\sin(\omega t)\,\vec{j},$$
    οπότε
$$\|\vec{v}(t)\|=\omega\sqrt{r^2+\kappa^2},\qquad\|\vec{a}(t)\|=\omega^2 r.$$
    Τώρα,
$$\begin{aligned}\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)&=\omega^3 r\big(r\sin(\omega t)\,\vec{i}-r\cos(\omega t)\,\vec{j}-\kappa\,\vec{k}\big)\times\big(\cos(\omega t)\,\vec{i}+\sin(\omega t)\,\vec{j}\big)\\&=\omega^3 r\big(r\sin(\omega t)\cos(\omega t)\,\vec{i}\times\vec{i}+r\sin^2(\omega t)\,\vec{i}\times\vec{j}-r\cos^2(\omega t)\,\vec{j}\times\vec{i}\\&\qquad-r\cos(\omega t)\sin(\omega t)\,\vec{j}\times\vec{j}-\kappa\cos(\omega t)\,\vec{k}\times\vec{i}-\kappa\sin(\omega t)\,\vec{k}\times\vec{j}\big)\\&=\omega^3 r\big(r\sin^2(\omega t)\,\vec{k}+r\cos^2(\omega t)\,\vec{k}-\kappa\cos(\omega t)\,\vec{j}+\kappa\sin(\omega t)\,\vec{i}\big)\\&=\omega^3 r\big(\kappa\sin(\omega t)\,\vec{i}-\kappa\cos(\omega t)\,\vec{j}+r\,\vec{k}\big).\end{aligned}$$
    Άρα
$$\frac{\|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)\|}{\|\vec{v}(t)\|^3}=\frac{\omega^3 r\sqrt{r^2+\kappa^2}}{\omega^3\sqrt{r^2+\kappa^2}(r^2+\kappa^2)}=\frac{r}{r^2+\kappa^2}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

(iii) Από τον προηγούμενο υπολογισμό,

$$\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = \omega^3 r\kappa\, \vec{u}(t) + \omega^3 r^2\, \vec{k}$$

οπότε $A = \omega^3 r\kappa$ και $B = \omega^3 r^2$.

17. Έστω $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης C στον $\mathbb{R}^3$. Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις είτε δώστε απόδειξη είτε βρείτε αντιπαράδειγμα.

(i) Αν η διανυσματική ταχύτητα είναι σταθερή, τότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

(ii) Αν η αριθμητική ταχύτητα είναι σταθερή, τότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

(iii) Αν η διανυσματική επιτάχυνση είναι σταθερή, τότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

(iv) Αν η διανυσματική ταχύτητα και η διανυσματική επιτάχυνση είναι κάθετες, τότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

Λύση: Το να βρίσκεται ένα σύνολο σημείων - για παράδειγμα η τροχιά μιας καμπύλης - του $\mathbb{R}^3$ πάνω σε κάποιο επίπεδο σημαίνει ότι υπάρχουν αριθμοί a, b, c, d με $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ώστε να ισχύει $ax + by + cz = d$ για κάθε (x, y, z) που ανήκει στο εν λόγω σύνολο. Αυτό μπορεί να γραφτεί και στην μορφή $(a, b, c) \cdot (x, y, z) = d$, οπότε μπορούμε ισοδύναμα να πούμε ότι υπάρχει $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ και αριθμός d ώστε να ισχύει $\vec{p} \cdot \vec{u} = d$ για κάθε $\vec{u}$ στο σύνολο.

(i) Έστω $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C. Υποθέτουμε ότι

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \vec{k}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Συνεπάγεται

$$(\vec{r}(t) - t\,\vec{k})' = \vec{r}\,'(t) - \vec{k} = \vec{0}$$

για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε υπάρχει $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ ώστε

$$\vec{r}(t) - t\,\vec{k} = \vec{A}$$

και επομένως

$$\vec{r}(t) = t\,\vec{k} + \vec{A}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα μπορούμε να βρούμε ένα $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ έτσι ώστε

$$\vec{p} \cdot \vec{k} = 0,$$

οπότε θα ισχύει

$$\vec{p} \cdot \vec{r}(t) = t\,\vec{p} \cdot \vec{k} + \vec{p} \cdot \vec{A} = \vec{p} \cdot \vec{A}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Άρα η τροχιά της C βρίσκεται στο επίπεδο που καθορίζεται από το $\vec{p}$ και από το $d = \vec{p} \cdot \vec{A}$.

(ii) Αυτό δεν είναι πάντα σωστό. Ας θεωρήσουμε την έλικα με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j} + t\,\vec{k}, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Είναι
$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$
οπότε
$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{2}$$
για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Αν η τροχιά της έλικας βρισκόταν πάνω σε ένα επίπεδο, θα υπήρχαν $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ και αριθμός d ώστε να ισχύει
$$\vec{p} \cdot \vec{r}(t) = d$$
για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

Παραγωγίζουμε δυο φορές, οπότε
$$\vec{p} \cdot \vec{v}(t) = 0$$
$$\vec{p} \cdot \vec{a}(t) = 0$$
για κάθε $t \in [0, 2\pi]$. Από την δεύτερη ισότητα με $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$ βρίσκουμε $\vec{p} \cdot \vec{i} = 0$ και $\vec{p} \cdot \vec{j} = 0$. Άρα $\vec{p} = \lambda\,\vec{k}$ για κάποιο $\lambda \neq 0$. Από την $\vec{p} \cdot \vec{v}(t) = 0$ συνεπάγεται
$$\lambda = 0,$$
δηλαδή άτοπο.

(iii) Έστω $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C. Υποθέτουμε ότι
$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \vec{k}$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

Συνεπάγεται
$$(\vec{r}\,'(t) - t\,\vec{k})' = \vec{r}\,''(t) - \vec{k} = \vec{0}$$
για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε υπάρχει $\vec{A} \in \mathbb{R}^3$ ώστε
$$\vec{r}\,'(t) - t\,\vec{k} = \vec{A}$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

Συνεπάγεται
$$\Big(\vec{r}(t) - \frac{t^2}{2}\,\vec{k} - t\,\vec{A}\Big)' = \vec{r}\,'(t) - t\,\vec{k} - \vec{A} = \vec{0}$$
για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε υπάρχει $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$ ώστε
$$\vec{r}(t) - \frac{t^2}{2}\,\vec{k} - t\,\vec{A} = \vec{B}$$
και επομένως
$$\vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\,\vec{k} + t\,\vec{A} + \vec{B}$$
για κάθε $t \in [a, b]$.

Τώρα μπορούμε να βρούμε ένα $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{p} \neq \vec{0}$ έτσι ώστε
$$\vec{p} \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{p} \cdot \vec{A} = 0$$
οπότε θα ισχύει
$$\vec{p} \cdot \vec{r}(t) = \frac{t^2}{2}\,\vec{p} \cdot \vec{k} + t\,\vec{p} \cdot \vec{A} + \vec{p} \cdot \vec{B} = \vec{p} \cdot \vec{B}$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Άρα η τροχιά της C βρίσκεται στο επίπεδο που καθορίζεται από το $\vec{p}$ και από το $d = \vec{p} \cdot \vec{B}$.

(iv) Θεωρούμε πάλι την έλικα του (ii). Αποδείξαμε ότι η τροχιά της έλικας δεν βρίσκεται σε ένα επίπεδο. Όμως

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = -\cos t\,\vec{i} - \sin t\,\vec{j}$$

οπότε

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [0, 2\pi]$.

18. Έστω $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης C στον $\mathbb{R}^3$. Έστω $\vec{v} \neq \vec{0}$ η διανυσματική ταχύτητα και $\vec{a}$ η διανυσματική επιτάχυνση του σημείου $\vec{r} \neq \vec{0}$.

    (i) Αν $\vec{r}(t) \times \vec{a}(t) = \vec{0}$ για κάθε $t \in [a, b]$, αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερό $\vec{c}$ ώστε $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{c}$ για κάθε $t \in [a, b]$.

    (ii) Αν $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{c}$ για κάθε $t \in [a, b]$, αποδείξτε ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε κάποιο επίπεδο. (Διακρίνατε περιπτώσεις: $\vec{c} \neq \vec{0}$ και $\vec{c} = \vec{0}$.)

    (iii) Αν για κάθε $t \in [a, b]$ η $\vec{a}(t)$ είναι αρνητικό πολλαπλάσιο του $\vec{r}(t)$, αποδείξτε ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε κάποιο επίπεδο.

    Λύση: (i) Είναι

    $$(\vec{r}(t) \times \vec{v}(t))' = \vec{v}(t) \times \vec{v}(t) + \vec{r}(t) \times \vec{a}(t) = \vec{r}(t) \times \vec{a}(t) = \vec{0}$$

    για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε υπάρχει σταθερό $\vec{c}$ ώστε

    $$\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{c}$$

    για κάθε $t \in [a, b]$.

    (ii) Έστω $\vec{c} \neq \vec{0}$. Τότε

    $$\vec{c} \cdot \vec{r}(t) = (\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

    για κάθε $t \in [a, b]$, οπότε η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε επίπεδο. (Δείτε την αρχή της λύσης της άσκησης 17.)

    Έστω $\vec{c} = \vec{0}$. Τότε, επειδή $\vec{r}(t) \neq \vec{0}$ και $\vec{v}(t) \neq \vec{0}$, από την $\vec{r}(t) \times \vec{v}(t) = \vec{0}$ συνεπάγεται ότι τα $\vec{r}(t)$ και $\vec{v}(t)$ είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου. Από την άσκηση 11 συνεπάγεται ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω σε μια ημιευθεία, οπότε βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο.

    (iii) Άμεση συνέπεια των (i) και (ii).

19. Έστω $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ η παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης C στον $\mathbb{R}^2$ η οποία βρίσκεται πάνω στην έλλειψη με εξίσωση $3x^2 + y^2 = 3$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \in [a, b]$ η οριζόντια συνιστώσα της διανυσματικής ταχύτητας είναι ίση με $-y(t)$.

    (i) Το σημείο $\vec{r}(t)$ κινείται πάνω στην έλλειψη με την φορά των δεικτών του ρολογιού ή με την αντίθετη φορά;

    (ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $t \in [a, b]$ η κατακόρυφη συνιστώσα της διανυσματικής ταχύτητας είναι σταθερό πολλαπλάσιο του $x(t)$.

    (iii) Πόσος χρόνος απαιτείται για να κάνει το $\vec{r}(t)$ μια πλήρη περιστροφή της έλλειψης;

    Λύση: (i) Είναι $x'(t) = -y(t)$. Άρα, αν $y(t) > 0$, τότε το $x(t)$ ελλαττώνεται και, αν

$y(t) < 0$, τότε το $x(t)$ αυξάνεται. Άρα το $\vec{r}(t)$ κινείται πάνω στην έλλειψη με την αντίθετη φορά των δεικτών του ρολογιού.

(ii) Από την $3x^2(t) + y^2(t) = 3$ με παραγώγιση βρίσκουμε

$$3x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0,$$

οπότε

$$y(t)(-3x(t) + y'(t)) = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Αν $y(t) \neq 0$, τότε

$$y'(t) = 3x(t).$$

Λόγω συνέχειας, η σχέση αυτή ισχύει για κάθε $t \in [a, b]$.

(iii) Έστω ότι $\vec{r}(0) = (1, 0)$, δηλαδή $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$.

Θεωρούμε την

$$f(t) = 3\big(x(t) - \cos(\sqrt{3}t)\big)^2 + \big(y(t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big)^2$$

και βρίσκουμε

$$\begin{aligned} f'(t) &= 6\big(x(t) - \cos(\sqrt{3}t)\big)\big(-y(t) + \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big) \\ &\quad + 2\big(y(t) - \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\big)\big(3x(t) - 3\cos(\sqrt{3}t)\big) = 0. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχει αριθμός c ώστε $f(t) = c$ για κάθε $t \in [a, b]$ και από τις $x(0) = 1$ και $y(0) = 0$ βρίσκουμε ότι $c = f(0) = 0$. Άρα

$$x(t) = \cos(\sqrt{3}t), \qquad y(t) = \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Είναι σαφές ότι χρειάζεται χρόνος $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ για να ολοκληρωθεί μια περιστροφή της έλλειψης.

20. Έστω $\vec{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης C στον $\mathbb{R}^2$. Υποθέτουμε ότι η τροχιά της C βρίσκεται μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο του $\mathbb{R}^2$, ότι η τροχιά περιέχει το σημείο $(\frac{3}{2}, 1)$ και ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο $\vec{r}(t)$ έχει αρνητική κλίση. Έστω $\theta(t)$ η γωνία ανάμεσα στο $\vec{r}(t)$ και στον x-άξονα και $\phi(t)$ η γωνία ανάμεσα στο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\vec{r}(t)$ και στον x-άξονα. Αν $3\tan\phi(t) = 4\cot\theta(t)$ για κάθε $t \in [a, b]$, βρείτε την εξίσωση της τροχιάς της C και σχεδιάστε την.

Λύση: Έστω $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ για κάθε $t \in [a, b]$.

Το ότι η τροχιά της C βρίσκεται μέσα στο πρώτο τεταρτημόριο του $\mathbb{R}^2$ σημαίνει ότι

$$x(t) > 0, \qquad y(t) > 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Το ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο $\vec{r}(t)$ έχει αρνητική κλίση και το ότι $\phi(t)$ είναι η γωνία ανάμεσα στο εφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο $\vec{r}(t)$ και στον x-άξονα σημαίνει ότι

$$\tan\phi(t) = \frac{y'(t)}{x'(t)} < 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Τέλος, το ότι $\theta(t)$ είναι η γωνία ανάμεσα στο $\vec{r}(t)$ και στον x-άξονα σημαίνει ότι

$$\tan\theta(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Από την $3\tan\phi(t) = 4\cot\theta(t)$ συνεπάγεται

$$3\,\frac{y'(t)}{x'(t)} = 4\,\frac{x(t)}{y(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$4x(t)x'(t) - 3y(t)y'(t) = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\big(4x^2(t) - 3y^2(t)\big)' = 0$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε

$$4x^2(t) - 3y^2(t) = c$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Για κάποια τιμή του t ισχύει $x(t) = \frac{3}{2}$, $y(t) = 1$. Άρα

$$4x^2(t) - 3y^2(t) = 6$$

για κάθε $t \in [a,b]$.

Άρα η εξίσωση της τροχιάς της C είναι

$$4x^2 - 3y^2 = 6, \quad x, y > 0.$$

21. Έστω $\vec{A}, \vec{B} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ με γωνία θ ανάμεσά τους ($0 < \theta < \pi$) και $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης C στον $\mathbb{R}^3$ η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Υποθέτουμε ότι $\vec{r}\,'(t) = \vec{A} \times \vec{r}(t)$ για κάθε $t \in [a,b]$ και $\vec{r}(0) = \vec{B}$.

    (i) Αποδείξτε ότι η διανυσματική επιτάχυνση είναι κάθετη στο $\vec{A}$.

    (ii) Αποδείξτε ότι η αριθμητική ταχύτητα είναι σταθερή και υπολογίστε την σταθερή τιμή της συναρτήσει των $\vec{A}, \vec{B}, \theta$.

    (iii) Περιγράψτε την τροχιά της C σε σχέση με τα $\vec{A}, \vec{B}$.

    Λύση: (i) Είναι

    $$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \vec{A} \times \vec{r}\,'(t)$$

    οπότε

    $$\vec{a}(t) \cdot \vec{A} = (\vec{A} \times \vec{r}\,'(t)) \cdot \vec{A} = 0$$

    και επομένως η διανυσματική επιτάχυνση είναι κάθετη στο $\vec{A}$ για κάθε $t \in [a,b]$.

    (ii) Είναι

    $$\frac{d}{dt}\,v^2(t) = \frac{d}{dt}\,\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{v}\,'(t) \cdot \vec{v}(t) = 2\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 2(\vec{A} \times \vec{r}\,'(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0.$$

    Άρα υπάρχει σταθερά c ώστε

    $$v(t) = c$$

    για κάθε $t \in [a,b]$.

Τώρα

$$c = v(0) = \|\vec{v}(0)\| = \|\vec{r}\,'(0)\| = \|\vec{A} \times \vec{r}(0)\| = \|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| \sin\theta.$$

(iii) Είναι

$$\frac{d}{dt}\|\vec{r}(t)\|^2 = \frac{d}{dt}\,\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = 2\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{r}(t) = 2(\vec{A} \times \vec{r}(t)) \cdot \vec{r}(t) = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα υπάρχει σταθερά κ ώστε

$$\|\vec{r}(t)\| = \kappa$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Με $t = 0$ βρίσκουμε

$$\|\vec{r}(t)\| = \|\vec{B}\|$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Επίσης, είναι

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{A} = (\vec{A} \times \vec{r}(t)) \cdot \vec{A} = 0$$

οπότε

$$(\vec{r}(t) \cdot \vec{A})' = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Άρα υπάρχει σταθερά λ ώστε

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{A} = \lambda$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Με $t = 0$ βρίσκουμε

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{A} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

οπότε

$$(\vec{r}(t) - \vec{B}) \cdot \vec{A} = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Θεωρούμε την προβολή του $\vec{B}$ στο $\vec{A}$, δηλαδή το

$$\vec{C} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\,\vec{A}.$$

Τότε

$$(\vec{r}(t) - \vec{C}) \cdot \vec{C} = (\vec{r}(t) - \vec{B}) \cdot \vec{C} + (\vec{B} - \vec{C}) \cdot \vec{C} = 0 + 0 = 0$$

για κάθε $t \in [a, b]$. Επομένως

$$\|\vec{r}(t) - \vec{C}\|^2 + \|\vec{C}\|^2 = \|(\vec{r}(t) - \vec{C}) + \vec{C}\|^2 = \|\vec{r}(t)\|^2 = \|\vec{B}\|^2$$

οπότε

$$\|\vec{r}(t) - \vec{C}\|^2 = \|\vec{B}\|^2 - \|\vec{C}\|^2 = \|\vec{B}\|^2 \sin^2\theta$$

οπότε

$$\|\vec{r}(t) - \vec{C}\| = \|\vec{B}\| \sin\theta$$

για κάθε $t \in [a, b]$.

Επειδή $\vec{r}(t) = (\vec{r}(t) - \vec{C}) + \vec{C}$, συνεπάγεται ότι η τροχιά της C βρίσκεται πάνω στον κύκλο με κέντρο $\vec{C}$ ο οποίος περιέχεται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{A}$ στο σημείο $\vec{C}$ και ο οποίος διέρχεται από το σημείο $\vec{B}$.

22. Υπολογίστε το μήκος τόξου της κάθε καμπύλης στο διάστημα που υποδεικνύεται.

(a) $\vec{\sigma}(t) = (t\sin t, t\cos t, \sqrt{3}\,t)$, $[0,1]$.

(b) $\vec{r}(t) = \sqrt{2}t\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} + e^{-t}\,\vec{k}$, $[-1,1]$.

(c) $\vec{\sigma}(t) = t\,\vec{i} + t\,\vec{j} + \frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\,\vec{k}$, $[t_0, t_1]$.

Λύση: (a) Είναι $\vec{\sigma}\,'(t) = (\sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t, \sqrt{3})$ οπότε

$$\|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{(\sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\sin t)^2 + 3} = \sqrt{t^2+4}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\int_0^1 \|\vec{\sigma}\,'(t)\|\,dt &= \int_0^1 \sqrt{t^2+4}\,dt = \Big(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+4} + 2\log(t+\sqrt{t^2+4})\Big)\Big|_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2} + 2\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

(b) Είναι $\vec{r}\,'(t) = \sqrt{2}\,\vec{i} + e^t\,\vec{j} - e^{-t}\,\vec{k}$ οπότε

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{2 + e^{2t} + e^{-2t}} = e^t + e^{-t}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_{-1}^1 \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_{-1}^1 (e^t + e^{-t})\,dt = (e^t - e^{-t})\big|_{-1}^1 = 2e - 2e^{-1}.$$

(c) Είναι $\vec{\sigma}\,'(t) = \vec{i} + \vec{j} + t^{\frac{1}{2}}\,\vec{k}$ οπότε

$$\|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{1+1+t} = \sqrt{t+2}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\vec{\sigma}\,'(t)\|\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{t+2}\,dt = \Big(\frac{2}{3}(t+2)^{\frac{3}{2}}\Big)\Big|_{t_0}^{t_1} = \frac{2}{3}(t_1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(t_0+2)^{\frac{3}{2}}.$$

23. Η συνάρτηση μήκους τόξου $s(t)$ για μια καμπύλη $\vec{\sigma}(t)$ δίνεται από την $s(t) = \int_a^t \|\vec{\sigma}\,'(\tau)\|\,d\tau$ και παριστάνει την απόσταση που θα έχει διανύσει ένα σωματίδιο τη χρονική στιγμή t αν ξεκινήσει τη χρονική στιγμή a και ακολουθεί την τροχιά της $\vec{\sigma}$. Δηλαδή, δίνει το μήκος της $\vec{\sigma}$ ανάμεσα στο $\vec{\sigma}(a)$ και $\vec{\sigma}(t)$. Βρείτε τις συναρτήσεις μήκους τόξου για τις καμπύλες $\vec{\alpha}(t) = (\cosh t, \sinh t, t)$ και $\vec{\beta}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ με $a = 0$.

Λύση: Είναι $\vec{\alpha}\,'(t) = (\sinh t, \cosh t, 1)$ οπότε

$$\|\vec{\alpha}\,'(t)\| = \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t + e^{-t}).$$

Η συνάρτηση μήκους είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\alpha}\,'(\tau)\|\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t (e^\tau + e^{-\tau})\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^t - e^{-t}).$$

Ομοίως, είναι $\vec{\beta}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ οπότε

$$\|\vec{\beta}\,'(t)\| = \sqrt{2}.$$

Η συνάρτηση μήκους είναι

$$s(t) = \int_0^t \|\vec{\beta}\,'(\tau)\|\,d\tau = \sqrt{2}\int_0^t 1\,d\tau = \sqrt{2}\,t.$$

24. Έστω $\vec{\sigma}$ η καμπύλη $\vec{\sigma}(t) = (2t, t^2, \log t)$ ορισμένη για $t > 0$. Βρείτε το μήκος τόξου της $\vec{\sigma}$ ανάμεσα στα σημεία $(2, 1, 0)$ και $(4, 4, \log 2)$.

Λύση: Είναι $\vec{\sigma}\,'(t) = (2, 2t, \frac{1}{t})$ οπότε

$$\|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = 2t + \frac{1}{t}$$

και το μήκος είναι ίσο με

$$\int_1^2 \|\vec{\sigma}\,'(t)\|\,dt = \int_1^2 \Big(2t + \frac{1}{t}\Big)\,dt = \Big(t^2 + \log t\Big)\Big|_1^2 = 3 + \log 2.$$

25. Έστω $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ κατά μήκος καθεμιάς από τις καμπύλες που ακολουθούν.

(a) $\vec{\sigma}(t) = (\sin t, 0, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $\vec{\sigma}(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \le t \le 2$.

Λύση: (a)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_0^{2\pi} (\sin t, 0, \cos t)\cdot(\cos t, 0, -\sin t)\,dt = \int_0^{2\pi} 0\,dt = 0.$$

(b)

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{\sigma} = \int_{-1}^{2} (t^2, 3t, 2t^3)\cdot(2t, 3, 6t^2)\,dt = \int_{-1}^{2} (2t^3 + 9t + 12t^5)\,dt = 147.$$

26. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα.

(a) $\int_{\vec{\sigma}} x\,dy - y\,dx$, $\vec{\sigma}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, $0 \le t \le 2\pi$.

(b) $\int_{\vec{\sigma}} x^2\,dx - xy\,dy + dz$, όπου η $\vec{\sigma}$ είναι η παραβολή $z = x^2$, $y = 0$ από το $(-1, 0, 1)$ ως το $(1, 0, 1)$.

Λύση: (a)

$$\int_{\vec{\sigma}} x\,dy - y\,dx = \int_0^{2\pi} (\cos t\cos t - \sin t(-\sin t))\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(b) Παραμετρική αναπαράσταση: $\vec{\sigma}(x) = (x, 0, x^2)$ $(-1 \le x \le 1)$.

$$\int_{\vec{\sigma}} x^2\,dx - xy\,dy + dz = \int_{-1}^{1} (x^2 1 - x0\cdot 0 + 2x)\,dx = \frac{2}{3}.$$

27. Θεωρούμε τη δύναμη $\vec{F}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$. Υπολογίστε το έργο που παράγει για να μετακινήσει ένα σωματίδιο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$, $z = 0$ από $x = -1$ ως $x = 2$.

Λύση: Παραμετρική αναπαράσταση: $\vec{r}(x) = (x, x^2, 0)$ $(-1 \le x \le 2)$.

$$\int_C \vec{F}\cdot d\,\vec{r} = \int_{-1}^{2} (x1 + x^2 2x + 0\cdot 0)\,dx = \int_{-1}^{2} (x + 2x^3)\,dx = 9.$$

28. Υποθέτουμε ότι η $\vec{\sigma}$ έχει μήκος l και $\|\vec{F}\| \le M$. Αποδείξτε ότι

$$\Big|\int_{\vec{\sigma}} \vec{F}\cdot d\,\vec{s}\Big| \le Ml.$$

Λύση: Αν $\vec{s}\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης, τότε

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\vec{\sigma}}\vec{F}\cdot d\,\vec{s}\Big| &= \Big|\int_a^b \vec{F}(\vec{s}(t))\cdot\vec{s}\,'(t)\,dt\Big| \leq \int_a^b |\vec{F}(\vec{s}(t))\cdot\vec{s}\,'(t)|\,dt\\ &\leq \int_a^b \|\vec{F}(\vec{s}(t))\|\|\vec{s}\,'(t)\|\,dt \leq \int_a^b M\|\vec{s}\,'(t)\|\,dt\\ &= M\int_a^b \|\vec{s}\,'(t)\|\,dt = Ml.\end{aligned}$$

29. Έστω $\vec{\sigma}(t)$ μια καμπύλη και $\vec{T}$ το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα. Ποιό είναι το $\int_{\vec{\sigma}}\vec{T}\cdot d\,\vec{s}$;

    Λύση: Αν $\vec{s}\,:\,[a,b]\to\mathbb{R}^n$ είναι η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης, τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το $\vec{s}\,'(t)$ οπότε το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το $\vec{T}(t)=\frac{\vec{s}\,'(t)}{\|\vec{s}\,'(t)\|}$. Άρα

$$\int_{\vec{\sigma}}\vec{T}\cdot d\,\vec{s} = \int_a^b \frac{\vec{s}\,'(t)}{\|\vec{s}\,'(t)\|}\cdot\vec{s}\,'(t)\,dt = \int_a^b \|\vec{s}\,'(t)\|\,dt = L,$$

    δηλαδή το μήκος της καμπύλης.

30. Μια μη αρνητική αύξουσα συνάρτηση f ορισμένη σε κάποιο διάστημα $[a,b]$ με συνεχή παράγωγο στο $[a,b]$ έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $[c,d]\subseteq[a,b]$ το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημά της και πάνω από το $[c,d]$ είναι ίσο με το μήκος του γραφήματός της πάνω από το $[c,d]$. Βρείτε την f.

    Λύση: Μια παραμετρική αναπαράσταση του γραφήματος της f είναι η

$$\vec{r}(x)=(x,f(x)),\quad x\in[a,b].$$

    Τότε

$$\vec{r}\,'(x)=(1,f'(x))$$

    οπότε το μήκος του γραφήματος πάνω από το $[c,d]$ είναι ίσο με

$$\int_c^d \|\vec{r}\,'(x)\|\,dx = \int_c^d \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

    Το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα και πάνω από το $[c,d]$ είναι ίσο με

$$\int_c^d f(x)\,dx.$$

    Η υπόθεση είναι ότι

$$\int_c^d \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_c^d f(x)\,dx$$

    για κάθε $[c,d]\subseteq[a,b]$.

    Συνεπάγεται ότι για κάθε $x\in[a,b]$ ισχύει

$$\int_a^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt = \int_a^x f(t)\,dt.$$

    Παραγωγίζοντας, βρίσκουμε

$$\sqrt{1+(f'(x))^2} = f(x)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Επειδή η f είναι αύξουσα, συνεπάγεται $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$, οπότε

$$\frac{f'(x)}{\sqrt{f^2(x)-1}} = 1$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται

$$\frac{d}{dx} \log \left(f(x) + \sqrt{f^2(x)-1}\right) = 1$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται ότι υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\log \left(f(x) + \sqrt{f^2(x)-1}\right) = x + c$$

και επομένως

$$f(x) + \sqrt{f^2(x)-1} = e^{x+c}$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Συνεπάγεται

$$f(x) = \sinh(x+c)$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Η σταθερά c προσδιορίζεται από την ισότητα (με $x = a$)

$$f(a) = \sinh(a+c).$$

31. Υπολογίστε το

$$\int_C (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$$

όπου C είναι η καμπύλη από το σημείο $(-2,4)$ στο σημείο $(1,1)$ πάνω στην παραβολή $y = x^2$.

Λύση: Η C έχει παραμετρική αναπαράσταση την

$$\vec{r}(x) = (x, x^2) \qquad (-2 \leq x \leq 1).$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy &= \int_{-2}^{1} \left((x^2 - 2xx^2)1 + (x^4 - 2xx^2)2x\right)dx \\ &= \int_{-2}^{1} (x^2 - 2x^3 + 2x^5 - 4x^4)dx = -\frac{369}{10}.\end{aligned}$$

32. Υπολογίστε το

$$\int_C \frac{(x+y)\, dx - (x-y)\, dy}{x^2+y^2},$$

όπου C είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = a^2$ $(a > 0)$ με την θετική φορά διαγραφής.

Λύση: Η C έχει παραμετρική αναπαράσταση την

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t) \qquad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Άρα

$$\begin{aligned}&\int_C \frac{(x+y)\, dx - (x-y)\, dy}{x^2+y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos t + a\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - a\sin t)(a\cos t)}{a^2}\, dt \\ &= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.\end{aligned}$$

33. Υπολογίστε το
$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|},$$
όπου C είναι το τετράγωνο με κορυφές $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ με την θετική φορά διαγραφής.

Λύση: Η C είναι άθροισμα $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, όπου C_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1,0)$ μέχρι το $(0,1)$, C_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0,1)$ μέχρι το $(-1,0)$, C_3 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(-1,0)$ μέχρι το $(0,-1)$ και C_4 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0,-1)$ μέχρι το $(1,0)$. Επομένως,
$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_{C_1} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{C_2} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{C_3} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} + \int_{C_4} \frac{dx+dy}{|x|+|y|},$$
οπότε πρέπει να υπολογίσουμε καθένα από τα τέσσερα επικαμπύλια ολοκληρώματα.

Η παραμετρική αναπαράσταση της C_1 είναι η $r_1(t) = (1-t, t)$ $(t \in [0,1])$. Άρα
$$\int_{C_1} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{-1+1}{1}\,dt = 0.$$
Η παραμετρική αναπαράσταση της C_2 είναι η $r_2(t) = (-t, 1-t)$ $(t \in [0,1])$. Άρα
$$\int_{C_2} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{-1-1}{1}\,dt = -2.$$
Η παραμετρική αναπαράσταση της C_3 είναι η $r_3(t) = (t-1, -t)$ $(t \in [0,1])$. Άρα
$$\int_{C_3} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{1-1}{1}\,dt = 0.$$
Η παραμετρική αναπαράσταση της C_4 είναι η $r_4(t) = (t, t-1)$ $(t \in [0,1])$. Άρα
$$\int_{C_4} \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = \int_0^1 \frac{1+1}{1}\,dt = 2.$$
Άρα
$$\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|} = 0 - 2 + 0 + 2 = 0.$$

34. Υπολογίστε το
$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz,$$
όπου

(a) C είναι η τομή των επιφανειών $x+y=2$ και $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$. Η C διαγράφεται μια φορά στην κατεύθυνση περιστροφής των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$.

(b) C είναι η τομή των επιφανειών $z = xy$ και $x^2 + y^2 = 1$. Η C διαγράφεται μια φορά στην αντίθετη κατεύθυνση περιστροφής των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από πολύ πάνω από το xy-επίπεδο.

Λύση: (a) Αν θέσουμε
$$x' = x - 1, \quad y' = y - 1, \quad z' = z,$$
τότε οι δυο σχέσεις που περιγράφουν την C γράφονται ισοδύναμα
$$x' + y' = 0, \qquad (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 2.$$

Δηλαδή το σημείο (x', y', z') κινείται πάνω στο επίπεδο με εξίσωση $x' + y' = 0$ και η απόστασή του από το $(0,0,0)$ είναι σταθερή $\sqrt{2}$. Επομένως το ίδιο σημείο περιγράφει έναν κύκλο C_0 πάνω στο ίδιο επίπεδο με κέντρο το $(0,0,0)$ (που κι αυτό είναι πάνω στο ίδιο επίπεδο) και ακτίνα $\sqrt{2}$. Τώρα,

$$(x, y, z) = (x', y', z') + (1, 1, 0)$$

και

$$(x', y', z') \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Άρα η καμπύλη C την οποία περιγράφει το σημείο (x, y, z) είναι απλή μεταφορά του προηγούμενου κύκλου C_0 κατά το διάνυσμα $(1,1,0)$. Κατά την περιστροφή του το (x', y', z') περνάει από το ανώτατο σημείο $(0, 0, \sqrt{2})$ του κύκλου C_0 και μετά "πέφτει" στο σημείο $(1, -1, 0)$ πάνω στο xy-επίπεδο. Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση του C_0 είναι η

$$\begin{aligned}(x'(t), y'(t), z'(t)) &= \cos t(0, 0, \sqrt{2}) + \sin t(1, -1, 0)\\ &= (\sin t, -\sin t, \sqrt{2}\cos t) \quad t \in [0, 2\pi]\end{aligned}$$

και επομένως μια παραμετρική αναπαράσταση της C είναι η

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\sin t + 1, -\sin t + 1, \sqrt{2}\cos t) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \int_0^{2\pi} \big((-\sin t + 1)\cos t + \sqrt{2}\cos t(-\cos t)\\ &\qquad + (\sin t + 1)(-\sqrt{2}\sin t)\big)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (-\sqrt{2} - \sin t\cos t + \cos t - \sqrt{2}\sin t)\,dt\\ &= -2\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

(b) Είναι σαφές ότι το σημείο $(x, y, 0)$ διαγράφει πάνω στο xy-επίπεδο τον κύκλο με κέντρο $(0,0,0)$ και ακτίνα 1 με την θετική φορά περιστροφής. Άρα η παραμετρική αναπαράσταση της C είναι

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, \cos t\sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz &= \int_0^{2\pi} \big(\sin t(-\sin t) + \cos t\sin t\cos t\\ &\qquad + \cos t(-\sin t\sin t + \cos t\cos t)\big)\,dt\\ &= -\pi.\end{aligned}$$

35. Θεωρούμε το πεδίο δυνάμεων $\vec{f}(x, y, z) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + (xz - y)\,\vec{k}$. Υπολογίστε το έργο που θα παραχθεί από αυτό το πεδίο όταν μετακινήσει ένα σωματίδιο από το σημείο $(0,0,0)$ στο σημείο $(1,2,4)$ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει αυτά τα σημεία.

Λύση: Το ευθύγραμμο τμήμα C έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(t) = (t, 2t, 4t) \quad t \in [0, 1].$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\int_C \vec{f}(x, y, z) \cdot d\,\vec{r} = \int_0^1 (t1 + 2t2 + (t4t - 2t)4)\,dt = \frac{23}{6}.$$

36. Υπολογίστε το έργο που θα παραχθεί από το πεδίο δυνάμεων $\vec{f}(x,y,z) = y^2\,\vec{i} + z^2\,\vec{j} + x^2\,\vec{k}$ κατά μήκος της καμπύλης C η οποία είναι η τομή του ημισφαιρίου $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geq 0$ και του κυλίνδρου $x^2+y^2=ax$, όπου $a>0$. Η C διαγράφεται στην κατεύθυνση των δεικτών του ρολογιού όταν την βλέπουμε από πολύ πάνω από το xy-επίπεδο.

Λύση: Η C περιγράφεται ισοδύναμα από τις σχέσεις

$$\Big(x - \frac{a}{2}\Big)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}, \quad z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση της C είναι

$$\vec{r}(t) = \Big(\frac{a}{2}\cos t + \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\sin t, \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos t}\Big), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\begin{aligned}\int_C \vec{f}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{a^2}{4}\sin^2 t\Big(-\frac{a}{2}\sin t\Big) + \frac{a^2}{2}(1-\cos t)\Big(-\frac{a}{2}\cos t\Big) \\ &\quad + \frac{a^2}{4}(\cos t + 1)^2 \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}\Big)\,dt \\ &= \frac{\pi a^3}{4}.\end{aligned}$$

37. Υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\vec{\sigma}} f(x,y,z)\,ds$, όπου

(a) $f(x,y,z) = \cos z$ και $\vec{\sigma}(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $f(x,y,z) = x\cos z$ και $\vec{\sigma}(t) = t\,\vec{i} + t^2\,\vec{j}$, $t \in [0,1]$.

Λύση: (a) $\vec{\sigma}\,'(t) = (\cos t, -\sin t, 1)$, οπότε $\|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{2}$ και

$$\int_{\vec{\sigma}} f(x,y,z)\,ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\cos t\,dt = 0.$$

(b) $\vec{\sigma}\,'(t) = \vec{i} + 2t\,\vec{j}$, οπότε $\|\vec{\sigma}\,'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$ και

$$\int_{\vec{\sigma}} f(x,y,z)\,ds = \int_0^1 t\cos 0\sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\,du = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

38. Δείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x,y)$ κατά μήκος της καμπύλης που δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από την $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, είναι

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2 + \Big(\frac{dr}{d\theta}\Big)^2}\,d\theta.$$

Λύση: Η παραμετρική αναπαράσταση της καμπύλης C είναι

$$\vec{r}(\theta) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta) \qquad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2).$$

Τότε

$$\vec{r}\,'(\theta) = (r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta, r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta),$$

οπότε $\|\vec{r}\,'(\theta)\| = \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}$ και

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)\sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2}\,d\theta.$$

39. Υπολογίστε το $\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$.

Λύση: Επειδή δεν μας λένε ποια ακριβώς είναι η συγκεκριμένη καμπύλη, αλλά μας λένε μόνο τα άκρα της, υποψιαζόμαστε ότι το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από την καμπύλη αλλά μόνο από τα άκρα της. Με άλλα λόγια υποψιαζόμαστε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

είναι συντηρητικό. Ένας επιπλέον λόγος είναι ότι το $\vec{f}$ ικανοποιεί την γνωστή αναγκαία συνθήκη για να προέρχεται από πεδίο δυναμικού, δηλαδή τις σχέσεις

$$\frac{\partial(2xyz)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(2xyz)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} = \frac{\partial(x^2y)}{\partial y}.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να προέρχεται από πεδίο δυναμικού. Αν καταφέρουμε να βρούμε μια αριθμητική συνάρτηση $\phi(x,y,z)$ έτσι ώστε $\vec{\nabla}\,\phi(x,y,z) = \vec{f}(x,y,z)$, δηλαδή (ισοδύναμα)

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = x^2z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = x^2y,$$

τότε ο υπολογισμός του ολοκληρώματος θα είναι στοιχειώδης.

Μπορούμε με λίγη σκέψη να μαντέψουμε την συνάρτηση

$$\phi(x,y,z) = x^2yz$$

η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω ισότητες.

Ένας *μεθοδικός* τρόπος να βρούμε μια ϕ είναι ο εξής. Θεωρώντας τα y, z σταθερά, ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x για να απαλείψουμε την παράγωγο ως προς την μεταβλητή x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y,z) = \int 2xyz\,dx = 2yz\int x\,dx = x^2yz + c.$$

Αυτή η ισότητα δεν είναι ακριβώς σωστή διότι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας ότι η σταθερά ολοκλήρωσης c δεν εξαρτάται από την μεταβλητή x της ολοκλήρωσης, μπορεί, όμως, να εξαρτάται από τις άλλες δυο μεταβλητές y, z τις οποίες θεωρήσαμε προσωρινά σταθερές. Άρα το σωστό είναι να γράψουμε

$$\phi(x,y,z) = \int 2xyz\,dx = x^2yz + \psi(y,z),$$

όπου $\psi(y,z)$ είναι συνάρτηση μόνο των y, z. Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$x^2z + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y,z) = x^2z$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(y,z) = 0.$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς y για να απαλείψουμε την παράγωγο ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y,z) = \int 0\,dy = \chi(z),$$

όπου και πάλι, αντί να κάνουμε το λάθος να γράψουμε $\int 0\,dy = c$, γράφουμε την σταθερά (ως προς y) ως συνάρτηση της μεταβλητής z. Τώρα, αφού σκεφτούμε ότι

$$\phi(x,y,z) = x^2yz + \psi(y,z) = x^2yz + \chi(z),$$

η τρίτη ισότητα γράφεται

$$x^2y + \chi'(z) = x^2y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z) = 0.$$

Άρα η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση: $\chi(z) = c$. Επομένως

$$\phi(x,y,z) = x^2yz + c$$

είναι τα πεδία δυναμικού από τα οποία προέρχεται το διανυσματικό πεδίο $\vec{f}(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$. Η σταθερά c είναι αυθαίρετη και επιλέγουμε

$$\phi(x,y,z) = x^2yz.$$

Τώρα

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz = \phi(1,2,4) - \phi(1,1,1) = 7.$$

40. Υποθέτουμε ότι $\vec{\nabla} f(x,y,z) = 2xyze^{x^2}\,\vec{i} + ze^{x^2}\,\vec{j} + ye^{x^2}\,\vec{k}$. Αν $f(0,0,0) = 5$, βρείτε το $f(1,1,2)$.

Λύση: Πρώτος τρόπος. Βρίσκουμε την αριθμητική συνάρτηση $f(x,y,z)$ ώστε να ικανοποιεί τις ισότητες

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyze^{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = ye^{x^2}.$$

Ακολουθούμε την μέθοδο που περιγράφτηκε στην προηγούμενη άσκηση.

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$f(x,y,z) = \int 2xyze^{x^2}\,dx = yze^{x^2} + g(y,z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$ze^{x^2} + \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = ze^{x^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 0.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$g(y,z) = \int 0\,dy = h(z),$$

οπότε

$$f(x,y,z) = yze^{x^2} + g(y,z) = yze^{x^2} + h(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$ye^{x^2} + h'(z) = ye^{x^2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$h'(z) = 0,$$

οπότε η $h(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$f(x, y, z) = yze^{x^2} + h(z) = yze^{x^2} + c.$$

Βρίσκουμε την c από την

$$5 = f(0, 0, 0) = 0 \cdot 0 \cdot e^{0^2} + c = c.$$

Άρα

$$f(1, 1, 2) = 1 \cdot 2 \cdot e^{1^2} + 5 = 2e + 5.$$

Δεύτερος τρόπος. Θεωρούμε μια οποιαδήποτε καμπύλη με αρχή το σημείο $(0, 0, 0)$ και τέλος το σημείο $(1, 1, 2)$. Η απλούστερη τέτοια καμπύλη είναι το ευθύγραμμο τμήμα C που ενώνει τα δυο σημεία με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(t) = (t, t, 2t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Τώρα είναι

$$\begin{aligned} f(1, 1, 2) - f(0, 0, 0) &= \int_C \vec{\nabla} f \cdot d\,\vec{r} = \int_C 2xyze^{x^2}\, dx + ze^{x^2}\, dy + ye^{x^2}\, dz \\ &= \int_0^1 \Big(2tt2te^{t^2} 1 + 2te^{t^2} 1 + te^{t^2} 2 \Big)\, dt \\ &= \int_0^1 (4t^3 + 4t)e^{t^2}\, dt = 2 \int_0^1 (u + 1)e^u\, du = 2e. \end{aligned}$$

Άρα

$$f(1, 1, 2) = 2e + f(0, 0, 0) = 2e + 5.$$

41. Θεωρούμε μια καμπύλη η οποία βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια $x^2 + y^2 + z = 2\pi$, η οποία έχει σταθερή κλίση και η οποία ενώνει το σημείο $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$ της επιφάνειας με την κορυφή $(0, 0, 2\pi)$ της επιφάνειας. Σε κάθε σημείο της καμπύλης ασκείται μια δύναμη που περιγράφεται από το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x, y, z) = z^2\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{j} + 2xz\,\vec{k}$. Πόσο έργο παράγει η δύναμη κατά μήκος της καμπύλης;

Λύση: Ελέγχουμε αν το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = z^2\,\vec{i} + 3y^2\,\vec{j} + 2xz\,\vec{k}$$

ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη για να προέρχεται από πεδίο δυναμικού, δηλαδή τις σχέσεις

$$\frac{\partial(z^2)}{\partial y} = \frac{\partial(3y^2)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = \frac{\partial(2xz)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(3y^2)}{\partial z} = \frac{\partial(2xz)}{\partial y}.$$

Αυτές είναι σωστές, οπότε βρίσκουμε πεδίο δυναμικού $\phi(x, y, z)$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) = z^2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) = 2xz,$$

εφαρμόζοντας την μέθοδο των δυο προηγούμενων ασκήσεων.

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x, y, z) = \int z^2\, dx = xz^2 + \psi(y, z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = 3y^2.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y, z) = \int 3y^2\, dy = y^3 + \chi(z),$$

οπότε

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + \psi(y, z) = xz^2 + y^3 + \chi(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$2xz + \chi'(z) = 2xz$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z) = 0,$$

οπότε η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\phi(x, y, z) = xz^2 + y^3 + \chi(z) = xz^2 + y^3 + c.$$

Άρα το έργο είναι ίσο με

$$\int_C \vec{F} \cdot d\,\vec{r} = \phi(0, 0, 2\pi) - \phi(\sqrt{2\pi}, 0, 0) = 0.$$

Παρατηρήστε ότι το σχήμα της καμπύλης δεν έπαιξε κανένα ρόλο.

42. Υπολογίστε το

$$\int_C (x + y)\, ds,$$

όπου C είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$ και $(0, 1)$ με την θετική φορά περιστροφής.

Λύση: Είναι $C = C_1 + C_2 + C_3$, όπου C_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ στο $(1, 0)$, C_2 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, 0)$ στο $(0, 1)$ και C_3 είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 1)$ στο $(0, 0)$.

Το C_1 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}_1(t) = (t, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$, το C_2 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}_2(t) = (1 - t, t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ και το C_3 έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}_3(t) = (0, 1 - t)$ $(0 \leq t \leq 1)$. Είναι $\|\vec{r}_1{}'(t)\| = 1$, $\|\vec{r}_2{}'(t)\| = \sqrt{2}$ και $\|\vec{r}_3{}'(t)\| = 1$. Άρα

$$\begin{aligned}
\int_C (x + y)\, ds &= \int_{C_1} (x + y)\, ds + \int_{C_2} (x + y)\, ds + \int_{C_3} (x + y)\, ds \\
&= \int_0^1 (t + 0)1\, dt + \int_0^1 (1 - t + t)\sqrt{2}\, dt + \int_0^1 (0 + 1 - t)1\, dt \\
&= 1 + \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

43. Υπολογίστε το

$$\int_C z\, ds,$$

όπου η C έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(t) = t \cos t\, \vec{i} + t \sin t\, \vec{j} + t\, \vec{k}$, $(0 \leq t \leq t_0)$.

Λύση: Είναι $\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t \sin t)\, \vec{i} + (\sin t + t \cos t)\, \vec{j} + \vec{k}$, οπότε $\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{t^2 + 2}$. Άρα

$$\int_C z\, ds = \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2 + 2}\, dt = \frac{1}{2}\int_2^{{t_0}^2+2} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}\Big(({t_0}^2 + 2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}\Big).$$

44. Ποιά από τα παρακάτω ανοικτά υποσύνολα Ω του $\mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικά; Για καθένα από τα Ω που είναι συνεκτικά, πάρτε δυο τυχαία σημεία του Ω και περιγράψτε καμπύλη με τροχιά μέσα στο Ω που να ενώνει τα δυο σημεία.
(a) $\Omega = \mathbb{R}^2$.
(b) $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$.
(c) $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>0\}$.
(d) $\Omega = \{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$.
(e) $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>1 \text{ και } (x-3)^2+y^2>1\}$.
(f) $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1 \text{ ή } (x-3)^2+y^2<1\}$.

Λύση: (a) Το $\Omega = \mathbb{R}^2$ είναι συνεκτικό. Για οποιαδήποτε σημεία A, B του Ω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά περιέχεται στο Ω.

(b) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ είναι συνεκτικό. Για οποιαδήποτε σημεία A, B του Ω το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία αυτά περιέχεται στο Ω.

(c) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>0\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα A, B δεν περιέχει το $(0,0)$, τότε αυτό είναι μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B. Αν το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα A, B περιέχει το $(0,0)$, τότε θεωρούμε ένα τρίτο σημείο C έτσι ώστε τα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα τα A, C και με άκρα τα C, B να μην περιέχουν το $(0,0)$, οπότε μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα των παραπάνω διαδοχικών ευθυγράμμων τμημάτων.

(d) Το $\Omega = \{(x,y)|1<x^2+y^2<2\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Αν τα A, B ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα A, B είναι μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B. Αν τα A, B δεν ανήκουν στην ίδια ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$, τότε θεωρούμε τον κύκλο με κέντρο το $(0,0)$ ο οποίος διέρχεται από το A και το σημείο τομής C αυτού του κύκλου με την ημιευθεία με κορυφή το $(0,0)$ η οποία περιέχει το B. Μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα ενός από τα τόξα του παραπάνω κύκλου με άκρα τα A, C και του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα C, B.

(e) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2>1 \text{ και } (x-3)^2+y^2>1\}$ είναι συνεκτικό. Θεωρούμε οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Έστω ότι ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ που διέρχεται από το A τέμνει τον αρνητικό x-άξονα στο σημείο A' και ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ που διέρχεται από το B τέμνει τον αρνητικό x-άξονα στο σημείο B'. Τουλάχιστον ένα από τα δυο τόξα του πρώτου κύκλου με άκρα A, A' περιέχεται στο Ω. Ομοίως, τουλάχιστον ένα από τα δυο τόξα του δεύτερου κύκλου με άκρα B, B' περιέχεται στο Ω. Μια καμπύλη στο Ω που ενώνει τα A, B είναι το άθροισμα του τόξου από το A στο A', του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα A', B' και του τόξου από το B' στο B.

(f) Το $\Omega = \{(x,y)|x^2+y^2<1 \text{ ή } (x-3)^2+y^2<1\}$ δεν είναι συνεκτικό. Ένα σημείο του πρώτου δίσκου με ένα σημείο του δεύτερου δίσκου δεν μπορούν να ενωθούν με καμπύλη στο Ω.

45. Αποδείξτε ότι καθένα από τα διανυσματικά πεδία $\vec{f}(x,y) = (y, xy-x)$ στον $\mathbb{R}^2$ και $\vec{f}(x,y,z) = (xy, x^2+1, z^2)$ στον $\mathbb{R}^3$ δεν είναι συντηρητικό, ελέγχοντας αν ικανοποιούν την γνωστή κατάλληλη αναγκαία συνθήκη.

Λύση: Η αναγκαία συνθήκη για το πρώτο διανυσματικό πεδίο είναι η

$$\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial(xy-x)}{\partial x},$$

και είναι λάθος.

Η αναγκαία συνθήκη για το δεύτερο διανυσματικό πεδίο είναι η

$$\frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2+1)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(xy)}{\partial z} = \frac{\partial(z^2)}{\partial x}, \quad \frac{\partial(x^2+1)}{\partial z} = \frac{\partial(z^2)}{\partial y}$$

και είναι, επίσης, λάθος. (Δεν ικανοποιείται η πρώτη ισότητα.)

46. Αποδείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\vec{f}(x,y) = (x+y, x-y)$ στον $\mathbb{R}^2$ ικανοποιεί την αναγκαία συνθήκη για να είναι συντηρητικό. Μπορείτε να αποδείξετε ότι το $\vec{f}$ *είναι* συντηρητικό βρίσκοντας συγκεκριμένο πεδίο δυναμικού γι αυτό;

Λύση: Η αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x},$$

και είναι σωστή.

Θα βρούμε την $\phi(x,y)$ ώστε να είναι

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y) = x+y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y) = x-y.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y) = \int (x+y)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$x + \psi'(y) = x - y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\psi'(y) = -y.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y) = -\int y\,dy = -\frac{1}{2}y^2 + c,$$

οπότε

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + c.$$

Η c είναι αυθαίρετη σταθερά (οπότε έχουμε άπειρες λύσεις).

47. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, για το $\vec{f}(x,y,z) = (x+z, -y-z, x-y)$ στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση: Η αναγκαία συνθήκη είναι η

$$\frac{\partial(x+z)}{\partial y} = \frac{\partial(-y-z)}{\partial x}, \ \frac{\partial(x+z)}{\partial z} = \frac{\partial(x-y)}{\partial x}, \ \frac{\partial(-y-z)}{\partial z} = \frac{\partial(x-y)}{\partial y}$$

και είναι σωστή. Θα βρούμε $\phi(x,y,z)$ ώστε να ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z) = x+z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = -y-z, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = x-y.$$

Ολοκληρώνουμε την πρώτη ισότητα ως προς x και βρίσκουμε

$$\phi(x,y,z) = \int (x+z)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + xz + \psi(y,z).$$

Τώρα η δεύτερη ισότητα γράφεται

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y,z) = -y - z.$$

Ολοκληρώνουμε ως προς y και βρίσκουμε

$$\psi(y,z) = \int (-y-z)\,dy = -\frac{1}{2}y^2 - yz + \chi(z),$$

οπότε

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz + \psi(y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}y^2 - yz + \chi(z).$$

Τέλος, η τρίτη ισότητα γράφεται

$$x - y + \chi'(z) = x - y$$

ή, ισοδύναμα,

$$\chi'(z) = 0,$$

οπότε η $\chi(z)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Άρα

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}y^2 - yz + \chi(z) = \frac{1}{2}x^2 + xz - \frac{1}{2}y^2 - yz + c.$$

Η c είναι αυθαίρετη σταθερά (οπότε έχουμε άπειρες λύσεις).

48. Αν τα αριθμητικά πεδία ϕ και ψ είναι πεδία δυναμικού για το ίδιο διανυσματικό πεδίο $\vec{f}$ σε ένα ανοικτό, συνεκτικό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, αποδείξτε ότι η αριθμητική συνάρτηση $\phi - \psi$ είναι σταθερή στο Ω.

    Λύση: Έστω οποιαδήποτε σημεία A, B στο Ω. Θεωρούμε οποιαδήποτε καμπύλη C με τροχιά στο Ω με αρχή A και τέλος B. Τότε

$$\phi(B) - \phi(A) = \int_C \vec{f} \cdot d\vec{r} = \psi(B) - \psi(A).$$

    Συνεπάγεται

$$\phi(B) - \psi(B) = \phi(A) - \psi(A),$$

    οπότε η συνάρτηση $\phi - \psi$ έχει ίδιες τιμές σε οποιαδήποτε δυο σημεία του Ω και, επομένως, είναι σταθερή στο Ω.

49. Υπολογίστε το $\oint_C y\,dx - x\,dy$, όπου C είναι το σύνορο του τετραγώνου $[-1,1] \times [-1,1]$ προσανατολισμένο κατά την φορά την αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. (Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Green.)

    Λύση: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στο τετράγωνο $U = [-1,1] \times [-1,1]$. Η καμπύλη C (η συνοριακή καμπύλη του U) είναι καμπύλη Jordan με την θετική φορά διαγραφής και το U είναι το εσωτερικό της. Οι συναρτήσεις $Q(x,y) = y$ και $P(x,y) = -x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της U. Άρα

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = \iint_U \Big(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = -2\iint_U dxdy.$$

    Τώρα, είτε σκεφτόμαστε ότι το $\iint_U dxdy$ είναι ίσο με το εμβαδό του U, δηλαδή ίσο με 4, είτε υπολογίζουμε

$$\iint_U dxdy = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{-1}^{1} dy\Big)\,dx = \int_{-1}^{1} 2\,dx = 4.$$

Άρα

$$\oint_C y\,dx - x\,dy = -8.$$

50. Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για τον δίσκο D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R και τις συναρτήσεις $P(x,y) = xy^2$ και $Q(x,y) = -yx^2$.

Λύση: Ο δίσκος D περιγράφεται από την ανισότητα $x^2 + y^2 \leq R^2$. Η συνοριακή του καμπύλη C περιγράφεται από την $x^2 + y^2 = R^2$. Η C είναι καμπύλη Jordan και το εσωτερικό της είναι ο δίσκος D. Οι συναρτήσεις $P(x,y) = xy^2$ και $Q(x,y) = -yx^2$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της D. Άρα ο τύπος του Green είναι ο

$$\iint_D \Big(\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(-yx^2)}{\partial y}\Big)\,dxdy = \oint_C -yx^2\,dx + xy^2\,dy.$$

Θα επαληθεύσουμε τον τύπο υπολογίζοντας χωριστά τα δυο ολοκληρώματα.

Ο απλούστερος τρόπος να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα είναι με αλλαγή από καρτεσιανές σε πολικές συντεταγμένες: γράφουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, όπου το r μεταβάλλεται στο διάστημα $[0,R]$ και το θ στο διάστημα $[0,2\pi]$. Τότε $x^2+y^2 = r^2$ και $dxdy = rdrd\theta$, οπότε το διπλό ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\iint_D (y^2 + x^2)\,dxdy = \int_0^R \Big(\int_0^{2\pi} r^2\,d\theta\Big)\,rdr = 2\pi\int_0^R r^3\,dr = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Η συνηθισμένη παραμετρική αναπαράσταση της C με την θετική φορά διαγραφής της είναι η $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)\ \ (0 \leq t \leq 2\pi)$. Άρα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_0^{2\pi} (-R\sin t R^2\cos^2 t(-R\sin t) + R\cos t R^2\sin^2 t R\cos t)\,dt$$

$$= 2R^4\int_0^{2\pi} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{\pi R^4}{2}.$$

51. Έστω D ένα χωρίο για το οποίο ισχύει το Θεώρημα του Green. Υποθέτουμε ότι η f είναι αρμονική, δηλαδή

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

στο D. Αποδείξτε ότι

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0.$$

Λύση: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green με τις συναρτήσεις $Q = \frac{\partial f}{\partial y}$ και $P = -\frac{\partial f}{\partial x}$ και βρίσκουμε:

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = \iint_D \Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\frac{\partial f}{\partial x}\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)\Big)\,dxdy$$

$$= -\iint_D \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Big)\,dxdy = \iint_D 0\,dxdy = 0.$$

52. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Green για να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$\oint_C y\,dx + x\,dy,$$
όπου η C έχει παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(t) = 2\cos^3 t\,\vec{i} + 2\sin^3 t\,\vec{j}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Λύση: Παρατηρώντας πώς μεταβάλλονται οι συναρτήσεις $x = x(t) = 2\cos^3 t$ και $y = y(t) = 2\sin^3 t$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$, συμπεραίνουμε ότι η καμπύλη C είναι καμπύλη Jordan και ότι το $\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$ την διαγράφει με την θετική φορά. Οι συντεταγμένες $x = x(t)$ και $y = y(t)$ ικανοποιούν την ισότητα
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}},$$
οπότε το εσωτερικό U της C καθορίζεται από την ανισότητα
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \le 2^{\frac{2}{3}}.$$
Οι συναρτήσεις $Q(x,y) = y$ και $P(x,y) = x$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την καμπύλη C και το εσωτερικό της U. Άρα
$$\oint_C y\,dx + x\,dy = \iint_U \Big(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = \iint_U 0\,dxdy = 0.$$

53. Αν $Q(x,y) = xe^{-y^2}$ και $P(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$, υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$\oint_C Q\,dx + P\,dy,$$
όπου C είναι ο κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$ (με την θετική φορά διαγραφής).

Λύση: Η C είναι καμπύλη Jordan και το εσωτερικό της είναι ο δίσκος D με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Η συνάρτηση $Q(x,y) = xe^{-y^2}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την C και το εσωτερικό της. Όμως, η συνάρτηση $P(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \frac{1}{x^2+y^2}$ **δεν** έχει συνεχείς μερικές παραγώγους σε κάποιο ανοικτό, συνεκτικό σύνολο το οποίο περιέχει την C και το εσωτερικό της. Πράγματι, η $P(x,y)$ απειρίζεται στο σημείο $(0,0)$ το οποίο βρίσκεται στο εσωτερικό της C. Μπορούμε, όμως, να γράψουμε
$$P(x,y) = R(x,y) + \frac{1}{x^2+y^2},$$
όπου η συνάρτηση $R(x,y) = -x^2ye^{-y^2}$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι ανοικτό, συνεκτικό και περιέχει την C και το εσωτερικό της. Τότε
$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q\,dx + R\,dy + \oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\,dy,$$
και στο πρώτο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green:
$$\oint_C Q\,dx + R\,dy = \iint_S \Big(\frac{\partial(-x^2ye^{-y^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-xe^{-y^2})}{\partial y}\Big)\,dxdy = \iint_S 0\,dxdy = 0.$$
Κατόπιν, υπολογίζουμε κατ' ευθείαν το δεύτερο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με την παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(t) = (r\cos t, r\sin t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$ της C:
$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2}\,dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} r\cos t\,dt = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \cos t\,dt = 0.$$

Άρα
$$\oint\limits_C Q\,dx + P\,dy = 0.$$

54. Έστω αριθμητικά πεδία u και v συνεχώς παραγωγίσιμα σε ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο περιέχει τον δίσκο U που καθορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$. Θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία που ορίζονται από τις

$$\vec{f}(x,y) = v(x,y)\,\vec{i} + u(x,y)\,\vec{j}, \qquad \vec{g}(x,y) = \Big(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\Big)\,\vec{i} + \Big(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\Big)\,\vec{j}.$$

Βρείτε την τιμή του διπλού ολοκληρώματος

$$\iint\limits_U \vec{f}\cdot\vec{g}\,dxdy$$

αν γνωρίζετε ότι στο σύνορο του U ισχύει $u(x,y) = 1$ και $v(x,y) = y$.

Λύση: Είναι

$$\vec{f}\cdot\vec{g} = v\,\frac{\partial u}{\partial x} - v\,\frac{\partial u}{\partial y} + u\,\frac{\partial v}{\partial x} - u\,\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}.$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\iint\limits_U \vec{f}\cdot\vec{g}\,dxdy &= \iint\limits_U \Big(\frac{\partial(uv)}{\partial x} - \frac{\partial(uv)}{\partial y}\Big)\,dxdy = \oint\limits_C uv\,dx + uv\,dy\\ &= \oint\limits_C y\,dx + y\,dy,\end{aligned}$$

όπου C είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$ με την θετική φορά διαγραφής. Με την παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ υπολογίζουμε

$$\oint\limits_C y\,dx + y\,dy = \int\limits_0^{2\pi} (\sin t(-\sin t) + \sin t\cos t)\,dt = -\pi.$$

Άρα
$$\iint\limits_U \vec{f}\cdot\vec{g}\,dxdy = -\pi.$$

55. Βρείτε το εμβαδό του δίσκου D ακτίνας R, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Green.

Λύση: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green στον δίσκο D με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $R > 0$ με συνοριακή καμπύλη C τον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 = R^2$ και με το πεδίο

$$(-y, x).$$

Τότε

$$\oint\limits_C -y\,dx + x\,dy = \iint\limits_D \Big(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\Big)\,dxdy = 2\iint\limits_D dxdy = 2\,\text{εμβ}(D).$$

Άρα

$$\text{εμβ}(D) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ((-R\sin t)(-R\sin t) + (R\cos t)(R\cos t))\,dt = \pi R^2.$$

56. Επαληθεύστε το Θεώρημα του Green για τις $P(x, y) = 2x^3 - y^3$ και $Q(x, y) = x^3 + y^3$ και τον δακτύλιο D που περιγράφεται από τις ανισότητες $a \leq x^2 + y^2 \leq b$.

Λύση: Ονομάζουμε C τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $\sqrt{b}$ με την θετική φορά του και C_1 τον κύκλο κέντρου $(0, 0)$ και ακτίνας $\sqrt{a}$ με την αρνητική φορά του. Τότε ο γενικός τύπος του Green γράφεται

$$\iint\limits_D \Big(\frac{\partial(x^3 + y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(2x^3 - y^3)}{\partial y}\Big)\, dxdy = \oint\limits_C (2x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy$$
$$+ \oint\limits_{C_1} (2x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy.$$

Το αριστερό μέρος είναι ίσο με

$$3 \iint\limits_D (x^2 + y^2)\, dxdy = 3 \int_0^{2\pi} \Big(\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} r^3\, dr\Big)\, d\theta = \frac{3\pi}{2}(b^2 - a^2).$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέρους είναι ίσο με

$$b^2 \int_0^{2\pi} \big(- (2\cos^3 t - \sin^3 t)\sin t + (\cos^3 t + \sin^3 t)\cos t\big)\, dt = \frac{3\pi}{2} b^2.$$

Ομοίως, το δεύτερο υπολογίζεται ίσο με $-\frac{3\pi}{2}a^2$. (Το $-$ προκύπτει λόγω αντίθετης φοράς.)

57. Βρείτε μια εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $x = 2u$, $y = u^2 + v$, $z = v^2$ στο σημείο $(0, 1, 1)$.

Λύση: Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2u & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (4uv, -4v, 2).$$

Στο σημείο $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ αντιστοιχεί το $(u, v) = (0, 1)$. Άρα στο σημείο $(0, 1, 1)$ της επιφάνειας το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι το

$$(0, -4, 2).$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι η

$$0 \cdot (x - 0) + (-4) \cdot (y - 1) + 2 \cdot (z - 1) = 0$$

ή, ισοδύναμα, $2y - z = 1$.

58. (a) Βρείτε έναν τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο στην επιφάνεια $x = h(y, z)$.

(b) Βρείτε ανάλογο τύπο για την $y = k(x, z)$.

Λύση: (a) Οι παράμετροι είναι τα y, z.

Το βασικό εξωτερικό γινόμενο στο σημείο $(h(y_0, z_0), y_0, z_0)$ είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0) & 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \Big(1, -\frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0), -\frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0)\Big).$$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο ίδιο σημείο είναι η

$$1 \cdot (x - h(y_0, z_0)) + \Big(- \frac{\partial h}{\partial y}(y_0, z_0)\Big) \cdot (y - y_0) + \Big(- \frac{\partial h}{\partial z}(y_0, z_0)\Big) \cdot (z - z_0) = 0.$$

(b) Ομοίως.

59. Έστω $\vec{\Phi}(u, v) = (u - v, u + v, u)$ και D ο μοναδιαίος δίσκος στο uv-επίπεδο. Βρείτε το εμβαδό της $\vec{\Phi}(D)$.

Λύση: Το (u, v) διατρέχει τον δίσκο D που καθορίζεται από την $u^2 + v^2 \leq 1$. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, 2).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\sqrt{6} \iint_D dudv = \pi\sqrt{6}.$$

60. Βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

Λύση: Το z εκφράζεται συναρτήσει των x, y ως

$$z = f(x, y) = 1 - x - y$$

και το (x, y) διατρέχει το ελλειπτικό χωρίο D που καθορίζεται από την $x^2 + 2y^2 \leq 1$. Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\sqrt{3} \iint_D dxdy = \pi\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

61. Αν $Q(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y-1}{(x-3)^2+(y-1)^2}$ και $P(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{(x-3)}{(x-3)^2+(y-1)^2}$, βρείτε όλες τις πιθανές τιμές του επικαμπυλίου ολοκληρώματος

$$\oint_C Q\,dx + P\,dy,$$

όπου C είναι καμπύλη Jordan της οποίας η τροχιά περιέχεται στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0), (3, 1)\}$.

Λύση: Έστω ότι η C έχει την θετική φορά της.

Θεωρούμε τις

$$Q_1(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad P_1(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

και τις

$$Q_2(x, y) = -\frac{y - 1}{(x - 3)^2 + (y - 1)^2}, \qquad P_2(x, y) = \frac{(x - 3)}{(x - 3)^2 + (y - 1)^2}.$$

Τότε, προφανώς, $Q = Q_1 + Q_2$ και $P = P_1 + P_2$.

Γνωρίζουμε ότι
$$\frac{\partial Q_1}{\partial y} = \frac{\partial P_1}{\partial x}$$
στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και, ομοίως, αποδεικνύεται ότι
$$\frac{\partial Q_2}{\partial y} = \frac{\partial P_2}{\partial x}$$
στο σύνολο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(3,1)\}$.

Έχουμε αποδείξει ότι, αν η C περιέχει το $(0,0)$ στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy = 2\pi$$
και, αν δεν περιέχει το $(0,0)$ στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy = 0.$$
Ομοίως αποδεικνύεται ότι, αν η C περιέχει το $(3,1)$ στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi$$
και, αν δεν περιέχει το $(3,1)$ στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 0.$$
Άρα, αν η C περιέχει και τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi + 2\pi = 4\pi,$$
αν περιέχει ένα μόνο από τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 2\pi$$
και αν δεν περιέχει κανένα από τα δυο σημεία στο εσωτερικό της, τότε
$$\oint_C Q\,dx + P\,dy = \oint_C Q_1\,dx + P_1\,dy + \oint_C Q_2\,dx + P_2\,dy = 0.$$
Άρα οι πιθανές τιμές του ολοκληρώματος είναι οι $0, 2\pi, 4\pi$ και οι αντίθετές τους (όταν η C αλλάξει φορά).

62. Έστω S μια επίπεδη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το επίπεδο που την περιέχει να μην είναι παράλληλο με κανέναν από τους τρεις άξονες συντεταγμένων. Έστω S_z, S_x και S_y οι κάθετες προβολές της S στο xy-επίπεδο, στο yz-επίπεδο και στο xz-επίπεδο αντιστοίχως. Αποδείξτε ότι
$$\text{εμβ}(S) = \sqrt{(\text{εμβ}(S_z))^2 + (\text{εμβ}(S_x))^2 + (\text{εμβ}(S_y))^2}.$$
Λύση: Έστω $ax + by + cz = d$ η εξίσωση του επιπέδου. Επειδή δεν είναι παράλληλο με κανέναν από τους άξονες συντεταγμένων, είναι $a \neq 0$, $b \neq 0$ και $c \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι
$$\text{εμβ}(S) = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{|c|}\,\text{εμβ}(S_z).$$
Θεωρώντας και τις άλλες δυο παρόμοιες ισότητες, υψώνοντάς τες στο τετράγωνο και αθροίζοντας, βρίσκουμε τον ζητούμενο τύπο.

63. Υπολογίστε το εμβαδό του τμήματος της επιφάνειας με εξίσωση $z^2 = 2xy$ το οποίο βρίσκεται πάνω από το πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου και περιορίζεται από τα επίπεδα με εξισώσεις $x = 2$ και $y = 1$.

Λύση: Επειδή η επιφάνεια είναι *πάνω* από το xy-επίπεδο, είναι $z \geq 0$ για κάθε σημείο (x, y, z) πάνω της. Άρα μια παραμετρική αναπαράσταση είναι η

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{2xy}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει το τετράγωνο D του xy-επιπέδου που περιγράφεται από τις

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \sqrt{\frac{y}{2x}} \\ 0 & 1 & \sqrt{\frac{x}{2y}} \end{vmatrix} = \Big(-\sqrt{\frac{y}{2x}}, -\sqrt{\frac{x}{2y}}, 1 \Big).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\iint\limits_D \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dxdy = \int_0^2 \Big(\int_0^1 \frac{x+y}{\sqrt{2xy}}\, dy \Big)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^2 x \Big(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1+t}{\sqrt{t}}\, dt \Big)\, dx = 4.$$

64. Υπολογίστε το εμβαδό της επιφάνειας με παραμετρική εξίσωση

$$\vec{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2), \qquad 0 \leq u \leq 4,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Λύση: Το βασικό εξωτερικό γινόμενο είναι ίσο με

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos v & \sin v & 2u \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-2u^2 \cos v, -2u^2 \sin v, u).$$

Άρα το εμβαδό είναι ίσο με

$$\begin{aligned} \int_0^4 \Big(\int_0^{2\pi} \sqrt{4u^4 + u^2}\, dv \Big)\, du &= 2\pi \int_0^4 \sqrt{4u^4 + u^2}\, du \\ &= 2\pi \int_0^4 u\sqrt{4u^2 + 1}\, du = \frac{\pi}{6}(65^{\frac{3}{2}} - 1). \end{aligned}$$

65. Υπολογίστε το $\iint_S z\, dA$, όπου S είναι το άνω ημισφαίριο ακτίνας a, δηλαδή το σύνολο των (x, y, z) με $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

Λύση: Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq a^2$. Τότε

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, \vec{r}(x, y)$$

και

$$\Big\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \Big\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Άρα

$$\iint\limits_S z\, dA = \iint\limits_T \frac{az}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy = a \iint\limits_T dxdy = a\, \text{εμβ}(T) = \pi a^3.$$

66. Υπολογίστε το $\iint_S xyz\,dA$, όπου S είναι το τρίγωνο με κορυφές τα $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(0,1,1)$.

Λύση: Θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ και $(0,1,1)$. Ένας τρόπος είναι να βρούμε συντελεστές a,b,c,d ώστε τα τρία σημεία να ικανοποιούν την $ax+by+cz=d$. Καταλήγουμε στις $a=d$, $2b=d$, $b+c=d$, οπότε παίρνουμε $a=d=2$ και $b=c=1$ και βρίσκουμε την εξίσωση $2x+y+z=2$. Ένας δεύτερος τρόπος είναι να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό θα είναι κάθετο στα διανύσματα $(0,1,1)-(1,0,0)=(-1,1,1)$ και $(0,1,1)-(0,2,0)=(0,-1,1)$. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το εξωτερικό γινόμενο $(-1,1,1)\times(0,-1,1)=(2,1,1)$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $2x+y+z=d$ και βρίσκουμε $d=2$ χρησιμοποιώντας ένα από τα τρία σημεία που ανήκουν στο επίπεδο.

Τώρα η παραμετρική αναπαράσταση γράφεται

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,2-2x-y).$$

Το παραμετρικό χωρίο T είναι η κατακόρυφη προβολή της τριγωνικής επιφάνειας S στο xy-επίπεδο. Αυτή είναι η τριγωνική επιφάνεια στο xy-επίπεδο με κορυφές τις προβολές των κορυφών της S, δηλαδή τα σημεία $(1,0)$, $(0,2)$ και $(0,1)$. Έχουμε

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=(2,1,1)$$

και

$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right\|=\sqrt{6}.$$

Άρα

$$\iint\limits_S xyz\,dA=\sqrt{6}\iint\limits_T xy(2-2x-y)\,dxdy.$$

Τώρα, το χωρίο T στο xy-επίπεδο μπορεί να περιγραφεί από τις ανισότητες: $0\le x\le 1$ και $1-x\le y\le 2-2x$. Άρα

$$\iint\limits_S xyz\,dA=\int_0^1\Big(\int_{1-x}^{2-2x} xy(2-2x-y)\,dy\Big)\,dx=\frac{1}{30}.$$

67. Υπολογίστε το $\iint_S z\,dA$, όπου S είναι η επιφάνεια $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2\le 1$.

Λύση: Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,x^2+y^2)$$

με παραμετρικό χωρίο T τον δίσκο στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2+y^2\le 1$. Έχουμε

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=(-2x,-2y,1)$$

και

$$\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\right\|=\sqrt{4x^2+4y^2+1}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\iint\limits_S z\,dA&=\iint\limits_T (x^2+y^2)\sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dxdy=\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^1 r^3\sqrt{4r^2+1}\,dr\Big)\,d\theta\\&=\frac{25\sqrt{5}-1}{60}\pi.\end{aligned}$$

68. Έστω S η κλειστή επιφάνεια που αποτελείται από το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ και τη βάση του $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 0$. Έστω $\vec{E}$ το ηλεκτρικό πεδίο που ορίζεται από την $\vec{E}(x, y, z) = 2x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + 2z\,\vec{k}$. Βρείτε την ηλεκτρική ροή διαμέσου της S.

Λύση: Χωρίζουμε την S σε δυο επιφάνειες, το ημισφαίριο S_1 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}),$$

όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$, και το επίπεδο μέρος της, το S_2 με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}_2(x, y) = (x, y, 0),$$

όπου και πάλι το (x, y) διατρέχει τον ίδιο δίσκο T.

Τότε

$$\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,\vec{r}_1(x, y)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Το $\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y}$ έχει θετική z-συντεταγμένη, οπότε κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S. Άρα

$$\iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{T} (2x, 2y, 2z) \cdot (x, y, z) \frac{1}{z}\,dxdy = 2 \iint_{T} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\,dxdy = 2\pi^2,$$

όπου για τον υπολογισμό του τελευταίου διπλού ολοκληρώματος κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Ομοίως,

$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} \right\| = 1.$$

Το $\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y}$ έχει θετική z-συντεταγμένη, οπότε κατευθύνεται προς το εσωτερικό της S. Επομένως, θεωρούμε

$$\vec{\eta} = (0, 0, -1)$$

ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S. Άρα

$$\iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{T} (2x, 2y, 2z) \cdot (0, 0, -1)\,dxdy = -2 \iint_{T} z\,dxdy = 0$$

διότι είναι $z = 0$ στην S_2. Άρα

$$\iint_{S} \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\,\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = 2\pi^2.$$

69. Υπολογίστε το $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\,\vec{S}$, όπου S είναι η επιφάνεια $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$ και $\vec{F} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j} + x^3 y^2 z\,\vec{k}$. Θεωρήστε το $\vec{\eta}$ "προς τα πάνω".

Λύση: Υπολογίζουμε

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = (2x^3 yz, -3x^2 y^2 z, -2).$$

Η S έχει παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(x,y)=\Big(x,y,-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2-y^2}\Big),$$

όπου το (x,y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2+y^2\le 1$.

Τότε
$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\Big(-\frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2-y^2}},-\frac{y}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2-y^2}},1\Big)$$

και
$$\Big\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\Big\|=\frac{\sqrt{3-2x^2-2y^2}}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Το $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}$ έχει θετική z-συντεταγμένη. Άρα

$$\vec{\eta}=\Big(-\frac{x}{\sqrt{3-2x^2-2y^2}},-\frac{y}{\sqrt{3-2x^2-2y^2}},\frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{3-2x^2-2y^2}}\Big)$$

και
$$\iint\limits_S(\vec{\nabla}\times\vec{F})\cdot\vec{\eta}\,dA=\frac{1}{3}\iint\limits_T(-2x^4y+3x^2y^3-6)\,dxdy=-2\pi.$$

70. Βρείτε τη ροή του $\vec{\Phi}(x,y,z)=3xy^2\,\vec{i}+3x^2y\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}$ έξω από τη μοναδιαία σφαίρα.

Λύση: Παραμετρικοποιούμε την σφαίρα S με σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\vec{r}(\theta,\phi)=(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi),$$

όπου $(\theta,\phi)\in T=[0,2\pi]\times[0,\pi]$. Τότε

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}=-\sin\phi\,\vec{r}(\theta,\phi)$$

και
$$\Big\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\Big\|=\sin\phi.$$

Το $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}$ έχει κατεύθυνση προς το εσωτερικό της S, οπότε θεωρούμε

$$\vec{\eta}=\vec{r}(\theta,\phi).$$

Άρα
$$\iint\limits_S\vec{\Phi}\cdot\vec{\eta}\,dA=\iint\limits_T(6\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^5\phi+\cos^4\phi\sin\phi)\,d\theta d\phi=\frac{12}{5}\pi.$$

71. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dA$, όπου $\vec{F}(x,y,z)=\vec{i}+\vec{j}+z(x^2+y^2)^2\,\vec{k}$ και S είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le 1$.

Λύση: Χωρίζουμε την επιφάνεια S σε τρία μέρη. Το πρώτο είναι η κάτω πλευρά S_1 με παραμετρική αναπαράσταση
$$\vec{r}_1(x,y)=(x,y,0),$$

όπου το (x,y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2+y^2\le 1$. Τότε
$$\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}_1}{\partial y}=(0,0,1)$$

και
$$\left\|\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial y}\right\| = 1.$$
Θέλουμε το $\vec{\eta}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S, οπότε
$$\vec{\eta} = (0, 0, -1).$$
Άρα
$$\iint\limits_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = -\iint\limits_{T} z(x^2 + y^2)^2\, dxdy = 0,$$
διότι είναι $z = 0$ στην S_1.

Το δεύτερο μέρος είναι η πάνω πλευρά S_2 με παραμετρική αναπαράσταση
$$\vec{r}_2(x, y) = (x, y, 1),$$
όπου το (x, y) διατρέχει τον δίσκο T στο xy-επίπεδο που ορίζεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$. Τότε
$$\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y} = (0, 0, 1)$$
και
$$\left\|\frac{\partial \vec{r}_2}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}_2}{\partial y}\right\| = 1.$$
Θέλουμε το $\vec{\eta}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S, οπότε
$$\vec{\eta} = (0, 0, 1).$$
Άρα
$$\iint\limits_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint\limits_{T} z(x^2 + y^2)^2\, dxdy = \iint\limits_{T} (x^2 + y^2)^2\, dxdy = \frac{\pi}{3},$$
όπου χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες στο τελευταίο ολοκλήρωμα.

Το τρίτο μέρος είναι η κυλινδρική επιφάνεια S_3 με παραμετρική αναπαράσταση
$$\vec{r}_3(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z),$$
όπου $(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Τότε
$$\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial z} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$$
και
$$\left\|\frac{\partial \vec{r}_3}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}_3}{\partial z}\right\| = 1.$$
Θέλουμε το $\vec{\eta}$ να κατευθύνεται προς το εξωτερικό της S, οπότε
$$\vec{\eta} = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$
Άρα
$$\iint\limits_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta\Big)\, dz = 0.$$

72. Έστω S το ημισφαίριο $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, και $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, 0)$. Έστω $\vec{\eta}$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην S προς την εξωτερική μεριά της σφαίρας. Υπολογίστε το $\iint\limits_S \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dA$ χρησιμοποιώντας:

(α) την παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

(β) την παραμετρική αναπαράσταση $(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Λύση: (α) Υπολογίζουμε

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin\phi\, \vec{r}(\theta, \phi)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \right\| = \sin\phi.$$

Επειδή $\sin\phi \geq 0$, το $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ έχει κατεύθυνση προς την εσωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\vec{\eta}(\theta, \phi) = -\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} \|} = \vec{r}(\theta, \phi).$$

Αυτό, βέβαια, μπορούμε να το δούμε και ανεξάρτητα από τον παραπάνω υπολογισμό.

Τώρα, επειδή $\vec{\eta} = \vec{r}(\theta, \phi) = (x, y, z)$ για κάθε $(x, y, z) \in S$,

$$\vec{f} \cdot \vec{\eta} = (x, y, 0) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2 = \sin^2\phi,$$

οπότε

$$\iint\limits_S \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dA = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\phi \sin\phi\, d\phi d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

(β) Τώρα

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, \vec{r}(x, y)$$

και

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Το $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\vec{\eta}(x, y) = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \|} = \vec{r}(x, y).$$

Πάλι

$$\vec{f} \cdot \vec{\eta} = (x, y, 0) \cdot (x, y, z) = x^2 + y^2,$$

οπότε

$$\iint\limits_S \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint\limits_{x^2 + y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dxdy = \frac{4\pi}{3}.$$

73. Έστω S η επίπεδη επιφάνεια της οποίας το σύνορο είναι το τρίγωνο με κορυφές $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$ και έστω $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$. Έστω $\vec{\eta}$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην S που έχουν μη αρνητική z-συντεταγμένη. Υπολογίστε το $\iint\limits_S \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dA$ χρησιμοποιώντας:

(α) την παραμετρική αναπαράσταση $\vec{r}(u,v) = (u+v, u-v, 1-2u)$.

(β) μια παραμετρική αναπαράσταση $(x, y, f(x,y))$.

Λύση: (α) Η συνάρτηση $\vec{r} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $\vec{r}(u,v) = (u+v, u-v, 1-2u)$ είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός και, επομένως, απεικονίζει γραμμικά σχήματα σε γραμμικά σχήματα. Εύκολα βρίσκουμε ότι $\vec{r}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (1,0,0)$, $\vec{r}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = (0,1,0)$ και $\vec{r}(0,0) = (0,0,1)$. Άρα η τριγωνική επιφάνεια T στον $\mathbb{R}^2$ με κορυφές $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ και $(0,0)$ απεικονίζεται μέσω της $\vec{r}$ στην τριγωνική επιφάνεια S στον $\mathbb{R}^3$.

Κατόπιν,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (-2,-2,-2)$$

και

$$\Big\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \Big\| = 2\sqrt{3}.$$

Το $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ έχει αρνητική z-συντεταγμένη, οπότε

$$\vec{\eta}(u,v) = -\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Επίσης,

$$\vec{f} \cdot \vec{\eta} = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

για κάθε $(x,y,z) \in S$, οπότε

$$\iint\limits_S \vec{f} \cdot \vec{\eta}\, dA = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint\limits_T 2\sqrt{3}\, du dv = 2\, \text{εμβ}(T) = \frac{1}{2}.$$

(β) Εύκολα βλέπουμε ότι το επίπεδο που περιέχει τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(0,0,1)$ έχει εξίσωση $x+y+z=1$. Ο πρώτος τρόπος είναι να βρούμε συντελεστές a,b,c,d ώστε τα τρία σημεία να ικανοποιούν την $ax+by+cz=d$. Καταλήγουμε στις $a=d$, $b=d$, $c=d$, οπότε παίρνουμε $a=b=c=d=1$. Ο δεύτερος τρόπος είναι να βρούμε ένα κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο. Το διάνυσμα αυτό θα είναι κάθετο στα διανύσματα $(0,0,1)-(1,0,0) = (-1,0,1)$ και $(0,0,1)-(0,1,0) = (0,-1,1)$. Ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το εξωτερικό γινόμενο $(-1,0,1) \times (0,-1,1) = (1,1,1)$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $x+y+z=d$ και βρίσκουμε $d=1$ χρησιμοποιώντας ένα από τα τρία σημεία που ανήκουν στο επίπεδο.

Τώρα η παραμετρική αναπαράσταση γράφεται συγκεκριμένα

$$\vec{r}(x,y) = (x, y, 1-x-y).$$

Το παραμετρικό χωρίο T είναι η κατακόρυφη προβολή της S στο xy-επίπεδο. Αυτή είναι η τριγωνική επιφάνεια στο xy-επίπεδο με κορυφές τις προβολές των κορυφών της S, δηλαδή τα σημεία $(1,0)$, $(0,1)$ και $(0,0)$. Έχουμε

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (1,1,1)$$

και

$$\Big\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \Big\| = \sqrt{3}.$$

Το $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ έχει θετική z-συντεταγμένη, οπότε

$$\vec{\eta}(x,y) = -\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}}{\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Όπως στο (α),

$$\vec{f}\cdot\vec{\eta}=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

για κάθε $(x,y,z)\in S$, οπότε

$$\iint\limits_{S}\vec{f}\cdot\vec{\eta}\,dA=\frac{1}{\sqrt{3}}\iint\limits_{T}\sqrt{3}\,dudv=\text{εμβ}(T)=\frac{1}{2}.$$

74. Έστω S μια επιφάνεια παραμετρικοποιημένη με την εξίσωση $z=f(x,y)$, όπου το (x,y) διατρέχει ένα χωρίο $T\subseteq\mathbb{R}^2$, την προβολή της S στο xy-επίπεδο. Έστω $\vec{f}=(P,Q,R)$ και έστω $\vec{\eta}$ τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην S που έχουν μη αρνητική z-συντεταγμένη. Αποδείξτε ότι

$$\iint\limits_{S}\vec{f}\cdot\vec{\eta}\,dA=\iint\limits_{T}\Big(-P\,\frac{\partial f}{\partial x}-Q\,\frac{\partial f}{\partial y}+R\Big)\,dxdy,$$

όπου οι P, Q και R υπολογίζονται στο $(x,y,f(x,y))$.

Λύση: Η παραμετρική αναπαράσταση είναι

$$\vec{r}(x,y)=(x,y,f(x,y)),$$

οπότε βρίσκουμε

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\Big(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\Big)$$

και

$$\Big\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\Big\|=\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2}.$$

Το $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}$ έχει μη αρνητική z-συντεταγμένη, οπότε

$$\vec{\eta}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}\Big(-\frac{\partial f}{\partial x},-\frac{\partial f}{\partial y},1\Big).$$

Τώρα

$$\vec{f}\cdot\vec{\eta}=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\partial f}{\partial x})^2+(\frac{\partial f}{\partial y})^2}}\Big(-P\,\frac{\partial f}{\partial x}-Q\,\frac{\partial f}{\partial y}+R\Big)$$

και

$$dA=\Big\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\Big\|\,dxdy=\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2}\,dxdy,$$

οπότε

$$\iint\limits_{S}\vec{f}\cdot\vec{\eta}\,dA=\iint\limits_{T}\Big(-P\,\frac{\partial f}{\partial x}-Q\,\frac{\partial f}{\partial y}+R\Big)\,dxdy.$$

75. Έστω S η επιφάνεια της προηγούμενης άσκησης και έστω ϕ ένα αριθμητικό πεδίο. Αποδείξτε ότι:

$$\iint\limits_{S}\phi(x,y,z)\,dA=\iint\limits_{T}\phi(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2+\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)^2}\,dxdy,$$

$$\iint\limits_{S}\phi(x,y,z)\,dy\wedge dz=-\iint\limits_{T}\phi(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy,$$

$$\iint\limits_S \phi(x,y,z)\,dz\wedge dx = -\iint\limits_T \phi(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}\,dxdy.$$

Λύση: Η πρώτη ισότητα είναι προφανής. Για την δεύτερη υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} dy\wedge dz &= \frac{\partial(y,z)}{\partial(x,y)}\,dxdy = \Big(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\Big)\,dxdy = \Big(0\cdot\frac{\partial f}{\partial y} - 1\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\Big)\,dxdy \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy \end{aligned}$$

οπότε

$$\iint\limits_S \phi(x,y,z)\,dy\wedge dz = -\iint\limits_T \phi(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial x}\,dxdy.$$

Η τρίτη ισότητα αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

76. Έστω S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=r^2$. Υπολογίστε το

$$\iint\limits_S xz\,dy\wedge dz + yz\,dz\wedge dx + x^2\,dx\wedge dy.$$

Επιλέξτε παραμετρικοποίηση έτσι ώστε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στην S να είναι προς την εξωτερική μεριά της S.

Λύση: Επειδή η παραμετρικοποίηση με σφαιρικές συντεταγμένες καταλήγει σε κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της σφαίρας, θεωρούμε την παραλλαγή

$$\vec{r}(\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, -r\cos\phi)$$

με $(\theta,\phi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$. (Έχουμε αλλάξει την z-συντεταγμένη των σφαιρικών συντεταγμένων: έχουμε κάνει μια ανάκλαση της σφαίρας ως προς το xy-επίπεδο.) Τότε

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = r\sin\phi\,\vec{r}(\theta,\phi)$$

και

$$\Big\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\Big\| = r^2\sin\phi.$$

Επειδή $\sin\phi\geq 0$, το $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}$ έχει κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της σφαίρας, οπότε

$$\vec{\eta}(\theta,\phi) = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}}{\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\|} = \frac{1}{r}\,\vec{r}(\theta,\phi).$$

Τώρα, με $x=r\cos\theta\sin\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$ και $z=-r\cos\phi$ υπολογίζουμε τις Ιακωβιανές ορίζουσες

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = -r^2\sin\phi\cos\phi,\quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = r^2\cos\theta\sin^2\phi,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = r^2\sin\theta\sin^2\phi.$$

Τέλος, βρίσκουμε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι ίσο με

$$-r^4\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\phi\cos\phi(1+\cos^2\theta)\,d\phi d\theta = 0.$$

77. Έστω S η επιφάνεια πάνω στον κώνο $x^2 + y^2 = z^2$, $z \geq 0$, η οποία αποκόπτεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2x$. Υπολογίστε το

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dA.$$

Λύση: Θεωρούμε την παραμετρικοποίηση

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Ο κύλινδρος $x^2 + y^2 = 2x$ είναι κάθετος προς το xy-επίπεδο, οπότε το παραμετρικό χωρίο T, δηλαδή η κατακόρυφη προβολή της S στο xy-επίπεδο, είναι ο δίσκος του xy-επιπέδου με την ίδια εξίσωση. Η εξίσωση γράφεται $(x-1)^2 + y^2 = 1$, οπότε το T είναι ο δίσκος με κέντρο το $(1, 0)$ και ακτίνα 1. Έχουμε

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \Big(- \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, 1 \Big)$$

οπότε

$$\Big\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \Big\| = \sqrt{2}.$$

Για κάθε $(x, y, z) \in S$ ισχύει $x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1 = x^4 - y^4 + (y^2 - x^2)z^2 + 1 = x^4 - y^4 + (y^2 - x^2)(x^2 + y^2) + 1 = 1$, οπότε

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\, dA = \sqrt{2} \iint_T dxdy = \sqrt{2}\,\text{εμβ}(T) = \sqrt{2}\,\pi.$$

78. Λύστε με δεύτερο τρόπο την άσκηση 69, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Stokes.

Λύση: Η συνοριακή καμπύλη C της S βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο και έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Επειδή τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στην S έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω, η φορά διαγραφής της C στο τύπο του Stokes είναι η θετική της φορά στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C με

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta, \quad z = 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

οπότε

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\,\vec{S} = \oint_C y\, dx - x\, dy + zx^3y^2\, dz = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = -2\pi.$$

79. Υπολογίστε το $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\,\vec{S}$, όπου S είναι η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \leq 0$ και $\vec{F} = (x^2 + y - 4)\,\vec{i} + 3xy\,\vec{j} + (2xz + z^2)\,\vec{k}$. Θεωρήστε το $\vec{\eta}$ "προς τα πάνω".

Λύση: Η συνοριακή καμπύλη C της S βρίσκεται πάνω στο xy-επίπεδο και έχει εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$. Τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στην S έχουν κατεύθυνση προς τα πάνω, οπότε η φορά διαγραφής της C στο τύπο του Stokes είναι η θετική της φορά στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C με

$$x = 4\cos\theta, \quad y = 4\sin\theta, \quad z = 0, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

οπότε

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\,\vec{S} = \oint_C (x^2 + y - 4)\, dx + 3xy\, dy + (2xz + z^2)\, dz = \ldots = -16\pi.$$

80. Υπολογίστε το $\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$, όπου S είναι το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ και $\vec{F} = \sin(xy)\,\vec{i} + e^x\,\vec{j} - yz\,\vec{k}$.

Λύση: Χωρίζουμε την επιφάνεια S σε δυο επιφάνειες S_1 και S_2 με τον κύκλο C με εξίσωση $x^2 + y^2 = 10$ στο xy-επίπεδο, ο οποίος είναι η τομή της S με το xy-επίπεδο. Η συνοριακή καμπύλη και των δυο επιφανειών είναι ο κύκλος C. Η S_1 είναι το μέρος της S που βρίσκεται πάνω από το xy-επίπεδο και η S_2 είναι το μέρος της S που βρίσκεται κάτω από το xy-επίπεδο. Αν $\vec{\eta}$ μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς την εξωτερική μεριά της S, τότε η φορά διαγραφής της C ως συνοριακής καμπύλης της S_1 είναι η θετική στο xy-επίπεδο ενώ η φορά διαγραφής της C ως συνοριακής καμπύλης της S_2 είναι η αρνητική στο xy-επίπεδο. Άρα, αν θεωρήσουμε την C με την θετική (στο xy-επίπεδο) φορά διαγραφής της, τότε, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes, είναι

$$\iint\limits_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds - \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds = 0.$$

81. Θεωρούμε δυο επιφάνειες S_1, S_2 με το ίδιο σύνορο ∂S. περιγράψτε τον προσανατολισμό που πρέπει να έχουν οι S_1, S_2 για να ισχύει ότι

$$\iint_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

Λύση: Έστω ότι οι δυο επιφάνειες σχηματίζουν μια συνολική επιφάνεια η οποία είναι η συνοριακή επιφάνεια ενός ανοικτού, συνεκτικού συνόλου Ω στον $\mathbb{R}^3$ (μια πολύ συνηθισμένη περίπτωση). Θεωρούμε τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στα σημεία της S_1 να κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στα σημεία της S_2 να κατευθύνονται προς το εσωτερικό του Ω. Αν C είναι η κοινή συνοριακή καμπύλη των δυο επιφανειών, τότε η φορά διαγραφής της είναι η ίδια και ως συνοριακή καμπύλη της S_1 και ως συνοριακή καμπύλη της S_2. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes,

$$\iint\limits_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds = \iint\limits_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

82. Αποδείξτε (χωρίς αυστηρότητα) ότι αν S είναι μια κλειστή επιφάνεια, τότε

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

(Κλειστή επιφάνεια είναι αυτή που αποτελεί το σύνορο ενός χωρίου στον χώρο.)

Λύση: Χωρίζουμε την S σε δυο επιφάνειες S_1 και S_2 με κατάλληλη καμπύλη C η οποία βρίσκεται πάνω στην S (όπως, για παράδειγμα, στην άσκηση 80 με το ελλειψοειδές). Έστω ότι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στα σημεία της S κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω, όπου Ω είναι το στερεό που περικλείεται από την S. Τώρα, τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στα σημεία της S_1 κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω αλλά και τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα $\vec{\eta}$ στα σημεία της S_2 κατευθύνονται προς το εξωτερικό του Ω. Τότε η φορά διαγραφής της C ως συνοριακή καμπύλη της S_1 είναι αντίθετη από την φορά διαγραφής της ως συνοριακή καμπύλη της S_2. Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Stokes,

$$\iint\limits_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{S_1} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint\limits_{S_2} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds - \oint\limits_C \vec{F} \cdot \vec{T}\,ds = 0.$$

83. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να υπολογίσετε το $\iint\limits_S (\operatorname{curl} \vec{f}) \cdot \vec{\eta}\,dA$ αν $\vec{f} = (y, z, x)$, S είναι το μέρος του παραβολοειδούς $z = 1 - x^2 - y^2$ με $z \geq 0$ και $\vec{\eta}$ είναι τα

μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην S με μη αρνητική z-συντεταγμένη.

Λύση: Η συνοριακή καμπύλη C της επιφάνειας S είναι ο κύκλος στο xy-επίπεδο με εξίσωση $x^2+y^2=1$ και η φορά διαγραφής της C στον τύπο του Stokes είναι η θετική φορά της στο xy-επίπεδο. Επομένως, παραμετρικοποιούμε την C ως εξής:

$$x=\cos\theta, \quad y=\sin\theta, \quad z=0, \qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

Τότε

$$\iint_S (\operatorname{curl}\vec{f})\cdot\vec{\eta}\,dA = \oint_C y\,dx+z\,dy+x\,dz = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\,d\theta = -\pi.$$

84. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να υπολογίσετε το $\iint_S (\operatorname{curl}\vec{f})\cdot\vec{\eta}\,dA$ αν $\vec{f}=(y-z,yz,-xz)$, S είναι η ένωση των πέντε εδρών του κύβου $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$, $0\le z\le 2$ που δεν περιέχονται στο xy-επίπεδο και $\vec{\eta}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στην S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου.

Λύση: Η συνοριακή καμπύλη C της επιφάνειας S αποτελείται από τις τέσσερις πλευρές του τετραγώνου στο xy-επίπεδο που ορίζεται από τις $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$. Η φορά διαγραφής της C στον τύπο του Stokes είναι η θετική φορά της στο xy-επίπεδο. Έστω C_1 η πλευρά με $x=t$, $(0\le t\le 2)$, $y=0$, $z=0$, έστω C_2 η πλευρά με $x=2$, $y=t$, $(0\le t\le 2)$, $z=0$, έστω C_3 η πλευρά με $x=2-t$, $(0\le t\le 2)$, $y=2$, $z=0$ και έστω C_4 η πλευρά με $x=0$, $y=2-t$, $(0\le t\le 2)$, $z=0$. Τότε

$$\begin{aligned}\iint_S (\operatorname{curl}\vec{f})\cdot\vec{\eta}\,dA &= \oint_{C_1}(y-z)\,dx+yz\,dy-xz\,dz+\oint_{C_2}(y-z)\,dx+yz\,dy-xz\,dz\\ &\quad+\oint_{C_3}(y-z)\,dx+yz\,dy-xz\,dz+\oint_{C_4}(y-z)\,dx+yz\,dy-xz\,dz\\ &=0+0-\int_0^2 2\,dt+0=-4.\end{aligned}$$

85. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να αποδείξετε ότι

$$\oint_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=0,$$

όπου C είναι η τομή του κυλίνδρου $x^2+y^2=2y$ και του επιπέδου $y=z$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι, αν $\vec{f}=(y+z,z+x,x+y)$, τότε $\operatorname{curl}\vec{f}=\vec{0}$. Θεωρούμε, λοιπόν, οποιαδήποτε επιφάνεια S με συνοριακή καμπύλη την C (για παράδειγμα, την επίπεδη ελλειπτική επιφάνεια που βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $y=z$ και περιορίζεται μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2=2y$) και τότε

$$\oint_C (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz=\iint_S (\operatorname{curl}\vec{f})\cdot\vec{\eta}\,dA=0.$$

86. Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα του Stokes για να αποδείξετε ότι

$$\oint_C (y^2+z^2)\,dx+(z^2+x^2)\,dy+(x^2+y^2)\,dz=2\pi ab^2,$$

όπου C είναι η τομή του ημισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z > 0$, και του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 2bx$, όπου $0 < b < a$.

Λύση: Η $\vec{f} = (y^2 + z^2, z^2 + x^2, x^2 + y^2)$ έχει $\operatorname{curl} \vec{f} = 2(y - z, z - x, x - y)$ και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{\eta}$ στο σημείο (x, y, z) της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ είναι το $\frac{1}{a}(x - a, y, z)$, οπότε

$$(\operatorname{curl} \vec{f}) \cdot \vec{\eta} = 2z - 2y.$$

Θεωρούμε την επιφάνεια S η οποία είναι το μέρος του ημισφαιρίου $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $z > 0$, που περιορίζεται μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 2bx$. Η συνοριακή καμπύλη της S είναι η C. Από το Θεώρημα του Stokes:

$$\oint\limits_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz = \iint\limits_S (\operatorname{curl} \vec{f}) \cdot \vec{\eta}\, dA = 2 \iint\limits_S (z - y)\, dA.$$

Παραμετρικοποιούμε την S με παραμετρικό χωρίο T την κατακόρυφη προβολή της στο xy-επίπεδο, δηλαδή τον δίσκο $x^2 + y^2 \leq 2bx$, και με παραμετρική αναπαράσταση

$$\vec{r}(x, y) = (x, y, z) = (x, y, \sqrt{2ax - x^2 - y^2}).$$

Τότε

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right\| = \frac{a}{z}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}\oint\limits_C (y^2 + z^2)\, dx + (z^2 + x^2)\, dy + (x^2 + y^2)\, dz &= 2a \iint\limits_T \Big(1 - \frac{y}{z}\Big)\, dxdy \\ &= 2a \iint\limits_T dxdy = 2a\, \text{εμβ}\,(T) = 2\pi a b^2.\end{aligned}$$

87. Έστω $\vec{F} = x^3\, \vec{i} + y^3\, \vec{j} + z^3\, \vec{k}$. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ πάνω στη μοναδιαία σφαίρα.

    Λύση: Έστω S η μοναδιαία σφαίρα που ορίζεται από την $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ στον $\mathbb{R}^3$ και Ω η μοναδιαία μπάλα που ορίζεται από την $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Αν $\vec{\eta}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω, τότε από το θεώρημα του Gauss συνεπάγεται

    $$\begin{aligned}\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA &= \iiint\limits_\Omega \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dxdydz = 3 \iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz \\ &= 3 \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} r^4 \sin\phi\, d\phi \Big) d\theta \Big) dr = \frac{12\pi}{5},\end{aligned}$$

    όπου για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος στο Ω χρησιμοποιήσαμε σφαιρικές συντεταγμένες.

88. Υπολογίστε το $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\,\vec{S}$, όπου $\vec{F} = x\, \vec{i} + y\, \vec{j} + z\, \vec{k}$ και Ω είναι ο μοναδιαίος κύβος στο πρώτο ογδοημόριο. Κάντε απ' ευθείας τον υπολογισμό και επαλήθευση με τη βοήθεια του Θεωρήματος Απόκλισης.

    Λύση: Απ' ευθείας υπολογισμός. Η συνοριακή επιφάνεια $\partial\Omega$ του κύβου Ω αποτελείται από έξι επιφάνειες $S_1, \ldots, S_6$. Η S_1 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x, y, 0)$ με $0 \leq x \leq$

$1, 0 \leq y \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (0, 0, -1)$, οπότε

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_1} 0\, dA = 0.$$

Η S_2 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x, y, 1)$ με $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (0, 0, 1)$, οπότε

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_2} dA = \text{εμβ}\,(S_2) = 1.$$

Η S_3 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x, 0, z)$ με $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (0, -1, 0)$, οπότε

$$\iint_{S_3} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_3} 0\, dA = 0.$$

Η S_4 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(x, 1, z)$ με $0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (0, 1, 0)$, οπότε

$$\iint_{S_4} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_4} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_4} dA = \text{εμβ}\,(S_4) = 1.$$

Η S_5 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(0, y, z)$ με $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (-1, 0, 0)$, οπότε

$$\iint_{S_5} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_5} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_5} 0\, dA = 0.$$

Τέλος, η S_6 έχει παραμετρική αναπαράσταση $(1, y, z)$ με $0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ και μοναδιαία κάθετα διανύσματα με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του κύβου τα $\vec{\eta} = (1, 0, 0)$, οπότε

$$\iint_{S_6} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{S_6} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iint_{S_6} dA = \text{εμβ}\,(S_6) = 1.$$

Άρα

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3.$$

Υπολογισμός με το Θεώρημα Απόκλισης. Είναι

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dxdydz = 3 \iiint_{\Omega} dxdydz = 3\, \text{όγκος}\,(\Omega) = 3.$$

89. Έστω $\vec{F} = y\,\vec{i} + z\,\vec{j} + xz\,\vec{k}$. Υπολογίστε το $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\,\vec{S}$, όπου Ω είναι το χωρίο $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

    Λύση: Η προβολή του Ω στο xy-επίπεδο είναι ο μοναδιαίος δίσκος T που περιγράφεται από την $x^2 + y^2 \leq 1$ και, για κάθε (x, y) στο T, είναι $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Άρα

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\,\vec{S} &= \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{\eta}\, dA = \iiint_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F}\, dxdydz = \iiint_{\Omega} x\, dxdydz \\ &= \iint_{T} \Big(\int_{x^2+y^2}^{1} x\, dz \Big)\, dxdy = \iint_{T} x(1 - x^2 - y^2)\, dxdy = 0.\end{aligned}$$

90. Υπολογίστε το $\iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$, όπου $\vec{F} = 3xy^2\,\vec{i} + 3x^2y\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}$ και S είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας.

Λύση: Έστω Ω η μοναδιαία μπάλα που ορίζεται από την $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ οπότε η μοναδιαία σφαίρα $S = \partial\Omega$ ορίζεται από την $x^2+y^2+z^2 = 1$. Αν $\vec{\eta}$ είναι τα μοναδιαία κάθετα διανύσματα στα σημεία της S με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του Ω, τότε από το Θεώρημα του Gauss συνεπάγεται

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dA = \iiint\limits_{\Omega} \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdydz = 3\iiint\limits_{\Omega}(y^2+x^2+z^2)\,dxdydz$$

$$= 3\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi}\Big(\int_0^{\pi} r^4\sin\phi\,d\phi\Big)d\theta\Big)dr = \frac{12\pi}{5}.$$

91. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dA$, όπου $\vec{F}(x,y,z) = \vec{i}+\vec{j}+z(x^2+y^2)^2\,\vec{k}$ και Ω είναι ο κύλινδρος $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$.

Λύση: Η προβολή του κυλίνδρου S στο xy-επίπεδο είναι ο μοναδιαίος δίσκος T που περιγράφεται από την $x^2+y^2\leq 1$ και, για κάθε (x,y) στο T, είναι $0\leq z\leq 1$. Άρα

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dA = \iiint\limits_{S}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdydz = \iiint\limits_{S}(x^2+y^2)^2\,dxdydz$$

$$= \iint\limits_{T}\Big(\int_0^1 (x^2+y^2)^2\,dz\Big)\,dxdy = \iint\limits_{T}(x^2+y^2)^2\,dxdy$$

$$= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} r^5\,d\theta\Big)\,dr = \frac{\pi}{3},$$

όπου στο διπλό ολοκλήρωμα στον δίσκο T χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες.

92. Υποθέτουμε ότι το $\vec{F}$ εφάπτεται στην κλειστή επιφάνεια S ενός χωρίου Ω. Αποδείξτε ότι

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}\,dV = 0.$$

Λύση: Στα σημεία της επιφάνειας S ισχύει $\vec{F}\cdot\vec{\eta} = 0$, διότι το διάνυσμα $\vec{F}$ εφάπτεται της S και το διάνυσμα $\vec{\eta}$ είναι κάθετο στην S. Άρα

$$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint\limits_{\Omega}\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dxdydz = \iint\limits_{S}\vec{F}\cdot\vec{\eta}\,dA = \iint\limits_{S}0\,dA = 0.$$